Ejercicio 5.5.5 · Elipse dada por su centro y sus semiejes

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 3.

Determine unas ecuaciones paramétricas y una ecuación vectorial de la elipse con centro en $C(-2,1,5)$, semieje menor de longitud 3 y paralelo al eje de las abscisas, y semieje mayor de longitud 4 y paralelo al eje de las cotas.

Resolución.

1. **Plano:** los semiejes son paralelos a x (abscisas) y a z (cotas); la elipse está en el plano $y=1$ que pasa por el centro.
2. **Paramétricas** (sección 5.1.4): el semieje 3 multiplica en x, el 4 en z:

$$x=-2+3\cos t, \qquad y=1, \qquad z=5+4\operatorname{sen} t, \qquad t\in[0,2\pi).$$

3. **Vectorial:** $\vec{p}=(-2+3\cos t,\ 1,\ 5+4\operatorname{sen} t)=(-2,1,5)+3\cos t\,\hat{\imath}+4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.
4. **Comprobación:** $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(z-5)^2}{16}=\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$, $y=1$; focos $\big(-2,1,5\pm\sqrt{7}\big)$.

Resultado: $x=-2+3\cos t$, $y=1$, $z=5+4\operatorname{sen} t$, $t\in[0,2\pi)$; $\vec{p}=(-2,1,5)+3\cos t\,\hat{\imath}+4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.

Ejercicio 5.5.6 · Hipérbola con secante y tangente (Plan 2016)

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.

Sea la curva C representada por $\vec{r}(t)=(1,\ 2\sec t,\ 4\tan t)$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas de C; b) unas ecuaciones cartesianas de C e identifíquela.

Resolución.

1. **a)** $x=1$, $y=2\sec t$, $z=4\tan t$, con $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
2. **b) Despeje:** $\sec t=\frac{y}{2}$, $\tan t=\frac{z}{4}$. Con $\sec^2 t-\tan^2 t=1$:

$$C:\ \begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1\\ x=1\end{cases}$$

3. **Identificación:** hipérbola en el plano $x=1$, centro $(1,0,0)$, eje focal paralelo al eje y; $a=2$, $b=4$, $c=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. Vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\big(1,\pm2\sqrt{5},0\big)$, asíntotas $z=\pm2y$, $x=1$.

Resultado: $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, $x=1$: hipérbola de centro $(1,0,0)$, vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\big(1,\pm2\sqrt{5},0\big)$. Es el mismo tipo que el ejemplo 5.4.

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Se cumple: las rectas están en un mismo plano y, como no son paralelas, **se cortan**. No se cruzan.

4. **Punto de intersección:** se igualan las paramétricas con parámetros distintos:

$$1+t=\lambda, \qquad 2-t=7+3\lambda, \qquad 1-2t=4-\lambda.$$

Con la primera en la segunda: $2-t=7+3+3t$, de donde $t=-2$ y $\lambda=-1$.

5. **Comprobación** en la tercera: $1-2(-2)=5$ y $4-(-1)=5$. Se cumple.
6. **Punto:** con $t=-2$ en L_1: $(1-2,\ 2+2,\ 1+4)=(-1,4,5)$; con $\lambda=-1$ en L_2: $(-1,\ 4,\ 5)$. Coinciden.

Resultado: las rectas se cortan en $I(-1,4,5)$. No son paralelas (no hay un único plano que pedir por ese caso) ni se cruzan (su distancia es 0).

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Plano por tres puntos y distancia de un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 6.

Los puntos $A(1,-2,0)$, $B(3,-1,1)$ y $C(4,1,-2)$ pertenecen al plano π. Determine: a) una ecuación vectorial de π y sus ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana de π; c) la distancia del punto $P(-2,5,1)$ a π.

Resolución.

1. **Vectores del plano:** $\overrightarrow{AB}=(2,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(3,3,-2)$.
2. **a)** $\pi:\ \vec{p}=(1,-2,0)+r\,(2,1,1)+s\,(3,3,-2)$; paramétricas $x=1+2r+3s$, $y=-2+r+3s$, $z=r-2s$.
3. **Normal:**

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&1&1\\3&3&-2\end{vmatrix}=(-2-3,\ 3+4,\ 6-3)=(-5,7,3).$$

4. **b)** $-5(x-1)+7(y+2)+3z=0$, es decir, $5x-7y-3z-19=0$. Comprobación con C: $20-7+6-19=0$.
5. **c)** $d=\dfrac{|5(-2)-7(5)-3(1)-19|}{\sqrt{25+49+9}}=\dfrac{67}{\sqrt{83}}=\dfrac{67\sqrt{83}}{83}$.

Resultado: $\vec{p}=(1,-2,0)+r(2,1,1)+s(3,3,-2)$; $\pi:\ 5x-7y-3z-19=0$; $d=\frac{67\sqrt{83}}{83}$.

Ejercicio 4.5.2 · Plano que contiene dos rectas paralelas y su distancia

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

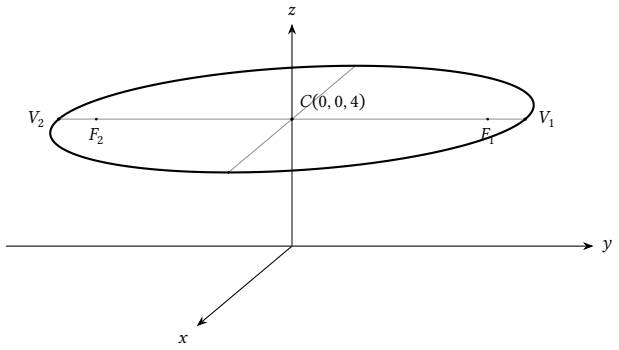
Sean las rectas

$$L:\ 4-x=\frac{2y-4}{8}=\frac{z+5}{3} \qquad \text{y} \qquad R:\ x-6=\frac{2-y}{4}=\frac{-2z-20}{6}.$$

Determine: a) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L y a R; b) la distancia entre L y R.

Resolución.

1. **Despeje:** $\dfrac{x}{2\sqrt{2}} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ y $\dfrac{y}{3\sqrt{3}} = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$.
2. **Identidad:** al sumar los cuadrados se cancelan los productos $\pm 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$:
$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 = 2\big(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\big) = 2.$$
3. **Sustitución:**
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{27} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{54} = 1.$$
4. **Identificación:** elipse en el plano $z = 4$, centro $C(0,0,4)$, eje mayor paralelo al eje y ($54 > 16$); $a = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, $c = \sqrt{54-16} = \sqrt{38}$. Vértices $\big(0, \pm 3\sqrt{6}, 4\big)$, extremos del eje menor $(\pm 4, 0, 4)$, focos $\big(0, \pm\sqrt{38}, 4\big)$.



Resultado: $C:\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{54} = 1$, $z = 4$: elipse de centro $(0,0,4)$, eje mayor paralelo al eje y, $a = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, focos $\big(0, \pm\sqrt{38}, 4\big)$.

Ejercicio 5.5.3 · Intervalo paramétrico y extensión con raíces SOLO PLAN 2010

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 6.

Sea la curva C de ecuación vectorial

$$\vec{p} = \left(\frac{3}{\sqrt{t+4}}\right)\hat{\imath} + \left(\sqrt{25 - t^2}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{6}{\sqrt{t+4}} + 1\right)\hat{k}.$$

Obtenga: a) unas ecuaciones paramétricas de C; b) el intervalo paramétrico; c) el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas x, y y z de los puntos de la curva.

Resolución.

1. **a)** $x = \dfrac{3}{\sqrt{t+4}}$, $y = \sqrt{25 - t^2}$, $z = \dfrac{6}{\sqrt{t+4}} + 1$.
2. **b) Condiciones:** en x y z la raíz está en el denominador: $t + 4 > 0$, $t > -4$. En y: $25 - t^2 \geq 0$, $-5 \leq t \leq 5$. Intersección: $t \in (-4, 5]$.
3. **c)** x**:** $t + 4$ recorre $(0, 9]$, así que $\sqrt{t+4} \in (0, 3]$ y $x = \frac{3}{\sqrt{t+4}}$ es decreciente: $x = 1$ en $t = 5$ y $x \to \infty$ cuando $t \to -4^+$. Entonces $x \in [1, \infty)$.

