3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«de módulo 5 y paralelo a», «cosenos directores», «ángulos directores»	un vector con módulo y dirección	3.3.1
«coseno del ángulo», «ángulo entre», «ángulo interior», «ángulo A»	coseno o ángulo	3.3.2
«componente escalar», «componente vectorial», «en la dirección de», «comp esc», «comp vect»	proyección	3.3.3
«unitario perpendicular tanto a … como a», «paralelo al plano XZ y a 45°»	un vector por condiciones	3.3.4
«área del paralelogramo», «del triángulo», «diagonales», «cuadrilátero»	área	3.3.5
«volumen del paralelepípedo», «aristas concurrentes», «tetraedro», «producto mixto»	volumen	3.3.6
una figura con puntos sin coordenadas: «coordenadas del punto», «cuarto vértice», «punto medio»	coordenadas	3.3.7
«el valor de b», «el conjunto de valores», «tal que su área sea 6»	parámetro	3.3.8

3.3 Procedimientos

3.3.1 Vector con módulo y dirección dados

1. **Paralelo a $\vec{v}$ con módulo r:** $\vec{a} = \pm r\,\hat{v} = \pm\frac{r}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Si el enunciado no da el sentido, hay dos respuestas.
2. **Con cosenos directores:** completa el que falta con $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (hay dos signos si no se especifica) y escribe $\vec{a} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
3. **Con ángulos directores:** $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$. Si el que falta da $\cos^2 = 0$, el ángulo es 90°.
4. Comprueba el módulo al final.

3.3.2 Ángulo entre vectores y ángulos de un triángulo

1. Escribe los dos vectores que *salen* del vértice del ángulo pedido (para el ángulo A del triángulo ABC: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$).
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ y sustituye en $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.
3. Racionaliza; si el coseno es notable, da el ángulo en grados; si no, $\theta = \text{ang cos}(\ldots)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, serie de ejercicios de secciones cónicas, ejercicio 7.

Sea la elipse $x^2+4y^2-4x=0$. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la circunferencia con centro en $C(2,2)$ que contiene al centro de la elipse.

Resultado: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, serie de ejercicios de secciones cónicas, ejercicio 8.

SOLO PLAN 2016 Identifique la curva $x^2+xy+y^2=4$ y obtenga sus semiejes.

Resultado: Elipse; en ejes girados 45°, $\frac{x'^2}{8/3}+\frac{y'^2}{8}=1$: semieje mayor $2\sqrt{2}$ (sobre $y=-x$) y semieje menor $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (sobre $y=x$).

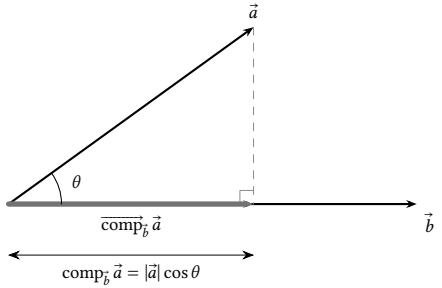
→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

1B.7 Errores frecuentes

1. **Completar el cuadrado sin el factor de fuera.** En $8\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$ se agregó $8\cdot\frac{1}{4}=2$, no $\frac{1}{4}$; al segundo miembro va 2.
2. **Signo del centro.** $(x+3)^2$ da $h=-3$, no 3.
3. **Confundir a y b en la elipse.** a va con el denominador mayor, sin importar si está bajo x o bajo y.
4. **Eje de la hipérbola por el tamaño de los denominadores.** En la hipérbola lo decide el *signo*: el término positivo da el eje transverso.
5. c **con la fórmula equivocada.** Elipse: $c^2=a^2-b^2$; hipérbola: $c^2=a^2+b^2$.
6. **Parábola sin despejar** $4p$**.** De $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{2}\right)$ sale $4p=-\frac{1}{4}$, no $p=-\frac{1}{4}$; el signo de p dice hacia dónde abre.
7. **Asíntotas con la pendiente invertida.** Con eje transverso vertical la pendiente es $\pm\frac{a}{b}$, no $\pm\frac{b}{a}$.
8. **Rotación con el ángulo en lugar de su doble.** $\cot 2\theta=0$ da $2\theta=90^\circ$ y $\theta=45^\circ$. Y el semieje se lee de la forma girada, no de la ecuación original.
9. **No revisar el caso degenerado.** Si al completar cuadrados el segundo miembro es 0 o negativo, la ecuación puede ser un punto, dos rectas o ningún punto.

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- General: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Con $B=0$: $A=C$ circunferencia, $AC=0$ parábola, $AC>0$ elipse, $AC<0$ hipérbola.
- Circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.
- Parábola: $(y-k)^2=4p(x-h)$ o $(x-h)^2=4p(y-k)$; foco a p del vértice, directriz a $-p$, lado recto $|4p|$.



3.1.7 Producto vectorial, paralelismo y área

El *producto vectorial* (o producto cruz) es el vector

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \big(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\big).$$

(Los determinantes de 3×3 se repasan en la Unidad 0.) Propiedades:

- $\vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$; su sentido sigue la regla de la mano derecha ($\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$).
- $\vec{b}\times\vec{a} = -\,\vec{a}\times\vec{b}$ (no es conmutativo) y $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.
- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\operatorname{sen}\theta$.
- **Paralelismo:** $\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

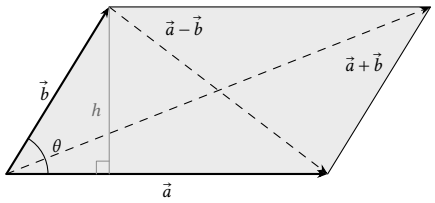
Áreas. El paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene base $|\vec{a}|$ y altura $|\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$:

$$A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{a}\times\vec{b}|, \qquad A_{\text{triángulo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Si se dan las **diagonales** $\vec{d}_1 = \vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{d}_2 = \vec{a}-\vec{b}$, entonces $\vec{d}_1\times\vec{d}_2 = -2\,\vec{a}\times\vec{b}$ y

$$A_{\text{paralelogramo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|, \qquad \vec{a} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1+\vec{d}_2), \quad \vec{b} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1-\vec{d}_2).$$

Para un triángulo de vértices A, B, C se usan dos lados que salen del mismo vértice: $A = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. Un cuadrilátero se parte en dos triángulos con una diagonal.



$A = |\vec{a}\times\vec{b}|$
$h = |\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$

Unidad 2 · Curvas en el plano polar (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno obtendrá ecuaciones en forma polar de curvas en el plano y determinará las características de éstas a partir de su ecuación en forma polar.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, un problema en cada uno de los 9 finales revisados, y siempre es el problema 1. Curvas: cardioide 3, lemniscata 3, circunferencia 3, rosa 2, caracol 1 y cónica en polares 1 (varios problemas traen dos o tres curvas). Lo que piden: bosquejo 7, intersecciones con el eje polar o con la recta a 90° 6, simetría 5, ecuación cartesiana 3, tres puntos o puntos más alejados del polo 3 y área de un triángulo formado con los vértices de una cónica 1.
- **Plan 2016:** en el Plan 2016 este tema está en Cálculo Vectorial.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad; en el examen, de 15 a 20 minutos para el problema.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 2.1.2, 2.1.3 y el catálogo 2.1.5 a 2.1.9 (30 min): basta reconocer cada ecuación y saber su forma.
  2. Aprende los procedimientos 2.3.4 (simetría) y 2.3.5 (intersecciones con los ejes): salen en 5 y 6 de los 9 finales.
  3. Sigue el ejemplo 2.4 tapando la resolución: es el catálogo completo en un problema.
  4. Resuelve los ejercicios 2.5.1 a 2.5.4 con cronómetro (15 min cada uno, con bosquejo) y el 2.5.5 (cónica en polares) en 20 min.
  5. Usa los propuestos 2.6.1 y 2.6.2 como simulacro del problema 1.

