$z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

4. **c) Curva en** $z = \sqrt{2}$**:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 - 1 = 1$, una elipse de semiejes 2 y 3 en el plano $z = \sqrt{2}$: $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\operatorname{sen} t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

Ejercicio 6.6.9 ← volver

1. **a)** $(x+1)(x+2) = 0$: solo aparece x, con un cuadrado igualado a constante. Caso degenerado de la tabla 6.1.7: **dos planos paralelos** $x = -1$ y $x = -2$, perpendiculares al eje x.
2. **b)** $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$: tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a 1: **esfera** de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; $x \in [0, 2]$, $y \in [-1, 1]$, $z \in [-2, 0]$.
3. **c)** $y^2 + z^2 = 2x^2$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono circular** de vértice en el origen y eje x (la variable de signo solitario). Trazas $x = k$: circunferencias de radio $\sqrt{2}\,|k|$; planos $y = 0$ y $z = 0$: rectas $z = \pm\sqrt{2}\,x$ y $y = \pm\sqrt{2}\,x$.
4. **d)** $z + 4 = y^2 - x^2$: dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico** con punto silla $(0, 0, -4)$ y eje paralelo a z. Plano $x = 0$: parábola $z+4 = y^2$, abre hacia arriba; plano $y = 0$: $z + 4 = -x^2$, abre hacia abajo.

4. **Identificación:** hipérbola equilátera en el plano $x = 8$, con centro $(8, 0, 0)$ y asíntotas las rectas $y = 0$ y $z = 0$ de ese plano. Sus vértices están sobre la recta $y = z$: $(8, 2, 2)$ y $(8, -2, -2)$; $a = 2\sqrt{2}$. Con $t > 0$ se recorre la rama con $y, z > 0$; con $t < 0$, la otra.

E.6 · Unidad 6 · Superficies (solo Plan 2010)

Ejercicio 6.6.1 ← volver

1. **Directriz:** $\vec{q}(\theta) = (-2 + 2\cos\theta,\ 1 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 0)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -7)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (3, -2, 7) + s(-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -7)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación de** s**:** $z = 7 - 7s \Rightarrow s = \dfrac{7 - z}{7}$.
5. **Eliminación de** θ**:**

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{s} + 5\right) = \frac{7x - 5z + 14}{2(7-z)}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y+2}{s} - 3\right) = \frac{7y + 3z - 7}{3(7-z)}.$$

6. **Identidad:** $\dfrac{(7x-5z+14)^2}{4(7-z)^2} + \dfrac{(7y+3z-7)^2}{9(7-z)^2} = 1$; multiplicando por $36(7-z)^2$:

$$9(7x - 5z + 14)^2 + 4(7y + 3z - 7)^2 = 36(z-7)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 0$: $9 \cdot 49(x+2)^2 + 4 \cdot 49(y-1)^2 = 36 \cdot 49$, que es la elipse dada; el vértice da $9(21 - 35 + 14)^2 + 4(-14 + 21 - 7)^2 = 0$.

Ejercicio 6.6.2 ← volver

1. **Directriz:** $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.
2. **a) Ecuación vectorial:** las generatrices son paralelas al eje:

$$\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s(-1, 2, 1), \quad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

3. **Paramétricas:** $x = 2\cos\theta - s$, $y = 2\operatorname{sen}\theta + 2s$, $z = 3 + s$.
4. **Eliminación:** $s = z - 3$; $\cos\theta = \dfrac{x+s}{2} = \dfrac{x+z-3}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y-2s}{2} = \dfrac{y-2z+6}{2}$.
5. **b) Ecuación cartesiana:** $(x + z - 3)^2 + (y - 2z + 6)^2 = 4$; desarrollada, $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz - 4yz - 6x + 12y - 30z + 41 = 0$.
6. **Comprobación:** con $z = 3$ queda $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 6.6.3 ← volver

1. **a)** $(x+1)^2 - 1 + 8y^2 = 23 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{24} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. Falta z y los dos cuadrados son positivos: se cumple la forma del **cilindro elíptico**; no es elipsoide.
   - **Eje:** la recta $x = -1$, $y = 0$, paralela al eje z; generatrices paralelas a $\hat{k}$.
   - **Directriz:** elipse de centro $(-1, 0, 0)$ en $z = 0$, semiejes $2\sqrt{6}$ (en x) y $\sqrt{3}$ (en y).
   - **Extensión:** $x \in [-1 - 2\sqrt{6},\ -1 + 2\sqrt{6}]$, $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $z \in \mathbb{R}$.