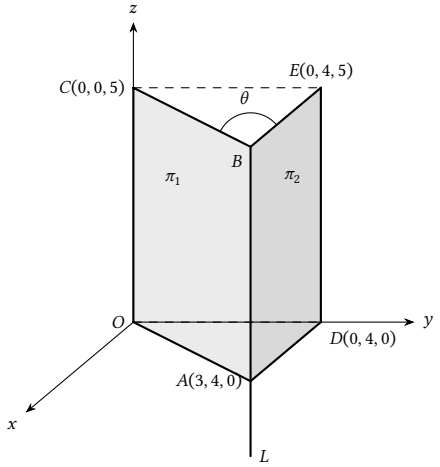
5. **c)** $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 - 3 - 4 = -9$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{29}$:
$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{87}} = \frac{3\sqrt{87}}{29}.$$
(El ángulo obtuso entre las normales tiene coseno $-\frac{3\sqrt{87}}{29}$.)

Resultado: $L:\ \vec{p} = (-1, 3, 0) + t(1, -2, -1)$; $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; $\cos\theta = \frac{3\sqrt{87}}{29}$.

Ejercicio 4.5.4 · Los dos planos de una figura

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 5.

Sean los planos π_1 y π_2 de la figura. Obtenga: a) la ecuación cartesiana de cada uno; b) el ángulo θ que forman; c) unas ecuaciones paramétricas de la recta L, intersección de π_1 y π_2; d) la distancia del origen a π_2.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** π_1 pasa por O, $C(0,0,5)$ y $A(3,4,0)$; π_2, por $D(0,4,0)$, $E(0,4,5)$ y A. B está sobre la vertical de A, a la altura de C y E: $B(3,4,5)$.
2. **a)** π_1**:** $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = (0,0,5) \times (3,4,0) = (-20, 15, 0)$, o sea $\vec{n}_1 = (4, -3, 0)$. Como pasa por el origen: $\pi_1:\ 4x - 3y = 0$. Comprobación con A: $12 - 12 = 0$.
3. **a)** π_2**:** D, E y A tienen $y = 4$: $\pi_2:\ y - 4 = 0$, $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$. (Con productos: $\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DA} = (0,0,5) \times (3,0,0) = (0, 15, 0)$.)
4. **b)** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \dfrac{3}{5}$. Lo confirma la figura: $\overrightarrow{BC} = (-3, -4, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (-3, 0, 0)$, $\cos\theta = \frac{9}{5\cdot 3} = \frac{3}{5}$. Entonces $\theta = \operatorname{ang}\cos\frac{3}{5} \approx 53.1^\circ$.
5. **c)** $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (4, -3, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 4)$: dirección $\hat{k}$, por A: $x = 3$, $y = 4$, $z = t$.
6. **d)** $d(O, \pi_2) = \dfrac{|0 - 4|}{1} = 4$.

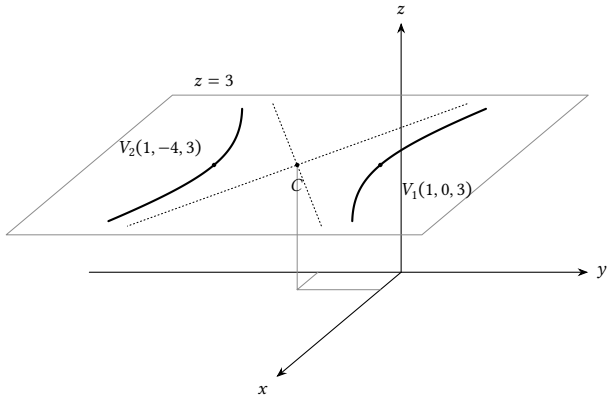
Resolución.

1. **a)** SOLO PLAN 2010 $\tan\theta$ y $\sec\theta$ existen para $\cos\theta \neq 0$; $z = 3$ no restringe. El intervalo paramétrico es $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entero); para recorrer la curva una vez basta $\theta \in [0, 2\pi)$ sin $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.
2. **b) Paramétricas:** $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
3. **Despeje:** $\tan\theta = \dfrac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \dfrac{y+2}{2}$.
4. **Identidad** $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$:

$$C: \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

5. **Identificación:** hipérbola en el plano $z = 3$, con centro $C(1, -2, 3)$ y eje focal paralelo al eje y (el término positivo es el de y); $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
   - vértices $V(1, -2 \pm 2, 3)$: $V_1(1, 0, 3)$ y $V_2(1, -4, 3)$;
   - focos $F\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$;
   - asíntotas: $y + 2 = \pm\frac{2}{3}(x-1)$, $z = 3$.

   Con $\theta \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, $\sec\theta \geq 1$ y $y \geq 0$: rama de V_1; con $\theta \in \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$, $y \leq -4$: rama de V_2. Se recorren las dos ramas completas.
6. **c) Bosquejo:** el plano $z = 3$, el centro, los vértices, las asíntotas y las dos ramas.



Resultado: SOLO PLAN 2010 intervalo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $C: \frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$, $z = 3$: hipérbola de centro $(1, -2, 3)$, eje focal paralelo al eje y, $a = 2$, $b = 3$, vértices $(1, 0, 3)$ y $(1, -4, 3)$, focos $\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$.

3. **Perpendicular común:** $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}_L = 6s - 4t - 2 = 0$ y $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}_M = 4s - 8t + 4 = 0$. De la segunda, $s = 2t - 1$; en la primera, $8t - 8 = 0$: $t = 1$, $s = 1$.
4. **a)** $B = P(1) = (4, 1, 3)$. (El punto de M más cercano es $Q(1) = (2, 1, 5)$; $\overrightarrow{QB} = (2, 0, -2)$ es perpendicular a las dos rectas y la distancia entre ellas es $2\sqrt{2}$.)
5. **b)** $\vec{n} = \vec{u}_L \times \vec{u}_M = (4-0,\ 2-2,\ 0-4) = (4, 0, -4)$, o $(1, 0, -1)$. Por A: $(x-1) - (z-0) = 0$.

Resultado: $B(4, 1, 3)$; $\pi:\ x - z - 1 = 0$.

Ejercicio 4.5.7 · Distancia entre rectas que se cruzan y plano por dos rectas

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 3.

Sean las rectas

$$L_1:\ \frac{1-x}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+5}{3}, \qquad L_2:\ \vec{p} = (5+2t,\ -5-3t,\ 1+5t), \qquad L_3:\ \begin{cases} x = 5 + 4r \\ y = 2 + 2r \\ z = -4 + r \end{cases}$$

Determine: a) la distancia entre L_1 y L_2; b) una ecuación cartesiana del plano π al que pertenecen L_1 y L_3; c) las coordenadas del punto de intersección del plano $z + 4 = 0$ con la recta L_2.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{1-x}{-2} = \frac{x-1}{2}$: $P_1(1, 0, -5)$, $\vec{u}_1 = (2, -2, 3)$; $P_2(5, -5, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -3, 5)$; $P_3(5, 2, -4)$, $\vec{u}_3 = (4, 2, 1)$.
2. **a)** $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (-10 + 9,\ 6 - 10,\ -6 + 4) = (-1, -4, -2)$, de módulo $\sqrt{21}$; $\overrightarrow{P_1P_2} = (4, -5, 6)$ y $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = -4 + 20 - 12 = 4 \neq 0$: se cruzan, y

$$d = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

3. **b)** $\vec{u}_1 \times \vec{u}_3 = (-2 - 6,\ 12 - 2,\ 4 + 8) = (-8, 10, 12)$, o $(4, -5, -6)$. Son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 2, 1)$ y $(4, 2, 1) \cdot (4, -5, -6) = 16 - 10 - 6 = 0$. Por P_1: $4(x-1) - 5y - 6(z+5) = 0$, es decir, $4x - 5y - 6z - 34 = 0$. Comprobación con P_3: $20 - 10 + 24 - 34 = 0$.
4. **c)** $1 + 5t = -4 \Rightarrow t = -1$: $(5 - 2,\ -5 + 3,\ 1 - 5) = (3, -2, -4)$.