2.1 Conceptos y expresiones

2.1.1 Coordenadas polares

Se fija un punto O, el *polo*, y una semirrecta que parte de él, el *eje polar* (la parte positiva del eje x). Un punto P se describe con el par (r,θ): θ es el ángulo que va del eje polar al segmento OP, positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y r es la distancia dirigida de O a P. En este libro θ se escribe en grados, como en los exámenes.

- Si $r>0$, el punto está sobre la semirrecta de ángulo θ; si $r<0$, sobre la semirrecta opuesta, de ángulo $\theta+180^\circ$, a distancia $|r|$.
- El polo es $(0,\theta)$ para *cualquier* θ.
- La *recta a* 90° es la recta perpendicular al eje polar por el polo (el eje y).

Cuando un enunciado pide las intersecciones «con el eje polar» se usa la recta completa que lo contiene ($\theta=0^\circ$ y $\theta=180^\circ$); «con la recta a 90°», los ángulos $\theta=90^\circ$ y $\theta=270^\circ$.

3.1.2 Segmento dirigido y vector

El *segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ va del punto inicial A al punto final B. Sus componentes son las diferencias de coordenadas, final menos inicial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

Dos segmentos dirigidos con las mismas componentes representan el mismo *vector*, sin importar dónde empiecen. El vector de posición del punto $P(x, y, z)$ es $\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. De aquí salen dos reglas que se usan siempre:

- $B = A + \overrightarrow{AB}$: un punto se obtiene sumando a otro el vector que los une.
- El **punto medio** de AB es $M = \frac{1}{2}(A+B)$, y el punto que divide a AB en la razón $\frac{AP}{AB} = k$ es $P = A + k\,\overrightarrow{AB}$.

3.1.3 Módulo, vector unitario y cosenos directores

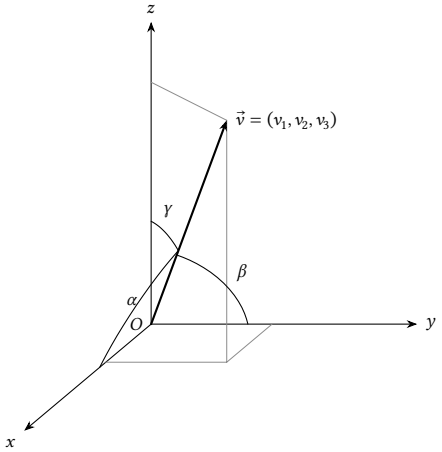
El *módulo* de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es su longitud, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Un vector de módulo 1 es *unitario*; el unitario en la dirección de $\vec{v} \neq \vec{0}$ es

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Los *ángulos directores* α, β, γ son los que forma $\vec{v}$ con los ejes x, y, z (cada uno entre 0° y 180°). Sus cosenos, los *cosenos directores*, son las componentes de $\hat{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Así, un vector de módulo r con cosenos directores conocidos es $\vec{v} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Si se conocen dos cosenos, la identidad da el tercero salvo el signo.

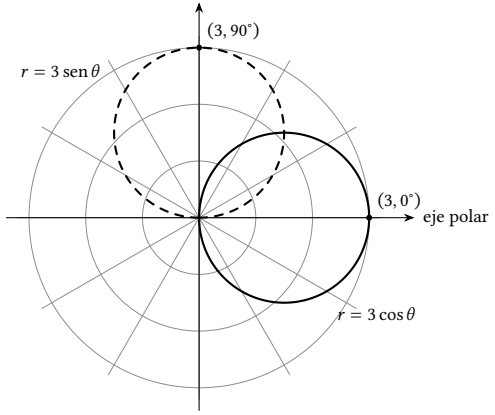


- **De una ecuación polar a cartesiana:** se busca que aparezcan $r\cos\theta$, $r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y r^2; casi siempre se multiplica por r o se eleva al cuadrado. Multiplicar por r solo puede agregar el polo, que se revisa aparte.
- **De una ecuación cartesiana a polar:** se sustituyen $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y se simplifica.

2.1.5 Rectas y circunferencias

- $\theta = \alpha$: recta por el polo con inclinación α.
- $r\cos\theta = a$ ($x = a$) y $r\,\mathrm{sen}\,\theta = b$ ($y = b$): rectas vertical y horizontal.
- $r = a$: circunferencia de centro en el polo y radio $|a|$.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia que pasa por el polo, de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ en cartesianas y radio $\frac{|a|}{2}$, pues $r^2 = ar\cos\theta$ da $x^2 + y^2 = ax$.
- $r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$: circunferencia por el polo de centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ y radio $\frac{|a|}{2}$ ($x^2 + y^2 = ay$).

Con $a < 0$ el centro queda del otro lado: $r = -6\cos\theta$ tiene centro $(-3, 0)$. Las dos circunferencias se recorren completas con $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$.



2.1.6 Cardioides y caracoles

$r = a \pm b\cos\theta$ y $r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $a, b > 0$, son *caracoles* (limazones):

- $a = b$: **cardioide**, con punta (cúspide) en el polo. $r = a(1 + \cos\theta)$ tiene la punta hacia la izquierda y su punto más alejado es $(2a, 0^\circ)$ (figura del ejemplo 2.4).
- $a < b$: caracol **con lazo interior**; pasa por el polo cuando $\cos\theta = \mp\frac{a}{b}$ (o $\mathrm{sen}\,\theta = \mp\frac{a}{b}$).
- $a > b$: caracol sin lazo, que no pasa por el polo.

Con $\cos\theta$ son simétricos respecto al eje polar; con $\mathrm{sen}\,\theta$, respecto a la recta a 90°. El signo $\pm$ decide hacia qué lado se abren: $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ se alarga hacia arriba ($r = a + b$ en 90°).

2.1.7 Rosas

$r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$ y $r = a\cos n\theta$ ($n \ge 2$ entero) son **rosas** de pétalos de longitud $|a|$:

- n impar: n pétalos, y la curva se recorre completa con $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$;

8. **Cuadrante de θ al pasar a polares.** $\tan\theta = \frac{y}{x}$ da dos ángulos; el correcto es el del cuadrante del punto.
9. **Cartesiana con r suelta.** $x^2 + y^2 - 2y = r$ aún no es cartesiana: se eleva al cuadrado con $r^2 = x^2 + y^2$.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $(r, \theta) = (r, \theta + 360^\circ k) = (-r, \theta + 180^\circ + 360^\circ k)$; el polo es $(0, \theta)$ para todo θ.
- $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r, θ): eje polar $(r, -\theta)$; recta a 90° $(r, 180^\circ - \theta)$; polo $(r, \theta + 180^\circ) = (-r, \theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta \to -\theta$ o $(-r, 180^\circ - \theta)$; recta a 90° $\theta \to 180^\circ - \theta$ o $(-r, -\theta)$; polo $r \to -r$ o $\theta + 180^\circ$. Suficientes, no necesarias.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$: centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r = a \pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a = b$, caracol con lazo si $a < b$.
- $r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$: foco en el polo; $e < 1$ elipse, $e = 1$ parábola, $e > 1$ hipérbola.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Nombra la curva en el primer renglón (cardioide, caracol, rosa, lemniscata, circunferencia o cónica): eso ya dice su forma y su simetría.
2. Simetría: prueba 1, prueba 2 y, si las dos fallan, un contraejemplo con un punto notable.
3. Intersecciones: los dos ángulos de cada eje, el polo con $r = 0$, y revisa puntos repetidos.
4. Tabla con 4 o 5 ángulos notables y los puntos más alejados del polo ($|r|$ máximo).
5. Bosquejo sobre una rejilla polar, con los puntos calculados marcados y escritos.
6. Si piden la cartesiana, multiplica por r, sustituye y completa cuadrados.

