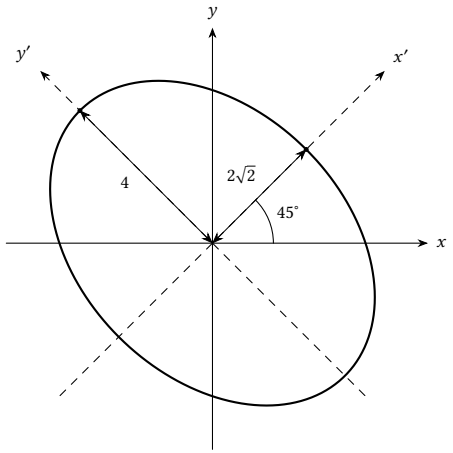


Resultado: el semieje menor mide $2\sqrt{2}$.

1B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1B**.

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo A, problema 1.

Identifique la curva $x^2 - y^2 + 8y - 17 = 0$ y trace su gráfica.

Resultado: $x^2 - (y-4)^2 = 1$: hipérbola equilátera de eje transverso horizontal, $C(0,4)$, $V(\pm 1, 4)$, $F\left(\pm\sqrt{2}, 4\right)$, asíntotas $y = 4 \pm x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo A, problema 1.

Obtenga la ecuación general de la circunferencia de radio 3 cuyo centro es el punto de intersección de la recta $2x - y - 6 = 0$ con el eje de las ordenadas, y trace su gráfica.

Resultado: $x^2 + y^2 + 12y + 27 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, serie de ejercicios de secciones cónicas, ejercicio 1.

Determine si la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola y, en caso afirmativo, obtenga las coordenadas de su vértice.

Resultado: Sí: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3)$, con vértice $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Geometría Analítica

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.2.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 6

Unidad 1 · Parte A · Introducción a la Geometría Analítica (solo Plan 2010) 11

Unidad 1 · Parte B · Secciones cónicas 13

Unidad 2 · Curvas en el plano polar (solo Plan 2010) 27

Unidad 3 · Álgebra vectorial 43

Unidad 4 · La recta y el plano en el espacio 65

Unidad 5 · Curvas en el espacio 87

Unidad 6 · Superficies (solo Plan 2010) 100

Apéndice A · Formulario 121

Apéndice B · Exámenes 124

Apéndice C · Fe de erratas 131

Apéndice D · Fuentes 132

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 134

1. **Completar el cuadrado con m como letra:**

$$\left(x^2+mx+\tfrac{m^2}{4}\right)-y^2=\tfrac{m^2}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(x+\frac{m}{2}\right)^2}{\frac{m^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{m^2}{4}}=1 \quad (m\neq 0).$$

2. **Semieje transverso:** el término positivo es el de x, así que $a^2=\frac{m^2}{4}$ y $a=\frac{|m|}{2}$.
3. **Condición:** $\frac{|m|}{2}=3$, de donde $m=6$ o $m=-6$.
4. **Comprobación con $m=6$:** $x^2+6x-y^2=0$ da $(x+3)^2-y^2=9$, es decir, $\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$: hipérbola equilátera con centro $(-3,0)$ y $a=3$. (Con $m=0$ la ecuación sería $x^2-y^2=0$, dos rectas: caso degenerado.)

Resultado: $m=6$ (también sirve $m=-6$).

Ejercicio 1B.5.6 · Semieje menor de una elipse girada SOLO PLAN 2016

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo A, problema 2.

SOLO PLAN 2016 Determine la longitud del semieje menor de la elipse $3x^2+2xy+3y^2=32$.

Resolución.

1. **Indicador:** $A=3$, $B=2$, $C=3$; $I=4-36=-32<0$: elipse.
2. **Ángulo de rotación:** $\cot 2\theta=\frac{3-3}{2}=0$, así que $2\theta=90^\circ$ y $\theta=45^\circ$, con $\operatorname{sen}\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. **Coeficientes nuevos:**

$$A'=3\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{2}+3\cdot\tfrac{1}{2}=4, \qquad C'=3\cdot\tfrac{1}{2}-2\cdot\tfrac{1}{2}+3\cdot\tfrac{1}{2}=2.$$

   Comprobación: $A'+C'=6=A+C$. Como $D=E=0$, también $D'=E'=0$ y $F'=-32$.
4. **Forma ordinaria en el sistema girado:**

$$4x'^2+2y'^2=32 \quad\Rightarrow\quad \frac{x'^2}{8}+\frac{y'^2}{16}=1.$$

5. **Semiejes:** $a^2=16$ (sobre el eje y') y $b^2=8$ (sobre el eje x'): $a=4$ y $b=2\sqrt{2}$. Comprobación: el punto $(2,2)$, sobre la recta $y=x$ (el eje x'), cumple $12+8+12=32$ y está a $2\sqrt{2}$ del origen.

Resultado: centro $C(-2,4)$ y radio $r=2$.

Ejercicio 1B.5.4 · Elipse por su centro y dos puntos

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo C, problema 1.

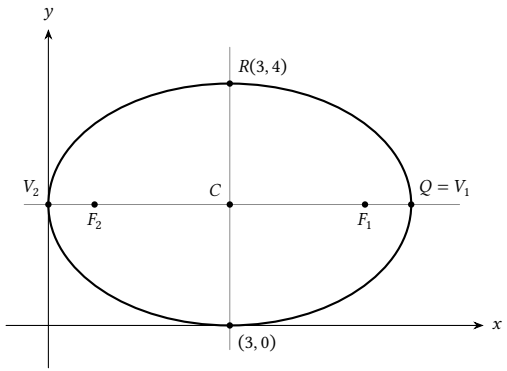
Obtenga la ecuación general de la elipse cuyo eje mayor es paralelo al eje de las abscisas, si los puntos $Q(6,2)$ y $R(3,4)$ pertenecen a ella y su centro es $C(3,2)$. Trace su gráfica.

Resolución.

