6. La asociación lineal es **muy débil**: el tránsito explica solo el 2.3 % de la variación del ozono.

Ejercicio 7.6.5 ← volver

1. X: % de estrechamiento; Y: % de elevación; $n = 8$.
2. Sumas: $\sum x = 90$, $\sum y = 79$, $\sum x^2 = 1275$, $\sum y^2 = 995$, $\sum xy = 1125$.
3. $SS_{xx} = 1275 - \frac{90^2}{8} = 262.5$; $SS_{yy} = 995 - \frac{79^2}{8} = 214.875$; $SS_{xy} = 1125 - \frac{(90)(79)}{8} = 236.25$.
4. $r = \frac{236.25}{\sqrt{(262.5)(214.875)}} = \frac{236.25}{237.4967} = \mathbf{0.9948}$.
5. r muy cercano a 1: **sí** hay comportamiento lineal, directo y muy fuerte. La recta es $\hat{y} = -0.25 + 0.9x$.

Ejercicio 7.6.6 ← volver

1. X: horas de sueño (la que «influye»); Y: peso [kg]; $n = 10$.
2. Sumas: $\sum x = 75$, $\sum y = 613.5$, $\sum x^2 = 591$, $\sum y^2 = 40\,018.25$, $\sum xy = 4659$.
3. $SS_{xy} = 4659 - \frac{(75)(613.5)}{10} = 57.75$; $SS_{xx} = 591 - \frac{75^2}{10} = 28.5$; $SS_{yy} = 40\,018.25 - \frac{613.5^2}{10} = 2380.025$.
4. $r = \frac{57.75}{\sqrt{(28.5)(2380.025)}} = \frac{57.75}{260.4433} = \mathbf{0.2217}$.
5. r lejano a 1 ($r^2 = 0.049$): la relación lineal **no es buena**; no puede considerarse lineal.

Ejercicio 7.6.7 ← volver

1. a) $r = 0.9165$, cercano a 1: sí existe relación lineal. **Correcta.**
2. b) $\hat{y}(33.89) = 0.6012(33.89) + 11.291 = 31.666 \approx 31.67 = \bar{y}$: la recta pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$. **Correcta.**
3. c) Cov $= \frac{10\,794}{9} - \frac{305}{9} \cdot \frac{285}{9} = 1199.333 - 1073.148 = 126.185 > 0$. **Correcta.**
4. d) El coeficiente de determinación es $r^2 = 0.9165^2 = 0.84$; 0.9165 es r. **Incorrecta:** la respuesta es **d)**.

C.6 · Unidad 6 · Distribuciones muestrales: teorema del límite central, media muestral y ji cuadrada

2º final 2014-1, problema 6 b): la resolución obtiene $200(0.0708) = 14.16$ y concluye «serían 15 muestras». El entero más cercano es **14 muestras**.

1er final 2016-2, problema 6: la resolución agrega «con Excel, 0.1124». Con $z = 1.2143$ sin redondear, el valor exacto es **0.1123**. La respuesta con tabla, 0.1131, es correcta.

2º final 2018-1, problema 5 c): la resolución redondea $z = 2.1082$ a 2.1 y obtiene $1 - 0.9821 = 0.0179$. Con z a dos decimales, 2.11, el resultado es $1 - 0.9826 = \mathbf{0.0174}$ (valor exacto: 0.0175).

C.7 · Unidad 7 · Manejo de datos bivariados: recta de mínimos cuadrados, correlación y determinación

2º final 2014-1, problema 7: la ordenada aparece como 27.1858, calculada con la pendiente redondeada a 0.0213; el valor verificado es **27.1832**.

2º final 2016-2, problema 7:

- el valor 236.25 aparece rotulado como SS_{xx}; es SS_{xy} ($SS_{xx} = 262.5$);
- r aparece como 0.9947; el valor verificado, $236.25/237.4967 = 0.99475$, redondea a **0.9948**.

1er final 2013-1, problema 7: la resolución califica la relación a la vez de «relativamente fuerte» y de «muy ligera». Con $r = 0.858$ y $r^2 = 0.736$, la relación lineal es **fuerte**.

1er final 2017-1, problema 7: el enunciado habla de «9 probetas», pero la gráfica tiene **8 puntos**; la resolución usa $n = 8$.

2º final 2016-1, problema 7: la covariancia aparece como 126.037, calculada con las medias redondeadas (33.89 y 31.67); el valor verificado es **126.185**. La conclusión (covariancia positiva) no cambia.

1er final 2011-1, problema 6:

- la ordenada aparece como $\hat{\beta}_0 = 3.1741$, calculada con la pendiente redondeada a 0.854; el valor verificado es **3.1736**, el mismo que muestra la gráfica de la resolución;
- las respuestas a los incisos c) y d) aparecen rotuladas como b) y c).

2º final 2011-1, problema 6: la ordenada aparece como 1.6932, calculada con la pendiente redondeada a 0.0805; el valor verificado es **1.6939**.

