4. $P(X=0) = e^{-6} = 0.002479$ y $P(X=1) = 6e^{-6} = 0.014873$.
5. $P(X \geq 2) = 1 - 0.002479 - 0.014873 = \mathbf{0.9826}$.

Ejercicio 4.5.5 · Reflector con sensor: Poisson «al menos 5»

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 5.

Con la sensibilidad bien ajustada, un reflector activado por movimiento se enciende por ardillas y otros animales pequeños, en promedio, 0.5 veces por semana.

- a) ¿Cuántas activaciones se esperan en dos semanas?
- b) Si en dos semanas hubiera al menos cinco activaciones, ¿convendría ajustar la sensibilidad? Justifique con la probabilidad.

Resolución.

1. a) $Y \triangleq$ número de activaciones en dos semanas; $Y \sim \text{Poisson}(\lambda t = 0.5 \cdot 2 = 1)$. $E(Y) = \lambda t = \mathbf{1\ activación}$.
2. b) $P(Y \geq 5) = 1 - \sum_{y=0}^{4} \frac{e^{-1}1^y}{y!} = 1 - e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 1 - e^{-1}\frac{65}{24}$.
3. $P(Y \geq 5) = 1 - 0.36788(2.70833) = \mathbf{0.0037}$.
4. **Resultado:** con el ajuste correcto, cinco o más activaciones en dos semanas ocurrirían menos de 4 veces en mil. Si ocurren, lo razonable es suponer que la sensibilidad está mal y ajustarla.

Ejercicio 4.5.6 · Marcapasos: exponencial y falta de memoria

Adaptado de: 2º final 2015-1, problema 4.

El tiempo de vida de cierto marcapasos tiene distribución exponencial con media de 16 años.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona se le deba reimplantar otro antes de 20 años?
- b) Si el marcapasos lleva 5 años funcionando correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25 años?

Resolución.

1. $T \triangleq$ años de funcionamiento del marcapasos; la media es 16, así que $T \sim \text{Exponencial}\left(\lambda = \frac{1}{16}\right)$.
2. a) $P(T < 20) = 1 - e^{-20/16} = 1 - e^{-1.25} = 1 - 0.2865 = \mathbf{0.7135}$.
3. b) «Lleva 5 años funcionando» es una condición: se pide $P(T < 25 \mid T > 5)$.
4. Por la falta de memoria, de los 5 a los 25 años quedan 20: $P(T < 25 \mid T > 5) = P(T < 20) = \mathbf{0.7135}$.
5. **Resultado:** la probabilidad es la misma que para un marcapasos nuevo. Calcular $P(5 < T < 25) = 0.5220$ es un error frecuente: esa es la probabilidad sin condición (véase el Apéndice C).

Ejercicio 4.5.7 · Resistencia a la compresión: normal y lectura inversa

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 4.

La resistencia a la compresión de unas muestras tiene distribución normal con media de 6000 kg/cm² y desviación estándar de 100 kg/cm². Determine:

- a) sufra hipertensión, dado que es fumador empedernido;
- b) sea fumador (moderado o empedernido), dado que no sufre hipertensión.

Resolución.

1. H: tiene hipertensión. M: es fumador moderado. E: es fumador empedernido.
2. a) El total del «dado que» es la columna de empedernidos (49): $P(H \mid E) = \frac{30/180}{49/180} = \frac{30}{49} = \mathbf{0.6122}$.
3. b) El total es la fila sin hipertensión (93). Los fumadores en esa fila son $26 + 19 = 45$.
4. $P(M \cup E \mid \bar{H}) = \frac{45}{93} = \mathbf{0.4839}$.

Ejercicio 2.5.5 · Columnas de una revista: álgebra de eventos

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 2.

Una revista publica las columnas «Arte» (A), «Libros» (B) y «Cinema» (C). Las probabilidades de que una lectora lea cada combinación son:

A	B	C	AB	AC	BC	ABC
0.5	0.3	0.5	0.15	0.25	0.1	0.05

Calcule: a) $P(A \mid B)$; b) $P(A \mid B \cup C)$; c) $P(A \cup B \mid C)$.

Resolución.

1. a) $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.3} = \mathbf{0.5}$.
2. b) Numerador: $P(A \cap (B \cup C)) = P(AB) + P(AC) - P(ABC) = 0.15 + 0.25 - 0.05 = 0.35$.
3. Denominador: $P(B \cup C) = 0.3 + 0.5 - 0.1 = 0.7$. Entonces $P(A \mid B \cup C) = \frac{0.35}{0.7} = \mathbf{0.5}$.
4. c) $P(A \cup B \mid C) = \frac{P(AC)+P(BC)-P(ABC)}{P(C)} = \frac{0.25+0.1-0.05}{0.5} = \frac{0.3}{0.5} = \mathbf{0.6}$.

Ejercicio 2.5.6 · Sistema eléctrico: serie y paralelo

Adaptado de: 2º final 2011-1, problema 1.

Un sistema eléctrico tiene cinco componentes que funcionan de manera independiente. Para que funcione, la corriente debe pasar por el componente A_1, luego por un bloque con los componentes A_2, A_3 y A_4 conectados en paralelo y, por último, por el componente A_5. Las probabilidades de que cada componente opere correctamente son 0.8, 0.65, 0.6, 0.65 y 0.9, respectivamente. Calcule:

- a) la probabilidad de que el sistema funcione;
- b) la probabilidad de que el sistema funcione con al menos cuatro componentes.

Resolución.

1. F: el sistema funciona. A_i: el componente i funciona.
2. a) El bloque en paralelo falla solo si fallan los tres: $P(\text{bloque}) = 1 - (0.35)(0.4)(0.35) = 1 - 0.049 = 0.951$.
3. En serie: $P(F) = 0.8(0.951)(0.9) = \mathbf{0.6847}$.
4. b) Con al menos cuatro componentes funcionando y el sistema operando, A_1 y A_5 funcionan y del bloque funcionan al menos dos:

4.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2014-1, problema 4.

Un centro de atención telefónica da servicio de 9:00 a 17:00 horas en días laborables. El número de llamadas recibidas por día tiene distribución de Poisson con media de 50 llamadas al día. Calcule la probabilidad de que, en un día dado, la primera llamada del día se reciba:

- a) antes de las 9:15 horas;
- b) después de las 10:00 horas, dado que no se recibió llamada antes de las 9:30 horas.

Datos. 50 llamadas en una jornada de 8 [h]; la pregunta está en horas.

Planteamiento. Las llamadas forman un proceso de Poisson. Lo que se pregunta es un **tiempo** (hasta la primera llamada), así que el modelo es exponencial con la misma tasa: $T \triangleq$ tiempo, en horas, desde las 9:00 hasta la primera llamada; $T \sim$ Exponencial(λ) con $\lambda = \frac{50}{8} = 6.25$ llamadas/h.

Resolución.

1. a) Las 9:15 son $\frac{1}{4}$ h después de la apertura: $P\left(T < \frac{1}{4}\right) = 1 - e^{-6.25/4} = 1 - e^{-1.5625} = 1 - 0.2096 = \mathbf{0.7904}$.
2. b) «Dado que no se recibió llamada antes de las 9:30» significa $T > \frac{1}{2}$. Se pide $P\left(T > 1 \mid T > \frac{1}{2}\right)$.
3. Por la falta de memoria, solo cuenta la media hora que falta: $P\left(T > 1 \mid T > \frac{1}{2}\right) = P\left(T > \frac{1}{2}\right) = e^{-6.25/2} = e^{-3.125} = \mathbf{0.0439}$.
4. **Resultado:** en casi 8 de cada 10 días la primera llamada entra en los primeros 15 minutos; si no hubo llamadas hasta las 9:30, la probabilidad de seguir sin llamadas hasta las 10:00 es apenas 0.0439.