Si el tiempo no alcanza, el nombre de la curva, sus intersecciones con los ejes y un bosquejo con tres puntos ya valen la mayor parte del problema.

Simetría respecto a	Prueba 1	Prueba 2
eje polar	$\theta \to -\theta$	$r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$
recta a 90°	$\theta \to 180^\circ - \theta$	$r \to -r$, $\theta \to -\theta$
polo	$r \to -r$	$\theta \to \theta + 180^\circ$

Si alguna de las dos pruebas deja la ecuación igual (o equivalente), la curva *es* simétrica. **Las pruebas son suficientes, no necesarias:** si las dos fallan, todavía no se sabe. Para concluir que *no* es simétrica se da un contraejemplo: un punto de la curva cuyo simétrico no la cumple con *ninguna* de sus representaciones; o se pasa a cartesianas, donde la prueba sí es definitiva ($y \to -y$ para el eje polar, $x \to -x$ para la recta a 90°, las dos para el polo). Si una curva tiene dos de las tres simetrías, tiene la tercera.

2.1.11 Intersección de dos curvas polares

Como un punto tiene muchas representaciones, resolver el sistema $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$ no basta:

- se resuelve $f(\theta) = g(\theta)$;
- se resuelve también con la otra representación de la segunda curva, $f(\theta) = -g(\theta + 180^\circ)$;
- **el polo** se revisa aparte: está en las dos curvas si cada una tiene $r = 0$ para *algún* θ, aunque sean ángulos distintos.

Por ejemplo, $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 3\cos\theta$: de $1 + \cos\theta = 3\cos\theta$ sale $\cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\left(\frac{3}{2}, 60^\circ\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 300^\circ\right)$; la segunda ecuación, $1 + \cos\theta = -3\cos(\theta + 180^\circ)$, es la misma que la primera porque $-3\cos(\theta + 180^\circ) = 3\cos\theta$: no da puntos nuevos. Además, la primera pasa por el polo en 180° y la segunda en 90°: el polo es el tercer punto de intersección.

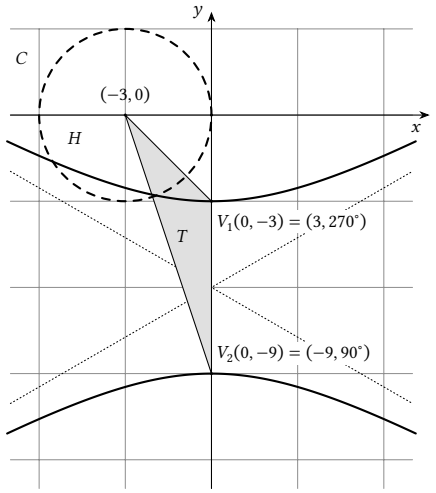
2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«el simétrico de E respecto al polo», «unas coordenadas polares de» un punto	representaciones y simétricos	2.3.1
«obtener una ecuación cartesiana»	conversión	2.3.2
«identificar», «dar el nombre»	catálogo	2.3.3
«determinar si es simétrica respecto al eje polar, al polo o a la recta a 90°»	pruebas o contraejemplo	2.3.4
«intersecciones con el eje polar» o «con la recta a 90°», «número de intersecciones»	sustitución y polo	2.3.5
«coordenadas de tres puntos», «puntos más alejados del polo»	tabla, máximo de $\|r\|$	2.3.6
«bosquejar su gráfica»	bosquejo	2.3.7
$r = \frac{k}{c \pm d\,\mathrm{sen}\,\theta}$ o con $\cos\theta$; «vértices», «área del triángulo»	cónica en polares	2.3.8

6. **b) Área:** T tiene vértices $(0,-3)$, $(0,-9)$ y $(-3,0)$. La base V_1V_2 está sobre el eje y y mide 6; la altura es la distancia de $(-3,0)$ al eje y, 3:

$$A = \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

7. **c) Bosquejo:** ramas de la hipérbola con vértices $(0,-3)$ y $(0,-9)$ y asíntotas $y = -6 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$; la circunferencia es tangente al eje y en el polo.



Resultado: a) $H:\ \frac{(y+6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ $(x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0)$; $C:\ (x+3)^2 + y^2 = 9$; b) $A = 9$ unidades de área.

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

Sean las curvas $C_1:\ r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $C_2:\ r^2 = 4\cos 2\theta$. a) De la curva C_1, determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección con la recta a 90°. b) Identifique la curva C_2, dé coordenadas polares de tres puntos de ella y bosqueje su gráfica.

Resultado: a) El polo y $(2, 90°)$. b) Lemniscata con lazos sobre el eje polar; por ejemplo $(2, 0°)$, $(2, 180°)$, $(\sqrt{2}, 30°)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 135.

2.3.6 Tabla de valores y puntos más alejados del polo

1. Evalúa r en ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, ...); en rosas y lemniscatas, en los que hacen notable a $n\theta$ o a 2θ.
2. **Puntos más alejados:** maximiza $|r|$ (o r^2): ocurre donde el seno o el coseno vale ± 1. Escribe todos los θ en $[0°, 360°)$ y los puntos que dan.
3. Para «tres puntos», escoge puntos notables: extremos de pétalos o lazos, intersecciones con los ejes.

2.3.7 Bosquejo

1. Dibuja una rejilla polar ligera: circunferencias y rayos cada 30° o 45°.
2. Marca los puntos de la tabla, las intersecciones con los ejes y el polo si pertenece.
3. Usa las simetrías para dibujar solo una parte y reflejarla.
4. Une los puntos en el orden en que crece θ; con $r < 0$, el punto va en la dirección $\theta + 180°$.
5. Escribe el nombre de la curva y las coordenadas de los puntos marcados.

2.3.8 Cónica en forma polar

1. Escribe la ecuación con denominador $1 \pm e\cos\theta$ (o $\operatorname{sen}\theta$) y lee e: identifica la cónica.
2. **Vértices:** evalúa r en los dos ángulos del eje focal y convierte a cartesianas (uno puede salir con $r < 0$).
3. **Cartesiana:** $r(1 \pm e\operatorname{sen}\theta) = ep \Rightarrow r = ep \mp ey \Rightarrow x^2 + y^2 = (ep \mp ey)^2$; completa cuadrados y lee centro y semiejes. Comprueba que los vértices coinciden.
4. Para áreas y distancias, trabaja con los puntos en cartesianas.