Resultado: $d = \frac{4\sqrt{21}}{21}$; $\pi:\ 4x - 5y - 6z - 34 = 0$; $(3, -2, -4)$.

Ejercicio 4.5.8 · Plano equidistante y perpendicular común

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas

$$L:\ \vec{r}(t) = (3, 4, -7) + t\,(1, -1, 1) \qquad \text{y} \qquad R:\ \frac{x-1}{3} = \frac{-2-y}{-1} = \frac{2z-2}{2}.$$

Determine: a) la distancia entre L y R; b) la ecuación cartesiana del plano π que es paralelo a L y a R y equidista de ellas; c) una ecuación vectorial de la recta P perpendicular a L y a R que contiene al punto $A(2, 3, -1)$.

Resolución.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«ecuación vectorial» $\vec{p} = (\ldots)$ y «unas ecuaciones paramétricas», o al revés	reescribir componente por componente	5.3.1
«ecuaciones cartesianas», «una pareja de ecuaciones», «identificarla»	eliminar el parámetro, nombre y elementos	5.3.2
sec y tan; csc; $\cos 2\theta$; $\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta$	la identidad que corresponde	5.3.2
SOLO PLAN 2010 «intervalo paramétrico»	dominio común de las funciones	5.3.3
SOLO PLAN 2010 «intervalos de variación», «conjunto de valores de x, y, z»	recorrido de cada función	5.3.4
«bosquejar la gráfica de C», «en el plano $z = 3$»	dibujo en su plano, con ejes 3D	5.3.5
la curva dada con dos ecuaciones cartesianas, o una cónica con «centro» y «semiejes»	paramétricas y vectorial	5.3.6

5.3 Procedimientos

5.3.1 Paramétricas y ecuación vectorial

1. **De vectorial a paramétricas:** cada componente de $\vec{p}$ es una ecuación: $\vec{p} = (1 + 3\tan\theta,\ -2 + 2\sec\theta,\ 3)$ da $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
2. **De paramétricas a vectorial:** $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, o separando punto fijo y términos con el parámetro: $\vec{p} = (-2, 1, 5) + 3\cos t\,\hat{\imath} + 4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.
3. Simplifica lo que se pueda antes de seguir: $\frac{4}{\csc\theta} = 4\operatorname{sen}\theta$, $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$. Anota el intervalo del parámetro junto a las ecuaciones.

5.3.2 Ecuaciones cartesianas e identificación

1. **Plano:** la coordenada constante da la primera ecuación ($z = 3$).
2. **Despeje:** de las otras dos, aísla la función trigonométrica: $\tan\theta = \frac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \frac{y+2}{2}$.
3. **Identidad:** sustituye en la identidad de la sección 5.1.3. Con $\cos 2\theta$, escríbelo como $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, o como $2\cos^2\theta - 1$ si trae $\cos\theta$.
4. **Forma ordinaria:** ordena la ecuación como en la tabla de la sección 5.1.4 (completa cuadrados si la curva viene en forma general).
5. **Identificación:** nombre de la cónica y elementos: plano, centro o vértice, eje focal (paralelo a qué eje), semiejes, vértices, focos; asíntotas o directriz si aplica. Con la tercera coordenada en cada punto.
6. **Recorte:** SOLO PLAN 2010 si la extensión (5.3.4) no cubre toda la cónica, dilo: «arco de parábola», «semicircunferencia», «elipse sin los puntos …».

2. **a)** El plano XZ tiene normal $\hat{\jmath}$; π contiene las direcciones $\vec{u}$ y $\hat{\jmath}$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 0, 4).$$

   Por P_0: $-3(x-2) + 4(z+1) = 0$, es decir, $3x - 4z - 10 = 0$. (No tiene término en y, como todo plano perpendicular al XZ.)
3. **b)** $\overrightarrow{OP_0} \times \vec{u} = (2, -1, -1) \times (4, -5, 3) = (-3 - 5,\ -4 - 6,\ -10 + 4) = (-8, -10, -6)$, de módulo $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; $|\vec{u}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. $d = 2$.

Resultado: $\pi:\ 3x - 4z - 10 = 0$; $d = 2$.

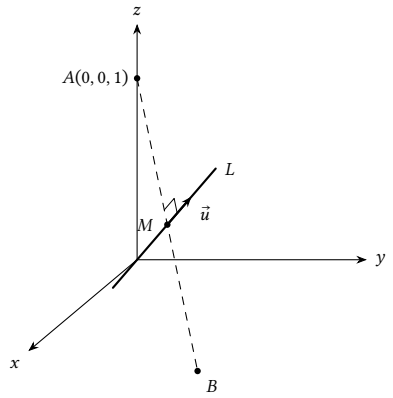
Ejercicio 4.5.11 · Punto simétrico respecto a una recta

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3.

Determine las coordenadas cartesianas del punto B, simétrico del punto $A(0, 0, 1)$ respecto a la recta L que contiene al origen y es paralela al vector $\vec{u} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Resolución.

1. **Recta:** $\vec{u}$ es paralelo a $(1, 1, 1)$: $L:\ \vec{p} = t\,(1, 1, 1)$.
2. **Pie de la perpendicular:** $t = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot (1, 1, 1)}{3} = \frac{1}{3}$, $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Comprobación: $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MA} \cdot (1, 1, 1) = 0$.
3. **Simétrico:** M es el punto medio de AB: $B = 2M - A = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - 1\right)$.



Resultado: $B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 4.5.12 · Parámetro para un ángulo de 30° entre recta y plano

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 5.

Sean la recta $R:\ \frac{3+x}{-1} = \frac{-y-1}{-1} = \frac{-z+2}{-1}$ y el plano $\pi:\ x + By + z = 0$. Determine el conjunto de valores que puede tomar B para que R y π formen un ángulo de 30°.

donde $\vec{p}$ es el vector de posición del punto. Las **ecuaciones paramétricas** son las mismas tres funciones escritas por separado:

$$C:\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Pasar de una forma a la otra es solo reescribir: las componentes del vector son las paramétricas. Una misma curva admite muchas parametrizaciones distintas.

5.1.2 Curva en un plano paralelo a uno coordenado; ecuaciones cartesianas

Si una de las coordenadas es constante, por ejemplo $z(t) = 3$ para todo t, la curva está en el plano $z = 3$, paralelo al plano coordenado XY. Lo mismo con $x = k$ (paralelo al plano YZ) o $y = k$ (paralelo al plano XZ).

Una curva en el espacio se describe en forma cartesiana con **dos ecuaciones** (dos superficies que se cortan en ella). Para una curva plana son la ecuación del plano y la de la curva dentro de él:

$$C:\ \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

La primera ecuación, sola, sería una superficie (un cilindro); la segunda la recorta al plano. Por eso el examen pide «unas ecuaciones cartesianas» o «una pareja de ecuaciones cartesianas»: siempre son dos.

5.1.3 Identidades para eliminar el parámetro

Para obtener las ecuaciones cartesianas se elimina el parámetro. Con funciones trigonométricas se despejan $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$… y se usa una identidad:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \qquad \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \qquad \csc^2 t - \cot^2 t = 1,$$

$$\cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1, \qquad \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t, \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}.$$

Si aparece $\cos t + \operatorname{sen} t$ y $\cos t - \operatorname{sen} t$, se usa $(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 = 2$. Si el parámetro aparece sin funciones trigonométricas ($x = 2t$, $z = \frac{2}{t}$), se despeja t de una ecuación y se sustituye en las otras.

5.1.4 Cónicas en forma paramétrica

Las formas ordinarias de las cónicas se repasan en la Unidad 1, Parte B. En un plano con coordenadas (u, v) (dos de x, y, z; la tercera es constante), con centro o vértice (h, k):

Cónica	Paramétricas	Cartesiana
Circunferencia	$u = h + r\cos t$, $v = k + r\operatorname{sen} t$	$(u-h)^2 + (v-k)^2 = r^2$

Resultado: $L:\ x = 2s,\ y = 2s,\ z = s$ (corta a M en $F(4,4,2)$).

