6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Generatrices: escribe primero la directriz en forma ordinaria y su parametrización; con eso la ecuación vectorial sale en una línea.
2. Despeja s de la coordenada del plano de la directriz, luego $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$), y aplica la identidad.
3. Comprueba la cartesiana con el vértice (cono) y con el plano de la directriz.
4. Identificación: completa cuadrados en cada ecuación, iguala a 1 (o a 0) y nombra la superficie con la tabla 6.1.7, diciendo qué forma se cumple.
5. Escribe, para cada superficie, centro o vértice, eje, dos trazas y la extensión; si piden intervalos de variación, despeja cada cuadrado y exige ≥ 0.

Los dos problemas de esta unidad valen un tercio del examen y su procedimiento es siempre el mismo: es la unidad que más puntos da por hora de estudio.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 6.

Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{p} = \left(-1 + 2\cos\theta,\ 5,\ 3 + \dfrac{4}{\csc\theta}\right)$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C. b) Bosqueje la gráfica de C e identifíquela.

Resultado: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{16} = 1$, $y = 5$: elipse de centro $(-1, 5, 3)$, eje mayor paralelo al eje z, $a = 4$, $b = 2$; sin los puntos $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 4.

Sea la curva C representada por $\vec{p} = \big(-3,\ 2 - 5\operatorname{sen}^2 t,\ 4 - 3\operatorname{sen} t\big)$. a) Determine unas ecuaciones paramétricas de C y el intervalo paramétrico asociado a ellas. b) Determine unas ecuaciones cartesianas de C, así como los intervalos de variación de y y z.

Resultado: $x = -3$, $y = 2 - 5\operatorname{sen}^2 t$, $z = 4 - 3\operatorname{sen} t$, $t \in \mathbb{R}$; $(z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2)$, $x = -3$; $y \in [-3, 2]$, $z \in [1, 7]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 4.

Sea la curva C representada por $\vec{r}(\theta) = (3 + \operatorname{sen} 2\theta)\,\hat{\imath} - 7\,\hat{\jmath} + (\cos\theta)\,\hat{k}$. Obtenga: a) el intervalo paramétrico; b) los intervalos de variación para x y z; c) unas ecuaciones cartesianas de C.

Resultado: $\theta \in \mathbb{R}$ (una vuelta en $[0, 2\pi)$); $x \in [2, 4]$, $z \in [-1, 1]$; $y = -7$, $(x-3)^2 = 4z^2\big(1 - z^2\big)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 4.

Sea la curva $C:\ \ x = \sqrt{9 - t} - 3,\ y = -1,\ z = \dfrac{2}{\sqrt{t + 16}}$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine el conjunto de valores para cada una de las coordenadas x y z de los puntos de C.

Resultado: $t \in (-16, 9]$; $x \in [-3, 2)$, $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 1.

Sea la curva $A:\ \ x = -1,\ y = 2\operatorname{sen} t,\ z = 2\cos t$, para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Determine: a) el conjunto de valores de z donde está definida; b) una ecuación vectorial; c) las ecuaciones cartesianas. Identifique la curva.

Resultado: $z \in [0, 2]$; $\vec{p} = (-1,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$; $y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$, con $z \geq 0$: semicircunferencia de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2.

Ejercicio propuesto 6.6.5

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 + x - 2y = 1$; b) $\dfrac{(y+1)^2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2} = \dfrac{(z-1)^2}{4}$; c) $(x+1)^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = \dfrac{z^2}{4}$.

Resultado: a) elipsoide de revolución, centro $\left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right)$, semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$, $\frac{\sqrt{34}}{4}$, $\frac{\sqrt{17}}{4}$; b) cono elíptico, vértice $(2, -1, 1)$, eje paralelo a y; c) hiperboloide de una hoja, centro $(-1, 0, 0)$, eje paralelo a z.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 6.6.6

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 4.

Obtenga una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del cono cuyo vértice es el punto $V(0, 1, 0)$ y que contiene a la curva $C:\ y = 0,\ x^2 + z^2 = 2$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0, 1, 0) + s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$; $x^2 + z^2 = 2(y-1)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 6.6.7

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 5.

Obtenga una ecuación vectorial del cilindro que se forma por circunferencias de radio igual a 3 contenidas en planos paralelos a $y = 0$, tales que todas tienen su centro en la recta $L:\ \vec{p} = (1,\ 1+t,\ 1)$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, t) = (1 + 3\cos\theta,\ 1+t,\ 1 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta)$; su cartesiana es $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 6.6.8

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 6.

Sea la superficie $S:\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z^2 - 1$. Obtenga: a) las trazas de S con los planos XZ y YZ; b) el conjunto de valores de z para los cuales está definida la superficie; c) una ecuación vectorial de la curva C que se forma por la intersección de S con el plano $z = \sqrt{2}$.

Resultado: a) hipérbolas $z^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ $(y = 0)$ y $z^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ $(x = 0)$; b) $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; c) $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 6.6.9

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 7.

Identifique las superficies cuyas ecuaciones se dan a continuación, justificando las respuestas: a) $x^2 + 3x + 2 = 0$; b) $(x-1)^2 + y^2 = 1 - (z+1)^2$; c) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$; d)

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe las paramétricas (o la vectorial) aunque no las pidan: de ahí sale todo.
2. SOLO PLAN 2010 Intervalo paramétrico: una condición por componente, e intersección.
3. SOLO PLAN 2010 Extensión: recorrido de cada coordenada, partiendo de $-1 \le \mathrm{sen}\,t \le 1$ o de la monotonía.
4. Elimina el parámetro con la identidad que corresponde; escribe la cónica en forma ordinaria y el plano.
5. Identifica: nombre, centro o vértice, eje focal, semiejes, vértices y focos, con la tercera coordenada; di si la extensión recorta la cónica.
6. Bosquejo: plano, centro, vértices, asíntotas y la curva solo en su extensión.

Si no sale la identidad, el intervalo paramétrico y la extensión (Plan 2010) ya valen buena parte del problema.

- **Eje:** el eje y; generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$; directriz, la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$.
- **Extensión:** $x \in [-2, 2]$, $z \in [-2, 2]$, $y \in \mathbb{R}$.

Resultado: a) elipsoide de centro $(1, 0, -3)$; b) hiperboloide de una hoja de centro $(0, 1, 0)$ y eje paralelo a y; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0, 0, 1)$; d) cilindro circular de radio 2 y eje y.

Ejercicio 6.5.9 · Hiperboloide de dos hojas, paraboloide hacia abajo y cilindro elíptico

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $\dfrac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 - \dfrac{(z-1)^2}{16} = 1$; b) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = -5z - 3$; c) $\dfrac{(y-2)^2}{16} = -\dfrac{(z+1)^2}{9} + 1$.