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Pozos petroleros: geométrica, binomial y Pascal

Adaptado de: 1er final 2011-1, problema 3.

Un explorador perforará una serie de pozos para encontrar uno productivo. La probabilidad de éxito en cada perforación es 0.2. Determine la probabilidad de que:

- a) el primer pozo productivo sea el tercero perforado;
- b) no encuentre ningún pozo productivo si solo puede perforar 10;
- c) el tercer pozo productivo sea el quinto perforado.

Resolución.

1. a) $X \triangleq$ número de perforaciones hasta el primer pozo productivo; $X \sim$ Geométrica($p = 0.2$). $P(X = 3) = q^2 p = (0.8)^2(0.2) = \mathbf{0.128}$.
2. b) $U \triangleq$ número de pozos productivos en 10 perforaciones; $U \sim$ Binomial($n = 10,\ p = 0.2$). $P(U = 0) = \binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10} = \mathbf{0.1074}$.
3. c) $Y \triangleq$ número de perforaciones hasta el tercer pozo productivo; $Y \sim$ Pascal($r = 3,\ p = 0.2$). $P(Y = 5) = \binom{4}{2}(0.2)^3(0.8)^2 = 6(0.008)(0.64) = \mathbf{0.0307}$.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 2º final 2016-1, problema 2.

El 4 % de las losetas tiene defectos, al 5 % le toca inspección y la probabilidad de que una loseta esté inspeccionada y sea defectuosa es 0.002. Si a un cliente le llega una loseta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido inspeccionada?

Resultado: 0.05.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 1er final 2011-1, problema 1.

Cuatro máquinas producen el 15 %, 30 %, 20 % y 35 % de los tornillos, con 4 %, 3 %, 5 % y 2 % de defectuosos. Se elige un tornillo al azar. Determine:

- a) la probabilidad de que esté defectuoso;
- b) si está defectuoso, la probabilidad de que se haya producido en la máquina 3.

Resultado: $P(D) = 0.032$; $P(M_3 \mid D) = 0.3125$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: 1er final 2012-1, problema 2.

De los fumadores de quienes se sospecha que tienen cáncer pulmonar, el 90 % lo tiene; de los no fumadores, solo el 5 %. Si la proporción de fumadores es 0.45, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, elegido al azar, sea fumador?

Resultado: $P(C) = 0.4325$; $P(F \mid C) = 0.9364$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 2.

Una aseguradora clasifica a sus asegurados en riesgo bajo (20 %), medio (65 %) y alto (el resto). Tienen un accidente en el año 1, 2 y 3 de cada 100, respectivamente. Determine:

- a) si un asegurado tuvo un accidente, la probabilidad de que sea de riesgo medio;
- b) si no tuvo ningún accidente, la probabilidad de que sea de riesgo bajo o medio.

Resultado: $P(D) = 0.0195$; a) 0.6667; b) $\frac{0.835}{0.9805} = 0.8516$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.7

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 2.

El 40 % de los equipos de pantalla que una empresa lanzó al mercado tuvieron éxito. El 80 % de los exitosos y el 30 % de los no exitosos habían recibido un reporte de mercado favorable. Si un modelo nuevo recibió un reporte favorable, ¿cuál es la probabilidad de que tenga éxito?

Resultado: $P(\text{favorable}) = 0.5$; $P(\text{éxito} \mid \text{favorable}) = 0.64$.

- Se mide y es «tiempo hasta»: exponencial. Se mide con μ y σ: normal. Se mide y es «igual de probable entre a y b»: uniforme.

2. ¿El mismo problema cuenta eventos **y** pregunta por tiempos? Entonces son Poisson y exponencial con la **misma** λ.

4.3 Procedimientos

Traducción de las preguntas (modelos discretos):

El enunciado dice…	En símbolos
«exactamente k»	$P(X = k)$
«a lo más k», «cuando mucho k»	$P(X \leq k) = f(0) + \cdots + f(k)$
«al menos k», «por lo menos k»	$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$
«más de k»	$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
«menos de k»	$P(X < k) = P(X \leq k-1)$
«de a a b», «entre a y b inclusive»	$P(a \leq X \leq b)$

Si la suma directa tiene muchos términos, usa el complemento.

4.3.1 Binomial, geométrica y Pascal

1. Comprueba que los ensayos son independientes y que p es la misma en todos. Define el éxito con palabras.
2. Escribe «$X \triangleq$ número de …» y el modelo con números: $X \sim$ Binomial(n, p), Geométrica(p) o Pascal(r, p).
3. Traduce la pregunta con la tabla anterior.
4. Sustituye en f_X. Con la calculadora: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
5. Si el enunciado cuenta fracasos («no defectuosos», «reprueben»), cambia p por q o cuenta los éxitos equivalentes; no mezcles las dos formas.

4.3.2 Hipergeométrica

1. Identifica N (tamaño del lote), r (número de «éxitos» en el lote) y n (tamaño de la muestra, sin reemplazo).
2. $f_X(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$: maneras de elegir x éxitos y $n - x$ fracasos entre el total de maneras.
3. Comprueba que las probabilidades de todos los valores suman 1.
4. Media y variancia con las fórmulas de la tabla, o con la definición de la Unidad 3.

4.3.3 Poisson, exponencial y uniforme

1. **Poisson.** Reescala la tasa al intervalo de la pregunta: parámetro $= \lambda t$. Escribe $X \sim$ Poisson(λt) con el número ya calculado.
2. Para «al menos 1» usa $1 - e^{-\lambda t}$; para «al menos k», $1 - \sum_{x=0}^{k-1} f(x)$.
3. **Exponencial.** Calcula la tasa: $\lambda = \frac{1}{\text{media}}$, o la tasa del proceso de Poisson **en las unidades de la pregunta** (por hora si la pregunta está en horas).

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Los eventos definidos con palabras: orígenes y evidencia.
2. Los datos con su notación: $P(A) = \ldots$, $P(D \mid A) = \ldots$, comprobando que los orígenes sumen 1.
3. La fórmula de probabilidad total o de Bayes escrita **antes** de sustituir.
4. La tabla de ramas, con su suma y la columna de a posteriori.
5. El resultado con 4 decimales y una frase: «la probabilidad de que la pieza venga de B, dado que es defectuosa, es 0.3465».

Si no se encuentra el camino, los eventos definidos, los datos y la fórmula de Bayes con los números sustituidos ya valen buena parte del problema.

Modelo	X representa…	$f_X(x)$	Valores	$E(X)$	$Var(X)$
Poisson(λt)	número de eventos en un intervalo de longitud t	$\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$	$0, 1, 2, \ldots$	λt	λt

- En la binomial, el **orden no importa** y n está fijo. En la geométrica y en la de Pascal, lo que está fijo es el número de éxitos y lo aleatorio es el número de ensayos: el último ensayo **es** el éxito buscado, por eso se usa $\binom{x-1}{r-1}$ y no $\binom{x}{r}$. La geométrica es la Pascal con $r = 1$.
- **Proceso de Poisson:** los eventos ocurren al azar, de uno en uno, con una **tasa** constante λ por unidad de tiempo, longitud o área. El número de eventos en un intervalo de longitud t es Poisson con parámetro λt: si la tasa es 6 por minuto, en 2 minutos el parámetro es 12.
- **Aproximación de Poisson a la binomial:** si n es grande y p pequeña (como guía, $n \geq 20$ y $p \leq 0.05$), Binomial$(n, p) \approx$ Poisson(np).
- **Hipergeométrica y binomial:** si la muestra es pequeña frente al lote ($n < 0.1N$), extraer sin reemplazo casi no cambia p y la hipergeométrica se aproxima con Binomial$(n,\ r/N)$.