Ejercicio 4.5.16 · Plano en paramétricas, recta en forma general y recta perpendicular

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 2.

Sean el plano π y la recta L dados por

$$\pi:\ \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 2 - r \\ z = 2r + s \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L:\ \begin{cases} x + y - z - \frac{10}{3} = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Determine el ángulo entre π y L. b) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de la recta R perpendicular a π que contiene al punto C, intersección de π con L.

Resolución.

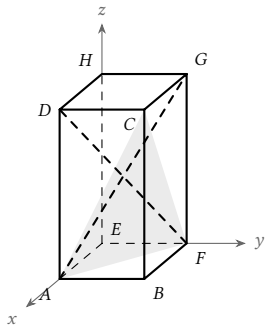
1. **Plano:** vectores $(1,-1,2)$ y $(0,0,1)$; $\vec{n} = (1,-1,2)\times(0,0,1) = (-1,-1,0)$, o $(1,1,0)$. Por $(1,2,0)$: $\pi:\ x + y - 3 = 0$.
2. **Recta:** $\vec{u} = (1,1,-1)\times(2,-3,-2) = (-2-3,\ -2+2,\ -3-2) = (-5,0,-5)$, o $(1,0,1)$.
3. **a)** $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{|1+0+0|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$: $\varphi = 30°$.
4. **Punto** C**:** con $x + y = 3$ en la primera ecuación de L, $3 - z = \frac{10}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$; en la segunda, $2x - 3y = -\frac{2}{3}$; con $x + y = 3$: $y = \frac{4}{3}$, $x = \frac{5}{3}$. $C\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
5. **b)** R tiene dirección $\vec{n} = (1,1,0)$: $x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3};\ z = -\frac{1}{3}$.

Resultado: $\varphi = 30°$; $R:\ x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3},\ z = -\frac{1}{3}$.

Ejercicio 4.5.17 · Rectas y plano en un prisma

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 4.

En el paralelepípedo recto de la figura, la base $ABFE$ es un cuadrado de lado 2 en el plano $z = 0$, sus caras son paralelas a los planos coordenados y la altura es el doble del lado de la base. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L_1 que contiene a los vértices A y G; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L_2 que contiene a F y a D; c) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a A, F y C.



9. **Punto de la recta general sin comprobar.** El punto obtenido con $z = 0$ debe satisfacer las *dos* ecuaciones de los planos.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Recta: $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{u} \cdot \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ · general: $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- Plano: $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A, B, C) \cdot \vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ · perpendiculares: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ (igual con normales). Recta ∥ plano: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; recta ⊥ plano: $\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q, \pi) = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{|\vec{n}|}$ · $d(Q, L) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$ · planos paralelos: $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $= 0$ se cortan, $\neq 0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t = \frac{\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ · simétrico: $Q' = 2M - Q$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe de cada recta su punto y su vector, y de cada plano su normal, antes de cualquier otra cosa; ordena las formas simétricas.
2. Haz un dibujo a mano alzada: qué es paralelo, qué se corta, qué distancia se pide.
3. Calcula los productos cruz con el determinante completo y comprueba el resultado con un producto punto (debe dar 0 con cada factor).
4. Antes de un plano por dos rectas o de una distancia entre rectas o planos, decide la posición relativa.
5. Comprueba cada ecuación de plano con un punto que no usaste y cada intersección en la ecuación que no usaste.
6. Deja los resultados exactos y racionalizados; los ángulos no notables, con ang cos o ang sen.

Si el tiempo no alcanza, el punto y el vector de cada recta y la normal de cada plano, bien escritos, ya son una parte importante del puntaje.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 3.

El vector normal $\vec{N}$ del plano π es perpendicular al vector $\vec{v} = (3, 5, 8)$. Además, π contiene a la recta $L: \frac{2-2x}{-2} = \frac{y+5}{-3} = z$. Determine una ecuación cartesiana de π.

Resultado: $\pi: 29x + 5y - 14z - 4 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 3.

Sean la recta $L: \begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ z = 7 \end{cases}$ y el plano $\pi: -2x - 6y + 6z = 38$. Determine la intersección de la recta con el plano.

Resultado: la recta está contenida en el plano: la intersección es toda la recta, $x = 2 + 3t,\ y = -t,\ z = 7$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 5.

Sean las rectas $M: x = 3-2t_M,\ y = -1+t_M,\ z = 2t_M$ y $N: x = -1-t_N,\ y = -3+t_N,\ z = -4 + 2t_N$, y el plano $\pi: 5x - y + 2z - 2 = 0$. Determine la ecuación cartesiana del plano π_1 paralelo a π que contiene al punto A, intersección de las rectas M y N.

Resultado: $A(-9, 5, 12)$; $\pi_1: 5x - y + 2z + 26 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.7

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 6.

Determine la distancia entre los planos $\pi_1: 2x + y + 4z = 16$ y $\pi_2: x = 4r - 4s,\ y = 8s,\ z = 2 - 2r$.

Resultado: $d = \frac{8\sqrt{21}}{21}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.8

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo A, problema 6.

Los puntos $A(-1, 1, 1)$ y $B(1, -2, 0)$ pertenecen al plano π, que contiene al origen. Determine: a) una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana de π; b) la distancia del punto $C(3, 0, -1)$ a π; c) las ecuaciones en forma simétrica de la recta L perpendicular a π que contiene a C.

Resultado: $\vec{p} = r(-1, 1, 1) + s(1, -2, 0)$, $\pi: 2x + y + z = 0$; $d = \frac{5\sqrt{6}}{6}$; $L: \frac{x-3}{2} = y = z + 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

1. **Forma simétrica ordenada:**

$$L:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{3},\qquad R:\ \frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+10}{-3}.$$

   Entonces $P_L(4,2,-5)$, $\vec{u}_L=(-1,4,3)$; $P_R(6,2,-10)$, $\vec{u}_R=(1,-4,-3)=-\vec{u}_L$.
2. **Posición:** $\vec{u}_R=-\vec{u}_L$: son paralelas (se cumple). P_R no está en L ($\frac{6-4}{-1}=-2\neq\frac{2-2}{4}=0$): no coinciden.
3. **Normal del plano:** con $\overrightarrow{P_LP_R}=(2,0,-5)$,

$$\vec{u}_L\times\overrightarrow{P_LP_R}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&4&3\\2&0&-5\end{vmatrix}=(-20,\ 1,\ -8).$$

4. **a)** Con $\vec{n}=(20,-1,8)$ y P_L: $20(x-4)-(y-2)+8(z+5)=0$, es decir, $20x-y+8z-38=0$. Comprobación con P_R: $120-2-80-38=0$.
5. **b)** Distancia de P_R a L: el producto cruz ya está hecho,

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_LP_R}\times\vec{u}_L|}{|\vec{u}_L|}=\frac{\sqrt{400+1+64}}{\sqrt{1+16+9}}=\frac{\sqrt{465}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{465}{26}}.$$

Resultado: $\pi:\ 20x-y+8z-38=0$; $d=\sqrt{\frac{465}{26}}=\frac{\sqrt{12090}}{26}\approx 4.2$.

Ejercicio 4.5.3 · Recta intersección de dos planos y punto más próximo

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Sean el punto $Q(3,1,-2)$ y los planos $\pi_1:\ -x-y+z+2=0$ y $\pi_2:\ 2x+3y-4z-7=0$. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L intersección de π_1 y π_2; b) las coordenadas del punto M de L más próximo a Q; c) el coseno del ángulo entre π_1 y π_2.

Resolución.