Resolución.

1. **a)** Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** $(3, -2, 1)$; **eje** la recta $y = -2$, $z = 1$, paralela a x; **vértices** $(0, -2, 1)$ y $(6, -2, 1)$.
   - **Trazas:** $x = k$ con $|k - 3| > 3$, elipses $(y + 2)^2 + \frac{(z-1)^2}{16} = \frac{(k-3)^2}{9} - 1$; plano $z = 1$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - (y + 2)^2 = 1$; plano $y = -2$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$.
   - **Extensión:** $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.
2. **b) Completar cuadrados:** $(x - 1)^2 - 1 + 2(y + 2)^2 - 8 = -5z - 3$, es decir
   $$(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = -5\left(z - \tfrac{6}{5}\right).$$
   Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal z: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.
   - **Vértice** $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$; **eje** la recta $x = 1$, $y = -2$; abre hacia z negativo (el coeficiente -5).
   - **Trazas:** plano $z = 0$, elipse $(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = 6$; plano $x = 1$, parábola $2(y + 2)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$; plano $y = -2$, parábola $(x - 1)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$.
   - **Extensión:** $z \in \left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$; $x, y \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $\dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(z+1)^2}{9} = 1$. Falta x y los dos cuadrados son positivos: **cilindro elíptico**; no es elipsoide (no hay tres cuadrados).
   - **Eje:** la recta $y = 2$, $z = -1$, paralela al eje x; generatrices paralelas a $\hat{\imath}$.
   - **Directriz:** la elipse de centro $(0, 2, -1)$ en el plano $x = 0$, semiejes 4 (en y) y 3 (en z).
   - **Extensión:** $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-2, 6]$, $z \in [-4, 2]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas, centro $(3, -2, 1)$, eje paralelo a x; b) paraboloide elíptico, vértice $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$, abre hacia z negativo; c) cilindro elíptico de eje $y = 2$, $z = -1$.

6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.6**.

- **Cuádricas:** su ecuación cartesiana es de segundo grado en x, y, z. Son el elipsoide (y la esfera), los hiperboloides de una y de dos hojas, los paraboloides elíptico e hiperbólico, el cono y los cilindros de base cónica.
- **Cilíndricas:** formadas por rectas paralelas a un vector que pasan por una curva.
- **Cónicas:** formadas por rectas que pasan por un punto fijo y por una curva.
- **Regladas y de revolución** (sección 6.1.4).

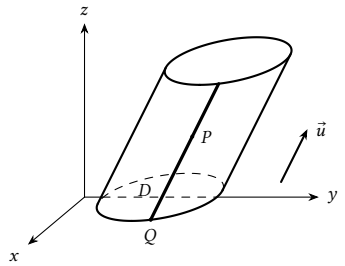
Un cono o cilindro con directriz cónica es a la vez cónico (o cilíndrico) y cuádrico; si la directriz es otra curva, la superficie ya no es cuádrica.

6.1.2 Superficies cilíndricas

Una *superficie cilíndrica* es el conjunto de rectas paralelas a un vector $\vec{u}$ que cortan a una curva D. La curva D es la **directriz**; cada recta, una **generatriz**. Si D está dada por $\vec{q}(\theta)$, cada punto de la superficie es un punto de D más un múltiplo de $\vec{u}$:

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}.$$

Con s fijo se obtiene una copia de la directriz trasladada; con θ fijo, una generatriz (figura).



En el examen la directriz es siempre una cónica en un plano paralelo a uno coordenado ($z = 3$, $x = 0$), y $\vec{u}$ no es paralelo a ese plano. Si $\vec{u}$ es perpendicular al plano de la directriz, el cilindro es *recto* y su ecuación cartesiana es la de la directriz sin la variable que falta: $x^2 + z^2 = 4$ es un cilindro circular recto de eje y.

6.1.3 Superficies cónicas

Una *superficie cónica* es el conjunto de rectas que pasan por un punto fijo V, el **vértice**, y por los puntos de una curva D, la **directriz**. La generatriz que pasa por el punto $\vec{q}(\theta)$ de la directriz tiene dirección $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, así que

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\left(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\right),$$

donde $\vec{v}$ es el vector de posición de V. Con $s = 0$ se obtiene el vértice; con $s = 1$, la directriz; con $s < 0$, la otra hoja del cono, del otro lado del vértice.

- **Trazas:** $y = k \neq 0$, circunferencias $x^2 + z^2 = k^2$ de radio $|k|$; plano $z = 0$, rectas $y = \pm x$; plano $x = 0$, rectas $y = \pm z$.
- **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. **b)** Multiplicando por -1: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de una hoja**; es de revolución (coeficientes de x^2 y y^2 iguales).
   - **Centro** en el origen; **eje** z.
   - **Trazas:** $z = k$, circunferencias de radio $\sqrt{1 + k^2}$ (la garganta, de radio 1, en $z = 0$); plano $x = 0$, hipérbola $y^2 - z^2 = 1$; plano $y = 0$, hipérbola $x^2 - z^2 = 1$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $z = 9y^2 - 4(x - 1)^2$. Dos cuadrados de signo contrario y una variable lineal: se cumple la forma del **paraboloide hiperbólico**; no se cumple la del elíptico (los signos no coinciden).
   - **Punto silla** $(1, 0, 0)$; eje paralelo a z (la recta $x = 1$, $y = 0$).
   - **Trazas:** plano $x = 1$, parábola $z = 9y^2$, abre hacia z positivo; plano $y = 0$, parábola $z = -4(x - 1)^2$, abre hacia z negativo; plano $z = 0$, rectas $3y = \pm 2(x - 1)$; $z = k \neq 0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Resultado: a) cono circular de vértice en el origen y eje y; b) hiperboloide de una hoja de revolución, centro en el origen, eje z; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(1, 0, 0)$.

Ejercicio 6.5.7 · Dos hojas, paraboloide y elipsoide trasladado

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 6.

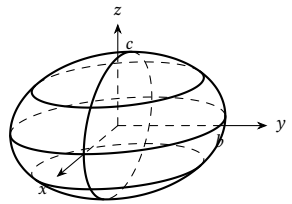
Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $5x^2 - 3y^2 + 15z^2 + 15 = 0$; b) $x - y^2 - 4z^2 = -4$; c) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 2y - 4z + 3 = 0$.

Resolución.