2.3.9 Intersección de dos curvas polares

1. Iguala las r y resuelve para θ en $[0°, 360°)$.
2. Iguala la primera con la otra representación de la segunda, $f(\theta) = -g(\theta + 180°)$, y descarta los puntos repetidos.
3. Revisa el polo por separado ($r = 0$ en cada curva).
4. Si hay duda, resuelve el sistema en cartesianas.

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Catálogo: cardioide, rosa y lemniscata

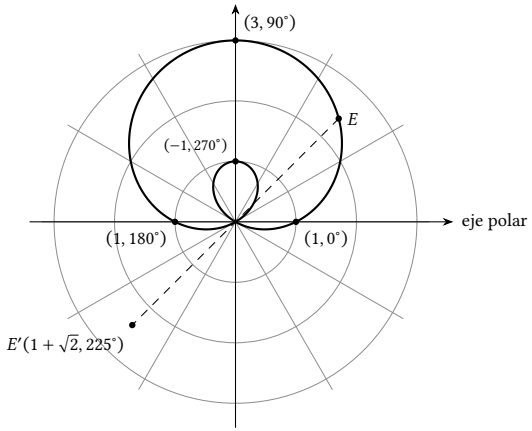
Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 1.

Para cada una de las curvas siguientes, dé su nombre, las coordenadas polares de tres de sus puntos y bosqueje su gráfica indicando esos puntos: a) $r = 2 + 2\cos\theta$; b) $r = 4\operatorname{sen}3\theta$; c) $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$.

Resolución.

1. **a) Nombre:** es $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$: **cardioide**. Con $\theta \to -\theta$ no cambia: simétrica respecto al eje polar.
2. **a) Puntos:**

$$\theta = 0°:\ r = 4; \quad \theta = 90°:\ r = 2; \quad \theta = 180°:\ r = 0; \quad \theta = 270°:\ r = 2.$$



Resultado: a) tres intersecciones: $(1, 0^\circ)$, $(1, 180^\circ)$ y el polo; b) $E'\left(1+\sqrt{2}, 225^\circ\right)$; c) $\left(x^2+y^2-2y\right)^2 = x^2+y^2$.

Ejercicio 2.5.4 · Lemniscata: simetría y puntos más alejados del polo

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Obtenga unas coordenadas polares de los puntos de la curva más alejados del polo. c) Bosqueje la gráfica de C.

Resolución.

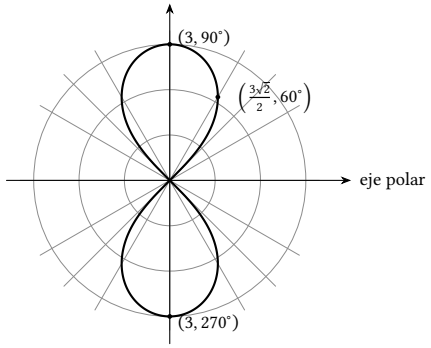
1. **Nombre y dónde existe:** lemniscata ($r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, $a = 2$); $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$ para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ y $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$.
2. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r^2 = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia.
3. **a) Prueba 2** ($r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$): $r^2 = 4\operatorname{sen}(360^\circ - 2\theta) = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **a) Contraejemplo:** $(2, 45^\circ)$ está en C ($4 = 4\operatorname{sen} 90^\circ$). Su simétrico es $(2, -45^\circ)$: $4\operatorname{sen}(-90^\circ) = -4 \neq 4$. Las demás representaciones cambian 2θ en múltiplos de 360° y r solo de signo, y r^2 no cambia: ninguna cumple. No es simétrica respecto al eje polar.
5. **b) Máximo:** $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta \leq 4$, con igualdad si $\operatorname{sen} 2\theta = 1$: $2\theta = 90^\circ$ o 450°, es decir, $\theta = 45^\circ$ o 225°, con $|r| = 2$.
6. **c) Tabla:** $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$ ($r^2 = 4\operatorname{sen} 30^\circ = 2$ en 15°). Como $r \to -r$ no cambia la ecuación, es simétrica respecto al polo: el lazo del tercer cuadrante es el reflejo del primero.

7. **c) Nombre:** $r^2 = -9\cos 2\theta$, de la forma $r^2 = -a^2\cos 2\theta$ con $a = 3$: **lemniscata** con los lazos sobre la recta a 90°.
8. **c) Dónde existe:** $-9\cos 2\theta \geq 0 \iff \cos 2\theta \leq 0 \iff 90^\circ \leq 2\theta \leq 270^\circ$, es decir, $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ (y, sumando 180°, $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$).
9. **c) Puntos:**

$$\theta = 90^\circ: \ r^2 = -9\cos 180^\circ = 9, \quad r = \pm 3;$$

$$\theta = 60^\circ: \ r^2 = -9\cos 120^\circ = \frac{9}{2}, \quad r = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Puntos: $(3, 90^\circ)$, $(-3, 90^\circ) = (3, 270^\circ)$ y $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$: los lazos se tocan en el polo.



Resultado: a) cardioide, $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; b) rosa de 3 pétalos, $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$; c) lemniscata, $(3, 90^\circ)$, $(3, 270^\circ)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Rosa de tres pétalos: recta a 90 grados y simetría

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 1.

Sea la curva de ecuación polar $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$. a) Obtenga las coordenadas de sus puntos de intersección con la recta a 90°. b) Determine si es simétrica respecto al eje polar. c) Bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **a) Sustitución:**

$$\theta = 90^\circ: \ r = 2\operatorname{sen} 270^\circ = -2; \qquad \theta = 270^\circ: \ r = 2\operatorname{sen} 810^\circ = 2\operatorname{sen} 90^\circ = 2.$$

   $(-2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$ son el mismo punto, $(0, -2)$ en cartesianas.
2. **a) Polo:** $r = 0$ cuando $\operatorname{sen} 3\theta = 0$, por ejemplo en $\theta = 0^\circ$. El polo está en la curva y en la recta a 90°.
3. **b) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\operatorname{sen}(-3\theta) = -2\operatorname{sen} 3\theta$. Cambia.

- Elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (a con el denominador mayor), $c^2=a^2-b^2$, $e=\frac{c}{a}<1$.
- Hipérbola: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (eje con el término positivo), $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, $e=\frac{c}{a}>1$.
- Lado recto de elipse e hipérbola: $\frac{2b^2}{a}$.
- SOLO PLAN 2016 $I=B^2-4AC$: <0 elipse, $=0$ parábola, >0 hipérbola.
- SOLO PLAN 2016 $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}$; $x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta$, $y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$; $A'+C'=A+C$.
- Paramétricas: elipse $x=h+a\cos t$, $y=k+b\operatorname{sen}t$; hipérbola $x=h+a\sec t$, $y=k+b\tan t$.

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Nombra la cónica por los coeficientes antes de operar (o con el indicador, si hay término xy).
2. Completa cuadrados con el factor de fuera y comprueba desarrollando.
3. Escribe la forma ordinaria en un renglón aparte: es lo que más puntos vale.
4. Lista los elementos: centro o vértice, a, b, c o p, vértices, focos, asíntotas o directriz.
5. Dibuja con los elementos marcados y al menos dos intersecciones con los ejes.

Si la gráfica no sale, la forma ordinaria y la lista de elementos ya son la mayor parte del problema.

3.1.8 Producto mixto, volumen y coplanaridad

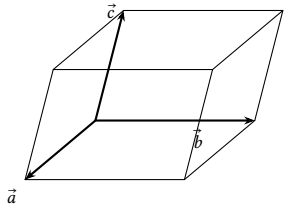
El *producto mixto* de $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ es un número que se calcula con un determinante:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

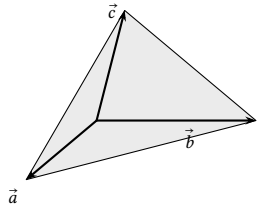
Algunos enunciados lo escriben $[\,\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\,]$. Una permutación cíclica $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\to\vec{b},\vec{c},\vec{a})$ no lo cambia; intercambiar dos vectores le cambia el signo. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (área de la base $|\vec{b}\times\vec{c}|$ por la altura):

$$V_{\text{paralelepípedo}}=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|,\qquad V_{\text{tetraedro}}=\tfrac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|.$$

Para un tetraedro de vértices A, B, C, D se usan las tres aristas que salen de un vértice: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Tres vectores son **coplanares** si y solo si su producto mixto es cero (el paralelepípedo es plano); cuatro puntos están en un mismo plano si las tres aristas que salen de uno de ellos son coplanares.



$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$



$V=\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

3.1.9 Coordenadas de puntos en una figura

Los problemas de «coordenadas de un punto» se resuelven sumando vectores a puntos conocidos ($B=A+\overrightarrow{AB}$). Las relaciones que más se usan:

- **Paralelogramo:** los lados opuestos son el mismo vector. Si los vértices en orden son A, B, C, D, entonces $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ y $D=A+C-B$ (el vértice que falta es la suma de sus dos vecinos menos el opuesto). Las diagonales se cortan en su punto medio común.
- **Rectángulo y cuadrado:** además, lados consecutivos perpendiculares ($\vec{a}\cdot\vec{b}=0$) y, en el cuadrado, del mismo módulo.
- **Segmento con dirección y longitud dadas:** $\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con $\hat{u}$ el unitario de la dirección y el sentido que indique la figura.
- **Pie de la perpendicular** desde B a la recta AC: $Q=A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$.
- **Simétrico** de P respecto a un punto M: $P'=2M-P$.

Se lee la figura con cuidado: el orden de los vértices en el nombre ($ABCD$, $ADCB$) y el sentido de cada flecha deciden los signos.

2.1.2 Varias representaciones de un punto

A diferencia de las coordenadas cartesianas, un mismo punto tiene infinitas parejas polares:

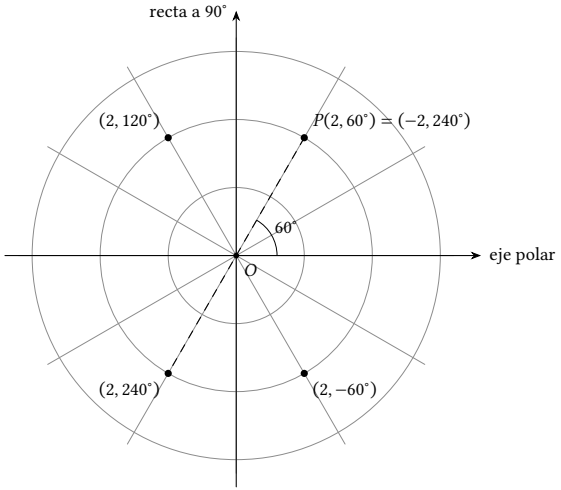
$$(r,\theta) = (r,\theta + 360^\circ k) = (-r,\theta + 180^\circ + 360^\circ k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Por ejemplo, $(2, 60^\circ) = (2, 420^\circ) = (2, -300^\circ) = (-2, 240^\circ) = (-2, -120^\circ)$. Por eso un punto puede estar en una curva aunque la pareja con la que se escribió no cumpla la ecuación: basta que *alguna* de sus representaciones la cumpla. «Dar unas coordenadas polares» de un punto es dar una cualquiera de ellas.

2.1.3 Simetría de puntos

El simétrico de $P(r,\theta)$ es:

- respecto al eje polar: $(r,-\theta)$, o también $(-r, 180^\circ - \theta)$;
- respecto a la recta a 90°: $(r, 180^\circ - \theta)$, o también $(-r,-\theta)$;
- respecto al polo: $(r, \theta + 180^\circ)$, o también $(-r,\theta)$.



2.1.4 Conversión entre polares y cartesianas

Con el polo en el origen y el eje polar sobre el eje x positivo:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

- **De polar a cartesiana (un punto):** se aplican las dos primeras. $(4, 120^\circ) \to (4\cos 120^\circ, 4\,\mathrm{sen}\,120^\circ) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.
- **De cartesiana a polar (un punto):** $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y θ con $\tan\theta = \frac{y}{x}$ *en el cuadrante del punto*. Para $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$: $r = 4$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y el punto está en el segundo cuadrante, así que $\theta = 120^\circ$ (no -60°).

3.1.4 Operaciones con vectores

Con $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y un escalar λ:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \qquad |\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|.$$

La suma se dibuja con la regla del paralelogramo: si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ salen del mismo punto, $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son las diagonales. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (no nulos) son **paralelos** si $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ para algún $\lambda \neq 0$: con $\lambda > 0$ tienen el mismo sentido y con $\lambda < 0$, sentido contrario. En componentes, sus coordenadas son proporcionales.

3.1.5 Producto escalar, ángulo y perpendicularidad

El *producto escalar* (o producto punto) es el número

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,$$

donde $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ es el ángulo entre los vectores. Es conmutativo, distributivo sobre la suma y cumple $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$. De ahí:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}, \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

El signo de $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dice si el ángulo es agudo (+), recto (0) u obtuso (−). Un ángulo no notable se deja como $\theta = \mathrm{ang}\cos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. El **ángulo interior** de un triángulo o paralelogramo en el vértice A se calcula con los dos vectores que *salen* de A.

3.1.6 Componente escalar y componente vectorial

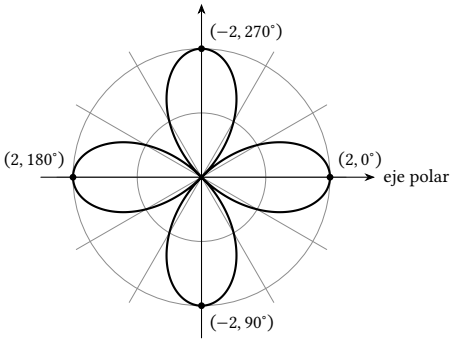
La *componente escalar* de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es la longitud con signo de la sombra de $\vec{a}$ sobre la dirección de $\vec{b}$; la *componente vectorial* es esa sombra como vector (la proyección ortogonal):

$$\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} = \left(\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a}\right)\hat{b}.$$

La componente escalar es negativa si el ángulo es obtuso; la vectorial apunta entonces en sentido contrario a $\vec{b}$. Solo importa la *dirección* de $\vec{b}$: sobre $2\vec{b}$ o $-\vec{b}$ la componente vectorial es la misma. El orden importa: $\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ (se divide entre $|\vec{b}|$) no es $\mathrm{comp}_{\vec{a}}\,\vec{b}$. Sobre un eje: $\overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\hat{\jmath}}\,\vec{a} = (0, a_2, 0)$. Los enunciados también dicen «componente de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$» o escriben «comp esc» y «comp vect».

- n par: $2n$ pétalos, con $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$.

Los pétalos están separados por ángulos iguales. Con $\cos n\theta$ un pétalo está centrado en el eje polar ($\theta = 0^\circ$); con $\operatorname{sen} n\theta$, el primero está centrado en $\theta = \frac{90^\circ}{n}$. Los extremos de los pétalos son las soluciones de $|\operatorname{sen} n\theta| = 1$ (o $|\cos n\theta| = 1$) y la curva pasa por el polo donde $\operatorname{sen} n\theta = 0$ (o $\cos n\theta = 0$).



2.1.8 Lemniscatas

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$ y $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ son **lemniscatas**: dos lazos que se tocan en el polo, de longitud $|a|$.

- Solo existen para los θ que hacen el lado derecho ≥ 0: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ para $-45^\circ \le \theta \le 45^\circ$ y $135^\circ \le \theta \le 225^\circ$ (lazos sobre el eje polar); $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$, para $45^\circ \le \theta \le 135^\circ$ y $225^\circ \le \theta \le 315^\circ$ (lazos sobre la recta a 90°); $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, en los cuadrantes I y III (lazos sobre la recta a 45°).
- Cada θ válido da dos valores, $r = \pm|a|\sqrt{\ldots}$: un punto en cada lazo.
- Como r aparece al cuadrado, las tres son simétricas respecto al polo.

2.1.9 Cónicas en forma polar

Una cónica con un foco en el polo y excentricidad e tiene ecuación

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta},$$

donde $p > 0$ es la distancia del foco a la directriz: $x = p$ con $+\cos$, $x = -p$ con $-\cos$, $y = p$ con $+\operatorname{sen}$, $y = -p$ con $-\operatorname{sen}$. Es elipse si $e < 1$, parábola si $e = 1$ e hipérbola si $e > 1$. Si el denominador no empieza con 1 ($r = \frac{k}{c + d\operatorname{sen}\theta}$), se divide entre c.

Con $\cos\theta$ el eje focal es el eje polar y los vértices salen de $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$; con $\operatorname{sen}\theta$ el eje focal es la recta a 90° y los vértices salen de $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$. En una hipérbola uno de los dos valores de r es negativo: ese vértice está en la rama que no contiene al foco.

2.1.10 Simetría de una curva

Una curva es simétrica respecto a un eje o al polo si el simétrico de cada uno de sus puntos también está en ella. Las pruebas usuales son sustituciones en la ecuación:

Unidad 3 · Álgebra vectorial

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el álgebra vectorial en la resolución de problemas geométricos.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 6). Dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, el problema 2 de los 9 finales revisados (11 problemas; dos finales traen dos): área de paralelogramo, triángulo o cuadrilátero (a veces por diagonales) en 6, perpendicularidad o paralelismo con parámetro o condición de módulo en 4, componente escalar o vectorial en 3, coordenadas de puntos en 3, cosenos o ángulos directores en 2 y volumen en 1. El primer parcial anterior al programa de 2008 trae 5 problemas más. En el Plan 2016 es el problema 5 de 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (el 6 en los de siete problemas): área en 18, componente escalar o vectorial en 14, coordenadas de un punto en una figura en 12, volumen con el producto mixto en 10, ángulo o coseno en 8, vector unitario perpendicular o con ángulo dado en 5 y cosenos directores en 2 (un problema suele pedir dos o tres cosas). Es la unidad que más pesa en el Plan 2016 y la base de las Unidades 4, 5 y 6.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 3.1.5 a 3.1.8 (30 min): producto escalar, componentes, producto vectorial y producto mixto.
  2. Aprende los procedimientos 3.3.3 (componentes), 3.3.5 (áreas) y 3.3.6 (volúmenes): juntos cubren casi todos los problemas.
  3. Sigue el ejemplo de la sección 3.4 tapando la resolución (10 min).
  4. Resuelve con cronómetro, 12 min cada uno, los ejercicios 3.5.2, 3.5.5, 3.5.7, 3.5.8, 3.5.11 y 3.5.15.
  5. Termina con los propuestos 3.6.1 (Plan 2010) o 3.6.9 (Plan 2016) como simulacro.

3.1 Conceptos y expresiones

3.1.1 Recordatorio: el espacio cartesiano

Un punto del espacio es una terna $P(x, y, z)$; los tres planos coordenados (XY, XZ, YZ) dividen el espacio en ocho octantes. La distancia entre $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

La distancia de $P(x, y, z)$ al eje y es $\sqrt{x^2 + z^2}$ (y de modo análogo para los otros ejes). Los puntos simétricos respecto al origen, a los ejes y a los planos coordenados están en la Unidad 1, Parte A.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
dos curvas y «sus puntos de intersección»	intersección de curvas	2.3.9

2.3 Procedimientos

2.3.1 Representaciones de un punto y puntos simétricos

1. Escribe el punto con la pareja dada; si viene de una curva, calcula r con su θ.
2. Aplica la regla de la sección 2.1.3 según el eje o el polo.
3. Si se pide «unas coordenadas», da una pareja; si conviene, da también la equivalente con $r > 0$ y $0^\circ \le \theta < 360^\circ$.

2.3.2 De polar a cartesiana

1. Si hay $\cos\theta$ o $\operatorname{sen}\theta$ solos, multiplica la ecuación por r; si hay un cociente, quita el denominador.
2. Sustituye $r\cos\theta = x$, $r\operatorname{sen}\theta = y$, $r^2 = x^2 + y^2$.
3. Si queda r sola, aíslala y eleva al cuadrado: $r = E \Rightarrow x^2 + y^2 = E^2$.
4. Completa cuadrados para identificar la cónica (circunferencia, hipérbola…). Revisa si el polo pertenece a la curva original.

2.3.3 Identificar la curva

1. $r = a\cos\theta$, $r = a\operatorname{sen}\theta$: circunferencia por el polo.
2. $r = a \pm b\cos\theta$ o con $\operatorname{sen}\theta$: cardioide si $a = b$; caracol con lazo si $a < b$; sin lazo si $a > b$.
3. $r = a\operatorname{sen} n\theta$, $r = a\cos n\theta$: rosa de n pétalos (n impar) o $2n$ (n par).
4. $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = \pm a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata (si aparece $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$, despeja primero r^2).
5. $r = \frac{k}{c \pm d\cos\theta}$: divide entre c y compara con $\frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$; $e = \frac{d}{c}$.

2.3.4 Simetría

1. Aplica la prueba 1 de la tabla de la sección 2.1.10. Si la ecuación no cambia, la curva es simétrica: termina.
2. Si cambia, aplica la prueba 2. Si no cambia, es simétrica: termina.
3. Si las dos fallan, escribe que las pruebas no deciden. Toma un punto notable de la curva (el extremo de un pétalo, el punto más alejado), calcula su simétrico y comprueba que *ninguna* representación, $(r', \theta' + 360^\circ k)$ ni $(-r', \theta' + 180^\circ + 360^\circ k)$, cumple la ecuación. Entonces no es simétrica.

2.3.5 Intersecciones con el eje polar y la recta a 90 grados

1. **Eje polar:** sustituye $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$. **Recta a** 90°**:** sustituye $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$.
2. Escribe cada punto; si $r < 0$, da también su representación con $r > 0$ y revisa si dos resultados son el mismo punto.
3. **Polo:** resuelve $r = 0$. Si tiene solución, el polo está en la curva y en las dos rectas.
4. Si la curva tiene puntos con $r < 0$ (lazos), comprueba en cartesianas: $y = 0$ (eje polar) o $x = 0$ (recta a 90°) en la ecuación cartesiana da todas las intersecciones.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación $r = 2 + 2\cos\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección de C con el eje polar. c) Identifique a C y bosqueje su gráfica en el plano polar.