1. **Dirección:** $\vec{n}_1=(-1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(2,3,-4)$,

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&-1&1\\2&3&-4\end{vmatrix}=(4-3,\ 2-4,\ -3+2)=(1,-2,-1).$$

2. **Punto:** con $z=0$: $x+y=2$ y $2x+3y=7$, de donde $y=3$, $x=-1$. $P_0(-1,3,0)$ cumple las dos ecuaciones.
3. **a)** $L:\ \vec{p}=(-1,3,0)+t\,(1,-2,-1)$.
4. **b)** $\overrightarrow{P_0Q}=(4,-2,-2)$; $t=\dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\dfrac{4+4+2}{6}=\dfrac{5}{3}$. Entonces

$$M=\left(-1+\tfrac{5}{3},\ 3-\tfrac{10}{3},\ -\tfrac{5}{3}\right)=\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{5}{3}\right).$$

   Comprobación: $\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u}=\frac{7}{3}-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=0$.

4. y**:** en $(-4,5]$, t^2 toma todos los valores de $[0,25]$ ($t=0$ da 0; $t=5$ da 25). Entonces $25-t^2\in[0,25]$ y $y\in[0,5]$.
5. z**:** $z=2\cdot\frac{3}{\sqrt{t+4}}+1=2x+1$; con $x\in[1,\infty)$, $z\in[3,\infty)$.

Observación. De $z=2x+1$ se ve que la curva está en ese plano, que no es paralelo a uno coordenado; el problema solo pide intervalos, no la identificación.

Resultado: intervalo paramétrico $(-4,5]$; $x\in[1,\infty)$, $y\in[0,5]$, $z\in[3,\infty)$.

Ejercicio 5.5.4 · Parábola en el plano $x=5$: de cartesianas a paramétricas

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 5.

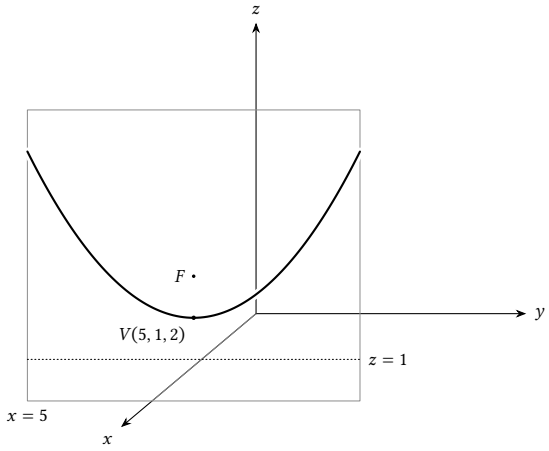
Sea la curva $C:\ \ x=5,\ y^2-2y-4z+9=0$. a) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de C. b) Determine una ecuación vectorial de C. c) Identifique a C y bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **Forma ordinaria:** $y^2-2y+1=4z-9+1$, es decir, $(y-1)^2=4(z-2)$.
2. **a) Paramétricas:** con $y-1=2t$ queda $4t^2=4(z-2)$, $z=2+t^2$:

$$x=5,\qquad y=1+2t,\qquad z=2+t^2,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

   Comprobación: $(1+2t)^2-2(1+2t)-4(2+t^2)+9=1+4t+4t^2-2-4t-8-4t^2+9=0$.
3. **b) Vectorial:** $\vec{p}=(5,\ 1+2t,\ 2+t^2)=(5,1,2)+2t\,\hat{\jmath}+t^2\,\hat{k}$.
4. **c) Identificación:** parábola en el plano $x=5$, vértice $V(5,1,2)$, eje paralelo al eje z, $4p=4$, $p=1$: abre hacia las z positivas; foco $F(5,1,3)$, directriz $z=1$, $x=5$; lado recto 4.



Resultado: $x=5$, $y=1+2t$, $z=2+t^2$; $\vec{p}=(5,1,2)+2t\,\hat{\jmath}+t^2\,\hat{k}$; parábola de vértice $(5,1,2)$, eje paralelo al eje z, foco $(5,1,3)$.

Resultado: $\pi_1:\ 4x-3y=0$, $\pi_2:\ y=4$; $\theta=\arccos\frac{3}{5}$; $L:\ x=3,\ y=4,\ z=t$; $d=4$.

Ejercicio 4.5.5 · Recta de intersección, plano por dos rectas y ángulo recta–plano

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 3.

Sean la recta L, intersección de los planos $\pi_1:\ x-3y+z+2=0$ y $\pi_2:\ x-4y+2z+1=0$, y el plano π_3 que contiene a las rectas $L_1:\ \vec{p}=(1,1,4)+t(1,-1,5)$ y $L_2:\ \vec{p}=(-1,-1,-2)+r(1,3,1)$. a) Determine las coordenadas del punto I de intersección de L y π_3. b) Obtenga el coseno de uno de los ángulos que forman L y π_3.

Resolución.

1. **Recta L:** $(1,-3,1)\times(1,-4,2)=(-6+4,\ 1-2,\ -4+3)=(-2,-1,-1)$; se toma $\vec{u}=(2,1,1)$. Con $z=0$: $x-3y=-2$, $x-4y=-1$, de donde $y=-1$, $x=-5$. $L:\ \vec{p}=(-5,-1,0)+t(2,1,1)$.
2. **Plano π_3:**

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&-1&5\\1&3&1\end{vmatrix}=(-1-15,\ 5-1,\ 3+1)=(-16,4,4).$$

   Se comprueba que L_1 y L_2 son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_2}=(-2,-2,-6)$ y $(-2,-2,-6)\cdot(-16,4,4)=32-8-24=0$. Con $\vec{n}=(4,-1,-1)$ y $(1,1,4)$: $4(x-1)-(y-1)-(z-4)=0$, es decir, $\pi_3:\ 4x-y-z+1=0$.
3. **a)** En π_3: $4(-5+2t)-(-1+t)-t+1=6t-18=0$, $t=3$. $I(1,2,3)$; comprobación: $4-2-3+1=0$.
4. **b)** $\vec{u}\cdot\vec{n}=8-1-1=6$, $|\vec{u}|=\sqrt{6}$, $|\vec{n}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad\cos\varphi=\sqrt{1-\tfrac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Resultado: $I(1,2,3)$; $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$, con φ el ángulo entre L y π_3 (el ángulo entre L y la normal tiene coseno $\frac{\sqrt{3}}{3}$).

Ejercicio 4.5.6 · Punto más cercano entre dos rectas y plano paralelo a ambas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Sean el punto $A(1,-3,0)$ y las rectas

$$L:\ x-3=\frac{-y-1}{-2}=\frac{2-z}{-1}\qquad\text{y}\qquad M:\ \vec{p}=(0,1,3)+t\,(2,0,2),\ t\in\mathbb{R}.$$

Determine: a) las coordenadas del punto B de la recta L más cercano a M; b) una ecuación cartesiana del plano π paralelo a L y a M que contiene al punto A.

Resolución.

1. **Datos de L:** $\frac{-y-1}{-2}=\frac{y+1}{2}$ y $\frac{2-z}{-1}=z-2$: $L:\ x-3=\frac{y+1}{2}=z-2$, con $P_L(3,-1,2)$ y $\vec{u}_L=(1,2,1)$. De M: $P_M(0,1,3)$, $\vec{u}_M=(2,0,2)$.
2. **Puntos genéricos:** $P(s)=(3+s,\ -1+2s,\ 2+s)\in L$ y $Q(t)=(2t,\ 1,\ 3+2t)\in M$, con $\overrightarrow{QP}=(3+s-2t,\ -2+2s,\ -1+s-2t)$.

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Parábola con coseno del ángulo doble

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 5.

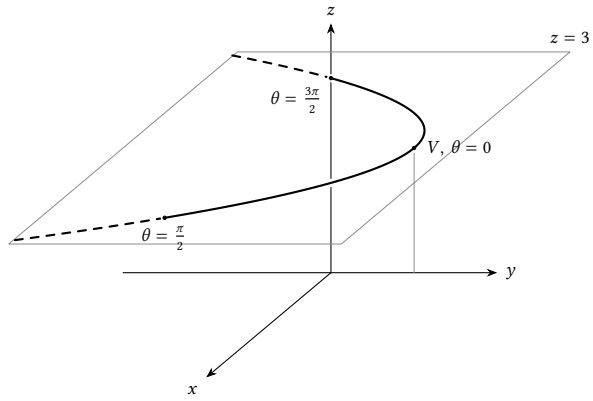
Sea la curva $C:\ x=4\operatorname{sen}\theta,\ y=2\cos2\theta,\ z=3$; $\theta\geq0$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C y el intervalo de valores para x, y y z. b) Bosqueje la gráfica de C en el plano $z=3$.