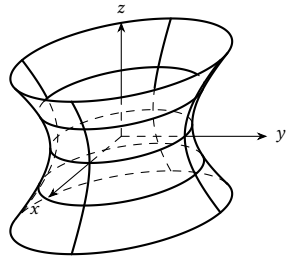
1. **a)** $5x^2 - 3y^2 + 15z^2 = -15$; dividiendo entre -15:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} - z^2 = 1.$$

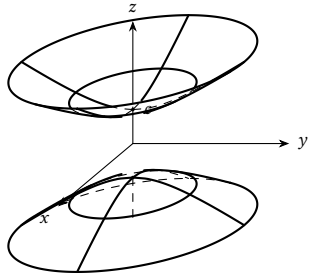
   Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y; **vértices** $(0, \pm\sqrt{5}, 0)$.
   - **Trazas:** $y = k$ con $|k| > \sqrt{5}$, elipses $\frac{x^2}{3} + z^2 = \frac{k^2}{5} - 1$; plano $z = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$; plano $x = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - z^2 = 1$.
   - **Extensión:** $y \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$; $x, z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** $x + 4 = y^2 + 4z^2$. Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal x: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.
   - **Vértice** $(-4, 0, 0)$; **eje** x; abre hacia x positivo.
   - **Trazas:** $x = k > -4$, elipses $\frac{y^2}{k+4} + \frac{z^2}{(k+4)/4} = 1$; plano $z = 0$, parábola $y^2 = x + 4$; plano $y = 0$, parábola $4z^2 = x + 4$.
   - **Extensión:** $x \in [-4, \infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.



Hiperboloide de una hoja. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$: dos cuadrados positivos, uno negativo, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo menos. Las trazas $z = k$ son elipses para todo k (la menor, la *garganta*, en $z = 0$); las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son hipérbolas. Es una sola pieza: x, y, z toman todos los reales en su rango natural.



Hiperboloide de dos hojas. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: un cuadrado positivo, dos negativos, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo más. Los **vértices** son $(0, 0, \pm c)$; entre ellos no hay superficie: $|z| \geq c$. Las trazas $z = k$ con $|k| > c$ son elipses; las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son hipérbolas.



Paraboloide elíptico. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$: dos cuadrados del mismo signo y la tercera variable *lineal*. El eje es el de la variable lineal; el **vértice**, el origen. Abre hacia donde la variable lineal tiene el signo de los cuadrados ($z \geq 0$ si $c > 0$). Las trazas $z = k > 0$ son elipses; las trazas con $x = 0$ y $y = 0$, parábolas. Si $a = b$ es un paraboloide circular (de revolución).

5. **Ecuación cartesiana:** $\dfrac{9x^2}{z^2} + \dfrac{4(y-2)^2}{z^2} = 1$, es decir

$$9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2.$$

   Es un cono elíptico con vértice $(0,2,0)$ y eje paralelo al eje z (tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero).

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0,2,0) + s(2\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 6)$; $9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2$.

Ejercicio 6.5.3 · Cilindro con directriz elíptica y generatrices oblicuas

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 6.

Sea S la superficie cilíndrica formada por rectas paralelas al vector $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$ y que contiene a la curva $H:\ 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0,\ z = 3$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) unas ecuaciones paramétricas de S; c) una ecuación cartesiana de S.

Resolución.

1. **Directriz:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.
2. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s\,(3,0,2)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
3. **b) Paramétricas:** $x = 2\cos\theta + 3s$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$, $z = 3 + 2s$.
4. **Eliminación de s:** $s = \dfrac{z-3}{2}$.
5. **Eliminación de θ:** $\cos\theta = \dfrac{x - 3s}{2} = \dfrac{2x - 3z + 9}{4}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{3}$.
6. **c) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(2x - 3z + 9)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, es decir

$$9(2x - 3z + 9)^2 + 16y^2 = 144.$$

7. **Comprobación:** con $z = 3$: $9(2x)^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36$.

Resultado: $\vec{p} = (2\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 3) + s(3,0,2)$; $9(2x - 3z + 9)^2 + 16y^2 = 144$.

Ejercicio 6.5.4 · Cilindro con directriz hiperbólica

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica S formada por el conjunto de las rectas paralelas al vector $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 12\hat{k}$ y que tiene por intersección con el plano $z = 3$ a la curva $D:\ (y-3)^2 - (x+4)^2 = 16,\ z = 3$.

Resolución.

1. **Directriz:** $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+4)^2}{16} = 1$ es una hipérbola de centro $(-4,3,3)$ y eje focal paralelo a y. Se parametriza con $y - 3 = 4\sec\theta$, $x + 4 = 4\tan\theta$:

$$\vec{q}(\theta) = (-4 + 4\tan\theta,\ 3 + 4\sec\theta,\ 3), \quad \theta \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right).$$

2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (-4 + 4\tan\theta,\ 3 + 4\sec\theta,\ 3) + s\,(1,2,12)$, $s \in \mathbb{R}$.
3. **Paramétricas:** $x = -4 + 4\tan\theta + s$, $y = 3 + 4\sec\theta + 2s$, $z = 3 + 12s$.
4. **Eliminación de s:** $s = \dfrac{z-3}{12}$.

6.1.6 Cuádricas trasladadas

Si el centro (o vértice) es (h,k,l), en cada forma canónica se cambia x por $x - h$, y por $y - k$ y z por $z - l$. El eje deja de ser un eje coordenado y pasa a ser una recta paralela a él: en $\frac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$ el eje es la recta $y = -2$, $z = 1$, paralela al eje x.

Cuando la ecuación viene desarrollada ($x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5z + 3 = 0$), se **completan cuadrados** variable por variable:

$$ax^2 + dx = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}.$$

Los términos lineales de una variable que *también* está al cuadrado desaparecen al completar el cuadrado; los de una variable que *no* está al cuadrado se quedan y la convierten en la variable lineal de un paraboloide (o de un cilindro parabólico). Los exámenes del Plan 2010 no traen términos mixtos (xy, xz, yz).