1. **Forma:** eje mayor horizontal y centro $(3,2)$: $\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$.
2. **Semieje mayor:** $Q(6,2)$ tiene la misma ordenada que el centro, así que está sobre el eje mayor: es un vértice y $a=6-3=3$.
3. **Semieje menor:** $R(3,4)$ tiene la misma abscisa que el centro: es un extremo del eje menor y $b=4-2=2$. Se cumple $a>b$, como pide el enunciado.
4. **Forma ordinaria:** $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$.
5. **Ecuación general:** multiplicando por 36, $4(x-3)^2+9(y-2)^2=36$, es decir,

$$4x^2-24x+36+9y^2-36y+36-36=0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2+9y^2-24x-36y+36=0.$$

6. **Elementos para la gráfica:** vértices $(0,2)$ y $(6,2)$; extremos del eje menor $(3,0)$ y $(3,4)$; $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, focos $\left(3\pm\sqrt{5},\ 2\right)$. La elipse es tangente a los dos ejes coordenados.



Resultado: $4x^2+9y^2-24x-36y+36=0$.

Ejercicio 1B.5.5 · Hipérbola con un parámetro

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 1.

Calcule un valor de m de forma que la longitud del semieje transverso de la hipérbola $x^2+mx-y^2=0$ sea igual a 3.

Resolución.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Geometría Analítica** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sirve a los dos planes de estudio de la Facultad:

- **Plan 2010:** la asignatura *Geometría Analítica*, con el programa aprobado en 2008. Seis temas: introducción, curvas en el plano polar, álgebra vectorial, la recta y el plano en el espacio, curvas en el espacio y superficies.
- **Plan 2016:** no hay una asignatura con ese nombre. La geometría está en *Cálculo y Geometría Analítica*: el tema 1 (secciones cónicas), el tema 6 (álgebra vectorial, con las cónicas en forma paramétrica y las curvas en el espacio) y el tema 7 (recta y plano). Los temas 2 a 5 son de cálculo y están en el cuaderno de *Cálculo Diferencial*. Las curvas polares y las superficies pasaron a *Cálculo Vectorial*.

El cuaderno sigue el orden del programa de 2010 y marca lo que es de un solo plan:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y **qué plan es el tuyo**.
1. Parte A: Introducción a la Geometría Analítica (solo Plan 2010). Parte B: Secciones cónicas (Plan 2016; repaso para el Plan 2010).
2. Curvas en el plano polar (solo Plan 2010).
3. Álgebra vectorial.
4. La recta y el plano en el espacio.
5. Curvas en el espacio.
6. Superficies (solo Plan 2010).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Plan 2016: dos cuadernos para un examen. El final de Cálculo y Geometría Analítica casi siempre tiene seis problemas: los cuatro primeros son de cálculo y están en *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial*; el 5 (vectores) y el 6 (recta y plano) están en las Unidades 3 y 4 de este cuaderno. Cuando trae siete, la geometría son el 6 y el 7 (Apéndice B). Entre los dos cubren el examen completo.

Objetivo de la asignatura (programa).

- *Plan 2010, Geometría Analítica:* «El alumno aplicará los conceptos fundamentales del álgebra vectorial en la solución de problemas de geometría analítica tridimensional y analizará las curvas y superficies cuando sus ecuaciones estén dadas en forma cartesiana, vectorial o paramétrica.»
- *Plan 2016, Cálculo y Geometría Analítica:* «El alumno analizará los conceptos fundamentales del cálculo diferencial de funciones reales de variable real y del álgebra vectorial, y los aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos.»

De dónde salen los ejercicios.

- Plan 2010: los **9 exámenes finales publicados** de Geometría Analítica, de 2012-1 a 2014-2, y tres exámenes parciales de 2005-2 y 2006-2 (de la versión anterior del

programa, con los mismos temas). Ninguno tiene resolución publicada.
- Plan 2016: los problemas de geometría de los **39 exámenes finales** de Cálculo y Geometría Analítica, de 2016-1 a 2026-2, y los de cónicas de sus **12 primeros exámenes parciales**, de 2024-1 a 2026-2. Ninguno tiene resolución publicada.
- **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó; los del Plan 2016 dicen también la asignatura. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora. Ningún examen reciente permite dispositivos electrónicos, y desde 2026 tampoco formulario: las resoluciones usan valores exactos (fracciones, radicales, ángulos notables). Un ángulo que no es notable se deja indicado, como $\arccos\frac{2}{3}$.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen de cada plan, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Marcas de plan. Una unidad de un solo plan lo dice en su título. Dentro de una unidad compartida, lo que es de un solo plan lleva el rótulo SOLO PLAN 2016 o SOLO PLAN 2010: por ejemplo, la rotación de ejes de las cónicas (solo Plan 2016) o el intervalo paramétrico de las curvas en el espacio (solo Plan 2010).

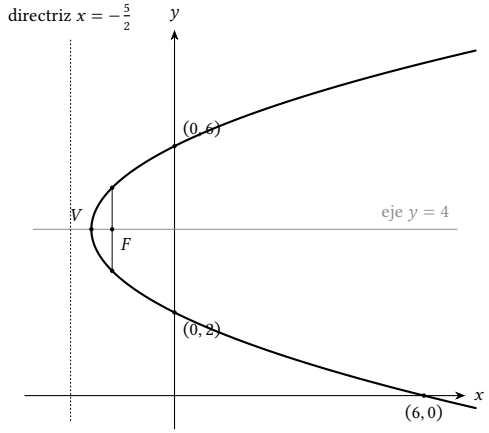
Formato de cada resolución. Planteamiento → pasos numerados → **resultado** en negritas. En los problemas de «posición relativa de dos rectas» y de «identificación de superficies», cada condición se revisa por separado, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 dice qué estudiar según tu plan y propone, para cada plan, una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`



Resultado: $(y-4)^2=2(x+2)$: parábola con $V(-2,4)$, $F\left(-\frac{3}{2},4\right)$ y directriz $x=-\frac{5}{2}$, que abre a la derecha.