Modelos continuos.

Modelo	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$E(X)$	$Var(X)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	tabla de F_Z	μ	σ^2

- **Uniforme:** la probabilidad de un tramo es proporcional a su longitud: $P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}$ si $a \leq c < d \leq b$.
- **Exponencial:** modela el tiempo hasta (o entre) eventos de un proceso de Poisson de tasa λ. El parámetro es la **tasa**, no la media: «media de 16 años» significa $\lambda = \frac{1}{16}$ por año. Se cumple que $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ y $P(a < T < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- **Relación Poisson–exponencial:** «ningún evento en $[0, t]$» es lo mismo que «el primer evento llega después de t»: $P(X = 0) = e^{-\lambda t} = P(T > t)$.
- **Falta de memoria (exponencial):** $P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$. Lo que ya transcurrió no cambia la probabilidad de lo que falta; solo cuenta el tiempo restante.
- **Normal:** campana simétrica alrededor de μ. En $N(\mu, \sigma^2)$ el segundo parámetro es la **variancia**: $N(106, 144)$ tiene $\sigma = 12$. La **normal estándar** es $Z \sim N(0, 1)$, y toda normal se lleva a ella con $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. La tabla da $F_Z(z) = P(Z \leq z)$, el área a la izquierda de z; por simetría, $F_Z(-z) = 1 - F_Z(z)$.
- En los modelos continuos $P(X = c) = 0$, así que $P(X \leq c) = P(X < c)$. En los discretos **no**: «al menos 2» incluye el 2 y «más de 2» no.

- En una continua, $<$ y $\leq$ dan lo mismo. En una discreta **no**: $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a)$.

Valor esperado. Es la media μ_X de la variable, el promedio a largo plazo:

$$E(X) = \sum_x x\, f_X(x) \quad \text{o} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx,$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x) \text{ o } \int g(x) f_X(x)\, dx$$

- Como operador: $E(c) = c$, $E(aX+b) = a\,E(X)+b$ y $E[g(X)+h(X)] = E[g(X)]+E[h(X)]$.

Momentos. Respecto al origen, $\mu'_r = E(X^r)$; respecto a la media, $\mu_r = E[(X - \mu_X)^r]$.

Parámetros de la distribución.

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}, \qquad CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}, \qquad \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$$

- La variancia es el segundo momento respecto a la media. Propiedades: $\text{Var}(c) = 0$ y $\text{Var}(aX + b) = a^2\,\text{Var}(X)$ (la constante b no dispersa).
- **Mediana** $\tilde{x}$: el valor con $F_X(\tilde{x}) = 0.5$. **Moda** x_{mo}: el valor donde f_X es máxima.
- **Simetría:** si f_X es simétrica alrededor de c, entonces $E(X) = \tilde{x} = c$, $\alpha_3 = 0$ y $P(X > c) = 0.5$.
- El **rango** es la longitud de R_X; el coeficiente $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4}$ mide la curtosis.

Integrales que se usan. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\int_a^b g\, dx = G(b) - G(a)$, con $G(a)$ siempre entre paréntesis; por partes, $\int u\, dv = uv - \int v\, du$; y $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
una tabla de x y $f_X(x)$, «número de…»	variable discreta	3.3.1
«se toman tres al azar de un lote», «se eligen dos proyectos»	construir f_X por conteo	3.3.2
una fórmula con k, «para que sea función de densidad»	la constante con área 1	3.3.3
una gráfica (triángulo, rectángulo) de f_X	la constante con el área de la figura	3.3.3
«función de distribución acumulativa», «F_X»	F_X por tramos o escalonada	3.3.3
se da F_X y se pide f_X	saltos (discreta) o derivada (continua)	3.3.4

3. **Confundir $E(X^2)$ con $[E(X)]^2$.** $E(X^2)$ se calcula con $x^2 f_X(x)$; luego se resta el cuadrado de la media. Una variancia negativa es un error seguro.
4. **Perder signos al evaluar.** $G(a)$ va entre paréntesis; $(-6)^2 = 36$ y $(-6)^3 = -216$.
5. **Tratar $\leq$ y $<$ igual en una discreta.** $P(X < 2) \neq P(X \leq 2)$. En una continua sí dan lo mismo.
6. **Confundir σ con σ^2.** La desviación estándar es la raíz de la variancia.
7. **Sumar mal en $Y = g(X)$.** Si dos valores de x dan el mismo y, sus probabilidades se suman en una sola columna.
8. $\text{Var}(aX+b) = a\,\text{Var}(X)+b$**.** Lo correcto es $a^2\,\text{Var}(X)$: la constante no aporta dispersión y el factor sale al cuadrado.
9. **Condicional sin intersección.** $P(T \geq 1 \mid T \leq 2)$ es $\frac{P(1\leq T\leq 2)}{P(T\leq 2)}$, no $P(T \geq 1)$.
10. **Una probabilidad mayor que 1 o negativa** indica una integral mal evaluada; un $E(X)$ negativo, en cambio, puede ser correcto.
11. **Redondear antes de tiempo.** Trabaja con fracciones y redondea al final: $\frac{1}{30} \approx 0.0333$ hace que la media salga 1.1999 en lugar de 1.2.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Discreta: $\sum f_X(x) = 1 \cdot F_X(x) = \sum_{t\leq x} f_X(t) \cdot f_X(x_i)$ = salto de F_X en x_i
- Continua: $\int f_X = 1 \cdot F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \cdot f_X = F_X' \cdot P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X > a \mid X > b) = \frac{P(X>a)}{P(X>b)}$ si $a > b$
- $E(X) = \sum x f_X$ o $\int x f_X \cdot E[g(X)] = \sum g(x) f_X$ o $\int g(x) f_X$
- $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \cdot E(aX+b) = aE(X) + b \cdot \text{Var}(aX+b) = a^2\text{Var}(X)$
- $\mu_r' = E(X^r) \cdot \mu_r = E[(X-\mu)^r] \cdot CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \cdot \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$
- Mediana: $F_X(\tilde{x}) = 0.5 \cdot$ moda: máximo de f_X
- Conteo sin reemplazo: $f_X(x) = \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}\Big/\binom{N}{n} \cdot \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. La variable definida con palabras, su recorrido y si es discreta o continua.
2. La condición $\sum f_X = 1$ o $\int f_X = 1$ escrita con sus límites, aunque no se termine.
3. F_X con todos sus renglones y la comprobación $F_X(\text{orilla derecha}) = 1$.
4. Cada probabilidad con su fórmula ($F_X(b) - F_X(a)$ o la condicional) antes de los números.
5. $E(X)$, $E(X^2)$, σ_X^2 y σ_X, en ese orden, y una frase con unidades: «en promedio, un cliente ordena 2.3 lotes, con una desviación estándar de 0.9 lotes».

Si no se encuentra el camino, la integral planteada con sus límites y la fórmula del valor esperado ya valen buena parte del problema.