6.1.7 Tabla de reconocimiento

Después de completar cuadrados y pasar todo a la forma $\pm\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ 0$ o -1 (con $X = x - h$, etc.), o con una variable lineal, la superficie se lee de los signos:

Forma (tras completar cuadrados)	Superficie
tres cuadrados, todos +, = 1	elipsoide (esfera si $a = b = c$)
tres cuadrados, todos +, = 0	un punto (el centro)
tres cuadrados, todos +, = −1	ningún punto (vacío)
tres cuadrados, dos + y uno −, = 1	hiperboloide de una hoja; eje: la variable con −
tres cuadrados, uno + y dos −, = 1	hiperboloide de dos hojas; eje: la variable con +
tres cuadrados con signos mixtos, = 0	cono; eje: la variable de signo solitario
dos cuadrados del mismo signo = término lineal de la tercera	paraboloide elíptico; eje: la variable lineal
dos cuadrados de signo contrario = término lineal de la tercera	paraboloide hiperbólico
dos cuadrados, + y +, = 1; falta la tercera variable	cilindro elíptico (circular si $a = b$)
dos cuadrados, + y −, = 1; falta la tercera variable	cilindro hiperbólico
dos cuadrados, + y −, = 0; falta la tercera variable	dos planos que se cortan
dos cuadrados, + y +, = 0; falta la tercera variable	una recta
un cuadrado y una variable lineal	cilindro parabólico

Ejemplo resuelto · Identificación con intervalos de variación

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 6.

Para cada una de las siguientes ecuaciones cartesianas, identifique el lugar geométrico que representan, indicando los intervalos de variación para x, y, z:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z + 12 = 0$; b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$;

c) $\dfrac{(x-3)^2}{9} - \dfrac{(y-5)^2}{4} + \dfrac{(z+2)^2}{9} = -1$.

Resolución.

1. **a) Completar cuadrados:** $(x^2+4x+4) + (y^2-6y+9) - z + 12 - 4 - 9 = 0$, es decir
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = z + 1.$$
   - **Tipo:** dos cuadrados del mismo signo igualados a una variable lineal: se cumple la forma del paraboloide elíptico; los denominadores son iguales, así que es **paraboloide circular** (de revolución).
   - **Vértice** $(-2, 3, -1)$; **eje** la recta $x = -2$, $y = 3$, paralela al eje z; abre hacia z positivo.
   - **Trazas:** $z = k > -1$, circunferencias de centro $(-2, 3, k)$ y radio $\sqrt{k+1}$; plano $x = -2$, parábola $(y-3)^2 = z + 1$; plano $y = 3$, parábola $(x+2)^2 = z + 1$.
   - **Intervalos:** el primer miembro es ≥ 0, así que $z + 1 \geq 0$: $z \in [-1, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
2. **b) Tipo:** tres cuadrados con el mismo coeficiente, todos positivos, igualados a una constante positiva: se cumple la forma de la **esfera**.
   - **Centro** $(1, 2, -3)$, **radio** 2. Simétrica respecto a cualquier plano que pase por el centro.
   - **Trazas:** con el plano $z = -3$, la circunferencia $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$; con $x = 1$ y $y = 2$, circunferencias de radio 2.
   - **Intervalos:** $x \in [1-2, 1+2] = [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$.
3. **c) Forma ordinaria:** multiplicando por -1,
$$\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1.$$
   - **Tipo:** tres cuadrados, uno positivo y dos negativos, igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**; no se cumple la de una hoja (habría dos positivos). Denominadores de x y z iguales: es de revolución.
   - **Centro** $(3, 5, -2)$; **eje** la recta $x = 3$, $z = -2$, paralela al eje y; **vértices** $(3, 3, -2)$ y $(3, 7, -2)$.
   - **Trazas:** plano $z = -2$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$; plano $x = 3$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1$; plano $y = 5$, ningún punto; plano $y = 9$, circunferencia $(x-3)^2 + (z+2)^2 = 27$.
   - **Intervalos:** $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{9} = \frac{(y-5)^2}{4} - 1 \geq 0 \Rightarrow |y-5| \geq 2$: $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«cono con vértice en V» y «cuya intersección con el plano… es la curva», o «que contiene a la curva»	ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana	6.3.1
«superficie cilíndrica», «cilindro con eje paralelo a $\vec{v}$», «superficie reglada… rectas paralelas al vector»	ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana	6.3.2
la directriz es una hipérbola o una cónica sin centro en el origen	parametrizar la directriz	6.3.3
«circunferencias de radio r… con centro en la recta L»	cilindro recto	6.3.2
«identificar la superficie representada por…» (varias ecuaciones)	nombre y características	6.3.4
«intervalos de variación», «conjunto de valores de z»	extensión	6.3.5
«trazas con los planos XZ y YZ», «curva intersección con el plano $z = k$»	cónicas de corte	6.3.4, paso 5

6.3 Procedimientos

6.3.1 Cono por el método de las generatrices

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$. Si es la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ en el plano $z = l$: $\vec{q}(\theta) = (h + a\cos\theta,\ k + b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$. Si viene como $9x^2 + 4(y-2)^2 = 36$, divide primero entre 36.
2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, del vértice al punto de la directriz.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Paramétricas:** las tres componentes de la anterior.
5. **Eliminación de s:** la componente que corresponde al plano de la directriz es lineal en s (por ejemplo $z = 6 - 6s$); despeja s.
6. **Eliminación de θ:** de las otras dos componentes despeja $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (aparecen divididos entre s) y sustituye en $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$.
7. **Simplifica:** multiplica por el denominador común; deja la ecuación como una igualdad de cuadrados.
8. **Comprueba** con dos cosas: el vértice satisface la ecuación, y al hacer $z = l$ se recupera la directriz.

6.3.2 Cilindro por el método de las generatrices

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$ como en 6.3.1.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$, con $\vec{u}$ el vector de las generatrices.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 5.6.6

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 2.

Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = 8\,\hat{\imath} + 2t\,\hat{\jmath} + \frac{2}{t}\,\hat{k}$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas; b) las ecuaciones cartesianas; c) el intervalo paramétrico.

Resultado: $x = 8$, $y = 2t$, $z = \frac{2}{t}$; $yz = 4$, $x = 8$ (hipérbola equilátera); $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