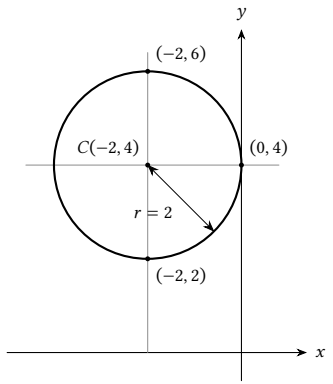
Ejercicio 1B.5.3 · Centro y radio de una circunferencia

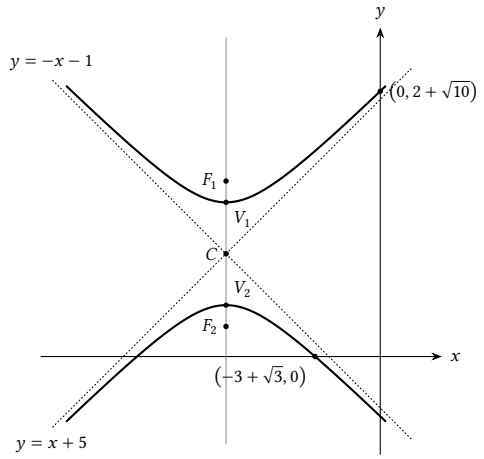
Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo C, problema 2.

Determine las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $(2x+4)^2+(2y-8)^2=16$.

Resolución.

1. **Factorizar el 2 de cada paréntesis:** $2x+4=2(x+2)$ y $2y-8=2(y-4)$, así que
$$4(x+2)^2+4(y-4)^2=16.$$
2. **Forma ordinaria:** dividiendo entre 4, $(x+2)^2+(y-4)^2=4$.
3. **Elementos:** $C(-2,4)$ y $r=2$. Como $|h|=r$, la circunferencia es tangente al eje y en $(0,4)$. (Ecuación general: $x^2+y^2+4x-8y+16=0$.)





Resultado: $(y-2)^2-(x+3)^2=1$: hipérbola equilátera con $C(-3,2)$, $V(-3,3)$ y $(-3,1)$, $F\left(-3,2\pm\sqrt{2}\right)$, asíntotas $y=x+5$, $y=-x-1$.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo B, problema 1 ($x^2-y^2+6x+4y+6=0$ es la misma ecuación multiplicada por -1).

Ejercicio 1B.5.2 · Parábola de eje horizontal

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2026-2, tipo C, problema 1.

Trace la gráfica de la cónica $y^2-2x-8y+12=0$.

Resolución.

1. **Identificación:** solo y aparece al cuadrado: parábola de eje horizontal.
2. **Completar el cuadrado:**

$$y^2-8y+16=2x-12+16 \quad\Rightarrow\quad (y-4)^2=2(x+2).$$

3. **Elementos:** $V(-2,4)$; $4p=2$, $p=\frac{1}{2}>0$: abre a la derecha. Foco $F\left(-\frac{3}{2},4\right)$, directriz $x=-\frac{5}{2}$, eje $y=4$, lado recto 2 con extremos $\left(-\frac{3}{2},3\right)$ y $\left(-\frac{3}{2},5\right)$.
4. **Intersecciones:** con $x=0$, $y^2-8y+12=0$, $y=2$ y $y=6$; con $y=0$, $x=6$.

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 30 minutos, más el repaso exprés de la sección 0.6 si hace falta. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué plan es el tuyo, qué unidades estudiar y en qué orden.
- Si eres de la Generación 2027 o posterior, tu plan es el 2026: usa *Curso de Emergencia, Álgebra y Geometría Analítica.*

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

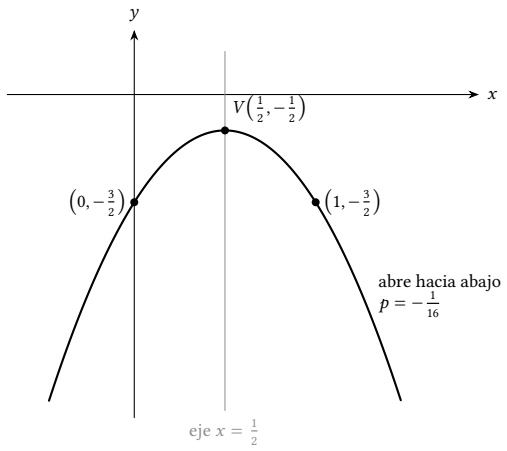
La geometría analítica se enseña con dos planes de estudio, y en cada uno con otra organización:

- **Plan 2010:** es una materia propia, *Geometría Analítica*, de primer semestre. Su examen trae curvas polares, vectores, recta y plano, curvas en el espacio y superficies.
- **Plan 2016:** la materia de primer semestre es *Cálculo y Geometría Analítica.* Sus temas 2 a 5 son de cálculo (cuaderno de Cálculo Diferencial); los temas 1, 6 y 7 son los de este cuaderno: secciones cónicas, álgebra vectorial, y recta y plano. Las curvas polares y las superficies son temas de *Cálculo Vectorial.*
- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera y el nombre de la materia que debes. Si ingresaste antes de 2016, casi seguro es el Plan 2010. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

	Plan 2010: Geometría Analítica	Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica
Estudia	Unidades 2 a 6; la 1B como repaso de las formas ordinarias	Unidades 3 y 4; la 1B si presentas parciales; la 5, breve
No estudies	— (la 1A solo se lee)	Unidades 1A, 2 y 6 (solo Plan 2010)
El examen trae	polar, vectores, recta y plano, curva en el espacio, superficie por generatrices e identificación de cuádricas (6 a 8 problemas, 2 h)	problemas 1 a 4 de cálculo (otro cuaderno), **5 vectores** y **6 recta y plano** (2 h)
Este cuaderno cubre	todo el examen	**2 de los 6 problemas**

Si tu plan es el 2016: lo que falta. Los problemas 1 a 4 del final (funciones, límites y continuidad, derivadas, variación) están en *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial.* Entre los dos cuadernos cubren el examen completo. Las secciones cónicas (Unidad 1, Parte B) salen en el primer examen parcial, no en el final.

5. **Puntos para la gráfica:** con $x=0$, $2y+3=0$ y $y=-\frac{3}{2}$; por simetría respecto al eje, también pasa por $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$. Con $y=0$, $8x^2-8x+3=0$ tiene discriminante $-32<0$: no corta al eje x.



Resultado: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{2}\right)$, parábola con vértice $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ que abre hacia abajo.

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Hipérbola de eje vertical

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo A, problema 1.

Trace la gráfica de la curva $-x^2+y^2-6x-4y-6=0$, indicando sus elementos geométricos característicos.

Resolución.