2. $n = 64 \geq 30$: por el TLC, $\bar{X} \sim N\left(60,\ \frac{6^2}{64}\right)$, con $\sigma_{\bar{X}} = \frac{6}{8} = 0.75$.
3. $z = \frac{58-60}{0.75} = -2.6667 \to -2.67$.
4. $P(\bar{X} < 58) = F_Z(-2.67) = 1 - 0.9962 = \mathbf{0.0038}$: es muy poco probable.

Ejercicio 6.6.2 ← volver

1. X: tiempo por cordón, $\mu_X = 5$ min, $\sigma_X = 3$ min, distribución no especificada; $n = 40$.
2. Terminar antes de las 9:00 p.m. (180 min para 40 piezas) equivale a $\bar{X} < 4.5$.
3. $n = 40 \geq 30$: por el TLC, $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3}{\sqrt{40}} = 0.4743$.
4. $z = \frac{4.5-5}{0.4743} = -1.0541 \to -1.05$.
5. $P(\bar{X} < 4.5) = F_Z(-1.05) = 1 - 0.8531 = \mathbf{0.1469}$.

Ejercicio 6.6.3 ← volver

1. $\mu_X = 200\,000$, $\sigma_X = 100\,000$, $n = 30 \geq 30$: por el TLC, $\bar{X} \sim N\left(200\,000,\ \frac{100\,000^2}{30}\right)$.
2. $\sigma_{\bar{X}} = \frac{100\,000}{\sqrt{30}} = 18\,257.42$.
3. $z = \frac{175\,000-200\,000}{18\,257.42} = -1.3693 \to -1.37$.
4. $P(\bar{X} < 175\,000) = F_Z(-1.37) = 1 - 0.9147 = \mathbf{0.0853}$.

Ejercicio 6.6.4 ← volver

1. $\mu_X = 25\,000$, $\sigma_X = 2135$, $n = 100 \geq 30$: TLC.
2. $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2135}{10} = 213.5$.
3. $z = \frac{24\,500-25\,000}{213.5} = -2.3419 \to -2.34$.
4. $P(\bar{X} < 24\,500) = F_Z(-2.34) = 1 - 0.9904 = \mathbf{0.0096}$.

Ejercicio 6.6.5 ← volver

1. Población normal: $\bar{X} \sim N\left(2,\ \frac{0.05^2}{25}\right)$, con $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0.05}{5} = 0.01$ litros.
2. $z_a = \frac{1.99-2}{0.01} = -1$; $z_b = \frac{2-2}{0.01} = 0$.
3. $P(1.99 \leq \bar{X} \leq 2) = F_Z(0) - F_Z(-1) = 0.5 - 0.1587 = \mathbf{0.3413}$.

Ejercicio 6.6.6 ← volver

1. Población normal: $\bar{X} \sim N(106,\ \sigma^2_{\bar{X}})$, con $\sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = 2.4$.
2. $z = \frac{110-106}{2.4} = 1.6667 \to 1.67$.
3. $P(\bar{X} > 110) = 1 - F_Z(1.67) = 1 - 0.9525 = \mathbf{0.0475}$.

Ejercicio 6.6.7 ← volver

1. Población normal, $n = 10$, $\nu = 9$: $\frac{9S^2}{42.5} \sim \chi^2_{(9)}$.
2. Se pide $P(3.14 < S < 8.94) = P(3.14^2 < S^2 < 8.94^2)$.
3. Límites: $\frac{9(3.14)^2}{42.5} = 2.088$ y $\frac{9(8.94)^2}{42.5} = 16.925$.
4. En la tabla, fila $\nu = 9$: $\chi^2_{0.99,9} = 2.088$ y $\chi^2_{0.05,9} = 16.919 \approx 16.925$.
5. $P(2.088 < \chi^2 < 16.925) \approx 0.99 - 0.05 = \mathbf{0.94}$.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1 · Unidad 1 · Análisis estadístico de datos muestrales: tablas de frecuencias, tendencia central, dispersión y sesgo

Ejercicio 1.6.1 ← volver

1. Cada barra es una clase: $c = 2.9 - 2.6 = 0.3$; $n = 3 + 7 + 10 + 7 + 1 = 28$.
2. a) $\sum x_i f_i = 7.8 + 20.3 + 32 + 24.5 + 3.8 = 88.4$, así que $\bar{x} = \frac{88.4}{28} = \mathbf{3.157\ kg}$.
3. b) La barra más alta corresponde a la marca 3.2: $x_{mo} = \mathbf{3.2\ kg}$.
4. c) $\sum x_i^2 f_i = 281.74$ y $\frac{88.4^2}{28} = 279.091$; la diferencia es 2.649. $s^2 = \frac{2.649}{27} = \mathbf{0.0981\ kg^2}$.

Ejercicio 1.6.2 ← volver

1. Límites enteros: fronteras 196.5–216.5, ..., 296.5–316.5; $c = 20$; $n = 100$.
2. $\sum x_i f_i = 25\,350$, así que $\bar{x} = 253.5$.
3. $\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i = 42\,700$, $s^2 = \frac{42\,700}{99} = 431.313$ y $s = 20.768$.
4. $cv = \frac{20.768}{253.5} = \mathbf{0.0819} \leq 0.15$: datos **homogéneos**.