5.7 Errores frecuentes

1. **Una sola ecuación cartesiana.** $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ sola es un cilindro; la curva necesita también el plano $z = 3$.
2. **Elementos sin la tercera coordenada.** El centro de la hipérbola del ejemplo 5.4 es $(1, -2, 3)$, no $(1, -2)$.
3. **Usar la identidad equivocada con** $\cos 2\theta$**.** Si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, se usa $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$; si trae $\cos\theta$, $2\cos^2\theta - 1$.
4. **Confundir el eje focal de la hipérbola.** Es el de la variable con signo positivo en la forma ordinaria (la que lleva sec en las paramétricas), no el de la que tiene el denominador mayor.
5. **Intervalo paramétrico con desigualdad no estricta en un denominador.** $\frac{1}{\sqrt{t+4}}$ exige $t > -4$, no $t \geq -4$.
6. **Dar la extensión de la cónica completa.** Con $x = 4\operatorname{sen}\theta$ la parábola solo llega a $|x| \leq 4$; la extensión sale de las paramétricas, no de la cartesiana.
7. **Olvidar los puntos excluidos.** Con $\frac{4}{\csc\theta}$ los valores $\theta = k\pi$ no están en el intervalo y la elipse pierde dos puntos.
8. **Invertir la desigualdad mal.** Con $z = 4 - 3\operatorname{sen} t$, $\operatorname{sen} t = 1$ da el mínimo $z = 1$, no el máximo.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Vectorial $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \iff$ paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z = k$).
- $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \csc^2 t - \cot^2 t = 1 \cdot \cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1 \cdot \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t$.
- $(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 = 2$.
- Elipse: $u = h + a\cos t$, $v = k + b\operatorname{sen} t$ · hipérbola: $u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$ · parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$: $u = h + 2t$, $v = k + \frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2 = a^2 - b^2$; hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, asíntotas $v - k = \pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en u).
- SOLO PLAN 2010 Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ } \geq 0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }} > 0$; tan, sec : $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; cot, csc : $t \neq k\pi$).
- SOLO PLAN 2010 Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$.

$x^2 + z = y^2 - 4$.

Resultado: a) dos planos paralelos, $x = -1$ y $x = -2$; b) esfera de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; c) cono circular de vértice en el origen y eje x; d) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0, 0, -4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

6.7 Errores frecuentes

1. **Usar el punto de la directriz como vértice.** En el cono la dirección de la generatriz es $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, no $\vec{q}(\theta)$. En el cilindro, en cambio, la dirección es siempre $\vec{u}$.
2. **Olvidar despejar** s **de la componente correcta.** Se despeja de la coordenada del plano de la directriz (z si la directriz está en $z = 3$; x si está en $x = 0$), que es la única lineal en s y sin θ.
3. **Parametrizar la directriz sin dividir.** $9x^2 + 4y^2 = 36$ no es $x = 9\cos\theta$: primero $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, luego $x = 2\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$.
4. **Usar** $\operatorname{sen}^2 + \cos^2$ **con una hipérbola.** Una directriz hiperbólica se parametriza con sec y tan y se elimina con $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.
5. **No comprobar.** Al hacer $z = l$ en la cartesiana debe salir la directriz; si no sale, hay un error de signo. La comprobación toma un minuto.
6. **Leer el tipo antes de completar cuadrados o de igualar a 1.** $5x^2 - 3y^2 + 15z^2 + 15 = 0$ parece de una hoja (dos positivos), pero al dividir entre -15 es de dos hojas.
7. **Confundir el eje.** En el hiperboloide de una hoja el eje es la variable con signo *menos*; en el de dos hojas, la de signo *más*; en el paraboloide, la variable lineal.
8. **Llamar elipsoide a un cilindro.** Si falta una variable ($\frac{(y-2)^2}{16} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$), es un cilindro con generatrices paralelas al eje de la variable que falta.
9. **Dar solo el nombre.** Sin centro o vértice, eje y trazas, la identificación queda incompleta.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Cilindro: $\vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big)$.
- Directriz: elipse $(h + a\cos\theta,\ k + b\operatorname{sen}\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$: $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ o $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.
- Completar cuadrados: $ax^2 + dx = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}$.
- $+\ +\ +\ = 1$ elipsoide · $+\ +\ -\ = 1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\ -\ -\ = 1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $= 0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $+\ +\ = 0$: recta; $+\ +\ = -1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h - a, h + a]$; dos hojas $|z - l| \geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.

Unidad 6 · Superficies (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno identificará superficies cuádricas a partir de su ecuación cartesiana; y obtendrá la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de superficies.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 este tema está en Cálculo Vectorial.
- **Frecuencia:** en los 9 finales del Plan 2010 esta unidad vale **dos problemas** (un tercio del examen): 16 problemas en total. Superficie por generatrices, 8 (cono con vértice y directriz 4, cilindro con generatrices paralelas a un vector 4); siempre piden una ecuación vectorial y una cartesiana, y a veces las paramétricas. Identificación de cuádricas, 8, con 25 ecuaciones en total (elipsoide, esfera, hiperboloides de una y dos hojas, paraboloides elíptico e hiperbólico, cono y cilindros), casi siempre trasladadas y con cuadrados por completar; el enunciado advierte que «la identificación requiere más información que el nombre». Solo dos exámenes se salen de la plantilla: el 1er final 2012-1, tipo C, no trae generatrices, y el 2º final 2012-2 no trae identificación. En el 3er parcial 2006-2, tipo B, hay 4 problemas más (cono, cilindro, hiperboloide e identificación).
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 6.1.2, 6.1.3, 6.1.5 y 6.1.7 (40 min): generatrices, catálogo de cuádricas y tabla de reconocimiento.
  2. Aprende los procedimientos 6.3.1, 6.3.2 y 6.3.4: son los dos problemas del examen.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 6.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 6.5.1, 6.5.3, 6.5.4, 6.5.7 y 6.5.9 con cronómetro: 15 min cada uno.
  5. Para un simulacro, los propuestos 6.6.1 y 6.6.2 (generatrices) y 6.6.3 a 6.6.5 (identificación) son problemas completos de examen.

6.1 Conceptos y expresiones

6.1.1 Superficie: ecuaciones y clasificación

Una *superficie* es un conjunto de puntos del espacio que depende de *dos* parámetros (una curva depende de uno). Se representa de tres maneras:

- **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \big(x(\theta,s),\ y(\theta,s),\ z(\theta,s)\big)$, con dos parámetros θ y s.
- **Ecuaciones paramétricas:** las tres componentes por separado, $x = x(\theta, s)$, $y = y(\theta, s)$, $z = z(\theta, s)$.
- **Ecuación cartesiana:** una sola ecuación $F(x, y, z) = 0$. Se obtiene de las paramétricas *eliminando los dos parámetros.*

Clasificación. Las superficies del programa se agrupan así:

Ejercicio propuesto 6.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cónica S que tiene por vértice el punto $V(3,-2,7)$ y contiene a la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1, \qquad z = 0.$$

Resultado: $\vec{p}(\theta,s) = (3,-2,7) + s(-5+2\cos\theta,\ 3+3\operatorname{sen}\theta,\ -7)$; $9(7x-5z+14)^2 + 4(7y+3z-7)^2 = 36(z-7)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 6.6.2

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 5.

Sea el cilindro S con eje paralelo al vector $\vec{v} = (-1,2,1)$ y cuya intersección con el plano $z - 3 = 0$ es la circunferencia de radio 2 y centro en $C(0,0,3)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

Resultado: $\vec{p}(\theta,s) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s(-1,2,1)$; $(x+z-3)^2 + (y-2z+6)^2 = 4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 6.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $x^2+2x+8y^2 = 23$; b) $(x-1)^2-9 = -3(y+2)^2-3z^2$; c) $-2x^2-5z^2 = -25-3y^2$.