1. **Identificación:** $A=-1$ y $C=1$ tienen signos contrarios: hipérbola.
2. **Completar cuadrados:**

$$\begin{gathered}\left(y^2-4y\right)-\left(x^2+6x\right)=6\\ \left(y^2-4y+4\right)-\left(x^2+6x+9\right)=6+4-9\\ (y-2)^2-(x+3)^2=1.\end{gathered}$$

3. **Elementos:** el término positivo es el de y: eje transverso vertical. $C(-3,2)$, $a=1$, $b=1$ (equilátera), $c=\sqrt{2}$. Vértices $V_1(-3,3)$, $V_2(-3,1)$; focos $F\left(-3,\ 2\pm\sqrt{2}\right)$; asíntotas $y-2=\pm(x+3)$, es decir, $y=x+5$ y $y=-x-1$; lado recto $\frac{2b^2}{a}=2$; $e=\sqrt{2}$.
4. **Intersecciones:** con $x=0$, $(y-2)^2=10$, $y=2\pm\sqrt{10}$; con $y=0$, $(x+3)^2=3$, $x=-3\pm\sqrt{3}$.

3. Usa cada punto dado para obtener una incógnita: un punto sobre el eje de simetría da directamente un semieje.
4. Desarrolla si se pide la ecuación general.

1B.3.4 Cónica con un parámetro

1. Completa cuadrados dejando el parámetro como letra.
2. Escribe el elemento pedido (semieje, radio, foco) en términos del parámetro.
3. Iguala al valor dado y resuelve; revisa que cada solución dé una cónica del tipo pedido.

1B.3.5 Identificación y rotación de ejes SOLO PLAN 2016

1. Calcula $I = B^2 - 4AC$ y nombra la cónica.
2. Obtén θ de $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$ (si $A = C$, $\theta = 45°$).
3. Sustituye $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$, $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$, o usa las fórmulas de A' y C' y comprueba $A' + C' = A + C$.
4. Completa cuadrados en x', y' si quedan términos lineales y lee los elementos en el sistema girado.

1B.3.6 Forma paramétrica y vectorial

1. Escribe la forma ordinaria.
2. Iguala cada fracción al cuadrado de $\cos t$, $\operatorname{sen} t$, $\sec t$ o $\tan t$ según la tabla de la sección 1B.1.9.
3. Escribe $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$ con el intervalo de t.

1B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Parábola: forma ordinaria y gráfica

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo D, problema 1.

Escriba la ecuación ordinaria de la cónica $8x^2 - 8x + 2y + 3 = 0$ y trace su gráfica.

Resolución.

1. **Identificación:** solo x aparece al cuadrado ($C = 0$): es una parábola de eje vertical.
2. **Completar el cuadrado:**

$$8\left(x^2 - x\right) = -2y - 3$$
$$8\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) = -2y - 3 + 2$$
$$8\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = -2y - 1 = -2\left(y + \tfrac{1}{2}\right).$$

3. **Forma ordinaria:** dividiendo entre 8,

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = -\tfrac{1}{4}\left(y + \tfrac{1}{2}\right).$$

4. **Elementos:** $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $4p = -\frac{1}{4}$, $p = -\frac{1}{16}$: abre hacia abajo. Foco $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{16}\right)$, directriz $y = -\frac{7}{16}$, eje $x = \frac{1}{2}$, lado recto $\frac{1}{4}$.

Las unidades de un solo plan lo dicen en su título, y las secciones de un solo plan llevan el rótulo SOLO PLAN 2016 o SOLO PLAN 2010.

0.2 Cómo es el examen

Según los 9 finales del Plan 2010 (de 2012-1 a 2014-2) y los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (de 2016-1 a 2026-2):

- **Duración:** 2 horas (2.5 horas en los finales del Plan 2010 de 2012).
- **Problemas:** Plan 2010, de 6 a 8 con puntos impresos que suman 100; Plan 2016, 6 (7 en cuatro finales), dos de ellos de geometría.
- **Material:** ninguno. Los exámenes dicen «No se permite el uso de algún dispositivo electrónico» y, desde 2026, tampoco formulario. Los resultados se dejan **exactos**: $\sqrt{14}$, $\frac{3}{\sqrt{26}}$, ang cos $\frac{2}{3}$. No hace falta sacar decimales.
- **Plantilla fija:** los temas salen siempre en el mismo orden.
  - Plan 2010: curva polar (problema 1), álgebra vectorial (a veces dos problemas), recta y plano (a veces dos), curva en el espacio, superficie por generatrices (cono o cilindro) e identificación de cuádricas. Cuando un tema trae dos problemas, los números de los siguientes se recorren: la curva en el espacio es el problema 4, 5 o 6.
  - Plan 2016: (1) a (4) cálculo, (5) vectores, (6) recta y plano. En los finales de 7 problemas, vectores y recta y plano son el 6 y el 7.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Unidad	Tema	Plan 2010 (9 finales)	Plan 2016 (39 finales)
1A	Introducción	0	—
1B	Secciones cónicas	0 (se usan en 2, 5 y 6)	0; en los 12 primeros parciales, 14 problemas
2	Curvas en el plano polar	**9 de 9**	— (Cálculo Vectorial)
3	Álgebra vectorial	**9 de 9** (11 problemas)	**38 de 39**
4	Recta y plano	**9 de 9** (13 problemas)	**39 de 39**
5	Curvas en el espacio	**9 de 9**	1 de 39
6	Superficies	**9 de 9** (16 problemas)	— (Cálculo Vectorial)

Observaciones:

- **Plan 2010:** todas las unidades salen en los 9 finales y ninguna se puede saltar. La Unidad 6 vale dos problemas (un tercio del examen): una superficie por generatrices y la identificación de tres o cuatro cuádricas.
- **Plan 2016:** las Unidades 3 y 4 son los problemas 5 y 6 en 34 de los 39 finales, un tercio del examen. En los cuatro finales de siete problemas (1er final 2017-1 y 2017-2, tipo A; 1er final 2018-2, tipo A; 2º final 2017-2) son el 6 y el 7, y en el 2º final 2016-1 el problema 5 es una curva en el espacio (Unidad 5). Lo que más sale:

- vectores: área de un paralelogramo o un triángulo, componente escalar o vectorial, coordenadas de un punto en una figura y volumen con el producto mixto;
- recta y plano: plano que contiene dos rectas o una recta y un punto, distancias de un punto a un plano o a una recta, rectas y planos perpendiculares, ángulos e intersecciones.