2. Comprueba que $f_X \geq 0$ con el valor de k obtenido.
3. F_X **por tramos:** escribe **todos** los renglones:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x f_X(t)\,dt & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

4. Si f_X tiene dos tramos, el segundo renglón de F_X es lo acumulado en todo el primer tramo más $\int_c^x$(fórmula del segundo tramo)$\,dt$.
5. Comprueba que $F_X(b) = 1$.

3.3.4 De la función acumulativa a la de probabilidad o densidad

- **Discreta:** cada escalón es un valor de X; $f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(\text{valor anterior})$, el tamaño del salto.
- **Continua:** $f_X(x) = F_X'(x)$ en cada tramo; donde F_X es constante, $f_X = 0$.

3.3.5 Probabilidades y condicionales

1. Continua: $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$, o la integral de f_X entre a y b.
2. Discreta: suma las $f_X(x)$ de los valores que caen en el intervalo, cuidando si los extremos entran.
3. Condicional con intervalos: $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Si $a > b$, entonces $P(X > a \mid X > b) = \frac{P(X>a)}{P(X>b)}$, porque la intersección se queda con el intervalo más chico.

3.3.6 Valor esperado, variancia y funciones de la variable

1. $E(X)$: multiplica por x antes de sumar o integrar.
2. $E(X^2)$: multiplica por x^2. Luego $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, que nunca es negativa.
3. Para $E(aX+b)$ y $\text{Var}(aX+b)$ usa las propiedades: no hace falta la tabla de la nueva variable.
4. Si f_X es simétrica alrededor de c, $E(X) = c$ sin integrar (compruébalo con la integral si sobra tiempo).
5. Para comparar decisiones (enviar en uno o dos paquetes, comprar o no), calcula el valor esperado de cada opción y elige el mejor.

3.3.7 Mediana y moda

1. Mediana: resuelve $F_X(\tilde{x}) = 0.5$ en el tramo donde F_X cruza 0.5.
2. Moda continua: el máximo de f_X (derivar e igualar a 0, o ver la gráfica). Moda discreta: el valor con mayor $f_X(x)$.

3.4 Ejemplo resuelto

> *Adaptado de: 1er final 2017-1, problema 3.*
>
> Sea X una variable aleatoria con función de densidad
>
> $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{50} & -6 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5. c) $E(X) = 9\int_0^\infty x^2 e^{-3x}\,dx = 9 \cdot \frac{2!}{3^3} = \frac{18}{27} = \mathbf{0.6667\ h}$ (40 minutos).

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 3.

Una tienda vende cada día cero impresoras con probabilidad 0.7 y una impresora con probabilidad 0.3, de manera independiente de un día a otro. Sea X el número de impresoras vendidas en dos días. Determine la función de probabilidad de X.

Resultado: $f_X(0) = 0.49$, $f_X(1) = 0.42$, $f_X(2) = 0.09$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 3.

Una empresa tiene dos proyectos del sector industrial, tres del energético y cinco del ambiental. Se eligen dos proyectos al azar. Determine la función de distribución acumulativa del número X de proyectos del sector energético elegidos.

Resultado: $F_X(x) = 0$ si $x < 0$; $\frac{7}{15}$ si $0 \le x < 1$; $\frac{14}{15}$ si $1 \le x < 2$; 1 si $x \ge 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 1er final 2012-1, problema 3.

Una urna contiene cinco pelotas numeradas del 1 al 5. Se toman dos al azar, sin reemplazo. Determine la función de probabilidad de:

- a) el mayor de los dos números;
- b) la suma de los dos números.

Resultado: a) $f_X(2,3,4,5) = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4$; b) $f_Y(3,\dots,9) = 0.1,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3.

La variable discreta X toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4 con probabilidades 0.10, 0.20, 0.30, 0.25 y 0.15. Sea $Y = X^3 - 4X^2 + 10$. Determine:

- a) la función de probabilidad de Y;
- b) la media y la variancia de Y.

Resultado: $f_Y(1,2,7,10) = 0.25,\ 0.30,\ 0.20,\ 0.25$; $E(Y) = 4.75$; $\mathrm{Var}(Y) = 13.6875$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio 3.5.2 · De la escalera a la función de probabilidad

Adaptado de: 1er final 2015-1, problema 3.

La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.4 & -2 \le x < 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

- a) Grafique F_X y construya la función de probabilidad.
- b) Calcule $E(X)$.
- c) Calcule $P(-2 \le X \le 0.5)$.

Resolución.

1. a) La gráfica es una escalera con saltos en -2, 0.5 y 3; cada escalón incluye su extremo izquierdo (punto lleno).
2. Tamaño de los saltos: $f_X(-2) = 0.4 - 0 = 0.4$; $f_X(0.5) = 0.8 - 0.4 = 0.4$; $f_X(3) = 1 - 0.8 = 0.2$.

x	-2	0.5	3
$f_X(x)$	0.4	0.4	0.2

3. b) $E(X) = -2(0.4) + 0.5(0.4) + 3(0.2) = -0.8 + 0.2 + 0.6 = \mathbf{0}$.
4. c) Los dos extremos entran: $P(-2 \le X \le 0.5) = f_X(-2) + f_X(0.5) = 0.4 + 0.4 = \mathbf{0.8}$. Con la acumulativa: $F_X(0.5) - F_X(-2) + f_X(-2) = 0.8 - 0.4 + 0.4$.

Ejercicio 3.5.3 · Valores desconocidos de la variable

Adaptado de: 1er final 2014-1, problema 3.

La variable aleatoria X toma los valores a, b y 0, cada uno con probabilidad $\frac{1}{3}$. Determine a y b si $E(X) = 0$ y $\mathrm{Var}(X) = \frac{8}{3}$.

Resolución.

1. $E(X) = \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 0 = 0$, de donde $b = -a$.
2. Como $E(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} = \frac{8}{3}$, de donde $a^2 + b^2 = 8$.
3. Con $b = -a$: $2a^2 = 8$, $a^2 = 4$, $a = \pm 2$.
4. **Resultado:** $a = -2$ y $b = 2$ (o al revés). Comprobación: $E(X^2) = \frac{4+4+0}{3} = \frac{8}{3}$.

Ejercicio 3.5.4 · Cepillos defectuosos: función de probabilidad por conteo

Adaptado de: 1er final 2016-2, problema 3.

En un lote de diez cepillos dentales, cuatro tienen defecto en el acabado. Se toman tres cepillos al azar.

- a) Construya la función de probabilidad del número de cepillos defectuosos.
- b) Calcule la media y la desviación estándar.

- dos exactos: $0.65(0.6)(0.35) + 0.65(0.4)(0.65) + 0.35(0.6)(0.65) = 0.1365 + 0.169 + 0.1365 = 0.442$;
- los tres: $0.65(0.6)(0.65) = 0.2535$.

5. $P = 0.8(0.9)(0.442 + 0.2535) = 0.72(0.6955) = \mathbf{0.5008}$.

Ejercicio 2.5.7 · Máquinas: Bayes e intersección

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 2.

Las máquinas A, B y C producen el 35 %, el 25 % y el 40 % de una pieza, y el 6 %, el 7 % y el 3 % de sus piezas son defectuosas. Se toma una pieza del almacén. Determine:

- a) si resulta defectuosa, la probabilidad de que provenga de la máquina B;
- b) la probabilidad de que no esté defectuosa y además se haya fabricado en la máquina A.

Resolución.