Ejercicio 1.6.3 ← volver

1. $c = 3$; marcas 4, 7, 10, 13, 16, 19; acumuladas 2, 5, 12, 21, 30, 35.
2. $\sum x_i f_i = 455$, así que $\bar{x} = 13$.
3. $\frac{n}{2} = 17.5$: clase 11.5–14.5, con $F_{ant} = 12$ y $f_{med} = 9$. $\tilde{x} = 11.5 + \frac{17.5-12}{9}(3) = \mathbf{13.333}$.
4. La frecuencia máxima, 9, aparece en las clases con marcas 13 y 16: la muestra es **bimodal**.
5. $\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i = 594$, $s^2 = \frac{594}{34} = 17.471$ y $s = 4.180$.
6. $\sum (x_i - \bar{x})^3 f_i = -972$, $m_3 = \frac{-972}{35} = -27.771$ y $a_3 = \frac{-27.771}{4.180^3} = \mathbf{-0.380}$.
7. La distribución **sí es sesgada**, con sesgo negativo: $\bar{x} = 13 < \tilde{x} = 13.333$.

Ejercicio 1.6.4 ← volver

1. a) Acumuladas: 2, 6, 9, 10. Ojiva: (0, 0), (10, 2), (20, 6), (30, 9), (40, 10).
2. b) Marcas 5, 15, 25, 35: $\bar{x} = \frac{5(2)+15(4)+25(3)+35(1)}{10} = \frac{180}{10} = \mathbf{18\ km}$.

Ejercicio 1.6.5 ← volver

1. Fronteras 0.5–4.5, 4.5–8.5, ..., 16.5–20.5; $c = 4$; marcas 2.5, 6.5, 10.5, 14.5, 18.5; acumuladas 14, 32, 44, 60, 80.
2. a) Ojiva: (0.5, 0), (4.5, 14), (8.5, 32), (12.5, 44), (16.5, 60), (20.5, 80).
3. b) $\sum x_i f_i = 880$, así que $\bar{x} = \mathbf{11}$.
4. $\frac{n}{2} = 40$: clase 8.5–12.5, con $F_{ant} = 32$ y $f_{med} = 12$. $\tilde{x} = 8.5 + \frac{40-32}{12}(4) = \mathbf{11.167}$.
5. Clase modal 16.5–20.5 ($f = 20$), la última: $\Delta_1 = 20 - 16 = 4$ y $\Delta_2 = 20 - 0 = 20$. $x_{mo} = 16.5 + \frac{4}{24}(4) = \mathbf{17.167}$ (marca modal: 18.5).
6. c) $\bar{x} = 11 < \tilde{x} = 11.167 < x_{mo} = 17.167$: sesgo **negativo**.

2. $z_1 = \frac{16-18}{0.75} = -2.67$ y $z_2 = \frac{19.5-18}{0.75} = 2.00$.
3. $P(16 \le X \le 19.5) = F_Z(2.00) - F_Z(-2.67) = 0.9772 - 0.0038 = \mathbf{0.9734}$.

Ejercicio 4.6.8 ← volver

1. $X \triangleq$ número de conductores ebrios, de 400; $X \sim \text{Binomial}(400,\ 0.1)$. Como $np = 40 > 5$ y $nq = 360 > 5$, se aproxima con $Y \sim N(40,\ 36)$, $\sigma = 6$.
2. a) «Menor que 32» es $X \le 31$: $P(Y \le 31.5)$, $z = \frac{31.5-40}{6} = -1.42$, $P = F_Z(-1.42) = \mathbf{0.0778}$.
3. b) «Mayor que 49» es $X \ge 50$: $P(Y \ge 49.5)$, $z = \frac{49.5-40}{6} = 1.58$, $P = 1 - 0.9429 = \mathbf{0.0571}$.
4. c) «Por lo menos 35 pero menor que 47» es $35 \le X \le 46$: $P(34.5 \le Y \le 46.5)$, con $z_1 = -0.92$ y $z_2 = 1.08$. $P = F_Z(1.08) - F_Z(-0.92) = 0.8599 - 0.1788 = \mathbf{0.6811}$.
5. Con la binomial exacta: 0.0746, 0.0601 y 0.6796.

Ejercicio 4.6.9 ← volver

1. $X \triangleq$ número de compras, de 80 clientes; $X \sim \text{Binomial}(80,\ 0.25)$. $\mu = 20$, $\sigma = \sqrt{80(0.25)(0.75)} = 3.873$.
2. $P(X \ge 28) \approx P(Y \ge 27.5)$; $z = \frac{27.5-20}{3.873} = 1.94$.
3. $P \approx 1 - F_Z(1.94) = 1 - 0.9738 = \mathbf{0.0262}$.
4. Con la binomial exacta, $P(X \ge 28) = 0.0295$.