- **Nunca se evalúan:** la historia y las geometrías no euclidianas (Unidad 1A), las superficies regladas o de revolución por nombre y las ecuaciones paramétricas de las cuádricas fuera de los conos y cilindros.

0.4 Orden de estudio

El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar por peso y por dependencia: la Unidad 3 (vectores) se usa en todas las demás; la recta y el plano, las curvas en el espacio y las superficies por generatrices son vectores aplicados. En el Plan 2010, la Unidad 6 va antes que la 5 porque vale el doble.

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	Unidad 0 y Unidad 3	Unidad 0 y Unidad 3
2	Unidad 4	Unidad 4
3	Unidad 1B (formas ordinarias) y Unidad 6	Unidad 1B (si presentas parciales) y Unidad 5, breve
4	Unidades 5 y 2	Cuaderno de Cálculo Diferencial
5	Simulacros del Plan 2010 (Apéndice B)	Simulacro completo: problemas 1 a 4 del otro cuaderno y 5 y 6 de este (Apéndice B)

Ruta de 2 semanas.

- **Plan 2010.** Primera semana: Unidades 3 y 4 y la identificación de cuádricas (Unidad 6). Segunda semana: superficies por generatrices (Unidad 6), Unidades 5 y 2 y un simulacro.
- **Plan 2016.** Las Unidades 3 y 4 van en la primera mitad de la ruta corta del cuaderno de Cálculo Diferencial. Para un final o un extraordinario, salta las Unidades 1B y 5.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad de tu plan completa:

1. la Unidad 1A y las superficies de revolución y regladas (Unidad 6);
2. las cónicas con rotación de ejes (Unidad 1B), salvo que presentes el primer parcial del Plan 2016;
3. las cónicas en coordenadas polares (Unidad 2), que salieron una sola vez.

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema; en el Plan 2010, un poco más para los dos de superficies.

1B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
una ecuación general sin término xy y «forma ordinaria», «identifica», «traza la gráfica»	completar cuadrados, nombrar la cónica y graficar	1B.3.1, 1B.3.2
«indicando sus elementos»	centro, vértices, focos, asíntotas, directriz	1B.3.2
«centro en…», «pasa por…», «radio…»	construir la ecuación	1B.3.3
un coeficiente literal (m, k) y una longitud dada	ecuación para el parámetro	1B.3.4
SOLO PLAN 2016 término xy, «semieje» de una cónica girada	indicador y rotación	1B.3.5
«forma paramétrica», «forma vectorial»	paramétricas de la cónica	1B.3.6

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 De la ecuación general a la forma ordinaria

1. Agrupa los términos en x y los términos en y; pasa la constante al segundo miembro.
2. Factoriza el coeficiente del cuadrado de cada grupo: $8x^2 - 8x = 8\left(x^2 - x\right)$, $-x^2 - 6x = -\left(x^2 + 6x\right)$.
3. Completa el cuadrado dentro de cada paréntesis sumando $\left(\frac{\text{coeficiente de } x}{2}\right)^2$, y suma al segundo miembro lo mismo *multiplicado por el factor de fuera.*
4. Divide entre el segundo miembro para que quede 1 (elipse, hipérbola) o despeja el término lineal (parábola: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$).
5. Comprueba desarrollando la forma ordinaria: debe dar la ecuación general (o un múltiplo de ella).

1B.3.2 Elementos y gráfica

1. Nombra la cónica y la dirección de su eje (focal, mayor o transverso).
2. Lee (h, k) con su signo: $(x+3)^2$ da $h = -3$.
3. Calcula a, b, c (o p) y escribe los elementos: vértices, focos, asíntotas o directriz, lado recto.
4. Para graficar: marca el centro o vértice, los vértices y extremos del lado recto o eje menor; en la hipérbola dibuja primero el rectángulo de lados $2a$ y $2b$ y sus diagonales (las asíntotas).
5. Si es rápido, agrega las intersecciones con los ejes (haz $x = 0$ o $y = 0$ en la ecuación general).

1B.3.3 Cónica dada por condiciones

1. Elige la forma ordinaria que corresponde a los datos (circunferencia; elipse con eje mayor horizontal o vertical, etc.).
2. Sustituye el centro o vértice dado.

1B.1.8 Rotación de ejes SOLO PLAN 2016

SOLO PLAN 2016 El término Bxy indica que los ejes de la cónica están girados. Si se giran los ejes coordenados un ángulo θ, las coordenadas viejas (x, y) y las nuevas (x', y') de un mismo punto cumplen

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta, \qquad y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta.$$

El término $x'y'$ desaparece si se elige

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}, \qquad 0^\circ < \theta < 90^\circ;$$

en particular, si $A = C$, $\theta = 45^\circ$. Los coeficientes nuevos son

$$A' = A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta,$$
$$C' = A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta,$$

con $A' + C' = A + C$ como comprobación, $D' = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta$, $E' = -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta$ y $F' = F$. Por ejemplo, $2xy = 1$ tiene $A = C = 0$, así que $\theta = 45^\circ$, $A' = 1$, $C' = -1$ y queda $x'^2 - y'^2 = 1$: una hipérbola equilátera con vértices sobre la recta $y = x$. Véase la figura del ejercicio 1B.5.6.

1B.1.9 Forma paramétrica y vectorial

Con las identidades $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ y $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, cada forma ordinaria se escribe con un parámetro:

Forma ordinaria	Paramétricas
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$x = h + r\cos t,\ y = k + r\operatorname{sen} t$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$x = h + a\cos t,\ y = k + b\operatorname{sen} t$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$x = h + a\sec t,\ y = k + b\tan t$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$x = h + b\tan t,\ y = k + a\sec t$
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$x = h + \frac{t^2}{4p},\ y = k + t$

En la circunferencia y la elipse, $t \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez; en la hipérbola, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da la rama de la derecha (o la de arriba) y $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la otra. La **forma vectorial** junta las dos paramétricas en un vector de posición: la elipse del ejercicio 1B.5.4 es

$$\vec{r}(t) = (3 + 3\cos t)\,\hat{\imath} + (2 + 2\operatorname{sen} t)\,\hat{\jmath}, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

El camino inverso, eliminar el parámetro con esas identidades, es el tema de la Unidad 5, donde la cónica vive en un plano paralelo a uno coordenado.