1. A, B, C: la pieza se fabricó en esa máquina. D: la pieza está defectuosa.
2. Ramas: $0.35(0.06) = 0.0210$, $0.25(0.07) = 0.0175$, $0.40(0.03) = 0.0120$; $P(D) = 0.0505$.
3. a) $P(B \mid D) = \frac{0.0175}{0.0505} = \mathbf{0.3465}$.
4. b) «Y además» es una intersección, no una condicional: $P(A \cap \bar{D}) = P(A)\,P(\bar{D} \mid A) = 0.35(0.94) = \mathbf{0.329}$.

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 1er final 2017-1, problema 2.

El 30 % de los empleados de una empresa son ingenieros y el 20 %, economistas. El 80 % de los ingenieros y el 30 % de los economistas ocupan un puesto directivo; del resto de los empleados, solo el 10 %. Si se elige al azar a un directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ingeniero?

Resultado: $P(D) = 0.35$; $P(I \mid D) = 0.6857$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 2.

La probabilidad de que haya un accidente en una refinería es 0.2. La alarma suena con probabilidad 0.98 si hay un accidente y con probabilidad 0.04 si no lo hay. Si la alarma sonó, ¿cuál es la probabilidad de que haya habido un accidente?

Resultado: $P(\text{suena}) = 0.228$; $P(\text{accidente} \mid \text{suena}) = 0.8596$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio 4.5.2 · Prueba de conocimientos: binomial

Adaptado de: 1er final 2012-1, problema 4.

En una prueba de conocimientos generales acredita el 60 % de los sustentantes. En un grupo de 39 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que:

- a) acrediten 26?
- b) reprueben 15?

Resolución.

1. $X \triangleq$ número de estudiantes que acreditan, de 39; $X \sim \text{Binomial}(n = 39,\ p = 0.6)$.
2. a) $P(X = 26) = \binom{39}{26}(0.6)^{26}(0.4)^{13} = \mathbf{0.0930}$.
3. b) Que reprueben 15 equivale a que acrediten $39 - 15 = 24$: $P(X = 24) = \binom{39}{24}(0.6)^{24}(0.4)^{15} = \mathbf{0.1279}$.
4. Comprobación: con $W \triangleq$ número de reprobados, $W \sim \text{Binomial}(39,\ 0.4)$ y $P(W = 15)$ da el mismo valor.

Ejercicio 4.5.3 · Suscripciones: binomial «al menos 2» y Pascal

Adaptado de: 1er final 2017-1, problema 5.

Una revista llama por teléfono a posibles suscriptores; una de cada 20 personas que reciben la llamada se suscribe. Un día, 25 personas reciben la llamada.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos se suscriban?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda persona que se suscriba sea la duodécima que recibe la llamada?

Resolución.

1. a) $X \triangleq$ número de suscriptores entre las 25 llamadas; $X \sim \text{Binomial}(n = 25,\ p = 0.05)$, $q = 0.95$.
2. Por complemento: $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.
3. $P(X = 0) = 0.95^{25} = 0.2774$ y $P(X = 1) = 25(0.05)(0.95)^{24} = 0.3650$.
4. $P(X \geq 2) = 1 - 0.2774 - 0.3650 = \mathbf{0.3576}$.
5. b) $Y \triangleq$ número de llamadas hasta la segunda suscripción; $Y \sim \text{Pascal}(r = 2,\ p = 0.05)$. $P(Y = 12) = \binom{11}{1}(0.05)^2(0.95)^{10} = \mathbf{0.0165}$.

Ejercicio 4.5.4 · Llamadas a una central: Poisson con reescala

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 4.

A la central telefónica de un edificio entran, en promedio, 6 llamadas por minuto. Calcule la probabilidad de que:

- a) lleguen cinco llamadas en dos minutos;
- b) lleguen al menos dos llamadas en un minuto.

Resolución.

1. a) $X \triangleq$ número de llamadas en 2 min. Se reescala la tasa: $\lambda t = 6(2) = 12$, así que $X \sim \text{Poisson}(12)$.
2. $P(X = 5) = \frac{12^5 e^{-12}}{5!} = \frac{248\,832\, e^{-12}}{120} = \mathbf{0.0127}$.
3. b) $X \triangleq$ número de llamadas en 1 min; $X \sim \text{Poisson}(6)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.8

Adaptado de: 2º final 2015-1, problema 2.

El 7 % de los sensores de luz de una tienda salen defectuosos. Se compran tres sensores, que se comportan de manera independiente. Determine la probabilidad de que:

- a) exactamente uno sea defectuoso;
- b) a lo más dos sean defectuosos.

Resultado: a) 0.1816; b) 0.9997.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

2.7 Errores frecuentes

1. **Voltear la condicional.** El dato $P(D \mid B)$ no es lo que se pide, $P(B \mid D)$. Lo que sigue al «si» o al «dado que» va detrás de la barra.
2. **Responder con la probabilidad a priori.** Dar $P(B) = 0.35$ cuando se pide $P(B \mid D)$: la evidencia cambia el número.
3. **Dar la rama y no dividir.** $P(I \cap D) = 0.24$ no es $P(I \mid D)$; falta dividir entre $P(D)$.
4. **Obtener una probabilidad mayor que 1.** Es señal de una fracción volteada: la rama va arriba y la suma de las ramas, abajo.
5. **Olvidar «el resto».** El origen que no se menciona tiene probabilidad 1− la suma de los demás.
6. **Evidencia negativa con los datos originales.** Si la evidencia es «no defectuoso», hay que usar $1 - P(D \mid \cdot)$ en **cada** rama.
7. **Dividir en una intersección.** «Y además» o «ambos» es una rama ($P(A)P(\bar{D} \mid A)$), no una condicional.
8. **Olvidar la certeza.** «Si conoce la respuesta, contesta bien» significa $P(C \mid S) = 1$; esa rama también entra en el denominador.
9. **Copiar mal un porcentaje.** El 60 % es 0.60, no 0.06. Revisa cada dato antes de multiplicar.
10. **Confundir independientes con excluyentes.** Excluyentes: $P(A \cap B) = 0$. Independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
11. **Redondear antes de dividir.** Arrastra 4 decimales o trabaja con fracciones.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ · $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ · De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ · $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ · clásica: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
- $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ · $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$
- Independencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ · serie: $\prod p_i$ · paralelo: $1 - \prod(1 - p_i)$
- Total: $P(D) = \sum P(B_i)P(D \mid B_i)$ · Bayes: $P(B_r \mid D) = \frac{P(B_r)P(D|B_r)}{P(D)}$
- Evidencia negativa: $P(\bar{D} \mid B_i) = 1 - P(D \mid B_i)$ · $P(\bar{D}) = 1 - P(D)$
- $P(A \mid B \cup C) = \frac{P(AB)+P(AC)-P(ABC)}{P(B)+P(C)-P(BC)}$ · $P(A \cup B \mid C) = \frac{P(AC)+P(BC)-P(ABC)}{P(C)}$

4. Usa $P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ o $P(a < T < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. No hace falta integrar.
5. Si el enunciado dice «si ya lleva…», «dado que no ocurrió antes de…», aplica la **falta de memoria**: resta el tiempo transcurrido y calcula la probabilidad sin condición.
6. **Uniforme.** $P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}$: longitud del tramo entre longitud total.