Ejercicio 4.6.10 ← volver

1. $X \triangleq$ número de cepillos defectuosos entre los 3 elegidos sin reemplazo; $X \sim$ Hipergeométrica($N = 10,\ r = 4,\ n = 3$), con $\binom{10}{3} = 120$.
2. a) $f_X(0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$; $f_X(1) = \frac{4 \cdot 15}{120} = \frac{1}{2}$; $f_X(2) = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{3}{10}$; $f_X(3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$. Suman 1.
3. b) $E(X) = n\frac{r}{N} = 3(0.4) = \mathbf{1.2}$.
4. $Var(X) = 3(0.4)(0.6)\frac{10-3}{10-1} = 0.56$, de donde $\sigma_X = \mathbf{0.7483}$.

E.5 · Unidad 5 · Variables aleatorias conjuntas: marginales, condicionales, independencia, covariancia y correlación

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. «La línea 2 libre el 80 % del día» significa que se usa a lo más el 20 %: se pide $P(Y \le 0.2)$.
2. $P(Y \le 0.2) = \int_0^1 \int_0^{0.2} \frac{2}{3}(x + 2y)\, dy\, dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_0^{0.2} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (0.2x + 0.04)\, dx$.
3. $= \frac{2}{3}(0.1 + 0.04) = \frac{7}{75} = \mathbf{0.0933}$.

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. La densidad es constante: área total $= 0.25 \times 2000 = 500$, de ahí $f_{XY} = \frac{1}{500}$.
2. a) Región $0.1 \le x \le 0.2$, $100 \le y \le 200$: área $= 0.1 \times 100 = 10$; $P = \frac{10}{500} = \mathbf{0.02}$.
3. b) Región $0 \le x < 0.25$, $0 \le y < 1000$: área $= 0.25 \times 1000 = 250$; $P = \frac{250}{500} = \mathbf{0.5}$.

1. F: el paciente es fumador. C: el paciente tiene cáncer pulmonar. $P(F) = 0.45$, $P(\bar{F}) = 0.55$, $P(C \mid F) = 0.9$, $P(C \mid \bar{F}) = 0.05$.
2. $P(C) = 0.45(0.9) + 0.55(0.05) = 0.405 + 0.0275 = 0.4325$.
3. $P(F \mid C) = \frac{0.405}{0.4325} = \mathbf{0.9364}$.

Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. A, B, C: riesgo bajo, medio y alto, con $P(C) = 1 - 0.2 - 0.65 = 0.15$. D: tiene un accidente en el año.
2. Ramas: $0.2(0.01) = 0.002$, $0.65(0.02) = 0.013$, $0.15(0.03) = 0.0045$; $P(D) = 0.0195$.
3. a) $P(B \mid D) = \frac{0.013}{0.0195} = \mathbf{0.6667}$.
4. b) $P(\bar{D}) = 1 - 0.0195 = 0.9805$. Numerador: $0.2(0.99) + 0.65(0.98) = 0.198 + 0.637 = 0.835$.
5. $P(A \cup B \mid \bar{D}) = \frac{0.835}{0.9805} = \mathbf{0.8516}$.

Ejercicio 2.6.7 ← volver

1. A: el equipo tiene éxito. B: el reporte es favorable. $P(A) = 0.4$, $P(\bar{A}) = 0.6$, $P(B \mid A) = 0.8$, $P(B \mid \bar{A}) = 0.3$.
2. $P(B) = 0.4(0.8) + 0.6(0.3) = 0.32 + 0.18 = 0.5$.
3. $P(A \mid B) = \frac{0.32}{0.5} = \mathbf{0.64}$.

Ejercicio 2.6.8 ← volver

1. A_i: el sensor i es defectuoso, con $P(A_i) = 0.07$ y $P(\bar{A}_i) = 0.93$; los tres son independientes.
2. a) Hay tres formas excluyentes de que uno solo sea defectuoso, cada una con probabilidad $0.07(0.93)^2$: $P = 3(0.07)(0.93)^2 = \mathbf{0.1816}$.
3. b) «A lo más dos» es el complemento de «los tres»: $P = 1 - (0.07)^3 = 1 - 0.000343 = \mathbf{0.9997}$.

E.3 · Unidad 3 · Variables aleatorias: función de probabilidad, de densidad y de distribución, media y variancia

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. X: número de impresoras vendidas en dos días; $R_X = \{0, 1, 2\}$. Los días son independientes.
2. $f_X(0) = (0.7)(0.7) = \mathbf{0.49}$; $f_X(2) = (0.3)(0.3) = \mathbf{0.09}$.
3. $f_X(1) = 1 - 0.49 - 0.09 = \mathbf{0.42}$ (o bien $2(0.7)(0.3)$: vender en el primer día o en el segundo).