2. Empieza por lo mecánico: los productos punto, cruz y mixto, las ecuaciones de planos y la identificación de cuádricas. Deja para después el bosquejo de la curva polar y la superficie por generatrices, que piden más planteamiento.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: qué vector es normal, qué punto está en la recta, qué parámetro se elimina.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.
5. Comprueba al final: sustituye los puntos dados en la ecuación del plano o de la recta, revisa que el producto punto de dos vectores perpendiculares dé 0, y que la ecuación cartesiana de una curva o superficie se cumpla con un punto de las paramétricas.

0.6 Repaso exprés

Cuatro herramientas que se usan en todo el cuaderno. El Plan 2010 ve los determinantes en Álgebra, el mismo semestre: aquí basta saber calcularlos.

Determinantes de 2×2 y de 3×3.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla por el primer renglón con signos $+\ -\ +$. Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4-2) - 2(12-0) + 0 = -6 - 24 = -30.$$

Propiedades útiles: si dos renglones son iguales o proporcionales, el determinante vale 0; intercambiar dos renglones cambia el signo. El producto cruz (Unidad 3) es un determinante con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en el primer renglón, y el producto mixto es el determinante de las componentes de los tres vectores.

Completar cuadrados. Para $ax^2 + bx$ con $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

Ejemplo: $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$; $4y^2 + 8y = 4\left[(y+1)^2 - 1\right] = 4(y+1)^2 - 4$. Es el paso que lleva una cónica (Unidad 1B) o una cuádrica (Unidad 6) a su forma ordinaria: se completa el cuadrado en cada variable por separado y lo que sobra se pasa al otro lado.

Valores exactos.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Para otro cuadrante se usa el ángulo de referencia y el signo del cuadrante: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En las curvas polares (Unidad 2) los ángulos van en grados.

Identidades para eliminar un parámetro.

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \qquad \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \qquad \csc^2 t - \cot^2 t = 1,$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1, \qquad \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t.$$

Si $x = h + a\cos t$ y $y = k + b\operatorname{sen} t$, entonces $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (una elipse); con sec y tan sale una hipérbola (Unidades 1B y 5).

0.7 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

El denominador mayor es a^2 e indica la dirección del eje mayor. Los elementos son:

- $c^2 = a^2 - b^2$ (distancia del centro a cada foco);
- vértices a distancia a del centro sobre el eje mayor; extremos del eje menor (covértices) a distancia b;
- focos a distancia c sobre el eje mayor;
- lado recto $\frac{2b^2}{a}$; excentricidad $e = \frac{c}{a} < 1$.

Si $a = b$, es una circunferencia. Véase la figura del ejercicio 1B.5.4.

1B.1.5 Hipérbola

Es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias (en valor absoluto) a dos focos es constante, $2a$. El término positivo indica la dirección del **eje transverso**, el que contiene a los vértices:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{(transverso horizontal)},$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{(transverso vertical)}.$$

Aquí a es el **semieje transverso** y b el **semieje conjugado**; a puede ser menor que b. Los elementos son:

- $c^2 = a^2 + b^2$;
- vértices a distancia a del centro y focos a distancia c, sobre el eje transverso;
- asíntotas $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$ (transverso horizontal) o $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$ (transverso vertical); se obtienen igualando a cero el primer miembro de la forma ordinaria;
- lado recto $\frac{2b^2}{a}$; excentricidad $e = \frac{c}{a} > 1$.

Si $a = b$, la hipérbola es **equilátera** y sus asíntotas son perpendiculares (pendientes ± 1). La **hipérbola conjugada** de $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ es $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$: tiene las mismas asíntotas. Véase la figura del ejercicio 1B.5.1.

1B.1.6 Casos degenerados

Si al completar cuadrados el segundo miembro resulta 0 o de signo contrario al esperado, la ecuación no es una cónica propia: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = 0$ o $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ es un punto y con -1 no tiene puntos reales; $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ son dos rectas que se cortan; $(x-h)^2 = c$ son dos rectas paralelas ($c > 0$), una recta ($c = 0$) o nada ($c < 0$).

1B.1.7 Indicador SOLO PLAN 2016

SOLO PLAN 2016 Cuando $B \neq 0$, el tipo de cónica se lee del **indicador** (o discriminante)

$$I = B^2 - 4AC: \qquad I < 0 \text{ elipse}, \qquad I = 0 \text{ parábola}, \qquad I > 0 \text{ hipérbola},$$

salvo casos degenerados. Con $B = 0$ se reduce a la tabla de la sección 1B.1.1: $I = -4AC$. El indicador no cambia al girar los ejes.

Coeficientes (con $B = 0$)	Cónica
$A = C \neq 0$	circunferencia
A o C igual a 0 (no los dos)	parábola
A y C del mismo signo, $A \neq C$	elipse
A y C de signos contrarios	hipérbola

Para conocer sus elementos se pasa a la **forma ordinaria** completando cuadrados (procedimiento 1B.3.1). En todo lo que sigue, (h, k) es el centro (o el vértice, en la parábola).

1B.1.2 Circunferencia

Es el conjunto de puntos a distancia r del centro $C(h, k)$:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Desarrollada, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $h = -\frac{D}{2}$, $k = -\frac{E}{2}$ y $r^2 = h^2 + k^2 - F$. Véase la figura del ejercicio 1B.5.3.

1B.1.3 Parábola

Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo, el **foco** F, y de una recta fija, la **directriz**. El **vértice** $V(h, k)$ está a la mitad, a distancia $|p|$ de cada uno.

	Eje horizontal	Eje vertical
Ecuación	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Abre	a la derecha si $p > 0$, a la izquierda si $p < 0$	hacia arriba si $p > 0$, hacia abajo si $p < 0$
Foco	$(h + p,\ k)$	$(h,\ k + p)$
Directriz	$x = h - p$	$y = k - p$
Eje	$y = k$	$x = h$

El **lado recto** es la cuerda que pasa por el foco perpendicular al eje; mide $|4p|$ y sus extremos están a $|2p|$ del foco. Ayuda a trazar la gráfica con su abertura correcta. Excentricidad: $e = 1$. Véanse las figuras del ejemplo 1B.4 y del ejercicio 1B.5.2.