2. **b)** $(x-1)^2+3(y+2)^2+3z^2=9 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}=1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; denominadores de y y z iguales: de revolución alrededor de la recta $y=-2$, $z=0$.
   - **Centro** $(1,-2,0)$; semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
   - **Trazas:** plano $x=1$, circunferencia $(y+2)^2+z^2=3$; plano $z=0$, elipse $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$.
   - **Extensión:** $x\in[-2,4]$, $y\in[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}]$, $z\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.
3. **c)** $2x^2-3y^2+5z^2=25 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25/2}-\dfrac{y^2}{25/3}+\dfrac{z^2}{5}=1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y.
   - **Trazas:** plano $y=0$ (garganta), elipse $2x^2+5z^2=25$, de semiejes $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y $\sqrt{5}$; planos $x=0$ y $z=0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 6.6.4 ← volver

1. **a)** $\dfrac{(x+2)^2}{2}+\dfrac{(y-3)^2}{4}-(z-1)^2=1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-2,3,1)$; **eje** la recta $x=-2$, $y=3$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z=1$ (garganta), elipse $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$, semiejes $\sqrt{2}$ y 2; planos $x=-2$ y $y=3$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
2. **b)** Multiplicando por 4 y despejando la variable lineal: $x-1=z^2-\dfrac{4}{3}(y-2)^2$. Dos cuadrados de signo contrario igualados a una variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.
   - **Punto silla** $(1,2,0)$; eje paralelo a x (la recta $y=2$, $z=0$).
   - **Trazas:** plano $y=2$, parábola $x-1=z^2$, abre hacia x positivo; plano $z=0$, parábola $x-1=-\frac{4}{3}(y-2)^2$, abre hacia x negativo; plano $x=1$, rectas $z=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(y-2)$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** Pasando $-2z^2$ al primer miembro: $x^2+y^2+z^2=2$. Tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a una constante positiva: **esfera** de centro $(0,0,0)$ y radio $\sqrt{2}$; $x,y,z\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Ejercicio 6.6.5 ← volver

1. **a) Completar cuadrados:** $2\left(x^2+\frac{x}{2}\right)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ y $y^2-2y=(y-1)^2-1$:

$$2\left(x+\tfrac{1}{4}\right)^2+(y-1)^2+2z^2=\tfrac{17}{8} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{17/16}+\frac{(y-1)^2}{17/8}+\frac{z^2}{17/16}=1.$$

   Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; los denominadores de x y z son iguales: de revolución alrededor de la recta $x=-\frac{1}{4}$, $z=0$ (paralela a y).

   - **Centro** $\left(-\frac{1}{4},1,0\right)$; semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$ (en x y en z) y $\sqrt{\frac{17}{8}}=\frac{\sqrt{34}}{4}$ (en y).
   - **Trazas:** plano $y=1$, circunferencia $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+z^2=\frac{17}{16}$; planos $x=-\frac{1}{4}$ y $z=0$, elipses.
   - **Extensión:** $x\in\left[-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right]$, $y\in\left[1-\frac{\sqrt{34}}{4},1+\frac{\sqrt{34}}{4}\right]$, $z\in\left[-\frac{\sqrt{17}}{4},\frac{\sqrt{17}}{4}\right]$.
2. **b)** $\dfrac{(y+1)^2}{2}-\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(z-1)^2}{4}=0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono**; los denominadores de x y z son distintos: cono elíptico.
   - **Vértice** $(2,-1,1)$; **eje** la recta $x=2$, $z=1$, paralela a y (la variable de signo solitario).
   - **Trazas:** $y=k\neq-1$, elipses $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}=\frac{(k+1)^2}{2}$; plano $z=1$, rectas $y+1=\pm(x-2)$; plano $x=2$, rectas $z-1=\pm\sqrt{2}(y+1)$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** $(x+1)^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-1,0,0)$; **eje** la recta $x=-1$, $y=0$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z=0$ (garganta), elipse $(x+1)^2+\frac{y^2}{4}=1$; plano $x=-1$, hipérbola $y^2-z^2=4$; plano $y=0$, hipérbola $(x+1)^2-\frac{z^2}{4}=1$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 6.6.6 ← volver

1. **Directriz:** circunferencia de radio $\sqrt{2}$ en $y=0$: $\vec{q}(\theta)=(\sqrt{2}\cos\theta,\ 0,\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(0,1,0)+s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
3. **Eliminación:** $y=1-s\Rightarrow s=1-y$; $x^2+z^2=2s^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=2s^2$.
4. **Ecuación cartesiana:** $x^2+z^2=2(y-1)^2$: cono circular de vértice $(0,1,0)$ y eje y.

Ejercicio 6.6.7 ← volver

1. **Centro de cada circunferencia:** el punto de L con parámetro t, $(1,1+t,1)$; su plano es $y=1+t$, paralelo a $y=0$.
2. **Circunferencia en ese plano:** se suma $3\cos\theta$ a x y $3\operatorname{sen}\theta$ a z (las dos coordenadas del plano).
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,t)=(1+3\cos\theta,\ 1+t,\ 1+3\operatorname{sen}\theta)=(1+3\cos\theta,\ 1,\ 1+3\operatorname{sen}\theta)+t(0,1,0)$: directriz en $y=1$ y generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$.
4. **Cartesiana** (no se pide): $(x-1)^2+(z-1)^2=9$, cilindro circular recto de eje L.

Ejercicio 6.6.8 ← volver

1. **Forma ordinaria:** $z^2-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$: hiperboloide de dos hojas de eje z, vértices $(0,0,\pm1)$.
2. **a) Trazas:** plano XZ ($y=0$): hipérbola $z^2-\frac{x^2}{4}=1$, de eje focal z; plano YZ ($x=0$): hipérbola $z^2-\frac{y^2}{9}=1$.
3. **b) Valores de z:** el primer miembro de la ecuación dada es ≥ 0, así que $z^2-1\geq 0$: