Cartesianas: $(z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2)$, $x=-3$. Es una parábola en el plano $x=-3$, vértice $(-3,2,4)$, eje paralelo al eje y, abre hacia las y negativas ($4p=-\frac{9}{5}$, $p=-\frac{9}{20}$).

3. **Intervalo de z:** $-1 \le \operatorname{sen} t \le 1 \Rightarrow -3 \le -3\operatorname{sen} t \le 3 \Rightarrow z \in [1,7]$.
4. **Intervalo de y:** $0 \le \operatorname{sen}^2 t \le 1 \Rightarrow -5 \le -5\operatorname{sen}^2 t \le 0 \Rightarrow y \in [-3,2]$.
5. **Recorte:** solo se recorre el arco de la parábola entre $(-3,-3,1)$ y $(-3,-3,7)$, que pasa por el vértice $(-3,2,4)$.

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. **a)** $\operatorname{sen} 2\theta$ y $\cos\theta$ existen para todo real: $\theta \in \mathbb{R}$. Las dos funciones tienen periodo que divide a 2π, así que $\theta \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez.
2. **b)** $-1 \le \operatorname{sen} 2\theta \le 1 \Rightarrow x \in [2,4]$; $-1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow z \in [-1,1]$. (Además $y=-7$.)
3. **c) Despeje:** $x-3 = \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\cos\theta = z$. Al elevar al cuadrado y usar $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$:

$$(x-3)^2 = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = 4\big(1-z^2\big)z^2.$$

   Cartesianas: $y=-7$, $(x-3)^2 = 4z^2\big(1-z^2\big)$.
4. **Observación:** la ecuación es de cuarto grado: no es una cónica. Es una curva cerrada en forma de ocho en el plano $y=-7$, que se cruza en $(3,-7,0)$ ($\theta=\frac{\pi}{2}$ y $\theta=\frac{3\pi}{2}$). El problema no pide identificarla.

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. **a) Condiciones:** $9-t \ge 0 \Rightarrow t \le 9$; la raíz de z está en el denominador: $t+16>0 \Rightarrow t > -16$. Intervalo paramétrico: $t \in (-16, 9]$.
2. **b) x:** $9-t$ recorre $[0,25)$ (vale 0 en $t=9$ y se acerca a 25 cuando $t \to -16^+$), así que $\sqrt{9-t} \in [0,5)$ y $x \in [-3,2)$. El 2 no se alcanza porque $t=-16$ está excluido.
3. **z:** $t+16$ recorre $(0,25]$, $\sqrt{t+16} \in (0,5]$ y $z = \frac{2}{\sqrt{t+16}}$ es decreciente: $z=\frac{2}{5}$ en $t=9$ y $z \to \infty$ cuando $t \to -16^+$. Entonces $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.
4. **Observación:** la curva está en el plano $y=-1$ y y toma solo ese valor.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. **a)** En $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t$ va de 0 a 1 y regresa a 0: $0 \le \cos t \le 1$, así que $z \in [0,2]$. (Y $\operatorname{sen} t \in [-1,1]$ da $y \in [-2,2]$.)
2. **b) Vectorial:** $\vec{p} = (-1,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t) = (-1,0,0) + 2\operatorname{sen} t\,\hat{j} + 2\cos t\,\hat{k}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. **c) Cartesianas:** $\operatorname{sen} t = \frac{y}{2}$, $\cos t = \frac{z}{2}$; con $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$: $y^2 + z^2 = 4$, $x=-1$, con $z \ge 0$.
4. **Identificación:** semicircunferencia en el plano $x=-1$, de centro $(-1,0,0)$ y radio 2: la mitad con $z \ge 0$, de $(-1,-2,0)$ a $(-1,2,0)$ pasando por $(-1,0,2)$.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. **a)** $x=8$, $y=2t$, $z=\frac{2}{t}$.
2. **b) Eliminación:** $t=\frac{y}{2}$ y $z=\frac{2}{y/2}=\frac{4}{y}$. Cartesianas: $yz=4$, $x=8$.
3. **c)** $\frac{2}{t}$ exige $t \ne 0$: $t \in (-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Las líneas marcadas SOLO PLAN 2016 o SOLO PLAN 2010 son de un solo plan; las Unidades 2 y 6 son solo del Plan 2010 (en el Plan 2016 están en Cálculo Vectorial).

A.1 Secciones cónicas (Unidad 1, Parte B)

- General: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Con $B=0$: $A=C$ circunferencia, $AC=0$ parábola, $AC>0$ elipse, $AC<0$ hipérbola.
- Circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.
- Parábola: $(y-k)^2=4p(x-h)$ o $(x-h)^2=4p(y-k)$; foco a p del vértice, directriz a $-p$, lado recto $|4p|$.
- Elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (a con el denominador mayor), $c^2=a^2-b^2$, $e=\frac{c}{a}<1$.
- Hipérbola: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (eje con el término positivo), $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, $e=\frac{c}{a}>1$.
- Lado recto de elipse e hipérbola: $\frac{2b^2}{a}$.
- SOLO PLAN 2016 $I=B^2-4AC$: <0 elipse, $=0$ parábola, >0 hipérbola.
- SOLO PLAN 2016 $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}$; $x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta$, $y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$; $A'+C'=A+C$.
- Paramétricas: elipse $x=h+a\cos t$, $y=k+b\operatorname{sen} t$; hipérbola $x=h+a\sec t$, $y=k+b\tan t$.

A.2 Curvas en el plano polar (Unidad 2)

- $(r,\theta)=(r,\theta+360^\circ k)=(-r,\theta+180^\circ+360^\circ k)$; el polo es $(0,\theta)$ para todo θ.
- $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $r^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r,θ): eje polar $(r,-\theta)$; recta a 90° $(r,180^\circ-\theta)$; polo $(r,\theta+180^\circ)=(-r,\theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta\to-\theta$ o $(-r,180^\circ-\theta)$; recta a 90° $\theta\to180^\circ-\theta$ o $(-r,-\theta)$; polo $r\to-r$ o $\theta+180^\circ$. Suficientes, no necesarias.
- $r=a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2},0\right)$; $r=a\operatorname{sen}\theta$: centro $\left(0,\frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r=a\pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a=b$, caracol con lazo si $a<b$.
- $r=a\operatorname{sen} n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2=\pm a^2\cos 2\theta$, $r^2=a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1\pm e\operatorname{sen}\theta}$: foco en el polo; $e<1$ elipse, $e=1$ parábola, $e>1$ hipérbola.

A.3 Álgebra vectorial (Unidad 3)

- $\overrightarrow{AB}=B-A$ · $|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$ · $\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ · punto medio $\frac{1}{2}(A+B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\hat{v}$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ · $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
- $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ · $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.

1. **a)** Dirección $\vec{n}_1 = (2,3,4)$, por A: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{4}$.
2. **b)** $d = \dfrac{|-4+3+8-8|}{\sqrt{4+9+16}} = \dfrac{1}{\sqrt{29}} = \dfrac{\sqrt{29}}{29}$.
3. **c)** Vectores de π_2: $(2,3,4)$ y $\overrightarrow{AB} = (-4,0,3)$ (no paralelos). Por A: $x = 2+2r-4s$, $y = 1+3r$, $z = -1+4r+3s$. Con $r=0$, $s=1$ se obtiene B.

Ejercicio 4.6.11 ← volver

1. **a)** $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1+2-3 = 0$: los planos son perpendiculares, $\theta = 90°$.
2. **Dirección:** $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2+3,\ 3+1,\ -1+2) = (5,4,1)$.
3. **Punto:** con $z=0$: $x-2y=1$, $x-y=-1$; restando, $y=-2$, $x=-3$. $(-3,-2,0)$ cumple las dos.
4. **b)** $L:\ x = -3+5t,\ y = -2+4t,\ z = t$.

Ejercicio 4.6.12 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(-3,3,0)\times(-2,0,2) = (6,6,6)$, o $(1,1,1)$. Por $(4,0,0)$: $\pi_2:\ x+y+z=4$ (sumando las paramétricas: $x+y+z=4$).
2. **a)** $(3,2,1)$ y $(1,1,1)$ no son proporcionales: no se cumple el paralelismo. Los planos se cortan en una recta y la distancia entre ellos es 0.
3. **b)** Paralela a los dos planos: dirección perpendicular a las dos normales,

$$\vec{u} = (3,2,1)\times(1,1,1) = (2-1,\ 1-3,\ 3-2) = (1,-2,1).$$

$L:\ x = 2+t,\ y = 3-2t,\ z = -1+t$.

Observación. La fórmula $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$ solo vale para planos paralelos; aplicarla aquí da un número sin sentido.

Ejercicio 4.6.13 ← volver

1. **a)** $2(1+2t)-3(2-t)+2(-2t) = 3t-4 = -7$, $t=-1$: $P(-1,3,2)$.
2. **b)** Para un punto de L: $2x-3y+2z+7 = 3t+3$, y $|\vec{n}| = \sqrt{17}$:

$$\frac{|3t+3|}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \ \Rightarrow\ |t+1| = 1 \ \Rightarrow\ t = 0 \text{ o } t = -2.$$

3. **Puntos:** $t=0$: $Q(1,2,0)$; $t=-2$: $Q(-3,4,4)$. Basta dar uno.

Ejercicio 4.6.14 ← volver

1. **Datos:** $2-z = \frac{z-2}{-1}$: $P_L(-3,-18,2)$, $\vec{u}_L = (2,6,-1)$. $\frac{2x-8}{2} = x-4$: $P_R(4,-8,-5)$, $\vec{u}_R = (1,2,0)$.
2. **Producto cruz:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (0+2,\ -1-0,\ 4-6) = (2,-1,-2)$, de módulo 3.
3. **a)** $\overrightarrow{P_L P_R} = (7,10,-7)$; $(7,10,-7)\cdot(2,-1,-2) = 14-10+14 = 18 \neq 0$: se cruzan, y $d = \frac{18}{3} = 6$.

- Directriz: elipse $(h+a\cos\theta,\ k+b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$: $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$ o $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.
- Completar cuadrados: $ax^2+dx = a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}$.
- $+\,+\,+\,=1$ elipsoide · $+\,+\,-\,=1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\,-\,-\,=1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $=0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $++\,=0$: recta; $++\,=-1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h-a, h+a]$; dos hojas $|z-l| \geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.

1. **Ángulo:** $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta \Rightarrow 6 = 12\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$. Como es agudo, $\theta = 30^\circ$.
2. **Producto escalar:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12\cos 30^\circ = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

E.4 · Unidad 4 · La recta y el plano en el espacio

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. **Plano π:** contiene la dirección $(2,1,-3)$ y, por ser perpendicular al plano XY, la dirección $\hat{k}$:
$$\vec{n} = (2,1,-3)\times(0,0,1) = (1,-2,0).$$
Pasa por el origen: $\pi:\ x-2y=0$.
2. **Plano π_0:** contiene las direcciones $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$:
$$\vec{n}_0 = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & 4 & m\end{vmatrix} = (-4,\ 5-2m,\ 8).$$
3. **Perpendicularidad:** $\vec{n}\cdot\vec{n}_0 = -4-2(5-2m) = 4m-14 = 0$, $m=\frac{7}{2}$.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. **Datos:** $P_0(-2,1,6)$, $\vec{u}=(3,2,3)$; el plano contiene la dirección $\hat{\jmath}$, normal del plano XZ.
2. **a)** $\vec{n} = (3,2,3)\times(0,1,0) = (-3,0,3)$, o $(1,0,-1)$. Por P_0: $(x+2)-(z-6)=0$, es decir, $x-z+8=0$.
3. **b)** $d = \dfrac{|0-0+8|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. **Datos:** $\vec{u}=(h,0,\sqrt{3})$; $\pi:\ x=1$, con $\vec{n}=(1,0,0)$.
2. **Ángulo recta–plano:** $\operatorname{sen}60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+3}}$.
3. **Ecuación:** $3(h^2+3) = 4h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = \pm 3$.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. **Datos de L:** $\frac{2-2x}{-2} = x-1$: $L:\ x-1 = \frac{y+5}{-3} = z$, $P_0(1,-5,0)$, $\vec{u}=(1,-3,1)$.
2. **Normal:** $\vec{N}$ es perpendicular a $\vec{u}$ (el plano contiene a L) y a $\vec{v}$:
$$\vec{N} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{vmatrix} = (-24-5,\ 3-8,\ 5+9) = (-29,-5,14).$$
3. **Ecuación:** con $(29,5,-14)$ y P_0: $29(x-1)+5(y+5)-14z=0$, es decir, $29x+5y-14z-4=0$. Comprobación: $(29,5,-14)\cdot(3,5,8) = 87+25-112 = 0$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

plano por dos rectas, ángulo recta–plano [U4; ejercicio 4.5.5]; (4) plano que contiene una recta y es perpendicular al plano XZ; distancia al origen [U4; propuesto 4.6.2]; (5) curva con coseno del ángulo doble: cartesianas, extensión y bosquejo [U5; ejercicio 5.5.1]; (6) cilindro con generatrices paralelas a un vector [U6; ejercicio 6.5.5].

2º final 2013-1

- (1) cardioide: simetría, intersecciones con el eje polar, bosquejo [U2; propuesto 2.6.2]; (2) paralelepípedo de volumen dado con parámetro; componente vectorial [U3; ejercicio 3.5.8]; (3) punto simétrico respecto a una recta [U4; ejercicio 4.5.11]; (4) parámetro para un ángulo de 60° entre recta y plano [U4; propuesto 4.6.3]; (5) parábola en un plano paralelo a YZ: paramétricas, vectorial, identificación [U5; ejercicio 5.5.4]; (6) cilindro con directriz elipse: vectorial, paramétricas y cartesiana [U6; ejercicio 6.5.3]; (7) identificación de tres cuádricas [U6; propuesto 6.6.3].

2º final 2013-2

- (1) lemniscata: simetría, puntos más alejados del polo, bosquejo [U2; ejercicio 2.5.4]; (2) parámetro para perpendicularidad; área del paralelogramo [U3; propuesto 3.6.3]; (3) plano que contiene una recta con normal perpendicular a un vector [U4; propuesto 4.6.4]; (4) hipérbola con tangente y secante: intervalo, cartesianas, bosquejo [U5; ejemplo 5.4]; (5) cono con directriz elipse: vectorial y cartesiana [U6; propuesto 6.6.1]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; propuesto 6.6.4].

2º final 2014-1

- (1) cónica en polares y circunferencia: cartesianas, área de un triángulo, bosquejo [U2; ejercicio 2.5.5]; (2) combinación lineal y vector paralelo con condición de módulo [U3; propuesto 3.6.4]; (3) distancia entre rectas, plano que las contiene, intersección con z=4 [U4; ejercicio 4.5.7]; (4) curva vectorial: paramétricas, intervalo, cartesianas, intervalos de y y z [U5; propuesto 5.6.2]; (5) cilindro con directriz circunferencia [U6; ejercicio 6.5.4]; (6) identificación de tres cuádricas con intervalos de variación [U6; ejemplo 6.4].

2º final 2014-2

- (1) circunferencia: intersecciones, simetría respecto al polo, cartesiana [U2; propuesto 2.6.3]; (2) área de un triángulo con ángulo de 60° y componente escalar dada [U3; ejercicio 3.5.5]; (3) plano perpendicular al plano XZ que contiene una recta; distancia del origen a la recta [U4; ejercicio 4.5.10]; (4) curva con seno y coseno en un plano z=4: cartesianas e identificación [U5; ejercicio 5.5.2]; (5) cilindro con directriz circunferencia [U6; propuesto 6.6.2]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; propuesto 6.6.5].

Plan 2010: parciales de la versión anterior del programa

1er parcial 2005-2, tipo B

- (1) simetrías de puntos con coordenadas cilíndricas y esféricas (fuera del programa de 2008); (2) distancia de un punto al eje Y [U3; ejercicio 3.5.13]; (3) segmentos dirigidos paralelos con parámetros [U3; propuesto 3.6.5]; (4) vectores perpendiculares y paralelogramo de área 6 [U3; propuesto 3.6.6]; (5) componentes escalar y vectorial [U3; propuesto 3.6.7]; (6) componente, coseno y área de un triángulo [U3; propuesto 3.6.8].

2º parcial 2005-2, tipo A

- (1) recta por el origen que corta perpendicularmente a otra [U4; ejercicio 4.5.15]; (2) ángulo recta–plano; recta perpendicular al plano por la intersección [U4; ejercicio 4.5.16]; (3) intersección recta–plano [U4; propuesto 4.6.5]; (4) rectas y plano en un prisma [U4; ejercicio 4.5.17]; (5) plano paralelo por la intersección de dos rectas [U4; propuesto 4.6.6]; (6) distancia entre planos [U4; propuesto 4.6.7].

3er parcial 2006-2, tipo B

1. $\vec{u} = (9,0,6) + (-8,2,6) - (2,1,10) = (-1,1,2)$.
2. $\vec{v} = \lambda\vec{d} = \lambda(3,6,-6)$, así que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(-3+6-12) = -9\lambda$.
3. $-2(-9\lambda) = -36 \Rightarrow 18\lambda = -36 \Rightarrow \lambda = -2$ y $\vec{v} = (-6,-12,12)$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$ y $\overrightarrow{DC} = C - D = (c_1 - 4,\ -2,\ 2 - d_3)$.
2. Paralelos: $\overrightarrow{DC} = k\,\overrightarrow{AB}$. La segunda componente da $-2 = 2k \Rightarrow k = -1$.
3. Entonces $c_1 - 4 = -2 \Rightarrow c_1 = 2$ y $2 - d_3 = -1 \Rightarrow d_3 = 3$. (Quedan paralelos de sentido contrario: $\overrightarrow{DC} = (-2,-2,-1)$.)

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. **Perpendicularidad:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$.
2. **Área:** $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & b & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b,-2,b)$, así que $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = 2b^2 + 4 = 36 \Rightarrow b^2 = 16, b = \pm 4$.
3. Otra forma: como son perpendiculares, $A = |\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{2+b^2}\,\sqrt{2} = 6$.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 5, con $\vec{u} = (1,a,1)$ y $\vec{v} = (-1,0,b)$: $b = 1$ y $a = \pm 4$.

Ejercicio 3.6.7 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{OB}\cdot\hat{\jmath} = 4\sqrt{2}$ y $|\hat{\jmath}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\hat{\jmath}}\,\overrightarrow{OB} = 4\sqrt{2}\,\hat{\jmath} = \big(0, 4\sqrt{2}, 0\big)$.
2. **b)** $C = \frac{1}{2}(A+B) = \big(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -4\big)$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{8+8+16} = 4\sqrt{2}$.
3. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 16 + 0 + 16 = 32$: $\text{comp}_{\overrightarrow{OC}}\,\overrightarrow{OA} = \frac{32}{4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.6.8 ← volver

1. **Relación:** $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{AB} = -\vec{c}$, así que $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$ y $|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.
2. **a)** $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{1}{1}\vec{a} = \vec{a}$.
3. **b)** $\cos\theta = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\theta = 45°$).
4. **c)** $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times(\vec{a}-\vec{c}) = -\vec{a}\times\vec{c}$, con $|\vec{a}\times\vec{c}| = 1\cdot 1\cdot \operatorname{sen} 90° = 1$: área $\frac{1}{2}$. (Es un triángulo rectángulo en A con catetos de longitud 1.)

Ejercicio 3.6.9 ← volver

1. **Aristas:** $\overrightarrow{AB} = (-6,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,-4,2)$, $\overrightarrow{AD} = (-4,-3,2)$.
2. **a)**

$$\begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -6(-8+6) - 1(-2+8) + 2(3-16) = 12 - 6 - 26 = -20,$$

así que $V = 20$.

- (6) componente vectorial y volumen [U3; como el ejercicio 3.5.9]; (7) ángulo entre planos y recta de intersección [U4; propuesto 4.6.11].

1er final 2018-2, tipo C
- (5) punto simétrico, componente vectorial, recta por dos puntos [U3; como el propuesto 3.6.7]; (6) plano por un punto y el eje Y [U4; como el ejercicio 4.5.10].

1er final 2019-1, tipo A
- (5) triángulo: coseno, componente escalar, área [U3; propuesto 3.6.11]; (6) intersección recta–plano; punto a distancia dada del plano [U4; propuesto 4.6.13].

1er final 2019-1, tipo C
- (5) perpendiculares con parámetros y área 6 [U3; propuesto 3.6.6]; (6) distancia entre rectas, plano equidistante, perpendicular común [U4; ejercicio 4.5.8].

1er final 2019-2, tipo A
- (5) componente escalar y producto mixto con parámetros [U3; ejercicio 3.5.10]; (6) ángulo entre rectas y plano que las contiene [U4; como el propuesto 4.6.14].

1er final 2019-2, tipo C
- (5) diagonales y área con parámetro [U3; como el ejercicio 3.5.2]; (6) plano por un punto y una recta, distancia punto–recta [U4; como el ejercicio 4.5.9].

1er final 2020-1, tipo A
- (5) componente vectorial, coseno, unitario perpendicular, área [U3; como el propuesto 3.6.10]; (6) distancia punto–recta, recta paralela, plano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

1er final 2020-1, tipo C
- (5) tetraedro: componente escalar, área, volumen [U3; ejercicio 3.5.11]; (6) intersección de rectas, plano, distancia punto–plano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

1er final 2024-1, tipo C
- (5) ángulo, distancia del origen a una recta, plano por tres puntos [U3 y U4; como los ejercicios 3.5.2, 4.5.10 y 4.5.1]; (6) punto del plano más cercano a otro [U4; ejercicio 4.5.14].

1er final 2024-2, tipo A
- (5) paralelogramo: punto medio y coseno [U3; ejercicio 3.5.14]; (6) plano por un punto y una recta [U4; como el propuesto 4.6.10].

1er final 2025-1, tipo A
- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.15]; (6) plano por tres puntos, recta perpendicular, distancia entre planos [U4; como el ejercicio 4.5.1].

1er final 2025-1, tipo D
- (5) volumen del paralelepípedo [U3; como el propuesto 3.6.9]; (6) plano que contiene dos rectas paralelas [U4; como el ejercicio 4.5.2].

1er final 2025-2, tipo A
- (5) área de un triángulo y plano que lo contiene [U3; como el propuesto 3.6.11]; (6) distancia punto–plano, recta perpendicular [U4; como el propuesto 4.6.8].

1er final 2026-1, tipo A

3. **b) Polo y valores negativos:** $r = 0$ solo en $\theta = 180^\circ$, y $r \geq 0$ siempre: no hay más puntos. En cartesianas, $\left(x^2+y^2-2x\right)^2 = 4\left(x^2+y^2\right)$ con $y = 0$ da $x^2(x-2)^2 = 4x^2$, $x = 0$ o $x = 4$.
4. **c) Identificación:** $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$, es decir, una cardioide. Tabla: $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 4, 3, 2, 1, 0$; la mitad de abajo es el reflejo. Es la curva del inciso a del ejemplo 2.4 (figura de esa sección).

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 1$, punto $(1, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = -1$, punto $(-1, 180^\circ)$, que es el mismo $(1, 0^\circ)$.
2. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 90^\circ$: el polo está en C. Intersecciones: $(1, 0^\circ)$ y el polo.
3. **b) Prueba 1** ($r \to -r$): $-r = \cos\theta$. Cambia. **Prueba 2** ($\theta \to \theta + 180^\circ$): $r = \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **b) Contraejemplo:** $(1, 0^\circ)$ está en C; su simétrico respecto al polo es $(1, 180^\circ) = (-1, 0^\circ)$. Con $(1, 180^\circ)$: $\cos 180^\circ = -1 \neq 1$; con $(-1, 0^\circ)$: $\cos 0^\circ = 1 \neq -1$. No es simétrica respecto al polo.
5. **c) Cartesiana:** $r^2 = r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = x \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Multiplicar por r no agrega puntos: el polo ya estaba en C. Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, tangente a la recta a 90° en el polo.

Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. **Nombre:** $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ con $a = 10 < b = 15$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$ no cambia la ecuación).
2. **a) Pruebas:** $\theta \to -\theta$ da $r = 10 - 15\,\mathrm{sen}\,\theta$; $r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$ da $-r = 10 + 15\,\mathrm{sen}\,\theta$. Las dos cambian.
3. **a) Contraejemplo:** $(25, 90^\circ)$ está en la curva. Su simétrico es $(25, 270^\circ)$: $10 + 15\,\mathrm{sen}\,270^\circ = -5 \neq 25$; con $(-25, 90^\circ)$: $10 + 15\,\mathrm{sen}\,90^\circ = 25 \neq -25$. No es simétrica respecto al eje polar.
4. **b) Eje polar:** $\theta = 0^\circ : r = 10$; $\theta = 180^\circ : r = 10$. Puntos $(10, 0^\circ)$ y $(10, 180^\circ)$.
5. **b) Recta a 90°:** $\theta = 90^\circ : r = 25$; $\theta = 270^\circ : r = -5$. Puntos $(25, 90^\circ)$ y $(-5, 270^\circ) = (5, 90^\circ)$: este es el extremo del lazo interior.
6. **b) Polo:** $r = 0 \iff \mathrm{sen}\,\theta = -\frac{2}{3}$, que tiene dos soluciones en el tercer y cuarto cuadrantes ($\theta = 180^\circ + \text{ang sen}\,\frac{2}{3}$ y $\theta = 360^\circ - \text{ang sen}\,\frac{2}{3}$). El polo pertenece a la curva y a las dos rectas.
7. **b) Comprobación en cartesianas:** $r^2 = 10r + 15r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \left(x^2+y^2-15y\right)^2 = 100\left(x^2+y^2\right)$. Con $y = 0$: $x^4 = 100x^2$, $x = 0, \pm 10$. Con $x = 0$: $y^2(y-15)^2 = 100y^2$, $y = 0$, $y = 5$ o $y = 25$. Coinciden.

- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.12]; (6) intersección de rectas, coseno, plano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2026-1, tipo A

- (5) área por diagonales [U3; como el ejercicio 3.5.2]; (6) plano perpendicular a una recta a distancia 7 del origen [U4; propuesto 4.6.16].

2º final 2026-2, tipo A

- (5) ángulo y área de un triángulo [U3; como el propuesto 3.6.11]; (6) recta perpendicular a otra dentro de un plano [U4; como el ejercicio 4.5.15].

Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica, primeros parciales

Solo los problemas de cónicas; el resto del primer parcial (funciones) está en el cuaderno de Cálculo Diferencial.

1er parcial 2024-1, tipo A

- (1) forma ordinaria de una hipérbola y gráfica [U1B; como el ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2024-2, tipo A

- (1) identificar y graficar una hipérbola [U1B; propuesto 1B.6.1]; (2) rotación de ejes: semieje menor [U1B; ejercicio 1B.5.6].

1er parcial 2024-2, tipo C

- (1) identificar y graficar una hipérbola [U1B; como el ejercicio 1B.5.1]; (2) centro y radio de una circunferencia [U1B; ejercicio 1B.5.3].

1er parcial 2025-1, tipo A

- (1) circunferencia con centro en la intersección de una recta con el eje Y [U1B; propuesto 1B.6.2].

1er parcial 2025-1, tipo C

- (1) parámetro para el semieje transverso de una hipérbola [U1B; ejercicio 1B.5.5].

1er parcial 2025-1, tipo D

- (1) forma ordinaria de una parábola y gráfica [U1B; ejemplo 1B.4].

1er parcial 2025-2, tipo A

- (1) hipérbola de eje vertical con sus elementos y gráfica [U1B; ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2025-2, tipo B

- (1) la misma hipérbola del tipo A (ecuación multiplicada por −1) [U1B; ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2025-2, tipo C

- (1) elipse con eje paralelo al eje X, centro y dos puntos [U1B; ejercicio 1B.5.4].

1er parcial 2026-2, tipo A

- (1) hipérbola con sus elementos y gráfica [U1B; como el ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2026-2, tipo B

- (1) la misma hipérbola del tipo A (ecuación multiplicada por −1) [U1B; como el ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2026-2, tipo C

- (1) parábola con sus elementos [U1B; ejercicio 1B.5.2].

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Secciones cónicas

Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. **Identificación:** $A = 1$ y $C = -1$ de signos contrarios: hipérbola.
2. **Completar el cuadrado:** $x^2 - \left(y^2 - 8y + 16\right) = 17 - 16$, es decir, $x^2 - (y-4)^2 = 1$.
3. **Elementos:** eje transverso horizontal (el término positivo es el de x); $C(0,4)$, $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$. Vértices $(1,4)$ y $(-1,4)$; focos $\left(\pm\sqrt{2}, 4\right)$; asíntotas $y - 4 = \pm x$; $e = \sqrt{2}$.
4. **Intersecciones:** con $y = 0$, $x^2 = 17$, $x = \pm\sqrt{17}$; con $x = 0$, $-(y-4)^2 = 1$ no tiene solución: no corta al eje y.
5. **Gráfica:** dos ramas, una a la derecha de $(1,4)$ y otra a la izquierda de $(-1,4)$, que se acercan a las rectas $y = x + 4$ y $y = -x + 4$.

Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. **Centro:** el eje de las ordenadas es $x = 0$; en la recta, $-y - 6 = 0$, $y = -6$. Centro $C(0,-6)$.
2. **Forma ordinaria:** $x^2 + (y+6)^2 = 9$.
3. **Ecuación general:** $x^2 + y^2 + 12y + 36 - 9 = 0$, es decir, $x^2 + y^2 + 12y + 27 = 0$.
4. **Gráfica:** circunferencia de centro $(0,-6)$ que pasa por $(\pm 3,-6)$, $(0,-3)$ y $(0,-9)$; queda toda debajo del eje x.

Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. **Identificación:** $B = 0$, $C = 0$ y $A = 4 \neq 0$: solo x está al cuadrado; es parábola de eje vertical si no resulta degenerada.
2. **Completar el cuadrado:**

$$4\left(x^2 - 5x\right) = 24y - 97$$
$$4\left(x^2 - 5x + \tfrac{25}{4}\right) = 24y - 97 + 25 = 24y - 72$$
$$\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3).$$

3. **Elementos:** $V\left(\frac{5}{2}, 3\right)$; $4p = 6$, $p = \frac{3}{2} > 0$: abre hacia arriba, con foco $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ y directriz $y = \frac{3}{2}$.

Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. **Centro de la elipse:** $\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4y^2 = 4$, es decir, $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$: elipse horizontal con centro $(2,0)$, $a = 2$ y $b = 1$.
2. **Radio:** distancia de $C(2,2)$ a $(2,0)$: $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$.
3. **Circunferencia:** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ (ecuación general: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$).

Ejercicio 1B.6.5

← volver

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen usado en este cuaderno tiene resolución publicada: todas las resoluciones son propias. Este apéndice solo registra erratas o rarezas de los *enunciados* (datos que sobran o faltan, dos respuestas donde se pide una) y cómo se trataron.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Secciones cónicas

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Curvas en el plano polar (solo Plan 2010)

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · Álgebra vectorial

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4 · Unidad 4 · La recta y el plano en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.5 · Unidad 5 · Curvas en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.6 · Unidad 6 · Superficies (solo Plan 2010)

Sin erratas registradas en esta unidad.

- $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\,\operatorname{sen}\theta\cdot\ \vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a}\times\vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D=A+C-B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M-P$.

A.4 La recta y el plano en el espacio (Unidad 4)

- Recta: $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}\cdot\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\cdot$ general: $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.
- Plano: $Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=(A,B,C)\cdot\ \vec{p}=\vec{p}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}\cdot$ perpendiculares: $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$ (igual con normales). Recta $\parallel$ plano: $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$; recta $\perp$ plano: $\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta=\frac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q,\pi)=\frac{|Ax_Q+By_Q+Cz_Q+D|}{|\vec{n}|}\cdot\ d(Q,L)=\frac{|\overrightarrow{P_0Q}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1,L_2)=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}\cdot$ planos paralelos: $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Rectas paralelas: $d(L_1,L_2)=d(P_2,L_1)\cdot$ recta paralela a un plano: $d(L,\pi)=d(P_0,\pi)\cdot$ si se cortan, la distancia es 0.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $=0$ se cortan, $\neq0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t=\frac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot$ simétrico: $Q'=2M-Q$.

A.5 Curvas en el espacio (Unidad 5)

- Vectorial $\vec{p}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\Longleftrightarrow$ paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z=k$).
- $\operatorname{sen}^2t+\cos^2t=1\cdot\sec^2t-\tan^2t=1\cdot\csc^2t-\cot^2t=1\cdot\cos2t=1-2\operatorname{sen}^2t=2\cos^2t-1\cdot\operatorname{sen}2t=2\operatorname{sen}t\cos t$.
- $(\cos t+\operatorname{sen}t)^2+(\cos t-\operatorname{sen}t)^2=2$.
- Elipse: $u=h+a\cos t$, $v=k+b\operatorname{sen}t\cdot$ hipérbola: $u=h+a\sec t$, $v=k+b\tan t\cdot$ parábola $(u-h)^2=4p(v-k)$: $u=h+2t$, $v=k+\frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2=a^2-b^2$; hipérbola $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $v-k=\pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en u).
- SOLO PLAN 2010 Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ }\geq0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }}>0$; $\tan,\sec:\ t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\cot,\csc:\ t\neq k\pi$).
- SOLO PLAN 2010 Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0\leq\operatorname{sen}^2t\leq1$, $|\sec t|\geq1$.

A.6 Superficies (Unidad 6)

- Cilindro: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{q}(\theta)+s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{v}+s\big(\vec{q}(\theta)-\vec{v}\big)$.

4. **b)** $\cos\theta=\dfrac{|2+12+0|}{\sqrt{41}\sqrt{5}}=\dfrac{14}{\sqrt{205}}=\dfrac{14\sqrt{205}}{205}$.

Ejercicio 4.6.15 ← volver

1. **Recta:** $\frac{2x-18}{6}=\frac{x-9}{3}$: $P_0(9,8,6)$, $\vec{u}=(3,1,0)$; $B(t)=(9+3t,\ 8+t,\ 6)$.
2. **Distancia:** $\overrightarrow{QB}=(10+3t,\ 5+t,\ 2)$ y $|\overrightarrow{QB}|^2=9$:

$$(10+3t)^2+(5+t)^2+4=9\ \Rightarrow\ 10t^2+70t+120=0\ \Rightarrow\ t^2+7t+12=0.$$

3. **Soluciones:** $t=-3$: $B(0,5,6)$; $t=-4$: $B(-3,4,6)$. Comprobación: $\overrightarrow{QB}=(1,2,2)$ y $(-2,1,2)$, los dos de módulo 3.

Ejercicio 4.6.16 ← volver

1. **Normal:** el plano es perpendicular a L: $\vec{n}=(3,-2,6)$, $|\vec{n}|=\sqrt{9+4+36}=7$. El plano es $3x-2y+6z+D=0$.
2. **Distancia al origen:** $\dfrac{|D|}{7}=7\Rightarrow D=\pm49$.
3. **Planos:** $3x-2y+6z-49=0$ o $3x-2y+6z+49=0$; cualquiera de los dos responde.

E.5 · Unidad 5 · Curvas en el espacio

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. **Simplificación:** $\frac{4}{\csc\theta}=4\operatorname{sen}\theta$, definida solo si $\operatorname{sen}\theta\neq0$ ($\csc\theta$ no existe en $\theta=k\pi$). Paramétricas: $x=-1+2\cos\theta$, $y=5$, $z=3+4\operatorname{sen}\theta$, $\theta\neq k\pi$.
2. **a) Identidad:** $\cos\theta=\frac{x+1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{z-3}{4}$; con $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$:

$$C:\ \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(z-3)^2}{16}=1,\qquad y=5.$$

3. **b) Identificación:** elipse en el plano $y=5$, centro $(-1,5,3)$, eje mayor paralelo al eje z; $a=4$, $b=2$, $c=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$. Vértices $(-1,5,7)$ y $(-1,5,-1)$; extremos del eje menor $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$; focos $\big(-1,5,3\pm2\sqrt{3}\big)$.
4. **Puntos excluidos:** SOLO PLAN 2010 en $\theta=0$ y $\theta=\pi$ la ecuación vectorial no está definida; esos valores darían $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$, los extremos del eje menor. La curva es la elipse sin esos dos puntos.
5. **Bosquejo:** en el plano vertical $y=5$ (paralelo al plano XZ), una elipse alargada en la dirección de z, de $z=-1$ a $z=7$ y de $x=-3$ a $x=1$, con puntos vacíos en $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$.

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. **a) Paramétricas:** $x=-3$, $y=2-5\operatorname{sen}^2t$, $z=4-3\operatorname{sen}t$. Las tres funciones existen para todo real: el intervalo paramétrico es $t\in\mathbb{R}$ (con $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se recorre la curva una vez).
2. **b) Despeje:** $\operatorname{sen}t=\frac{4-z}{3}$; sustituyendo en y:

$$y=2-5\cdot\frac{(z-4)^2}{9}\quad\Longrightarrow\quad(z-4)^2=-\frac{9}{5}(y-2).$$

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 9 finales y los 3 parciales anteriores del Plan 2010, los problemas de geometría de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) y los de cónicas de sus 12 primeros parciales, en orden. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad y el ejemplo, el ejercicio resuelto o el ejercicio propuesto donde se trabaja; «como el…» indica un problema que no está en el cuaderno pero se resuelve con el mismo procedimiento. Las versiones del mismo examen (tipos A, C, D) suelen ser el mismo problema con otros datos.

Plan 2010: Geometría Analítica, finales

1er final 2012-1, tipo C

- (1) rosa: intersección con la recta a 90°, simetría y bosquejo [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) segmento dirigido paralelo a otro: coordenadas de un extremo [U3; ejercicio 3.5.12]; (3) vectores con módulo dado: paralelo, cosenos directores, perpendicular a dos [U3; ejercicio 3.5.1]; (4) posición relativa de dos rectas [U4; ejemplo 4.4]; (5) dos planos de una figura: ecuaciones, ángulo, recta de intersección, distancia al origen [U4; ejercicio 4.5.4]; (6) curva vectorial: paramétricas, intervalo paramétrico y extensión [U5; ejercicio 5.5.3]; (7) identificación de tres cuádricas [U6; ejercicio 6.5.6].

1er final 2013-2, tipo A

- (1) circunferencia y lemniscata: intersección, tres puntos y bosquejo [U2; propuesto 2.6.1]; (2) ángulos directores, componente vectorial, ángulo y área por diagonales [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) punto de una recta más cercano a otro; plano paralelo a dos rectas [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) intervalo paramétrico y extensión [U5; propuesto 5.6.4]; (5) cono con directriz circunferencia: paramétricas y cartesiana [U6; ejercicio 6.5.1]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; ejercicio 6.5.9].

1er final 2014-1, tipo A

- (1) cardioide: simetría, intersecciones con la recta a 90°, bosquejo [U2; ejercicio 2.5.2]; (2) paralelogramo por sus diagonales: coseno de un ángulo interior y área [U3; ejemplo 3.4]; (3) recta intersección de dos planos, punto más próximo, ángulo entre planos [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) curva vectorial: intervalo paramétrico, intervalos de x y z, cartesianas [U5; propuesto 5.6.3]; (5) cono con vértice y directriz elipse: vectorial y cartesiana [U6; ejemplo 6.4]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; ejercicio 6.5.7].

2º final 2012-1

- (1) caracol: intersecciones con el eje polar, simétrico respecto al polo, cartesiana [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) triángulo con vértices en los ejes: área y perpendicularidad [U3; propuesto 3.6.1]; (3) área de un cuadrilátero dado por tres lados [U3; ejercicio 3.5.7]; (4) parámetro para que dos planos sean perpendiculares [U4; propuesto 4.6.1]; (5) parámetro para que recta y plano formen 30° [U4; ejercicio 4.5.12]; (6) curva vectorial con cosecante: cartesianas, bosquejo e identificación [U5; propuesto 5.6.1]; (7) identificación de cuatro cuádricas [U6; ejercicio 6.5.8]; (8) cono con vértice y directriz elipse: vectorial y cartesiana [U6; ejercicio 6.5.2].

2º final 2012-2

- (1) cardioide, rosa y lemniscata: nombre, tres puntos y bosquejo [U2; ejemplo 2.4]; (2) tres puntos vértices de un rectángulo; cuarto vértice [U3; propuesto 3.6.2]; (3) recta intersección de dos planos,

1. **Recta:** $\vec{u} = (1,3,0)\times(0,0,1) = (3,-1,0)$; con $y=0$: $x=2$, punto $(2,0,7)$. $L:\ x = 2+3t,\ y=-t,\ z=7$.
2. **Sustitución:** $-2(2+3t)-6(-t)+6(7) = -4-6t+6t+42 = 38$: queda $38=38$ para todo t.
3. **Conclusión:** todo punto de L está en π (además $\vec{u}\cdot\vec{n} = -6+6+0=0$). La intersección es la recta L.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. **Intersección:** $3-2t_M = -1-t_N$, $-1+t_M = -3+t_N$, $2t_M = -4+2t_N$. De la segunda, $t_N = t_M+2$; la tercera queda $2t_M = 2t_M$ (se cumple siempre); la primera da $3-2t_M = -3-t_M$, $t_M = 6$, $t_N = 8$.
2. **Punto:** $A(3-12,\ -1+6,\ 12) = (-9,5,12)$; en N: $(-1-8,\ -3+8,\ -4+16)$, el mismo.
3. **Plano paralelo:** misma normal $(5,-1,2)$: $5x-y+2z+D=0$ con $-45-5+24+D=0$, $D=26$.

Ejercicio 4.6.7 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(4,0,-2)\times(-4,8,0) = (16,8,32)$, o $(2,1,4)$: es la de π_1, así que son paralelos.
2. **Ecuación de π_2:** por $(0,0,2)$ (con $r=s=0$): $2x+y+4z=8$.
3. **Distancia:** $d = \dfrac{|16-8|}{\sqrt{4+1+16}} = \dfrac{8}{\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{21}$.

Ejercicio 4.6.8 ← volver

1. **a)** Por el origen, con $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$: $\vec{p} = r(-1,1,1)+s(1,-2,0)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0+2,\ 1-0,\ 2-1) = (2,1,1), \qquad \pi:\ 2x+y+z=0.$$

   Comprobación: $-2+1+1=0$ y $2-2+0=0$.
2. **b)** $d = \dfrac{|6+0-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$.
3. **c)** Dirección $\vec{n}=(2,1,1)$, por C: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$.

Ejercicio 4.6.9 ← volver

1. **a)** Paralelos: $(1,\beta,1) = k(3,-1,3)$; de la primera componente $k=\frac{1}{3}$, y $\beta=-\frac{1}{3}$. Contiene al origen: $D=0$.
2. **b)** $d = \dfrac{|-9|}{\sqrt{9+1+9}} = \dfrac{9}{\sqrt{19}} = \dfrac{9\sqrt{19}}{19}$.
3. **c)** Punto de π_1: $(3,0,0)$. Dos vectores perpendiculares a $(3,-1,3)$: $(1,3,0)$ y $(0,3,1)$ $(3-3=0,\ -3+3=0)$. $\pi_1:\ \vec{p} = (3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$.
4. **d)** Dirección $(3,-1,3)$, por A: $x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

Ejercicio 4.6.10 ← volver

- (1) circunferencia en un plano x=cte: extensión, vectorial, cartesianas [U5; propuesto 5.6.5]; (2) curva vectorial: paramétricas, cartesianas, intervalo [U5; propuesto 5.6.6]; (3) elipse con centro y semiejes dados: paramétricas y vectorial [U5; ejercicio 5.5.5]; (4) cono con vértice y directriz [U6; propuesto 6.6.6]; (5) cilindro de circunferencias con centros en una recta [U6; propuesto 6.6.7]; (6) hiperboloide de dos hojas: trazas, extensión, curva de intersección [U6; propuesto 6.6.8]; (7) identificación de cuatro superficies [U6; propuesto 6.6.9].

Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica, finales

Solo los problemas de geometría. Los problemas 1 a 4 (cálculo) están en el cuaderno de Cálculo Diferencial, Apéndice B.

1er final 2016-1, tipo A

- (5) área de un paralelogramo (armadura) [U3; ejercicio 3.5.6]; (6) plano que contiene dos rectas y distancia entre ellas [U4; ejercicio 4.5.2].

1er final 2016-1, tipo C

- (5) área de un triángulo con ángulo de 60° y componente escalar dada [U3; ejercicio 3.5.5]; (6) plano por tres puntos; distancia punto–plano [U4; ejercicio 4.5.1].

1er final 2016-2, tipo A

- (5) diagonales: componente vectorial y área [U3; como el ejercicio 3.5.2]; (6) plano por el origen y dos puntos, distancia, recta perpendicular [U4; propuesto 4.6.8].

1er final 2016-2, tipo D

- (5) cosenos directores, componente vectorial, volumen [U3; ejercicio 3.5.9]; (6) planos paralelos con parámetros, distancia, recta perpendicular [U4; propuesto 4.6.9].

1er final 2017-1, tipo A

- (6) coordenadas de un punto, coseno y área de un triángulo [U3; como el ejercicio 3.5.14]; (7) recta perpendicular a un plano, distancia, plano paramétrico [U4; propuesto 4.6.10].

1er final 2017-1, tipo C

- (5) volumen del paralelepípedo y coseno entre aristas [U3; propuesto 3.6.9]; (6) punto de una recta a distancia 3 de otro [U4; propuesto 4.6.15].

1er final 2017-2, tipo A

- (6) componente vectorial, unitario perpendicular, área [U3; propuesto 3.6.10]; (7) ángulo e intersección recta–plano [U4; ejercicio 4.5.13].

1er final 2017-2, tipo C

- (5) vértices de un paralelogramo [U3; ejercicio 3.5.15]; (6) plano paralelo por la intersección de dos rectas [U4; como el propuesto 4.6.6].

1er final 2018-1, tipo A

- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.15]; (6) intersección recta–plano, recta perpendicular simétrica [U4; como el ejercicio 4.5.13].

1er final 2018-1, tipo C

- (5) vector perpendicular a dos con módulo dado, cosenos directores, componente vectorial [U3; ejercicio 3.5.3]; (6) intersección de rectas, plano que las contiene, distancia punto–recta [U4; ejercicio 4.5.9].

1er final 2018-2, tipo A

3. **b)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=4+12+4=20$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{21}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{29}$: $\cos\theta=\frac{20}{\sqrt{609}}$.