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. X: número de proyectos del sector energético entre los dos elegidos; $R_X = \{0, 1, 2\}$; $\binom{10}{2} = 45$ pares posibles.
2. $f_X(0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{2}}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$; $f_X(1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$; $f_X(2) = \frac{\binom{3}{2}}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.
3. Acumulando: $F_X(x) = 0$ si $x < 0$; $\frac{7}{15} = 0.4667$ si $0 \le x < 1$; $\frac{14}{15} = 0.9333$ si $1 \le x < 2$; $\mathbf{1}$ si $x \ge 2$.

Apéndice D · Fuentes y bibliografía

↑ Volver al índice

Exámenes de los que se adaptaron los ejercicios:

- Primeros y segundos exámenes finales de *Probabilidad y Estadística*, semestres 2011-1, 2012-1, 2013-1, 2014-1, 2015-1, 2016-1, 2016-2, 2017-1 y 2018-1, con sus resoluciones publicadas. Facultad de Ingeniería, UNAM.

Material de consulta:

- Bañuelos Saucedo, A. L.; Manzanarez Gómez, N. *Notas de Probabilidad* y *Notas de Estadística*. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Borras Barcia, H. E.; Iriarte Balderrama, R.; Frontana de la Cruz, B. *Apuntes de Probabilidad y Estadística*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1985.
- Iriarte, R.; Borras, H. *Ejercicios de Probabilidad y Estadística*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1985.
- Montgomery, D. C.; Runger, G. C. *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*, 2.ª ed. Limusa Wiley, 2005.
- Devore, J. L. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, 5.ª ed. Thomson, 2008.
- Programa de la asignatura *Probabilidad y Estadística* (clave 0712), plan de estudios 2010. Facultad de Ingeniería, UNAM.

E.7 · Unidad 7 · Manejo de datos bivariados: recta de mínimos cuadrados, correlación y determinación

Ejercicio 7.6.1 ← volver

1. X: alquitrán [mg]; Y: monóxido de carbono [mg]; $n = 6$.
2. a) Seis puntos que suben de izquierda a derecha: dos marcas bajas (8.0 y 8.6 mg) y cuatro altas (15.1 a 17.0 mg).
3. Sumas: $\sum x = 80.5$, $\sum y = 87.8$, $\sum x^2 = 1160.61$, $\sum y^2 = 1347.82$, $\sum xy = 1246.8$.
4. $SS_{xx} = 1160.61 - \frac{80.5^2}{6} = 80.5683$; $SS_{yy} = 1347.82 - \frac{87.8^2}{6} = 63.0133$; $SS_{xy} = 1246.8 - \frac{(80.5)(87.8)}{6} = 68.8167$.
5. b) $\hat{\beta}_1 = \frac{68.8167}{80.5683} = 0.854140$; $\bar{x} = 13.4167$, $\bar{y} = 14.6333$; $\hat{\beta}_0 = 14.6333 - 0.854140(13.4167) = 3.1736$. La recta es $\hat{y} = 3.1736 + 0.8541x$; para trazarla, $\hat{y}(8) = 10.01$ y $\hat{y}(17) = 17.69$.
6. c) $r = \frac{68.8167}{\sqrt{(80.5683)(63.0133)}} = \mathbf{0.9658}$: relación directa fuerte. Sí se corrobora: más alquitrán, más monóxido de carbono.
7. d) $r^2 = \mathbf{0.9328}$: el modelo explica el **93.28 %** de la variación del monóxido de carbono; es un buen modelo.

Ejercicio 7.6.2 ← volver

1. X: velocidad [pies/s]; Y: ritmo de zancadas [pasos/s]; $n = 11$.
2. $SS_{xx} = 3880.08 - \frac{205.4^2}{11} = 44.7018$; $SS_{xy} = 660.13 - \frac{(205.4)(35.16)}{11} = 3.5969$.
3. $\hat{\beta}_1 = \frac{3.5969}{44.7018} = 0.080464$; $\bar{x} = 18.6727$, $\bar{y} = 3.1964$.
4. $\hat{\beta}_0 = 3.1964 - 0.080464(18.6727) = 1.6939$. La recta es $\hat{y} = 1.6939 + 0.0805x$.
5. Complemento: $SS_{yy} = 0.2969$ y $r = 0.9874$: relación directa muy fuerte.

Ejercicio 7.6.3 ← volver

1. $r^2 = 0.736$: el modelo lineal explica el **73.6 %** de la variación de las ventas; el 26.4 % restante se debe a otros factores.
2. Se espera que más comerciales vayan con más ventas (pendiente positiva), así que $r = +\sqrt{0.736} = \mathbf{0.858}$.
3. **Conclusión:** relación lineal directa y fuerte entre el número de comerciales y las ventas.