Resolución.

1. **a) Identidad:** como x trae $\operatorname{sen}\theta$, se usa $\cos2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta$ con $\operatorname{sen}\theta=\frac{x}{4}$:

$$y=2\left(1-2\cdot\frac{x^2}{16}\right)=2-\frac{x^2}{4}\quad\Longrightarrow\quad x^2=-4(y-2).$$

2. **Cartesianas:** $C:\ x^2=-4(y-2)$, $z=3$. Parábola de vértice $V(0,2,3)$, eje paralelo al eje y, $4p=-4$, $p=-1$: abre hacia las y negativas, foco $(0,1,3)$, directriz $y=3$, $z=3$.
3. **Intervalos** ($\theta\geq0$ contiene periodos completos): $-1\leq\operatorname{sen}\theta\leq1$ da $x\in[-4,4]$; $-1\leq\cos2\theta\leq1$ da $y\in[-2,2]$; $z=3$.
4. **Recorte:** la parábola completa no tiene límite en x; aquí solo se recorre el arco con $|x|\leq4$, que va de $(-4,-2,3)$ a $(4,-2,3)$ pasando por el vértice. Al crecer θ el punto va y viene sobre ese arco.
5. **b) Bosquejo:** el arco en el plano $z=3$, con sus extremos.



Resultado: $x^2=-4(y-2)$, $z=3$: arco de parábola con vértice $(0,2,3)$; $x\in[-4,4]$, $y\in[-2,2]$, $z=3$.

Ejercicio 5.5.2 · Elipse con suma y diferencia de seno y coseno

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 4.

Sea la curva $C:\ x=2\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta,\ y=3\sqrt{3}\cos\theta-3\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta,\ z=4$. Determine unas ecuaciones cartesianas de C e identifíquela.

Resolución.

1. **Datos de R:** $\frac{-2-y}{-1} = y+2$ y $\frac{2z-2}{2} = z-1$: $P_R(1,-2,1)$, $\vec{u}_R = (3,1,1)$. De L: $P_L(3,4,-7)$, $\vec{u}_L = (1,-1,1)$.
2. **Dirección común:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (-1-1,\ 3-1,\ 1+3) = (-2,2,4)$; se usa $\vec{w} = (1,-1,-2)$, $|\vec{w}| = \sqrt{6}$.
3. **a)** $\overrightarrow{P_L P_R} = (-2,-6,8)$, $\overrightarrow{P_L P_R} \cdot \vec{w} = -2+6-16 = -12$:

$$d = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

4. **b)** Los planos con normal $\vec{w}$ que contienen a cada recta son $x-y-2z = 13$ (por P_L: $3-4+14$) y $x-y-2z = 1$ (por P_R: $1+2-2$). El equidistante tiene el término medio: $x-y-2z = 7$. Comprobación: su distancia a P_L es $\frac{|13-7|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, la mitad de d.
5. **c)** Perpendicular a las dos: dirección $\vec{w}$. $P:\ \vec{p} = (2,3,-1) + t(1,-1,-2)$.

Resultado: $d = 2\sqrt{6}$; $\pi:\ x-y-2z-7=0$; $P:\ \vec{p} = (2,3,-1)+t(1,-1,-2)$.

Ejercicio 4.5.9 · Intersección de dos rectas, plano que las contiene y distancia

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas $L:\ 1-x = \frac{y-3}{2};\ z=4$ y $R:\ \vec{p} = (4-t,\ 1-2t,\ 2+2t)$. Determine: a) si existen, las coordenadas del punto I de intersección de L y R; b) una ecuación vectorial del plano π que contiene a L y a R; c) la distancia del punto $B(3,4,5)$ a L.

Resolución.

1. **Datos:** $L:\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2},\ z=4$: $P_L(1,3,4)$, $\vec{u}_L = (-1,2,0)$. R: $P_R(4,1,2)$, $\vec{u}_R = (-1,-2,2)$.
2. **a)** $1-s = 4-t$, $3+2s = 1-2t$, $4 = 2+2t$. De la tercera, $t=1$; de la primera, $s=-2$; en la segunda, $3-4 = -1 = 1-2$: se cumple. $I(3,-1,4)$.
3. **b)** Se cortan; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4)+r(-1,2,0)+s(-1,-2,2)$. (Su normal es $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (4,2,4)$: $2x+y+2z-13=0$.)
4. **c)** $\overrightarrow{P_L B} = (2,1,1)$,

$$\overrightarrow{P_L B} \times \vec{u}_L = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,5), \qquad d = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}.$$

Resultado: $I(3,-1,4)$; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4) + r(-1,2,0) + s(-1,-2,2)$; $d = \sqrt{6}$.

Ejercicio 4.5.10 · Plano perpendicular al plano XZ y distancia del origen a una recta

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 3.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-4}{8} = \frac{-y-1}{5} = \frac{z+1}{3}$. Obtenga: a) la ecuación cartesiana del plano π que es perpendicular al plano coordenado XZ y contiene a la recta L; b) la distancia del origen a la recta L.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2x-4}{8} = \frac{x-2}{4}$ y $\frac{-y-1}{5} = \frac{y+1}{-5}$: $P_0(2,-1,-1)$, $\vec{u} = (4,-5,3)$.

5.3.3 *Intervalo paramétrico* SOLO PLAN 2010

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es; pasa al paso 4.
2. Para cada componente, escribe su condición: radicando ≥ 0 (o >0 si la raíz está en un denominador), denominador $\neq 0$, puntos excluidos de tan, sec, csc, cot.
3. Intersecta las condiciones: $t > -4$ y $-5 \leq t \leq 5$ dan $(-4,5]$.
4. Escríbelo con intervalos. Si es periódico, da también un periodo que recorra la curva una vez.

5.3.4 *Extensión (intervalos de variación)* SOLO PLAN 2010

1. Para cada coordenada, calcula el recorrido de su función en el intervalo paramétrico.
2. **Trigonométricas:** parte de $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ (o del intervalo de $\operatorname{sen} t$ en el intervalo dado), $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$, $\tan t \in \mathbb{R}$, y aplica las operaciones de la componente (multiplicar por un negativo invierte la desigualdad).
3. **Raíces y cocientes:** si la función es creciente o decreciente, evalúa en los extremos del intervalo y toma el límite en los extremos excluidos ($x \to \infty$ cuando el denominador tiende a 0).
4. La coordenada constante tiene un solo valor: $z = 3$.
5. Compara con la cónica completa: si la extensión es menor, la curva es solo un arco.

5.3.5 *Bosquejo en su plano*

1. Traza los ejes x, y, z en perspectiva (x oblicuo hacia el frente).
2. Dibuja el plano de la curva (un paralelogramo) y una línea guía desde el centro o el vértice hasta el plano coordenado.
3. Marca el centro (o vértice), los vértices y, si aplica, las asíntotas de la hipérbola, con sus coordenadas completas.
4. Traza la curva solo en la extensión obtenida; los puntos excluidos, vacíos.

5.3.6 *De cartesianas a paramétricas*

1. Lleva la ecuación de la curva a la forma ordinaria (completa cuadrados).
2. Usa la tabla de la sección 5.1.4: en la elipse, $u-h = a\cos t$ y $v-k = b\operatorname{sen} t$; en la parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$, toma $u-h$ proporcional a t de modo que v quede sin fracciones ($y-1 = 2t$ en $(y-1)^2 = 4(z-2)$ da $z = 2+t^2$).
3. Si la cónica se da por sus elementos (centro, semiejes y a qué eje son paralelos), el semieje paralelo a un eje multiplica a $\cos t$ o $\operatorname{sen} t$ en esa coordenada.
4. La coordenada constante es la tercera ecuación. Escribe la ecuación vectorial con 5.3.1 y comprueba sustituyendo en la cartesiana.