Resultado: a) Sí es simétrica. b) $(4, 0^\circ)$ y el polo, $(0, 180^\circ)$. c) Cardioide con la punta en el polo, abierta hacia la derecha hasta $(4, 0^\circ)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 135.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r = \cos\theta$. a) Obtenga unas coordenadas polares de cada uno de los puntos de intersección de C con el eje polar. b) Determine si C es simétrica respecto al polo. c) Obtenga la ecuación cartesiana de C e identifíquela.

Resultado: a) $(1, 0^\circ)$ y el polo. b) No es simétrica respecto al polo. c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$: circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 136.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: Serie de ejercicios de curvas en el plano polar, ejercicio 15.

Dada la curva de ecuación polar $r = 10 + 15\operatorname{sen}\theta$, determine: a) si es simétrica respecto al eje polar; b) todas sus intersecciones con el eje polar y con la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Resultado: a) No es simétrica respecto al eje polar. b) Eje polar: $(10, 0^\circ)$, $(10, 180^\circ)$ y el polo; recta a 90°: $(25, 90^\circ)$, $(-5, 270^\circ) = (5, 90^\circ)$ y el polo.

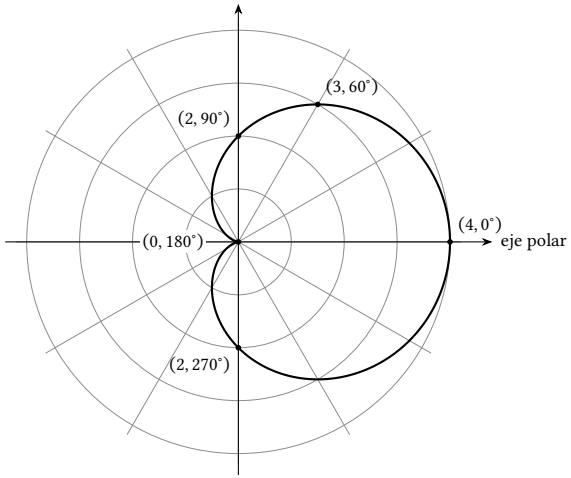
→ Resolución en el Apéndice E, p. 136.

2.7 Errores frecuentes

1. **Concluir «no es simétrica» porque la prueba falla.** Las pruebas son suficientes, no necesarias; para negar la simetría hace falta un contraejemplo (ejercicio 2.5.1) o la ecuación cartesiana.
2. **Olvidar el polo.** Casi todas las curvas del examen pasan por él; en las intersecciones con los ejes o entre curvas se revisa con $r = 0$ y se cuenta como punto.
3. **Sustituir un solo ángulo.** El eje polar pide $\theta = 0^\circ$ *y* 180°; la recta a 90°, 90° *y* 270°. Y luego hay que ver si dos resultados son el mismo punto, como $(-2, 90^\circ) = (2, 270^\circ)$.
4. **Dibujar** $r < 0$ **en la dirección** θ**.** El punto $(-4, 90^\circ)$ está abajo, en 270°.
5. **Contar mal los pétalos.** $r = a\operatorname{sen} n\theta$ tiene n pétalos si n es impar y $2n$ si es par: $r = 2\cos 2\theta$ tiene 4, no 2.
6. **Lemniscata donde no existe.** $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ no tiene puntos en el segundo ni en el cuarto cuadrante; escribe el intervalo de θ antes de la tabla.
7. **Cónica sin reducir el denominador.** $r = \frac{k}{c + d\operatorname{sen}\theta}$ se divide entre c para leer $e = \frac{d}{c}$. Y el vértice con $r < 0$ va en la dirección opuesta: $(-9, 90^\circ) = (0, -9)$.

Tres puntos: $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; además pasa por el polo, $(0, 180^\circ)$, donde tiene la punta.

3. **a) Bosquejo:** con $\theta = 60^\circ$, $r = 3$. La curva sale de $(4, 0^\circ)$, sube por $(3, 60^\circ)$ y $(2, 90^\circ)$, llega al polo en 180° y la mitad de abajo es el reflejo.

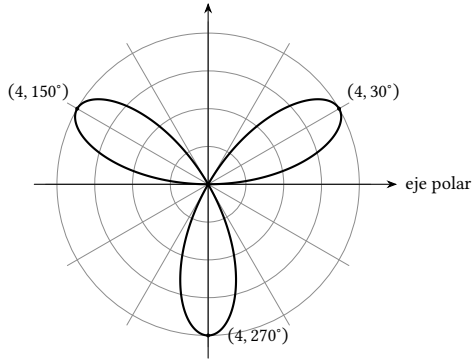


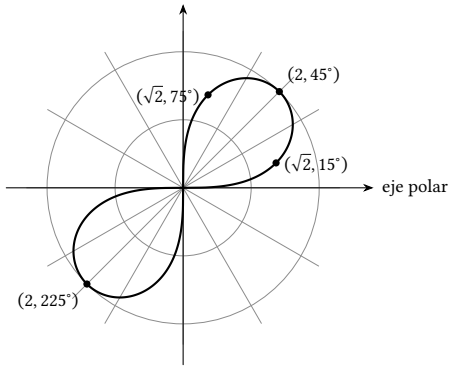
4. **b) Nombre:** $r = a \operatorname{sen} n\theta$ con $n = 3$ impar: **rosa de 3 pétalos** de longitud 4.
5. **b) Puntos:** los extremos de los pétalos, donde $|\operatorname{sen} 3\theta| = 1$:

$$\theta = 30^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 90^\circ = 4; \qquad \theta = 150^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 450^\circ = 4;$$
$$\theta = 90^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 270^\circ = -4.$$

El tercero es $(-4, 90^\circ) = (4, 270^\circ)$. Puntos: $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$.

6. **b) Bosquejo:** la curva pasa por el polo en 0°, 60°, 120° y 180° ($\operatorname{sen} 3\theta = 0$); entre ellos traza un pétalo. Los pétalos están centrados en 30°, 150° y 270°, separados 120°.





Resultado: a) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto al polo); b) $(2, 45^\circ)$ y $(2, 225^\circ)$ (este último es $(-2, 45^\circ)$); c) lemniscata en los cuadrantes I y III.

Ejercicio 2.5.5 · Hipérbola en polares, circunferencia y área de un triángulo

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 1.

Sean la hipérbola H y la circunferencia C representadas por

$$H: \ r = \frac{9}{1 - 2\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y} \qquad C: \ r = -6\cos\theta.$$

a) Obtenga la ecuación cartesiana de cada una de las curvas H y C en el plano XY. b) Determine el área del triángulo T formado por los vértices de H y el centro de la circunferencia C. c) Bosqueje las curvas H y C, así como el triángulo T.

Resolución.