Ejercicio 7.6.4 ← volver

1. X: automóviles por hora; Y: ozono; $n = 7$.
2. Sumas: $\sum x = 2338$, $\sum y = 240.1$, $\sum x^2 = 918\,246$, $\sum y^2 = 10\,910.79$, $\sum xy = 83\,120.1$.
3. $SS_{xx} = 918\,246 - \frac{2338^2}{7} = 137\,354$; $SS_{yy} = 10\,910.79 - \frac{240.1^2}{7} = 2675.36$; $SS_{xy} = 83\,120.1 - \frac{(2338)(240.1)}{7} = 2926.7$.
4. a) $\hat{\beta}_1 = \frac{2926.7}{137\,354} = 0.021308$; $\bar{x} = 334$, $\bar{y} = 34.3$; $\hat{\beta}_0 = 34.3 - 0.021308(334) = 27.1832$. La recta es $\hat{y} = 27.1832 + 0.0213x$.
5. b) $r = \frac{2926.7}{\sqrt{(137\,354)(2675.36)}} = \frac{2926.7}{19\,169.54} = \mathbf{0.1527}$; $r^2 = 0.0233$.

7. d) $\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i = 2700$, $s^2 = \frac{2700}{79} = 34.177$, $s = 5.846$ y $cv = \frac{5.846}{11} = \mathbf{0.531}$: datos heterogéneos.

Ejercicio 1.6.6 ← volver

1. a) Histograma: barras sobre 78.5–79.5, 79.5–80.5, 80.5–81.5 y 81.5–82.5, con alturas 40, 750, 150 y 60.
2. b) La clase de mayor frecuencia tiene marca 80: $x_{mo} \approx \mathbf{80\ mm}$, la longitud más frecuente. Con la fórmula: $\Delta_1 = 710$, $\Delta_2 = 600$ y $x_{mo} = 79.5 + \frac{710}{1310}(1) = 80.042$ mm.
3. $\bar{x} = \frac{79(40)+80(750)+81(150)+82(60)}{1000} = \frac{80\,230}{1000} = \mathbf{80.23\ mm}$, la longitud promedio de las piezas.

Ejercicio 1.6.7 ← volver

1. $n = 5+7+3+2+3 = 20$; $\sum x_i f_i = 560.81$, así que $\bar{x} = 28.0405$.
2. $\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i = 4081.50$, $s^2 = \frac{4081.50}{19} = 214.816$ y $s = 14.6566$.
3. $cv = \frac{14.6566}{28.0405} = \mathbf{0.5227} > 0.15$: datos **heterogéneos**.

E.2 · Unidad 2 · Fundamentos de la teoría de la probabilidad: probabilidad condicional, probabilidad total y Bayes

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. I, E, O: el empleado es ingeniero, economista o de otra profesión. D: ocupa un puesto directivo.
2. «El resto» de los empleados: $P(O) = 1-0.3-0.2 = 0.5$.
3. Ramas: $0.3(0.8) = 0.24$, $0.2(0.3) = 0.06$, $0.5(0.1) = 0.05$; $P(D) = 0.35$.
4. $P(I \mid D) = \frac{0.24}{0.35} = \mathbf{0.6857}$.

Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. A: hay un accidente. B: suena la alarma. $P(A) = 0.2$, $P(\bar{A}) = 0.8$, $P(B \mid A) = 0.98$, $P(B \mid \bar{A}) = 0.04$.
2. $P(B) = 0.2(0.98) + 0.8(0.04) = 0.196 + 0.032 = 0.228$.
3. $P(A \mid B) = \frac{0.196}{0.228} = \mathbf{0.8596}$.

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. D: la loseta es defectuosa. I: la loseta fue inspeccionada. $P(D) = 0.04$, $P(D \cap I) = 0.002$.
2. Es una condicional directa, sin probabilidad total: $P(I \mid D) = \frac{P(I \cap D)}{P(D)} = \frac{0.002}{0.04} = \mathbf{0.05}$.

Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. M_i: el tornillo se produjo en la máquina i. D: el tornillo es defectuoso.
2. a) Ramas: $0.15(0.04) = 0.006$, $0.30(0.03) = 0.009$, $0.20(0.05) = 0.010$, $0.35(0.02) = 0.007$; $P(D) = \mathbf{0.032}$.
3. b) $P(M_3 \mid D) = \frac{0.010}{0.032} = \mathbf{0.3125}$.

Ejercicio 2.6.5 ← volver

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. a) «Ninguna línea más de la mitad del tiempo»: $P\left(X \le \frac{1}{2},\ Y \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dy\,dx$.
2. $= \frac{3}{2}\int_0^{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}\right)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{48}\right) = \frac{1}{16} = \mathbf{0.0625}$.
3. b) $f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dy = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 1$.
4. $P\left(X > \frac{3}{4}\right) = \int_{3/4}^1 \left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{2}+\frac{x}{2}\right]_{3/4}^1 = 1-\left(\frac{27}{128}+\frac{3}{8}\right) = \frac{53}{128} = \mathbf{0.4141}$.
5. c) $E(X) = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{3}{8}+\frac{1}{4} = \frac{5}{8} = \mathbf{0.625}$.