4.3.4 Normal: uso de la tabla

1. Escribe $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y comprueba si el dato es σ o σ^2.
2. Estandariza: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ y **redondea a dos decimales**, porque la tabla solo tiene dos.
3. Dibuja la campana y sombrea el área pedida.
4. Lee $F_Z(z)$ en la tabla: el **renglón** da el entero y el primer decimal de z; la **columna**, el segundo decimal. Fragmento de la tabla (completa en el Apéndice A):

z	0.00	0.04	0.05	0.08	0.09
1.5	0.9332	0.9382	0.9394	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9495	0.9505	0.9535	0.9545

Para $z = 1.58$: renglón 1.5, columna 0.08, $F_Z(1.58) = 0.9429$.

5. Combina las áreas: $P(Z \le z) = F_Z(z)$; $P(Z \ge z) = 1 - F_Z(z)$; $P(a \le Z \le b) = F_Z(b) - F_Z(a)$; $F_Z(-z) = 1 - F_Z(z)$ si la tabla solo trae valores positivos.
6. **Lectura inversa** («el valor que deja el 95 % por debajo»): busca 0.95 **dentro** de la tabla. Queda entre 0.9495 ($z = 1.64$) y 0.9505 ($z = 1.65$), así que $z_{0.95} \approx 1.645$. Despeja $x = \mu + z\sigma$.

4.3.5 Aproximación normal a la binomial

1. Verifica $np > 5$ y $nq > 5$. Calcula $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$.
2. Aplica la corrección por continuidad según la pregunta:

Binomial X	Normal Y, con corrección
$P(X = k)$	$P(k - 0.5 \le Y \le k + 0.5)$
$P(X \le k)$	$P(Y \le k + 0.5)$
$P(X < k) = P(X \le k - 1)$	$P(Y \le k - 0.5)$
$P(X \ge k)$	$P(Y \ge k - 0.5)$
$P(X > k) = P(X \ge k + 1)$	$P(Y \ge k + 0.5)$
$P(a \le X \le b)$	$P(a - 0.5 \le Y \le b + 0.5)$

3. Estandariza **con** $\mu = np$, no con alguno de los valores de la pregunta, y usa la tabla como en 4.3.4.
4. Si los términos son pocos, puedes dar también el valor exacto con la binomial; sirve para comprobar.

Unidad 3 · Variables aleatorias: función de probabilidad, de densidad y de distribución, media y variancia

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno conocerá el concepto de variable aleatoria, y podrá analizar el comportamiento probabilista de la variable, a través de su distribución y sus características numéricas.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 17 de los 18 finales de 2011-1 a 2018-1 (falta en el 2° final 2018-1), casi siempre como problema 3. Vale de 10 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 (15 min).
  2. Sigue el ejemplo 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3.1 Conceptos y expresiones

Variable aleatoria. Una *variable aleatoria* X es una función que asigna un número real a cada resultado de un experimento aleatorio: el número de piezas defectuosas, el tiempo de espera, la utilidad de una venta. Se define con palabras: «Sea X el número de lotes que ordena un cliente». Su *recorrido* R_X es el conjunto de valores que puede tomar.

- **Discreta:** toma valores aislados que se pueden contar (0, 1, 2…). Se describe con una tabla o una fórmula de $f_X(x) = P(X = x)$.
- **Continua:** toma cualquier valor de un intervalo. Se describe con una función de densidad $f_X(x)$, dada por una fórmula o una gráfica.

Función de probabilidad (discreta) y **función de densidad (continua).**

	Discreta	Continua
Propiedades	$f_X(x) \geq 0$; $\sum_x f_X(x) = 1$	$f_X(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$
$P(a \leq X \leq b)$	$\sum_{a \leq x \leq b} f_X(x)$	$\int_a^b f_X(x)\,dx$ (área bajo la curva)
$P(X = a)$	$f_X(a)$	0

Función de distribución acumulativa. $F_X(x) = P(X \leq x)$.

- Propiedades: $0 \leq F_X(x) \leq 1$; nunca decrece; vale 0 a la izquierda de R_X y 1 a la derecha.
- Discreta: $F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_X(t)$. Es una **escalera**: constante entre dos valores y con un salto en cada valor; el tamaño del salto en x_i es $f_X(x_i)$.
- Continua: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$, y $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$.
- Para cualquier variable: $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ y $P(X > a) = 1 - F_X(a)$.

Aproximación normal a la binomial. Si n es grande, con $np > 5$ y $nq > 5$, Binomial$(n, p) \approx N(np,\ npq)$. Como se aproxima una variable discreta con una continua, cada valor entero k se representa con el intervalo $[k - 0.5,\ k + 0.5]$: es la **corrección por continuidad**.

Números aleatorios (programa, 4.6). Si $U \sim$ Uniforme$(0, 1)$, entonces $X = F_X^{-1}(U)$ tiene función de distribución F_X (*método de la transformada inversa*). Para la exponencial, $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$. Este tema se practica con computadora y no aparece en los finales.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Modelo	Parámetros	Procedimiento
«n piezas, personas o llamadas», cada una éxito o fracaso con la misma p; «cuántos de los n»	Binomial	n, p	4.3.1
«el primer éxito ocurre en el x-ésimo intento»	Geométrica	p	4.3.1
«el r-ésimo éxito ocurre en el x-ésimo intento», «disparar 7 veces para acertar 4»	Pascal	r, p	4.3.1
«se eligen n al azar, **sin reemplazo**, de un lote de N con r defectuosos»	Hipergeométrica	N, r, n	4.3.2
«en promedio λ por hora, por minuto, por metro»; «número de llegadas en…»	Poisson	λt	4.3.3
«tiempo hasta la falla», «tiempo entre llegadas», «vida media», «si ya lleva…»	Exponencial	$\lambda = \frac{1}{\text{media}}$	4.3.3
«puede variar de a a b con la misma probabilidad»	Uniforme	a, b	4.3.3
medida continua «con distribución normal», con media y desviación estándar	Normal	μ, σ	4.3.4
«el valor que excede el 95 %», «el percentil…»	Normal, lectura inversa	μ, σ	4.3.4
binomial con n grande (50, 80, 400) y «aproxime» o sin calculadora para tantos términos	Normal con ± 0.5	np, npq	4.3.5

Dos preguntas deciden casi siempre:

1. ¿Lo que se pide **se cuenta** (0, 1, 2…) o **se mide** (minutos, años, milímetros)?
   - Se cuenta con n fijo: binomial o hipergeométrica (según haya o no reemplazo). Se cuenta con una tasa: Poisson. Se cuentan ensayos hasta un éxito: geométrica o Pascal.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«probabilidad de que esté entre…», «dado que $X >$…»	probabilidad o condicional con intervalos	3.3.5
«promedio», «valor esperado», «utilidad esperada», «desviación estándar»	$E(X)$, σ_X, $E[g(X)]$	3.3.6
«mediana», «moda»	$F_X(\tilde{x}) = 0.5$; máximo de f_X	3.3.7

3.3 Procedimientos

3.3.1 Variable discreta con tabla

1. Arma la tabla con cuatro renglones:

x	x_1	x_2	…	**Σ**
$f_X(x)$				debe dar 1
$x\,f_X(x)$				$E(X)$
$x^2 f_X(x)$				$E(X^2)$

2. Si hay una constante k, iguala la suma del renglón f_X a 1 y despéjala.
3. $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ y $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$. Lee si se pide la variancia o la desviación estándar.
4. Si el problema da incógnitas en los valores de x, plantea una ecuación con $E(X)$ y otra con $\mathrm{Var}(X)$, y resuelve el sistema.
5. Para $Y = g(X)$: calcula $g(x)$ para cada valor; si dos valores de x dan el mismo y, **suma** sus probabilidades.

3.3.2 Construir la función de probabilidad por conteo

1. Define X con palabras y escribe su recorrido: «X: número de cepillos defectuosos entre los tres elegidos, $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$».
2. Con N objetos, de los que K tienen la característica, y n elegidos sin reemplazo:

$$f_X(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

3. Si el espacio muestral es pequeño, enumera los resultados igualmente probables y cuenta.
4. Si los ensayos son independientes, multiplica: con dos días independientes, $P(X = 0) = P(\text{nada el día 1})\,P(\text{nada el día 2})$.
5. Comprueba que las probabilidades sumen 1.

3.3.3 Variable continua: constante y función acumulativa

1. **Constante:** $\int_{\text{orilla izq.}}^{\text{orilla der.}} f_X(x)\,dx = 1$. Si f_X tiene tramos, la integral se parte en tramos. Con una figura, área = 1 (triángulo: $\frac{b\,h}{2}$).

Unidad 4 · Modelos probabilísticos comunes: binomial, geométrica, Pascal, hipergeométrica, Poisson, uniforme, exponencial y normal

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno conocerá algunas de las distribuciones más utilizadas en la práctica de la ingeniería y seleccionará la más adecuada para analizar algún fenómeno aleatorio en particular.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 18 finales de 2011-1 a 2018-1: en 16 como problema propio y en 2 dentro de un problema de otra unidad. Vale de 15 a 20 puntos, y en varios finales hay dos problemas de esta unidad (por ejemplo, Poisson y normal).
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 y la tabla de la sección 4.2 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro (10 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Modelo probabilístico. Muchos fenómenos aleatorios tienen la misma estructura: contar éxitos en n intentos, contar llegadas en un intervalo, medir el tiempo hasta un evento. Para cada estructura ya existe una función de probabilidad o de densidad con nombre propio. Resolver un problema de esta unidad consiste en **reconocer el modelo**, fijar sus **parámetros** y aplicar la fórmula. Se escribe $X \sim$ Modelo(parámetros), por ejemplo $X \sim \text{Binomial}(n = 25,\ p = 0.05)$.

Ensayo de Bernoulli. Experimento con dos resultados posibles: *éxito*, con probabilidad p, y *fracaso*, con probabilidad $q = 1 - p$. Si X vale 1 en el éxito y 0 en el fracaso, $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, con $f_X(1) = p$, $f_X(0) = q$, $E(X) = p$ y $Var(X) = pq$. Los modelos binomial, geométrico y de Pascal se construyen repitiendo ensayos de Bernoulli **independientes** con la **misma** p.

Modelos discretos.

Modelo	X representa…	$f_X(x)$	Valores	$E(X)$	$Var(X)$
Binomial(n, p)	número de éxitos en n ensayos	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$	$0, 1, \ldots, n$	np	npq
Geométrica(p)	número de ensayos hasta el primer éxito	$q^{x-1}p$	$1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal o binomial negativa(r, p)	número de ensayos hasta el r-ésimo éxito	$\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$	$r, r+1, \ldots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Hipergeométrica(N, r, n)	número de éxitos al extraer n **sin reemplazo** de N objetos, r de ellos éxitos	$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$0, \ldots, \text{mín}(n, r)$	$n\frac{r}{N}$	$n\frac{r}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

Determine:
- a) la función de distribución acumulativa de X;
- b) la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo $[-2, 0]$.

Datos. Variable continua; f_X es positiva en $[-6, 4]$.
Planteamiento. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ por tramos; $P(-2 \le X \le 0) = F_X(0) - F_X(-2)$.
Resolución.

1. Comprobación de que es densidad: $\frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-6}^{4} = \frac{1}{50}\big((8 + 24) - (18 - 36)\big) = \frac{32-(-18)}{50} = 1$.
2. a) Para $x < -6$: $F_X(x) = 0$.
3. Para $-6 \le x \le 4$: $F_X(x) = \frac{1}{50}\left[\frac{t^2}{2} + 6t\right]_{-6}^{x} = \frac{1}{50}\left(\frac{x^2}{2} + 6x - (-18)\right) = \frac{x^2+12x+36}{100} = \frac{(x+6)^2}{100}$.
4. Para $x > 4$: $F_X(x) = 1$. Comprobación: $F_X(4) = \frac{100}{100} = 1$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -6 \\ \frac{(x+6)^2}{100} & -6 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

5. b) $P(-2 \le X \le 0) = F_X(0) - F_X(-2) = \frac{36}{100} - \frac{16}{100} = \mathbf{0.2}$.
6. **Resultado:** la probabilidad de que X esté entre −2 y 0 es 0.2: el 20 % del área bajo la densidad.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Lotes pedidos: desviación estándar

Adaptado de: 1er final 2016-1, problema 3.

Un proveedor vende un producto en lotes de 5 kg. Sea X el número de lotes que ordena un cliente elegido al azar, con función de probabilidad $f_X(1) = 0.2$, $f_X(2) = 0.4$, $f_X(3) = 0.3$ y $f_X(4) = 0.1$. Obtenga la desviación estándar del número de lotes ordenados.

Resolución.

1. Comprobación: $0.2 + 0.4 + 0.3 + 0.1 = 1$.
2. $E(X) = 1(0.2) + 2(0.4) + 3(0.3) + 4(0.1) = 0.2 + 0.8 + 0.9 + 0.4 = 2.3$.
3. $E(X^2) = 1(0.2) + 4(0.4) + 9(0.3) + 16(0.1) = 0.2 + 1.6 + 2.7 + 1.6 = 6.1$.
4. $\sigma_X^2 = 6.1 - (2.3)^2 = 6.1 - 5.29 = 0.81$, así que $\sigma_X = \mathbf{0.9\ lotes}$.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 1er final 2013-1, problema 4.

El 7 % de los paquetes enviados se pierde. Una persona quiere enviar dos libros de $20 cada uno. Enviarlos en un paquete cuesta $5.20; por separado, $3.30 cada paquete. Si se quiere minimizar el desembolso esperado (envío más posible pérdida), ¿conviene un paquete o dos?

Resultado: un paquete, $8.00; dos paquetes, $9.40: conviene un solo paquete.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 3.

El tiempo semanal (en minutos) que un estudiante llega tarde a clase tiene densidad $f_X(x) = \frac{3}{500\,000}(2500 - x^2)$ para $-50 < x < 50$. Determine:
- a) el tiempo promedio semanal de retardo;
- b) la probabilidad de que el retardo exceda su promedio.

Resultado: $E(X) = 0$ min; $P(X > 0) = 0.5$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.7

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 3.

Sea X continua con densidad $f_X(x) = k \cos 2x$ para $0 < x < \frac{\pi}{4}$ y 0 en otro caso. Determine:
- a) el valor de k;
- b) la función de distribución acumulativa;
- c) la mediana.

Resultado: $k = 2$; $F_X(x) = \operatorname{sen} 2x$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$; $\tilde{x} = \frac{\pi}{12} = 0.2618$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.8

Adaptado de: 1er final 2016-2, problema 4.

El tiempo T (en minutos) entre llegadas a un puesto de revistas tiene función de distribución acumulativa $F_T(t) = 1 - e^{-1.6t}$ para $t \ge 0$ y 0 para $t < 0$. Determine:
- a) $P(T \ge 1 \mid T \le 2)$;
- b) la función de densidad.