Ejercicio 3.6.10 ← volver

1. $\vec{v}=B-A=(-2,1,4)$, $|\vec{v}|^2=21$.
2. **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2+2+12=12$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u}=\frac{12}{21}\vec{v}=\frac{4}{7}(-2,1,4)=\left(-\frac{8}{7},\frac{4}{7},\frac{16}{7}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&2&3\\-2&1&4\end{vmatrix}=(8-3)\hat{\imath}-(4+6)\hat{\jmath}+(1+4)\hat{k}=(5,-10,5)=5(1,-2,1),$$

$\vec{w}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

4. **c)** $A=|\vec{u}\times\vec{v}|=5\sqrt{6}$.

Ejercicio 3.6.11 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(3,1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,-3,3)$.
2. **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-2=4$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{19}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$: $\cos A=\frac{4}{2\sqrt{38}}=\frac{\sqrt{38}}{19}$.
3. **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3-3-9=-15$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{19}$: $\text{comp}_{\overrightarrow{BC}}\,\overrightarrow{AB}=-\frac{15}{\sqrt{19}}$.
4. **c)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\3&1&-3\\2&-2&0\end{vmatrix}=(0-6)\hat{\imath}-(0+6)\hat{\jmath}+(-6-2)\hat{k}=(-6,-6,-8)$; $|...|=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$ y el área es $\sqrt{34}$.

Ejercicio 3.6.12 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,d_2-1,-1)$.
2. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-2&-1&-1\\-2&2&2\end{vmatrix}=(-2+2)\hat{\imath}-(-4-2)\hat{\jmath}+(-4-2)\hat{k}=(0,6,-6)$.
3. $(0,6,-6)\cdot(2,d_2-1,-1)=6d_2-6+6=6d_2$.
4. $V=\frac{1}{6}|6d_2|=|d_2|=5\Rightarrow d_2=\pm5$.

Ejercicio 3.6.13 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(6,2,-4)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12+4=16$, $|\overrightarrow{AC}|^2=56$.
2. **a)** $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}=\frac{16}{56}(6,2,-4)=\frac{2}{7}(6,2,-4)$, así que $Q=A+\overrightarrow{AQ}=\left(1+\frac{12}{7},2+\frac{4}{7},3-\frac{8}{7}\right)=\left(\frac{19}{7},\frac{18}{7},\frac{13}{7}\right)$.
3. Comprobación: $\overrightarrow{QB}=\left(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$ y $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{12-8-4}{7}=0$.
4. **b)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&0&-1\\6&2&-4\end{vmatrix}=(0+2)\hat{\imath}-(-8+6)\hat{\jmath}+(4-0)\hat{k}=(2,2,4)$, de módulo $2\sqrt{6}$; el área es $\sqrt{6}$.

Ejercicio 3.6.14 ← volver

- (5) volumen de un tetraedro [U3; como el ejercicio 3.5.11]; (6) coseno del ángulo entre rectas [U4; como el propuesto 4.6.14].

1er final 2026-2, tipo A

- (5) producto escalar a partir del área [U3; propuesto 3.6.14]; (6) plano que contiene dos rectas [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2016-1, tipo A

- (5) curva en el espacio con secante y tangente: cartesianas e identificación [U5; ejercicio 5.5.6]; (6) volumen, intersección recta–plano, plano por tres puntos [U4; como el ejercicio 4.5.1].

2º final 2016-2, tipo A

- (5) el triángulo del 1er final 2016-1, tipo C [U3; ejercicio 3.5.5]; (6) distancia entre planos, recta paralela a ambos [U4; propuesto 4.6.12].

2º final 2017-1, tipo A

- (5) cuadrado: vértices y componente vectorial [U3; ejercicio 3.5.16]; (6) plano por tres puntos, simétricas, intersección [U4; como el ejercicio 4.5.1].

2º final 2017-2, tipo A

- (6) operaciones, componente vectorial, coseno [U3; como el ejercicio 3.5.3]; (7) intersección de rectas, plano paramétrico y cartesiano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2018-1, tipo A

- (5) tetraedro de volumen 5 con parámetro [U3; propuesto 3.6.12]; (6) recta intersección de planos y ángulo [U4; como el ejercicio 4.5.3].

2º final 2018-2, tipo A

- (5) paralelogramo: un punto y área de un triángulo [U3; propuesto 3.6.13]; (6) distancia y ángulo entre rectas [U4; propuesto 4.6.14].

2º final 2019-1, tipo A

- (5) punto medio, componente vectorial, volumen [U3; como el ejercicio 3.5.9]; (6) distancia entre rectas, plano vectorial y cartesiano [U4; como el ejercicio 4.5.7].

2º final 2019-2, tipo A

- (5) operaciones, unitario perpendicular, área [U3; como el propuesto 3.6.10]; (6) ángulo entre rectas, distancia punto–recta, plano paralelo [U4; como el propuesto 4.6.14].

2º final 2020-1

- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.15]; (6) distancia del origen a una recta, intersección con un plano, plano perpendicular [U4; como el ejercicio 4.5.10].

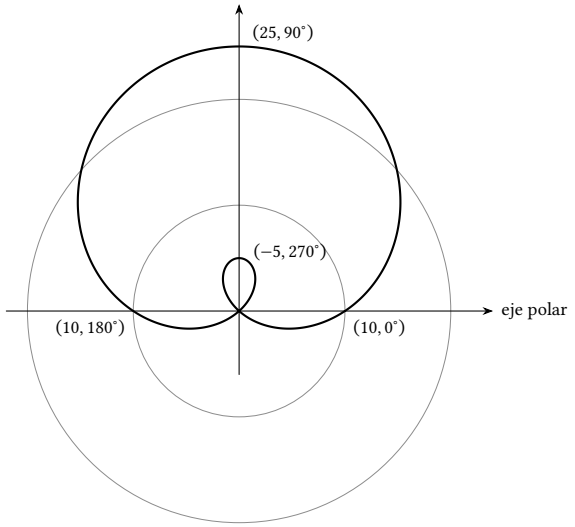
2º final 2024-2, tipo A

- (5) unitario paralelo al plano XZ a 45° de un vector [U3; ejercicio 3.5.4]; (6) plano de un paralelogramo, recta por dos puntos [U4; como el ejercicio 4.5.1].

2º final 2025-1, tipo A

- (5) punto, componente vectorial, área [U3; como el propuesto 3.6.10]; (6) distancia punto–recta, plano que contiene dos rectas [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2025-2, tipo A



E.3 · Unidad 3 · Álgebra vectorial

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. **Incógnitas:** $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$.
2. **Perpendicularidad:** $(a,b,0)\cdot(1,-2,4) = a-2b = 0 \Rightarrow a = 2b$.
3. **Área:** $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = (0,0,ab)$, así que $\frac{1}{2}|ab| = 4 \Rightarrow |ab| = 8$.
4. Con $a = 2b$: $2b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2$, $a = \pm 4$ (mismo signo).

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{RP} = (2,-1,-1)$, $\overrightarrow{RQ} = (1,-2,4)$; $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = 2+2-4 = 0$: el ángulo en R es recto, así que P, R, Q son vértices consecutivos de un rectángulo; el paralelogramo con el cuarto vértice opuesto a R tiene sus cuatro ángulos rectos.
2. **b)** S es el vértice opuesto a R: $S = P+Q-R = (1+0+1,\ 2+1-3,\ -3+2+2) = (2,0,1)$.
3. **Comprobación:** $\overrightarrow{QS} = (2,-1,-1) = \overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ} = (-1,2,-4)\cdot(-2,1,1) = 0$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12-4-8 = 0$: ya son perpendiculares. $\vec{a}\cdot\vec{c} = 12-8+4c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -1$.
2. **b)**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (8-4)\hat{\imath} - (-12-8)\hat{\jmath} + (6+8)\hat{k} = (4,20,14),$$

$A = \sqrt{16+400+196} = \sqrt{612} = 6\sqrt{17}$. Como $\vec{a}\perp\vec{b}$, también $A = |\vec{a}||\vec{b}| = 2\sqrt{17}\cdot 3$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del examen de tu plan. Resuélvelo sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

- **Plan 2010:** seis problemas, 2 horas.
- **Plan 2016:** los problemas 5 (vectores) y 6 (recta y plano), 40 minutos. Se suman a los simulacros del Plan 2016 del cuaderno de Cálculo Diferencial (problemas 1 a 4, 80 minutos): el simulacro 1 de este cuaderno completa el 1 de aquel, y el 2, el 2. Juntos son un final completo de 2 horas.