Resultado: a) cilindro elíptico de eje $x = -1$, $y = 0$ (paralelo a z); b) elipsoide de revolución, centro $(1,-2,0)$, semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; c) hiperboloide de una hoja, centro en el origen, eje y.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

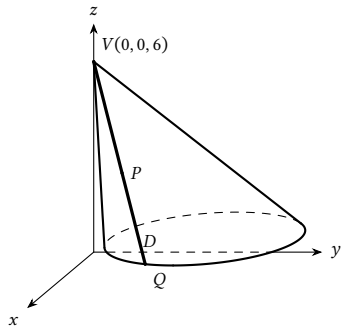
Ejercicio propuesto 6.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = (z-1)^2 + 1$; b) $\dfrac{(y-2)^2}{3} + \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{z^2}{4}$; c) $x^2 + y^2 - z^2 = -2z^2 + 2$.

Resultado: a) hiperboloide de una hoja, centro $(-2,3,1)$, eje paralelo a z; b) paraboloide hiperbólico, punto silla $(1,2,0)$, eje paralelo a x; c) esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.



6.1.4 Superficies regladas y de revolución

Estas dos clases se definen en el programa, pero en los exámenes nunca se piden por su nombre.

- Una superficie es **reglada** si por cada uno de sus puntos pasa una recta contenida en ella. Los cilindros y los conos son regladas; también el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico, que contienen dos familias de rectas (en $z = 9y^2 - 4(x-1)^2$, el plano $z = 0$ corta en las rectas $3y = \pm 2(x-1)$). El 2º final 2012-2 llama «superficie reglada» a un cilindro (ejercicio 6.5.5).
- Una superficie es **de revolución** si se genera al girar una curva plana alrededor de una recta, el **eje**. Sus trazas con planos perpendiculares al eje son circunferencias. En una cuádrica se reconoce porque dos de los denominadores son iguales: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ es de revolución alrededor del eje z. La esfera, el cono circular y el paraboloide circular son de revolución.

6.1.5 Cuádricas en forma canónica

Con centro (o vértice) en el origen y ejes sobre los ejes coordenados, las cuádricas tienen las formas de esta sección ($a, b, c > 0$). Se dibujan en *alambre de trazas*: las curvas que dejan los planos $z = k$ y los planos coordenados; lo que queda atrás va discontinuo. El eje de la superficie puede ser cualquiera de los tres: lo decide la variable que se distingue de las otras (por signo o por no estar al cuadrado).

Elipsoide. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Todas sus trazas son elipses (o un punto, o nada). Extensión: $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. Si dos semiejes son iguales es de revolución; si $a = b = c = r$, es la **esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

3. **c) Completar cuadrados:** $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 2(z-1)^2 - 2 + 3 = 0$, es decir $(x-2)^2 + (y+1)^2 + 2(z-1)^2 = 4$:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1.$$

   Tres cuadrados positivos igualados a 1: se cumple la forma del **elipsoide**; dos denominadores iguales: es de revolución alrededor de la recta $x = 2$, $y = -1$.
   - **Centro** $(2, -1, 1)$; semiejes 2, 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Trazas:** plano $z = 1$, circunferencia $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$; planos $x = 2$ y $y = -1$, elipses de semiejes 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Extensión:** $x \in [0, 4]$, $y \in [-3, 1]$, $z \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas de eje y, vértices $(0, \pm\sqrt{5}, 0)$; b) paraboloide elíptico de vértice $(-4, 0, 0)$ y eje x; c) elipsoide de revolución de centro $(2, -1, 1)$, semiejes 2, 2, $\sqrt{2}$.

Ejercicio 6.5.8 · Cuatro superficies, una de ellas cilindro

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 7.

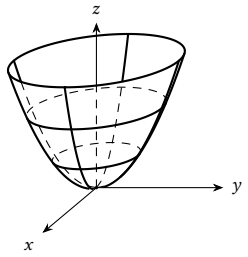
Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $(x-1)^2 + 2y^2 + (z+3)^2 - 16 = 0$; b) $3x^2 - 2y^2 + 4y + z^2 = 26$; c) $x^2 - y^2 - z + 1 = 0$; d) $x^2 + z^2 - 4 = 0$.

Resolución.

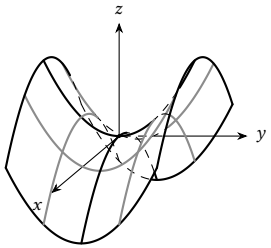
1. **a)** $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{8} + \frac{(z+3)^2}{16} = 1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide** de revolución (eje: la recta $x = 1$, $z = -3$, paralela a y).
   - **Centro** $(1, 0, -3)$; semiejes 4, $2\sqrt{2}$, 4.
   - **Trazas:** plano $y = 0$, circunferencia $(x-1)^2 + (z+3)^2 = 16$; planos $x = 1$ y $z = -3$, elipses.
   - **Extensión:** $x \in [-3, 5]$, $y \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, $z \in [-7, 1]$.
2. **b) Completar cuadrados:** $-2(y^2 - 2y) = -2(y-1)^2 + 2$, así que $3x^2 - 2(y-1)^2 + z^2 = 24$:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{12} + \frac{z^2}{24} = 1.$$

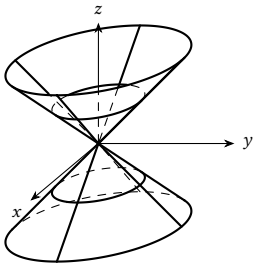
   Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(0, 1, 0)$; **eje** la recta $x = 0$, $z = 0$, paralela a y.
   - **Trazas:** plano $y = 1$ (garganta), elipse $\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{24} = 1$; plano $z = 0$, hipérbola $\frac{x^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$; plano $x = 0$, hipérbola $\frac{z^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $z - 1 = x^2 - y^2$. Dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.
   - **Punto silla** $(0, 0, 1)$; eje paralelo a z (el eje z).
   - **Trazas:** plano $y = 0$, parábola $z - 1 = x^2$ (abre hacia arriba); plano $x = 0$, parábola $z - 1 = -y^2$ (abre hacia abajo); plano $z = 1$, rectas $y = \pm x$.
4. **d)** $x^2 + z^2 = 4$. Falta y y los dos cuadrados son positivos: **cilindro circular recto** de radio 2.