1B.1.4 Elipse

Es el conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos focos es constante, $2a$. Con centro $C(h, k)$, semieje mayor a y semieje menor b ($a \geq b > 0$):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{(eje mayor horizontal)},$$

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{(eje mayor vertical)}.$$

Unidad 1 · Parte A · Introducción a la Geometría Analítica (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno identificará los antecedentes históricos y principios de la geometría analítica: Geometría Euclidiana y geometrías no Euclidianas.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 la Unidad 1 es «Secciones cónicas»: salta a la Parte B.
- **Frecuencia:** no aparece en ninguno de los 9 finales del Plan 2010.
- **Tiempo:** 15 minutos de lectura. No tiene ejercicios, pero la sección 1A.2 (coordenadas en el espacio) se usa en todo el cuaderno.

1A.1 Breve reseña histórica

- **La geometría euclidiana.** Hacia el año 300 a. C., Euclides reunió en los *Elementos* la geometría de su tiempo: a partir de unas cuantas definiciones y cinco postulados dedujo, con demostraciones, todos los teoremas sobre rectas, triángulos y circunferencias. El quinto postulado (*por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela*, en la forma de Playfair) parecía menos evidente que los otros cuatro, y durante dos mil años se intentó demostrarlo a partir de ellos.
- **Las cónicas.** Apolonio de Perga (siglo III a. C.) estudió la elipse, la parábola y la hipérbola como cortes de un cono por un plano y les dio sus nombres (Unidad 1B).
- **La geometría analítica.** En el siglo XVII, Descartes y Fermat, cada uno por su lado, asociaron a cada punto del plano un par de números y a cada curva una ecuación. Con eso, un problema de geometría se resuelve con álgebra, y una ecuación se *ve* como curva. Es la idea de todo este cuaderno: la recta es una ecuación de primer grado; las cónicas, ecuaciones de segundo grado.
- **Los vectores.** En el siglo XIX, Hamilton, Grassmann y, al final, Gibbs y Heaviside dieron el álgebra de vectores con los productos escalar y vectorial (Unidad 3), que hoy se usa en toda la física y la ingeniería.
- **Las geometrías no euclidianas.** Hacia 1830, Lobachevski y Bolyai mostraron que, si se cambia el quinto postulado por «por un punto exterior pasan infinitas paralelas», se obtiene una geometría tan coherente como la de Euclides: la *hiperbólica*, donde los ángulos de un triángulo suman menos de 180°. Riemann construyó después la *elíptica* (no hay paralelas; los ángulos suman más de 180°), cuyo modelo es la superficie de una esfera con los círculos máximos como «rectas». Gauss había llegado a las mismas ideas sin publicarlas. Estas geometrías son la base de la relatividad general.

1A.2 Coordenadas en el plano y en el espacio

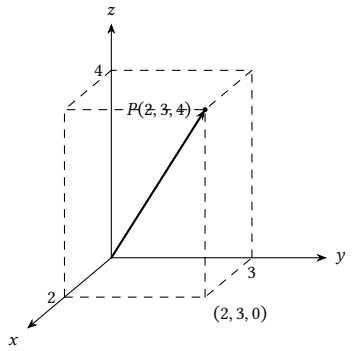
En el plano. Dos rectas numéricas perpendiculares (los ejes x y y) que se cortan en el origen O. Cada punto P tiene un par ordenado (x, y) y los ejes dividen el plano en cuatro

cuadrantes. La distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

En el espacio. Se agrega un tercer eje, z, perpendicular a los otros dos. El sistema es **derecho**: si los dedos de la mano derecha van del eje x hacia el eje y, el pulgar apunta hacia el eje z positivo. Cada punto tiene una terna (x, y, z). Los tres **planos coordenados** (XY: $z = 0$; XZ: $y = 0$; YZ: $x = 0$) dividen el espacio en ocho **octantes**; el primero es el de $x, y, z > 0$. La distancia es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



En las figuras de este cuaderno el eje x sale hacia el lector (abajo a la izquierda), el y va a la derecha y el z hacia arriba. Para ubicar $P(2, 3, 4)$: se avanza 2 en x, 3 en y y se sube 4.

Simetría de puntos. El simétrico de $P(x, y, z)$:

Respecto a…	Simétrico
el origen	$(-x, -y, -z)$
el eje x	$(x, -y, -z)$
el eje y	$(-x, y, -z)$
el eje z	$(-x, -y, z)$
el plano XY	$(x, y, -z)$
el plano XZ	$(x, -y, z)$
el plano YZ	$(-x, y, z)$

Regla: respecto a un eje, se conserva la coordenada de ese eje y las otras dos cambian de signo; respecto a un plano, solo cambia la coordenada que no aparece en su nombre. El simétrico de P respecto a un punto M es $P' = 2M - P$ (M es el punto medio de PP'); respecto a una recta o a un plano cualquiera se obtiene en la Unidad 4.

Unidad 1 · Parte B · Secciones cónicas

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica, tema 1). El alumno reafirmará los conocimientos de las secciones cónicas.

Plan 2010 (Geometría Analítica). No tiene este tema; las formas ordinarias se usan sin enseñarse en las Unidades 2, 5 y 6.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** en el Plan 2010 esta parte es **repaso**: no hay problemas de cónicas en sus finales, pero la cónica en polares (Unidad 2), las curvas en el espacio (Unidad 5) y las trazas de las cuádricas (Unidad 6) piden reconocer una forma ordinaria. En el Plan 2016 se evalúa **solo en el primer parcial**.
- **Frecuencia:** en el Plan 2016 aparece en los 12 primeros parciales revisados (2024-1 a 2026-2), con 14 problemas: forma ordinaria y gráfica a partir de la ecuación general en 9 (7 hipérbolas y 2 parábolas; dos pares de exámenes traen la misma ecuación), circunferencia en 2, elipse dada por su centro y dos puntos en 1, hipérbola con un parámetro en 1 y rotación de ejes en 1. No aparece en ninguno de los 39 finales: los 4 problemas de optimización con una figura inscrita en una cónica son de Cálculo Diferencial y están en ese cuaderno.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas en el Plan 2016; una hora de lectura en el Plan 2010.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 1B.1.1 a 1B.1.5 (30 min): las cuatro formas ordinarias y sus elementos.
  2. Aprende los procedimientos 1B.3.1 y 1B.3.2: completar cuadrados y graficar con elementos.
  3. Sigue el ejemplo 1B.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 1B.5.1, 1B.5.2 y 1B.5.4 con cronómetro (12 min cada uno, con gráfica).
  5. Plan 2016: agrega las secciones 1B.1.7 y 1B.1.8, el ejercicio 1B.5.6 y el propuesto 1B.6.5. Plan 2010: agrega la sección 1B.1.9 (forma paramétrica), que se usa en la Unidad 5.