Simulacro	1	2	3	4	5	6
Plan 2010, 1	2.6.1	3.6.1	4.6.1	5.6.1	6.6.1	6.6.3
Plan 2010, 2	2.6.2	3.6.3	4.6.3	5.6.2	6.6.2	6.6.4
Plan 2016, 1	—	—	—	—	3.6.9	4.6.8
Plan 2016, 2	—	—	—	—	3.6.11	4.6.11

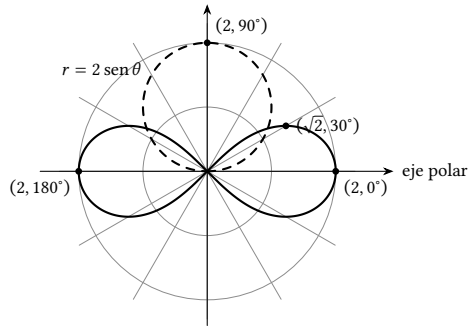
Las columnas 1 a 6 son los problemas del examen; los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). En el Plan 2010, la columna 5 es la superficie por generatrices y la 6, la identificación de cuádricas; si quieres un tercer simulacro, usa los propuestos 3.6.4, 4.6.4, 5.6.3, 6.6.6 y 6.6.5 con la curva polar 2.6.3. En el Plan 2016, las columnas 1 a 4 son las del cuaderno de Cálculo Diferencial.

1. **Indicador:** $A = B = C = 1$; $I = 1 - 4 = -3 < 0$: elipse.
2. **Ángulo:** $\cot 2\theta = \frac{1-1}{1} = 0$, $\theta = 45^\circ$.
3. **Coeficientes nuevos:** $A' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $C' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; comprobación $A' + C' = 2 = A + C$.
4. **Forma ordinaria:** $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 4$, es decir,
$$\frac{x'^2}{8/3} + \frac{y'^2}{8} = 1.$$
5. **Semiejes:** $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ sobre el eje y' (la recta $y = -x$) y $b = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ sobre el eje x' (la recta $y = x$). Comprobación: $(-2, 2)$ está en la curva $(4 - 4 + 4 = 4)$ a distancia $2\sqrt{2}$ del origen.

E.2 · Unidad 2 · Curvas en el plano polar (solo Plan 2010)

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. **a)** C_1**:** circunferencia por el polo ($r = a \operatorname{sen}\theta$, $a = 2$), de centro $(0, 1)$ y radio 1.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 90^\circ : r = 2$, punto $(2, 90^\circ)$; $\theta = 270^\circ : r = -2$, punto $(-2, 270^\circ)$, que es el mismo $(2, 90^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 0^\circ$: el polo está en C_1 y en la recta. Son dos puntos: el polo y $(2, 90^\circ)$.
4. **b) Identificación:** $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ con $a = 2$: lemniscata de lazos sobre el eje polar. Existe para $\cos 2\theta \geq 0$: $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ y $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$.
5. **b) Puntos:** $\theta = 0^\circ : r^2 = 4$, $r = \pm 2$: $(2, 0^\circ)$ y $(-2, 0^\circ) = (2, 180^\circ)$. $\theta = 30^\circ : r^2 = 4 \cos 60^\circ = 2$, $\left(\sqrt{2}, 30^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$.
6. **b) Bosquejo:** $\theta \to -\theta$ y $r \to -r$ no cambian la ecuación: simétrica respecto al eje polar y al polo (y, por tanto, a la recta a 90°). Se dibuja el lazo de 0° a 45° y se refleja.



Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2 + 2\cos(-\theta) = 2 + 2\cos\theta$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 4$, punto $(4, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = 0$, el polo.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de las asignaturas

- Programa de estudio de *Geometría Analítica* del Plan 2010 (primer semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Seis temas: introducción a la geometría analítica, curvas en el plano polar, álgebra vectorial, la recta y el plano en el espacio, curvas en el espacio, y superficies.
- Programa de estudio de *Cálculo y Geometría Analítica* del Plan 2016 (primer semestre, 12 créditos, 96 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Siete temas: secciones cónicas, funciones, límites y continuidad, la derivada y aplicaciones, variación de funciones, álgebra vectorial, y recta y plano. Este cuaderno cubre los temas 1, 6 y 7; los temas 2 a 5 están en el cuaderno de Cálculo Diferencial.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Ningún examen usado en las unidades tiene resolución publicada: las resoluciones de este cuaderno son propias. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó; los del Plan 2016 llevan el nombre de la asignatura.

- **Geometría Analítica, Plan 2010:** 9 exámenes finales colegiados, de 2012-1 a 2014-2 (3 primeros finales, tipos A y C, y 6 segundos finales), con 58 problemas.
- **Geometría Analítica, versión anterior del programa:** 3 exámenes parciales colegiados de 2005-2 y 2006-2 (primero y segundo parciales de 2005-2 y tercer parcial de 2006-2), con los mismos temas. Uno de sus problemas (coordenadas cilíndricas y esféricas) quedó fuera del programa de 2008 y no se usa.
- **Cálculo y Geometría Analítica, Plan 2016:** los problemas de geometría de 39 exámenes finales (25 primeros y 14 segundos finales, de 2016-1 a 2020-1 y de 2024-1 a 2026-2) y los de cónicas de 12 primeros exámenes parciales (2024-1 a 2026-2).

Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Series de ejercicios. Las series de ejercicios de las dos asignaturas (curvas polares, álgebra vectorial, recta y plano, curvas en el espacio y superficies del Plan 2010; secciones cónicas, álgebra vectorial, y recta y plano del Plan 2016) se revisaron para la notación y el orden de los temas. Los ejercicios que se tomaron de ellas lo indican en su fuente.

Bibliografía de los programas

Geometría Analítica (Plan 2010). Básica

- Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. México: Fondo de Cultura Económica, 1995.

- Castañeda de I. P., É. *Geometría analítica en el espacio*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2003.
- Solís U., R. y otros. *Geometría analítica*. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1999.
- Swokowski, E. *Cálculo con geometría analítica*. México: Cengage Learning, 2007.

Geometría Analítica (Plan 2010). Complementaria

- Lehmann, C. *Geometría analítica*. México: Limusa, 2008.
- Menna G., Z. *Geometría analítica del espacio: un enfoque vectorial*. México: Limusa, 1981.
- Riddle, D. F. *Analytic Geometry*, 6.ª ed. Boston: PWS Publishing Company, 1996.
- Ruiz Zúñiga, Á. *Geometrías no euclidianas: breve historia de una gran revolución intelectual*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1999.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016), para los temas de geometría. Básica

- Castañeda de I. P., É. *Geometría analítica en el espacio*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009.
- De Oteyza, E. y otros. *Geometría analítica y trigonometría*. México: Pearson, 2008.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016), para los temas de geometría. Complementaria

- Lehmann, C. *Geometría analítica*. México: Limusa, 2008.
- Purcell, E. J. y Varberg, D. *Cálculo*, 9.ª ed. México: Prentice Hall, 2007.
- Swokowski, E. W. y Cole, J. A. *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*, 13.ª ed. Belmont: Brooks Cole, 2011.

La bibliografía de cálculo del programa de Cálculo y Geometría Analítica está en el cuaderno de Cálculo Diferencial.