Paraboloide hiperbólico (silla de montar). $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$: dos cuadrados de signo contrario y la tercera variable lineal. El origen es el **punto silla**. La traza con $x=0$ es una parábola que abre hacia z positivo; la traza con $y=0$, una parábola que abre hacia z negativo; las trazas $z=k\neq 0$ son hipérbolas, y la traza $z=0$ es un par de rectas. Extensión: todos los reales.



Cono. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a *cero*. El vértice es el origen; el eje, el de la variable con signo solitario. Las trazas $z=k\neq 0$ son elipses, y las trazas con $x=0$ y $y=0$ son pares de rectas (generatrices). Extensión: todos los reales.



Cilindros cuádricos. Falta una variable: la ecuación es la de una cónica del plano de las otras dos, y las generatrices son paralelas al eje de la variable que falta. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (cilindro elíptico), $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (cilindro hiperbólico), $y=ax^2$ (cilindro parabólico).

5. **Eliminación de θ:**

$$4\tan\theta = x+4-s = \frac{12x-z+51}{12}, \qquad 4\sec\theta = y-3-2s = \frac{6y-z-15}{6}.$$

6. **Identidad** $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$, multiplicada por 16:

$$\frac{(6y-z-15)^2}{36}-\frac{(12x-z+51)^2}{144}=16 \iff 4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304.$$

7. **Comprobación:** con $z=3$: $4\cdot 36(y-3)^2-144(x+4)^2=2304 \Rightarrow (y-3)^2-(x+4)^2=16$.

Resultado: $\vec{p}=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3)+s(1,2,12)$; $4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304$ (cilindro hiperbólico).

Ejercicio 6.5.5 · Superficie reglada con directriz en el plano $x=0$

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 6.

Sea la superficie reglada S que contiene a la curva $D:\ y^2+2z^2=4$, $x=0$, y la generan rectas paralelas al vector $\vec{u}=(-3,1,2)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

Resolución.

1. **Tipo:** rectas paralelas a un vector que cortan a una curva: es una superficie cilíndrica (6.1.4).
2. **Directriz:** $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ en $x=0$: $\vec{q}(\theta)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)$.
3. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s\,(-3,1,2)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
4. **Eliminación de s:** el plano de la directriz es $x=0$, así que se usa $x=-3s \Rightarrow s=-\frac{x}{3}$.
5. **Eliminación de θ:** $y=2\cos\theta+s \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{x+3y}{6}$; $z=\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta+2s \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\dfrac{2x+3z}{3\sqrt{2}}$.
6. **b) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(x+3y)^2}{36}+\dfrac{(2x+3z)^2}{18}=1$, es decir

$$(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36.$$

7. **Comprobación:** con $x=0$: $9y^2+18z^2=36 \Rightarrow y^2+2z^2=4$.

Resultado: $\vec{p}=(0,2\cos\theta,\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s(-3,1,2)$; $(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36$.

Ejercicio 6.5.6 · Cono, hiperboloide y silla sin completar cuadrados

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (nombre y algunas características): a) $z^2=y^2-x^2$; b) $z^2-y^2-x^2=-1$; c) $4(x-1)^2-9y^2+z=0$.

Resolución.

1. **a)** $x^2+z^2-y^2=0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: se cumple la forma del **cono**; denominadores de x y z iguales: cono circular.
   - **Vértice** en el origen; **eje** y (la variable de signo solitario).

Forma (tras completar cuadrados)	Superficie
un solo cuadrado = constante ($x^2 = c$)	dos planos paralelos, uno, o vacío

Una ecuación con signo -1 a la derecha se multiplica por -1 antes de usar la tabla: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -1$ es $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$, un hiperboloide de dos hojas de eje y.

6.1.8 Qué es «identificar» una superficie

El enunciado dice siempre que la identificación «requiere más información que el nombre». Para cada ecuación se escribe:

1. **Nombre** completo: «hiperboloide de una hoja», «paraboloide elíptico», «de revolución» si dos denominadores son iguales.
2. **Centro** (elipsoide, hiperboloides, esfera) o **vértice** (paraboloides, cono); en el paraboloide hiperbólico, el **punto silla**.
3. **Eje**: la recta paralela a un eje coordenado que pasa por el centro o el vértice, por ejemplo $x = 1$, $y = -2$ (paralela al eje z). En un paraboloide, hacia dónde abre.
4. **Trazas**: con los planos que pasan por el centro paralelos a los coordenados (o con los planos coordenados), nombrando la cónica de cada una; y la traza $z = k$ (o la del eje) en general.
5. **Extensión** (intervalos de variación de x, y, z): de la forma ordinaria, despejando cada cuadrado y pidiendo que sea ≥ 0.
6. **Simetrías**: una cuádrica con centro es simétrica respecto a su centro y a los tres planos que pasan por él paralelos a los coordenados; un paraboloide, respecto a su eje y a los dos planos que lo contienen.

Los exámenes no exigen los seis puntos, pero el nombre solo no vale: nombre, centro o vértice, eje y dos trazas son el mínimo seguro. Si el enunciado pide «intervalos de variación», la extensión es obligatoria.

6.1.9 Ecuación vectorial de una cuádrica

Las cuádricas también se escriben con dos parámetros (tema 6.2 del programa). Basta conocer estas, que salen de las identidades $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ y $\sec^2 - \tan^2 = 1$ ($\theta \in [0, 2\pi)$):

- Elipsoide: $\vec{p} = (a \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,\ b \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,\ c\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$.
- Hiperboloide de una hoja: $\vec{p} = (a \sec\varphi \cos\theta,\ b \sec\varphi \operatorname{sen}\theta,\ c\tan\varphi)$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Hiperboloide de dos hojas: $\vec{p} = (a\tan\varphi\cos\theta,\ b\tan\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\sec\varphi)$.
- Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ r^2)$, $r \geq 0$.
- Cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ cr)$, $r \in \mathbb{R}$.

Con centro (h, k, l) se suma (h, k, l). En los exámenes esto solo se pide para conos y cilindros, por generatrices.

6.2 Cómo reconocer el problema

> **Resultado:** a) paraboloide circular, vértice $(-2, 3, -1)$, eje paralelo a z, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \geq -1$; b) esfera de centro $(1, 2, -3)$ y radio 2, $x \in [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$; c) hiperboloide de dos hojas de revolución, centro $(3, 5, -2)$, eje paralelo a y, $x, z \in \mathbb{R}$, $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$.

6.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 6.5.1 · Cono con directriz circular en $z = 2$

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

Sea el cono S con vértice en $V(2, -4, -1)$ y cuya intersección con el plano $z = 2$ es la curva de ecuación $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$. Obtenga para S: a) unas ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana.