5.4 Ejemplo resuelto

> **Ejemplo resuelto · Hipérbola con tangente y secante**
>
> *Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 4.*
> Sea la curva C representada por la ecuación vectorial $\vec{p} = (1+3\tan\theta,\ -2+2\sec\theta,\ 3)$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine una pareja de ecuaciones cartesianas de C e identifíquela. c) Bosqueje C.

Resolución.

1. **Dirección de R:** $\frac{-y-1}{-1} = \frac{y+1}{1}$ y $\frac{-z+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$: $R:\ \frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$, $\vec{u} = (-1, 1, 1)$.
2. **Ángulo recta–plano (seno):** $\vec{n} = (1, B, 1)$, $\vec{u} \cdot \vec{n} = -1 + B + 1 = B$:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|B|}{\sqrt{3}\sqrt{2 + B^2}}.$$

3. **Ecuación:** $2|B| = \sqrt{3}\sqrt{2 + B^2} \Rightarrow 4B^2 = 6 + 3B^2 \Rightarrow B^2 = 6$.

Resultado: $B \in \{-\sqrt{6},\ \sqrt{6}\}$.

Ejercicio 4.5.13 · Ángulo e intersección de una recta y un plano

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 7.

Sean la recta $L:\ \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-3} = \frac{2-z}{3}$ y el plano $\pi:\ x - y - z + 19 = 0$. Determine: a) el ángulo entre L y π; b) las coordenadas del punto I de intersección de L y π.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2-z}{3} = \frac{z-2}{-3}$: $P_0(-3, 5, 2)$, $\vec{u} = (3, -3, -3)$, paralelo a $(1, -1, -1)$. $\vec{n} = (1, -1, -1)$.
2. **a)** $\vec{u} = 3\vec{n}$: la recta es paralela a la normal, es decir, **perpendicular** al plano. Con la fórmula: $\operatorname{sen}\varphi = \frac{|3+3+3|}{\sqrt{27}\sqrt{3}} = 1$, $\varphi = 90^\circ$.
3. **b)** Con $L:\ (-3 + t,\ 5 - t,\ 2 - t)$: $(-3 + t) - (5 - t) - (2 - t) + 19 = 3t + 9 = 0$, $t = -3$. $I(-6, 8, 5)$; comprobación: $-6 - 8 - 5 + 19 = 0$.

Resultado: $\varphi = 90^\circ$; $I(-6, 8, 5)$.

Ejercicio 4.5.14 · Punto de un plano más cercano a un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-1, tipo C, problema 6.

Obtenga las coordenadas del punto P del plano $\pi:\ 3x - y + 2z = 4$ más cercano al punto $M(1, 5, -4)$.

Resolución.

1. **Recta perpendicular por M:** dirección $\vec{n} = (3, -1, 2)$: $(1 + 3t,\ 5 - t,\ -4 + 2t)$.
2. **Intersección con π:** $3(1 + 3t) - (5 - t) + 2(-4 + 2t) = 14t - 10 = 4$, $t = 1$.
3. **Punto:** $P(4, 4, -2)$; comprobación: $12 - 4 - 4 = 4$. (La distancia de M al plano es $|\overrightarrow{MP}| = |\vec{n}| = \sqrt{14}$.)

Resultado: $P(4, 4, -2)$.

Ejercicio 4.5.15 · Recta por el origen que corta perpendicularmente a otra

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 1.

Sea la recta $M:\ x = 4,\ y = 5 + t,\ z = -2t$. Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al origen y corta perpendicularmente a M.

Resolución.

1. **Datos:** $\vec{u}_M = (0, 1, -2)$; punto genérico de M: $F(4,\ 5 + t,\ -2t)$.
2. **Perpendicularidad:** $\overrightarrow{OF} \cdot \vec{u}_M = 5 + t + 4t = 0$, $t = -1$, $F(4, 4, 2)$.
3. **Recta:** por O y F, dirección $(4, 4, 2)$, o $(2, 2, 1)$.

Cónica	Paramétricas	Cartesiana
Elipse	$u = h + a\cos t$, $v = k + b\operatorname{sen} t$	$\frac{(u-h)^2}{a^2} + \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$
Hipérbola	$u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$	$\frac{(u-h)^2}{a^2} - \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$
Parábola	$u = h + t$, $v = k + \frac{t^2}{4p}$	$(u - h)^2 = 4p\,(v - k)$

En la elipse y la circunferencia, $t \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez. En la hipérbola, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da la rama con $u \geq h + a$ ($\sec t > 0$) y $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la otra. El eje focal de la hipérbola es el de la variable que lleva sec.

Elementos que se piden al identificar: centro (o vértice en la parábola), plano que la contiene, semiejes a y b, vértices, focos (con $c^2 = a^2 - b^2$ en la elipse, $c^2 = a^2 + b^2$ en la hipérbola, p en la parábola), asíntotas de la hipérbola y directriz de la parábola. Todos son puntos o rectas *del espacio*: llevan la tercera coordenada constante.

5.1.5 *Intervalo paramétrico* SOLO PLAN 2010

SOLO PLAN 2010 El **intervalo paramétrico** es el conjunto de valores del parámetro para los que la ecuación vectorial está definida: el *dominio común* de las tres funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Si el enunciado da un intervalo ($\theta \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), es ese. Las restricciones vienen de:

- **raíces de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$; en un denominador, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$;
- **cocientes:** denominador $\neq 0$; $\frac{2}{t}$ excluye $t = 0$;
- **trigonométricas:** $\tan t$ y $\sec t$ excluyen $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot t$ y $\csc t$ excluyen $t = k\pi$.

Con funciones periódicas basta dar un periodo que recorra la curva una vez (por ejemplo $[0, 2\pi)$ sin los puntos excluidos), o todos los reales sin los puntos excluidos.

5.1.6 *Extensión: intervalos de variación* SOLO PLAN 2010

SOLO PLAN 2010 La **extensión** de la curva son los intervalos de variación de x, y y z: el conjunto de valores que toma cada función en el intervalo paramétrico (su recorrido). Es lo que el examen llama «el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas».

La extensión puede **recortar** la cónica: las ecuaciones cartesianas describen la cónica completa, pero las paramétricas solo recorren una parte. Casos típicos:

- $y = 2\cos 2\theta$, $x = 4\operatorname{sen}\theta$: la cartesiana es una parábola completa, pero $|x| \leq 4$ y $y \geq -2$; solo se recorre un arco (figura del ejercicio 5.5.1);
- $y = a - b\operatorname{sen}^2 t$: como $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, y va de $a - b$ a a;
- raíces: $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = 2\cos t$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da $z \geq 0$: media circunferencia;
- puntos excluidos: $z = 3 + \frac{4}{\csc\theta} = 3 + 4\operatorname{sen}\theta$ no existe donde $\operatorname{sen}\theta = 0$, así que a la elipse le faltan dos puntos.

5.2 Cómo reconocer el problema

Resolución.

1. **Ejes:** el enunciado no da coordenadas; se elige el origen en E, con los ejes sobre EA, EF y EH (figura). Entonces $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $F(0,2,0)$, $D(2,0,4)$, $C(2,2,4)$, $G(0,2,4)$, $H(0,0,4)$. Con otra elección los números cambian, pero no el procedimiento.
2. **a)** $\overrightarrow{AG} = (-2,2,4)$, o $(-1,1,2)$: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0) + t(-1,1,2)$.
3. **b)** $\overrightarrow{FD} = (2,-2,4)$, o $(1,-1,2)$: $L_2:\ x = s,\ y = 2 - s,\ z = 2s$.
4. **c)** $\overrightarrow{AF} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,2,4)$; $\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{AC} = (8,8,-4)$, o $(2,2,-1)$. Por A: $2(x-2) + 2y - z = 0$. Comprobación con C: $4 + 4 - 4 - 4 = 0$.