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. a) $X < 1$ abarca todo el recorrido de X, así que $P(X<1) = 1$ y $P(Y > 1.5 \mid X < 1) = P(Y > 1.5)$.
2. $P(Y > 1.5) = \int_0^1\int_{1.5}^2 \frac{1}{2}(x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (0.5x+0.875)\,dx = \frac{1}{2}(0.25+0.875) = \frac{9}{16} = \mathbf{0.5625}$.
3. b) $f_X(x) = \int_1^2 \frac{1}{2}(x+y)\,dy = \frac{x}{2}+\frac{3}{4}$, $0 \le x \le 1$.
4. $P(X < 0.8) = \left[\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x\right]_0^{0.8} = 0.16+0.6 = \mathbf{0.76}$.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. a) $P(X > 20,\ Y \ge 1) = \frac{1}{6640}\int_1^2\int_{20}^{40}(4x+2y+1)\,dx\,dy = \frac{1}{6640}\int_1^2 \left[2x^2+2xy+x\right]_{20}^{40} dy$.
2. $= \frac{1}{6640}\int_1^2(2420+40y)\,dy = \frac{1}{6640}\left[2420y+20y^2\right]_1^2 = \frac{2480}{6640} = \mathbf{0.3735}$.
3. b) $f_X(x) = \int_0^2 \frac{4x+2y+1}{6640}\,dy = \frac{8x+6}{6640}$, $0 \le x \le 40$; $f_Y(y) = \int_0^{40}\frac{4x+2y+1}{6640}\,dx = \frac{80y+3240}{6640}$, $0 \le y \le 2$.
4. En $(0,0)$: $f_{XY}(0,0) = \frac{1}{6640}$, mientras que $f_X(0)f_Y(0) = \frac{6}{6640}\cdot\frac{3240}{6640} = \frac{2.93}{6640}$. Son distintos: **no son independientes** ($4x+2y+1$ no se factoriza como producto).

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. Región: el triángulo $20 < x < y < 40$. Para x fija, y va de x a 40; para y fija, x va de 20 a y.
2. $f_X(x) = \int_x^{40}\frac{dy}{200} = \frac{40-x}{200}$, $20 < x < 40$; $f_Y(y) = \int_{20}^y \frac{dx}{200} = \frac{y-20}{200}$, $20 < y < 40$.
3. a) $E(X) = \int_{20}^{40} x\frac{40-x}{200}\,dx = \frac{80}{3} = 26.667$; $E(Y) = \int_{20}^{40} y\frac{y-20}{200}\,dy = \frac{100}{3} = 33.333$.
4. $E(XY) = \int_{20}^{40}\int_x^{40}\frac{xy}{200}\,dy\,dx = \mathbf{900}$.
5. b) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 900 - \frac{80}{3}\cdot\frac{100}{3} = \frac{8100-8000}{9} = \frac{100}{9} = \mathbf{11.111}$: relación positiva, porque el precio de la refinería siempre es mayor que el del transportista.

E.6 · Unidad 6 · Distribuciones muestrales: teorema del límite central, media muestral y ji cuadrada

Ejercicio 6.6.1 ← volver

1. X: vida útil de un foco, $\mu_X = 60$ meses, $\sigma_X = 6$ meses; $\bar{X}$: vida promedio de 64 focos.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. Hay $5 \cdot 4 = 20$ resultados ordenados igualmente probables (12, 13, ..., 54).
2. a) X: el mayor de los dos números. El mayor es m en $2(m-1)$ resultados: $f_X(2) = \frac{2}{20} = \mathbf{0.1}$, $f_X(3) = \frac{4}{20} = \mathbf{0.2}$, $f_X(4) = \frac{6}{20} = \mathbf{0.3}$, $f_X(5) = \frac{8}{20} = \mathbf{0.4}$.
3. b) Y: la suma. Conteo: 3 (2 resultados), 4 (2), 5 (4), 6 (4), 7 (4), 8 (2), 9 (2).
4. $f_Y(3,4,5,6,7,8,9) = \mathbf{0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1}$; suman 1.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. a) $Y(0) = 10$, $Y(1) = 7$, $Y(2) = 2$, $Y(3) = 1$, $Y(4) = 10$. Los valores $x = 0$ y $x = 4$ dan el mismo $y = 10$: $f_Y(10) = 0.10 + 0.15 = 0.25$.

y	1	2	7	10
$f_Y(y)$	0.25	0.30	0.20	0.25

2. b) $E(Y) = 0.25 + 0.6 + 1.4 + 2.5 = \mathbf{4.75}$.
3. $E(Y^2) = 1(0.25)+4(0.30)+49(0.20)+100(0.25) = 36.25$, así que $\text{Var}(Y) = 36.25 - 4.75^2 = \mathbf{13.6875}$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. X: desembolso (envío más pérdida) en pesos.
2. Un paquete: $X = 5.20$ con probabilidad 0.93 y $X = 5.20 + 40 = 45.20$ con probabilidad 0.07. $E(X) = 5.20(0.93) + 45.20(0.07) = \mathbf{\$8.00}$.
3. Dos paquetes: envío \$6.60. Se pierden 0, 1 o 2 paquetes con probabilidades $0.93^2 = 0.8649$, $2(0.07)(0.93) = 0.1302$ y $0.07^2 = 0.0049$; $X = 6.60$, 26.60 o 46.60.
4. $E(X) = 6.60(0.8649) + 26.60(0.1302) + 46.60(0.0049) = \mathbf{\$9.40}$.
5. Conviene enviar los libros **en un solo paquete**.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. a) f_X es simétrica alrededor de 0 (solo tiene x^2). Con la integral: $E(X) = \frac{3}{500\,000}\left[1250x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-50}^{50} = 0$, porque las potencias pares valen lo mismo en ± 50. $E(X) = \mathbf{0\ min}$.
2. b) $P(X > 0) = \frac{3}{500\,000}\left[2500x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{50} = \frac{3}{500\,000}\left(125\,000 - \frac{125\,000}{3}\right) = \frac{3}{500\,000} \cdot \frac{250\,000}{3} = \mathbf{0.5}$.