Resolución.

1. **Directriz:** circunferencia de centro $(2, 2, 2)$ y radio 3: $\vec{q}(\theta) = (2 + 3\cos\theta,\ 2 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 2)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (3\cos\theta,\ 6 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.
3. **a) Paramétricas:**

$$x = 2 + 3s\cos\theta, \qquad y = -4 + s(6 + 3\operatorname{sen}\theta), \qquad z = -1 + 3s; \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

4. **Eliminación de s:** $3s = z + 1$.
5. **Eliminación de θ:**

$$3s\cos\theta = x - 2 \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{x-2}{z+1},$$
$$3s\operatorname{sen}\theta = y + 4 - 6s = y + 4 - 2(z+1) \quad \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{y - 2z + 2}{z+1}.$$

6. **b) Ecuación cartesiana:** con $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$,

$$(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 2$ queda $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$; el vértice da $0 + (-4+2+2)^2 = 0$.

Resultado: $x = 2 + 3s\cos\theta$, $y = -4 + s(6 + 3\operatorname{sen}\theta)$, $z = -1 + 3s$; $(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2$.

Ejercicio 6.5.2 · Cono que contiene a una elipse en $z = 6$

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 8.

Sea el cono C con vértice $V(0, 2, 0)$ que contiene a la curva $9x^2 + 4(y-2)^2 - 36 = 0$, $z = 6$. Obtenga una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana que definan a C.

Resolución.

1. **Directriz:** dividiendo entre 36, $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 6)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 6)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (0, 2, 0) + s\,(2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 6)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación:** $z = 6s \Rightarrow s = \frac{z}{6}$; $\cos\theta = \frac{x}{2s} = \frac{3x}{z}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{y-2}{3s} = \frac{2(y-2)}{z}$.

3. **Paramétricas:** sus tres componentes.
4. **Eliminación de s:** en la componente del plano de la directriz ($z = 3 + 2s$) despeja s.
5. **Eliminación de θ:** despeja $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$) y usa la identidad.
6. **Comprueba:** con $s = 0$ (es decir, en el plano de la directriz) se recupera la directriz.

Observación. Si las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz, o si el enunciado describe «circunferencias en planos paralelos con centro en una recta», el cilindro es recto: la vectorial es $\vec{p} = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$ igual, y la cartesiana es la ecuación de la directriz sin la variable de $\vec{u}$.

6.3.3 Parametrizar la directriz

1. **Elipse o circunferencia:** lleva a la forma $\frac{(X)^2}{a^2} + \frac{(Y)^2}{b^2} = 1$ y usa $X = a\cos\theta, Y = b\operatorname{sen}\theta$.
2. **Hipérbola:** $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$ se parametriza con $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$, y la identidad para eliminar es $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$. Con $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ se obtienen las dos ramas.
3. **Parábola:** $Y^2 = 4pX$ se parametriza con $Y = \theta$, $X = \frac{\theta^2}{4p}$.
4. El valor de la tercera coordenada es el del plano de la directriz ($z = 0$, $z = 3$, $x = 0$).

6.3.4 Identificación de una cuádrica

1. **Ordena:** pasa todo al primer miembro y agrupa por variable.
2. **Completa cuadrados** en cada variable que aparece al cuadrado con término lineal.
3. **Forma ordinaria:** deja los cuadrados a la izquierda y la constante (o la variable lineal) a la derecha; divide para que la constante sea 1 (o 0).
4. **Caso por caso con la tabla 6.1.7:** cuenta cuadrados y signos, revisa si la constante es 1, 0 o -1 y si hay variable lineal; escribe cuál forma *se cumple* y, si hay duda, cuál *no se cumple*.
5. **Características:** centro o vértice (los valores que anulan cada paréntesis), eje (recta paralela al de la variable distinguida), semiejes (raíces de los denominadores), trazas con los planos por el centro (sustituye la variable del plano y nombra la cónica que queda).
6. **Extensión**, si la piden (6.3.5), y simetrías.

6.3.5 Intervalos de variación (extensión)

1. Parte de la forma ordinaria. Para la variable z, despeja de modo que los otros cuadrados queden solos: por ejemplo, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(z-l)^2}{c^2} - 1$.
2. El primer miembro es ≥ 0 y toma todos los valores no negativos: exige que el segundo miembro sea ≥ 0 y resuelve.
3. Elipsoide y esfera: cada variable está en $[h-a, h+a]$, etc. Hiperboloide de dos hojas: la variable del eje cumple $|z-l| \geq c$; las otras, todos los reales. Paraboloide elíptico: la variable lineal queda de un solo lado del vértice. Hiperboloide de una hoja, cono y paraboloide hiperbólico: todos los reales.
4. Escribe el resultado con intervalos: $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Cono con vértice en el eje z y directriz elíptica

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 5.

Sea el cono S con vértice en $V(0,0,6)$ y cuya intersección con el plano XY es la curva

$$D: \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Obtenga para S: a) una ecuación vectorial; b) una ecuación cartesiana.

Resolución.

1. **Directriz:** es una elipse de centro $(-1, 3, 0)$, semieje 2 en x y 3 en y:
$$\vec{q}(\theta) = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 0), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$
2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$.
3. **a) Ecuación vectorial:**
$$S: \ \vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s\,(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6), \quad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$
4. **Paramétricas:** $x = s(-1 + 2\cos\theta)$, $y = s(3 + 3\operatorname{sen}\theta)$, $z = 6 - 6s$.
5. **Eliminación de s:** de la tercera, $s = \dfrac{6-z}{6}$.
6. **Eliminación de θ:** de las dos primeras,
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s} + 1\right) = \frac{6x + 6 - z}{2(6-z)},$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{s} - 3\right) = \frac{6y - 18 + 3z}{3(6-z)} = \frac{2y + z - 6}{6 - z}.$$
7. **Identidad:** $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$:
$$\frac{(6x - z + 6)^2}{4(6-z)^2} + \frac{(2y + z - 6)^2}{(6-z)^2} = 1.$$
8. **b) Ecuación cartesiana:** multiplicando por $4(6-z)^2$,
$$(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z-6)^2,$$
que desarrollada es $36x^2 + 16y^2 + z^2 - 12xz + 16yz + 72x - 96y - 12z + 36 = 0$.
9. **Comprobación:** $V(0,0,6)$: $0 + 4\cdot 0 = 0$, se cumple. Con $z = 0$: $(6x+6)^2 + 4(2y-6)^2 = 144$, es decir $36(x+1)^2 + 16(y-3)^2 = 144$, que es la directriz.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$; $(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z-6)^2$.