1. **Identificación:** $r = \frac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$ con $e = 2 > 1$: hipérbola con un foco en el polo, $ep = 9$, $p = \frac{9}{2}$, directriz $y = -\frac{9}{2}$ y eje focal sobre la recta a 90°.
2. **a) Cartesiana de H:** $r - 2r\operatorname{sen}\theta = 9 \Rightarrow r = 9 + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 = (9 + 2y)^2 = 81 + 36y + 4y^2$:

$$x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0.$$

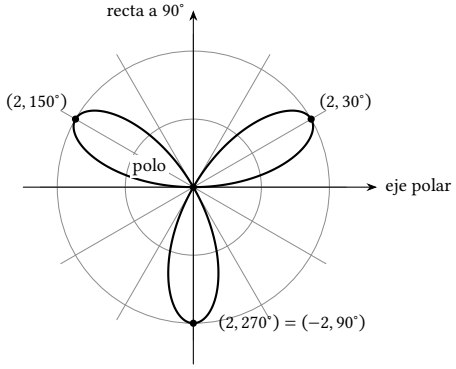
3. **a) Forma ordinaria:** $x^2 - 3\left(y^2 + 12y + 36\right) + 108 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 - 3(y + 6)^2 = -27$:

$$\frac{(y + 6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1.$$

Centro $(0, -6)$, $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$, $c = \sqrt{9 + 27} = 6$: focos $(0, 0)$ y $(0, -12)$; el polo es un foco, como debe ser.

4. **a) Cartesiana de C:** $r^2 = -6r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = -6x \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 9$. Centro $(-3, 0)$, es decir $(3, 180^\circ)$, y radio 3.
5. **b) Vértices de H:** $\theta = 270^\circ: \ r = \frac{9}{1+2} = 3, V_1(3, 270^\circ) = (0, -3)$; $\theta = 90^\circ: \ r = \frac{9}{1-2} = -9$, $V_2(-9, 90^\circ) = (0, -9)$. Coinciden con $(0, -6 \pm 3)$.

4. **b) Prueba 2** ($r \to -r, \theta \to 180^\circ - \theta$): $-r = 2\,\mathrm{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\,\mathrm{sen}(180^\circ - 3\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,3\theta$, es decir, $r = -2\,\mathrm{sen}\,3\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
5. **b) Contraejemplo:** $(2, 30^\circ)$ está en la curva ($2\,\mathrm{sen}\,90^\circ = 2$). Su simétrico respecto al eje polar es $(2, -30^\circ) = (2, 330^\circ)$. Con $\theta = 330^\circ$: $2\,\mathrm{sen}\,990^\circ = 2\,\mathrm{sen}\,270^\circ = -2 \neq 2$. Con la otra representación, $(-2, 150^\circ)$: $2\,\mathrm{sen}\,450^\circ = 2 \neq -2$. Sumar 360° a θ suma 1080° a 3θ y no cambia nada. El simétrico no está en la curva.
6. **c) Tabla** (primer pétalo): $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$. Para $60^\circ < \theta < 120^\circ$, $r < 0$: ese pétalo se dibuja centrado en 270°. El tercero está centrado en 150°. Con la prueba 1 para la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$): $2\,\mathrm{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,3\theta$; sí es simétrica respecto a ella.



Resultado: a) el polo y $(2, 270^\circ)$ (equivalente a $(-2, 90^\circ)$); b) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto a la recta a 90°); c) rosa de 3 pétalos de longitud 2.

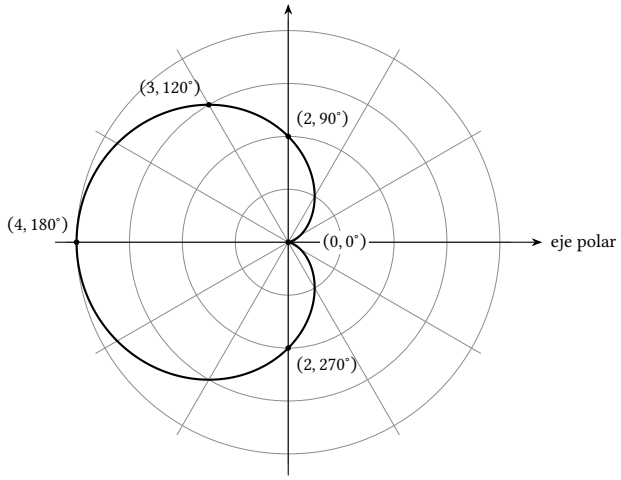
Ejercicio 2.5.2 · Cardioide: simetría e intersecciones con la recta a 90 grados

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 1.

Sea la curva $C_1:\ r = 2(1 - \cos\theta)$. a) Determine si C_1 es simétrica respecto al eje polar. b) Determine el número de intersecciones de C_1 con la recta a 90° y obtenga unas coordenadas polares de esos puntos. c) Bosqueje la gráfica de C_1.

Resolución.

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\big(1 - \cos(-\theta)\big) = 2(1 - \cos\theta)$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 90^\circ:\ r = 2(1 - 0) = 2$; $\theta = 270^\circ:\ r = 2$. Puntos $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$, distintos.
3. **b) Polo:** $r = 0 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0^\circ$. El polo es un tercer punto. Como $r \geq 0$ siempre, no hay más.
4. **c) Nombre y tabla:** $r = a - b\cos\theta$ con $a = b = 2$: cardioide. $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 0, 1, 2, 3, 4$. La punta está en el polo y el punto más alejado es $(4, 180^\circ)$; la mitad de abajo es el reflejo de la de arriba.



Resultado: a) sí es simétrica respecto al eje polar; b) tres intersecciones: el polo $(0, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$; c) cardioide que se abre hacia la izquierda.

Ejercicio 2.5.3 · Caracol con lazo: eje polar, punto simétrico y cartesiana

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$. a) Obtenga el número de intersecciones de C con el eje polar y las coordenadas polares de esas intersecciones. b) Si E es el punto de C que corresponde a $\theta = 45^\circ$, obtenga las coordenadas polares del punto E', simétrico de E respecto al polo. c) Obtenga una ecuación cartesiana de C.

Resolución.

1. **Nombre:** $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ con $a = 1 < b = 2$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90°.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ:\ r = 1$; $\theta = 180^\circ:\ r = 1$. Puntos $(1, 0^\circ)$ y $(1, 180^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0 \iff \mathrm{sen}\,\theta = -\frac{1}{2} \iff \theta = 210^\circ$ o 330°. El polo está en la curva.
4. **a) Comprobación:** el lazo ($210^\circ < \theta < 330^\circ$, con $r < 0$) queda arriba del eje polar y solo lo toca en el polo. Con la cartesiana del inciso c y $y = 0$: $x^4 = x^2$, $x = 0, \pm 1$. Son tres puntos.
5. **b) Punto** E**:** $r = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,45^\circ = 1 + \sqrt{2}$; $E\left(1 + \sqrt{2}, 45^\circ\right)$.
6. **b) Simétrico respecto al polo:** se suma 180° al ángulo:
$$E'\left(1 + \sqrt{2}, 225^\circ\right), \quad \text{o también} \quad E'\left(-1 - \sqrt{2}, 45^\circ\right).$$
7. **c) Multiplicar por** r**:** $r^2 = r + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = r$.
8. **c) Elevar al cuadrado:**
$$\left(x^2 + y^2 - 2y\right)^2 = x^2 + y^2.$$
Al elevar al cuadrado se agrega $r = -1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, que es la misma curva ($(r, \theta) \to (-r, \theta + 180^\circ)$ la convierte en $r = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$); y el polo ya estaba. La ecuación no agrega puntos.