Resultado: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0) + t(-1,1,2)$; $L_2:\ x = s,\ y = 2 - s,\ z = 2s$; $\pi:\ 2x + 2y - z - 4 = 0$ (con el origen en E).

4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 4.

Sea el plano π, perpendicular al plano cartesiano XY, que contiene a la recta $L:\ \vec{p} = t\,(2,1,-3)$, y sea el plano π_0 que contiene a las rectas L_1 y L_2, paralelas a los vectores $\vec{u}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{k}$ y $\vec{u}_2 = 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + m\hat{k}$, respectivamente. Obtenga el conjunto de valores que puede tomar m para que π y π_0 formen un ángulo de 90°.

Resultado: $m = \frac{7}{2}$ (un solo valor).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 4.

Sea el plano π que contiene a la recta $L:\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3}$ y es perpendicular al plano XZ. a) Obtenga una ecuación cartesiana de π. b) Calcule la distancia del origen a π.

Resultado: $\pi:\ x - z + 8 = 0$; $d = 4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 4.

Sean la recta $L:\ \begin{cases} \frac{x}{h} = \frac{z}{\sqrt{3}} \\ y = 4 \end{cases}$ y el plano π que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y es paralelo al plano coordenado YZ. Determine el conjunto de valores de h para los cuales el ángulo entre L y π es de 60°.

Resultado: $h \in \{-3,\ 3\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Unidad 5 · Curvas en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno obtendrá ecuaciones paramétricas y en forma vectorial de curvas en el espacio e identificará curvas a partir de sus ecuaciones.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 6). No tiene objetivo propio: el tema está en los subtemas 6.12 («Representación cartesiana, paramétrica y vectorial de las cónicas») y 6.13 («Curvas en el espacio. Representación cartesiana, paramétrica y vectorial») del tema 6.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, un problema en cada uno de los 9 finales revisados (el problema 4 en los cinco más recientes; el 5 o el 6 en los de 2012-1 a 2013-1): intervalo paramétrico y extensión (intervalos de variación de x, y, z) en 6, ecuaciones cartesianas e identificación en 7 (hipérbola con sec y tan, parábola con cos 2θ o en el plano $x = 5$, elipse, circunferencia) y bosquejo en 4. En 8 de los 9 la curva está en un plano paralelo a uno coordenado. El tercer parcial 2006-2 trae otros tres problemas. En el Plan 2016 salió 1 vez en 39 finales (2º final 2016-1, problema 5: hipérbola con sec y tan); el intervalo paramétrico y la extensión solo los evalúa el Plan 2010.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad (Plan 2016: 45 minutos).
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 5.1.3 y 5.1.4 (20 min): identidades y cónicas en paramétricas.
  2. Aprende el procedimiento 5.3.2 (eliminar el parámetro e identificar) y sigue el ejemplo 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5.1 y 5.5.2 con cronómetro: 15 min cada uno, con bosquejo.
  4. Plan 2010: agrega los procedimientos 5.3.3 y 5.3.4 (intervalo paramétrico y extensión), el ejercicio 5.5.3 y los propuestos 5.6.1 a 5.6.3, que son problemas completos de final.
  5. Plan 2016: basta con los pasos 1 a 3 y el ejercicio 5.5.6.

5.1 Conceptos y expresiones

5.1.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas

Una *curva* C en el espacio se describe con un parámetro t (o θ): a cada valor del parámetro le corresponde un punto $P(x,y,z)$ de la curva. En **forma vectorial**,

$$C:\quad \vec{p}(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k},$$

Ejercicio propuesto 4.6.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x-y+3z-9=0$ y $\pi_2:\ x+\beta y+z+D=0$. Determine: a) el valor de β para que π_1 y π_2 sean paralelos y el valor de D para que π_2 contenga al origen; b) la distancia del origen a π_1; c) una ecuación vectorial de π_1; d) unas ecuaciones paramétricas de la recta L perpendicular a π_1 que contiene al punto $A(0,0,3)$.

Resultado: $\beta=-\frac{1}{3}$, $D=0$; $d=\frac{9\sqrt{19}}{19}$; $\vec{p}=(3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$; $L:\ x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo A, problema 7.

Sean los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,1,2)$ y el plano $\pi_1:\ 2x+3y+4z-8=0$. Determine: a) unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la recta L que contiene a A y es perpendicular a π_1; b) la distancia de B a π_1; c) unas ecuaciones paramétricas del plano π_2 que contiene a B y a L.

Resultado: $L:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{4}$; $d=\frac{\sqrt{29}}{29}$; $\pi_2:\ x=2+2r-4s,\ y=1+3r,\ z=-1+4r+3s$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-2, tipo A, problema 7.

Sean los planos $\pi_1:\ x-2y+3z-1=0$ y $\pi_2:\ x-y-z+1=0$. Obtenga: a) el ángulo entre π_1 y π_2; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L intersección de π_1 y π_2.

Resultado: 90°; $L:\ x=-3+5t,\ y=-2+4t,\ z=t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, tipo A, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x+2y+z+4=0$ y $\pi_2:\ x=4-3t-2r,\ y=3t,\ z=2r$. a) Determine la distancia entre π_1 y π_2. b) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al punto $P(2,3,-1)$ y es paralela a π_1 y a π_2.

Resultado: los planos no son paralelos: se cortan y su distancia es 0; $L:\ x=2+t,\ y=3-2t,\ z=-1+t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 6.

Sean la recta $L:\ x=1+2t,\ y=2-t,\ z=-2t$ y el plano $\pi:\ 2x-3y+2z=-7$. Obtenga: a) las coordenadas del punto P de intersección de L y π; b) las coordenadas de un punto Q de L que diste $\frac{3}{\sqrt{17}}$ unidades de π.

Resultado: $P(-1,3,2)$; $Q(1,2,0)$ o $Q(-3,4,4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 6.

Sean las rectas $L:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y+18}{6}=2-z$ y $R:\ \frac{2x-8}{2}=\frac{y+8}{2};\ z=-5$. Obtenga: a) la distancia entre L y R; b) el coseno del ángulo entre L y R.

Resultado: $d=6$; $\cos\theta=\frac{14\sqrt{205}}{205}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.15

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 6.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-18}{6}=y-8;\ z=6$. Obtenga las coordenadas del punto B de L que se encuentra a 3 unidades del punto $Q(-1,3,4)$.

Resultado: $B(0,5,6)$ o $B(-3,4,6)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 4.6.16

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 6.

Determine una ecuación cartesiana de un plano que es perpendicular a la recta $L:\ \vec{r}=(-1,8,1)+t\,(3,-2,6)$ y cuya distancia al origen es 7.

Resultado: $3x-2y+6z-49=0$ (o $3x-2y+6z+49=0$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

4.7 Errores frecuentes

1. **Leer mal la forma simétrica.** En $4-x$, $\frac{2-y}{4}$ o $\frac{2x-4}{8}$ el punto y el vector no se leen directo: primero se deja cada fracción como $\frac{x-x_0}{a}$.
2. **Coseno en el ángulo recta–plano.** El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$ es el complemento del que se pide; con $\vec{u}$ y $\vec{n}$ va **seno**.
3. **Confundir las condiciones recta–plano.** Recta paralela al plano: $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$; perpendicular: $\vec{u}\parallel\vec{n}$. Es al revés que entre dos rectas.
4. **Plano por dos rectas paralelas con $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$.** Ese producto es $\vec{0}$; el segundo vector es $\overrightarrow{P_1P_2}$.
5. **Plano por dos rectas que se cruzan.** No existe: antes de calcular el plano se revisa con el producto mixto que las rectas sean coplanares.
6. **Mismo parámetro en las dos rectas.** Al igualar paramétricas, cada recta lleva su parámetro (t y λ); con el mismo se «pierde» la intersección.
7. **Distancia entre planos que no son paralelos.** $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$ exige el mismo vector normal en las dos ecuaciones; si no son paralelos, se cortan y $d=0$ (propuesto 4.6.12).
8. **Una sola solución con valor absoluto.** «El conjunto de valores» de un parámetro o «un punto a distancia k» casi siempre tiene dos respuestas.