Ejercicio 3.6.7 ← volver

1. a) $k\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = k\left[\frac{\text{sen}\,2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{k}{2} = 1$, así que $k = \mathbf{2}$; $f_X \geq 0$ en el intervalo.
2. b) $F_X(x) = \int_0^x 2\cos 2t\,dt = \text{sen}\,2x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; 0 si $x < 0$ y 1 si $x > \frac{\pi}{4}$.
3. c) $\text{sen}\,2\tilde{x} = 0.5$, así que $2\tilde{x} = \frac{\pi}{6}$ y $\tilde{x} = \frac{\pi}{12} = \mathbf{0.2618}$.

Ejercicio 3.6.8 ← volver

1. a) $P(T \geq 1 \mid T \leq 2) = \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{P(T \leq 2)}$.

2. $P(1 \leq T \leq 2) = F_T(2) - F_T(1) = e^{-1.6} - e^{-3.2} = 0.2019 - 0.0408 = 0.1611$.
3. $P(T \leq 2) = 1 - e^{-3.2} = 0.9592$, así que $P(T \geq 1 \mid T \leq 2) = \frac{0.1611}{0.9592} = \mathbf{0.1680}$.
4. b) $f_T(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-1.6t}\right) = 1.6e^{-1.6t}$ para $t \geq 0$, y 0 para $t < 0$.

E.4 · Unidad 4 · Modelos probabilísticos comunes: binomial, geométrica, Pascal, hipergeométrica, Poisson, uniforme, exponencial y normal

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. $X \triangleq$ número de barcos que llegan en una hora; $X \sim \text{Poisson}(\lambda t = 8 \cdot 1 = 8)$.
2. $P(X = 5) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = \frac{32\,768\,e^{-8}}{120} = \mathbf{0.0916}$.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. $T \triangleq$ años hasta la falla; la media es 3, así que $T \sim \text{Exponencial}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$.
2. Usar la garantía es fallar durante el primer año: $P(T \leq 1) = 1 - e^{-1/3} = 1 - 0.7165 = \mathbf{0.2835}$.
3. El **28.35 %** de las pantallas usará la garantía.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. $F_X(x) = 1 - e^{-8x}$ es la función de distribución de una exponencial con $\lambda = 8$ por hora. Los minutos se pasan a horas: 12 min = 0.2 h y 18 min = 0.3 h.
2. a) $P(X < 0.2) = 1 - e^{-1.6} = 1 - 0.2019 = \mathbf{0.7981}$.
3. b) $P(0.2 < X < 0.3) = F_X(0.3) - F_X(0.2) = e^{-1.6} - e^{-2.4} = 0.2019 - 0.0907 = \mathbf{0.1112}$.
4. c) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{8} = \mathbf{0.125\ h}$ (7.5 min) y $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{64} = \mathbf{0.0156\ h^2}$.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. $X \triangleq$ error en la longitud [mm]; $X \sim \text{Uniforme}(1, 4)$, con $f_X(x) = \frac{1}{3}$ en $[1, 4]$.
2. $P(X > 2) = \frac{4-2}{4-1} = \mathbf{0.6667}$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. El séptimo disparo es el cuarto acierto: $X \triangleq$ número de disparos hasta el cuarto acierto; $X \sim \text{Pascal}\left(r = 4,\ p = \frac{1}{3}\right)$.
2. $P(X = 7) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{8}{27} = \mathbf{0.0732}$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. $X \triangleq$ número de tornillos **no** defectuosos en el lote; $X \sim \text{Binomial}(n = 200,\ p = 0.98)$. El 99 % de 200 son 198.
2. $P(X = 198) = \binom{200}{198}(0.98)^{198}(0.02)^2 = 19\,900(0.98)^{198}(0.0004) = \mathbf{0.1458}$.
3. $P(X = 199) = 200(0.98)^{199}(0.02) = 0.0718$ y $P(X = 200) = 0.98^{200} = 0.0176$.
4. $P(X \geq 198) = 0.1458 + 0.0718 + 0.0176 = \mathbf{0.2351}$.

Ejercicio 4.6.7 ← volver

1. $X \triangleq$ tiempo de revelado [s]; $X \sim N(18,\ 0.75^2)$.