Resultado: a) 0.1680; b) $f_T(t) = 1.6e^{-1.6t}$ para $t \ge 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

3.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar renglones de F_X.** Faltan el «0 antes» o el «1 después», o el segundo tramo no arrastra lo acumulado en el primero.
2. **Integrar fuera del soporte.** Los límites son las orillas donde $f_X \neq 0$, no $-\infty$ e ∞ literalmente.

Resolución.

1. X: número de cepillos defectuosos entre los tres elegidos; $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Hay $\binom{10}{3} = 120$ muestras posibles.
2. a) $f_X(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{120}$:
   - $f_X(0) = \frac{1(20)}{120} = \frac{1}{6}$; $f_X(1) = \frac{4(15)}{120} = \frac{1}{2}$;
   - $f_X(2) = \frac{6(6)}{120} = \frac{3}{10}$; $f_X(3) = \frac{4(1)}{120} = \frac{1}{30}$. Suman 1.
3. b) $E(X) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{6}{10} + \frac{3}{30} = \mathbf{1.2}$ **cepillos**.
4. $E(X^2) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{12}{10} + \frac{9}{30} = 2$, así que $\sigma_X^2 = 2 - 1.44 = 0.56$ y $\sigma_X = \mathbf{0.7483}$.

Ejercicio 3.5.5 · Densidad por tramos y probabilidad condicional

Adaptado de: 2º final 2015-1, problema 3.

Sea Y una variable aleatoria con función de densidad $f_Y(y) = 0.2$ para $-1 \le y \le 0$, $f_Y(y) = 0.2 + ky$ para $0 < y \le 1$, y 0 en otro caso.

- a) Determine el valor de k.
- b) Calcule $P(Y > 0.5 \mid Y > 0.1)$.

Resolución.

1. a) $\int_{-1}^{0} 0.2\,dy + \int_0^1 (0.2 + ky)\,dy = 0.2 + \left(0.2 + \frac{k}{2}\right) = 1$, de donde $\frac{k}{2} = 0.6$ y $k = \mathbf{1.2}$.
2. b) Como $0.5 > 0.1$: $P(Y > 0.5 \mid Y > 0.1) = \frac{P(Y>0.5)}{P(Y>0.1)}$; los dos intervalos caen en el segundo tramo.
3. Antiderivada del segundo tramo: $G(y) = 0.2y + 0.6y^2$, con $G(1) = 0.8$.
4. Numerador: $G(1) - G(0.5) = 0.8 - (0.1 + 0.15) = 0.55$. Denominador: $G(1) - G(0.1) = 0.8 - (0.02 + 0.006) = 0.774$.
5. $P(Y > 0.5 \mid Y > 0.1) = \frac{0.55}{0.774} = \mathbf{0.7106}$.

Ejercicio 3.5.6 · Densidad triangular dada por una figura

Adaptado de: 1er final 2018-1, problema 3.

La gráfica de la función de densidad de X es un triángulo con base de $x = 0$ a $x = 2$ y vértice en $(1, k)$: $f_X(x) = kx$ en $[0, 1]$ y $f_X(x) = k(2 - x)$ en $[1, 2]$.

- a) Determine el valor de k.
- b) Calcule el valor esperado de X.

Resolución.

1. a) Área del triángulo: $\frac{bh}{2} = \frac{2k}{2} = k = 1$, así que $k = \mathbf{1}$.
2. Con integrales: $k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + k\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{k}{2} + k\left(2 - \frac{3}{2}\right) = k = 1$.
3. b) $E(X) = \int_0^1 x \cdot x\,dx + \int_1^2 x(2 - x)\,dx = \frac{1}{3} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = \mathbf{1}$.
4. **Observación:** la densidad es simétrica alrededor de $x = 1$, así que $E(X) = 1$ sin integrar. Además, $E(X^2) = \frac{7}{6}$ y $\sigma_X^2 = \frac{1}{6}$.

Ejercicio 3.5.7 · De la acumulativa continua a la densidad

Adaptado de: 1er final 2011-1, problema 2.

La función de distribución acumulativa de X es $F_X(x) = 0$ para $x < 0$, $F_X(x) = \frac{x^3 + x^2}{2}$ para $0 \le x \le 1$ y $F_X(x) = 1$ para $x > 1$.

- a) Obtenga la media y la variancia de X.
- b) Calcule la probabilidad de que X se encuentre entre 0.5 y 1.

Resolución.

1. Se deriva: $f_X(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$ en $[0, 1]$ y 0 en otro caso.
2. a) $E(X) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + x^2\right) dx = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24} = \mathbf{0.7083}$.
3. $E(X^2) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^4 + x^3\right) dx = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$.
4. $\sigma_X^2 = \frac{11}{20} - \left(\frac{17}{24}\right)^2 = \frac{139}{2880} = \mathbf{0.0483}$.
5. b) $P(0.5 \le X \le 1) = F_X(1) - F_X(0.5) = 1 - \frac{0.125 + 0.25}{2} = 1 - 0.1875 = \frac{13}{16} = \mathbf{0.8125}$.

Ejercicio 3.5.8 · Utilidad esperada: propiedades del operador

Adaptado de: 2º final 2011-1, problema 2.

Una tienda compró tres computadoras a \$5000 cada una y las venderá a \$10 000. El fabricante readquiere cada computadora no vendida a \$2000. Sea X el número de computadoras vendidas, con $f_X(0) = 0.1$, $f_X(1) = 0.2$, $f_X(2) = 0.3$ y $f_X(3) = 0.4$. La utilidad es $U = 10\,000X + 2000(3 - X) - 15\,000 = 8000X - 9000$. Calcule la utilidad esperada y su variancia.

Resolución.

1. $E(X) = 0(0.1) + 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.4) = 2$.
2. $E(X^2) = 0 + 0.2 + 1.2 + 3.6 = 5$, así que $\mathrm{Var}(X) = 5 - 2^2 = 1$.
3. $E(U) = 8000\,E(X) - 9000 = 16\,000 - 9000 = \mathbf{\$7000}$.
4. $\mathrm{Var}(U) = 8000^2\,\mathrm{Var}(X) = \mathbf{64\,000\,000}$ (pesos²), es decir, $\sigma_U = \$8000$.
5. **Resultado:** en promedio, la utilidad es de \$7000, con una desviación estándar de \$8000.

Ejercicio 3.5.9 · Tiempo de digestión: integral por partes

Adaptado de: 1er final 2013-1, problema 3.

Sea X el tiempo de digestión (en horas) de una comida, con función de densidad $f_X(x) = 9xe^{-3x}$ para $x \ge 0$ y 0 en otro caso.

- a) Determine la función de distribución acumulativa y úsela para calcular la probabilidad de que la comida se digiera en a lo más dos horas.
- b) Calcule la probabilidad de que la digestión tome más de tres horas.
- c) Calcule el tiempo promedio de digestión.

Resolución.

1. a) Por partes, con $u = t$ y $dv = e^{-3t}dt$: $\int 9te^{-3t}\,dt = 9\left(-\frac{t}{3}e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}\right) = -3te^{-3t} - e^{-3t}$.
2. $F_X(x) = \left[-3te^{-3t} - e^{-3t}\right]_0^x = 1 - 3xe^{-3x} - e^{-3x}$ para $x \ge 0$, y $F_X(x) = 0$ para $x < 0$.
3. $P(X \le 2) = F_X(2) = 1 - 6e^{-6} - e^{-6} = 1 - 7e^{-6} = \mathbf{0.9826}$.
4. b) $P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 9e^{-9} + e^{-9} = 10e^{-9} = \mathbf{0.0012}$.