1B.1 Conceptos y expresiones

1B.1.1 Ecuación general y clasificación

Una *sección cónica* es la curva que resulta de cortar un cono circular doble con un plano que no pasa por su vértice: según la inclinación del plano se obtiene una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola. Toda cónica tiene una ecuación de segundo grado, la **ecuación general**

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si $B = 0$, los ejes de la cónica son paralelos a los ejes coordenados y el tipo se lee de A y C:

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«de módulo 5 y paralelo a», «cosenos directores», «ángulos directores»	un vector con módulo y dirección	3.3.1
«coseno del ángulo», «ángulo entre», «ángulo interior», «ángulo A»	coseno o ángulo	3.3.2
«componente escalar», «componente vectorial», «en la dirección de», «comp esc», «comp vect»	proyección	3.3.3
«unitario perpendicular tanto a … como a», «paralelo al plano XZ y a 45°»	un vector por condiciones	3.3.4
«área del paralelogramo», «del triángulo», «diagonales», «cuadrilátero»	área	3.3.5
«volumen del paralelepípedo», «aristas concurrentes», «tetraedro», «producto mixto»	volumen	3.3.6
una figura con puntos sin coordenadas: «coordenadas del punto», «cuarto vértice», «punto medio»	coordenadas	3.3.7
«el valor de b», «el conjunto de valores», «tal que su área sea 6»	parámetro	3.3.8

3.3 Procedimientos

3.3.1 Vector con módulo y dirección dados

1. **Paralelo a $\vec{v}$ con módulo r:** $\vec{a} = \pm r\,\hat{v} = \pm\frac{r}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Si el enunciado no da el sentido, hay dos respuestas.
2. **Con cosenos directores:** completa el que falta con $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (hay dos signos si no se especifica) y escribe $\vec{a} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
3. **Con ángulos directores:** $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$. Si el que falta da $\cos^2 = 0$, el ángulo es 90°.
4. Comprueba el módulo al final.

3.3.2 Ángulo entre vectores y ángulos de un triángulo

1. Escribe los dos vectores que *salen* del vértice del ángulo pedido (para el ángulo A del triángulo ABC: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$).
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ y sustituye en $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.
3. Racionaliza; si el coseno es notable, da el ángulo en grados; si no, $\theta = \text{ang cos}(\ldots)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, serie de ejercicios de secciones cónicas, ejercicio 7.

Sea la elipse $x^2+4y^2-4x=0$. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la circunferencia con centro en $C(2,2)$ que contiene al centro de la elipse.

Resultado: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, serie de ejercicios de secciones cónicas, ejercicio 8.

SOLO PLAN 2016 Identifique la curva $x^2+xy+y^2=4$ y obtenga sus semiejes.

Resultado: Elipse; en ejes girados 45°, $\frac{x'^2}{8/3}+\frac{y'^2}{8}=1$: semieje mayor $2\sqrt{2}$ (sobre $y=-x$) y semieje menor $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (sobre $y=x$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 134.

1B.7 Errores frecuentes

1. **Completar el cuadrado sin el factor de fuera.** En $8\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$ se agregó $8\cdot\frac{1}{4}=2$, no $\frac{1}{4}$; al segundo miembro va 2.
2. **Signo del centro.** $(x+3)^2$ da $h=-3$, no 3.
3. **Confundir a y b en la elipse.** a va con el denominador mayor, sin importar si está bajo x o bajo y.
4. **Eje de la hipérbola por el tamaño de los denominadores.** En la hipérbola lo decide el *signo*: el término positivo da el eje transverso.
5. c **con la fórmula equivocada.** Elipse: $c^2=a^2-b^2$; hipérbola: $c^2=a^2+b^2$.
6. **Parábola sin despejar** $4p$**.** De $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{2}\right)$ sale $4p=-\frac{1}{4}$, no $p=-\frac{1}{4}$; el signo de p dice hacia dónde abre.
7. **Asíntotas con la pendiente invertida.** Con eje transverso vertical la pendiente es $\pm\frac{a}{b}$, no $\pm\frac{b}{a}$.
8. **Rotación con el ángulo en lugar de su doble.** $\cot 2\theta=0$ da $2\theta=90^\circ$ y $\theta=45^\circ$. Y el semieje se lee de la forma girada, no de la ecuación original.
9. **No revisar el caso degenerado.** Si al completar cuadrados el segundo miembro es 0 o negativo, la ecuación puede ser un punto, dos rectas o ningún punto.

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- General: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Con $B=0$: $A=C$ circunferencia, $AC=0$ parábola, $AC>0$ elipse, $AC<0$ hipérbola.
- Circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.
- Parábola: $(y-k)^2=4p(x-h)$ o $(x-h)^2=4p(y-k)$; foco a p del vértice, directriz a $-p$, lado recto $|4p|$.

- Elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (a con el denominador mayor), $c^2=a^2-b^2$, $e=\frac{c}{a}<1$.
- Hipérbola: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (eje con el término positivo), $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, $e=\frac{c}{a}>1$.
- Lado recto de elipse e hipérbola: $\frac{2b^2}{a}$.
- SOLO PLAN 2016 $I=B^2-4AC$: <0 elipse, $=0$ parábola, >0 hipérbola.
- SOLO PLAN 2016 $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}$; $x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta$, $y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$; $A'+C'=A+C$.
- Paramétricas: elipse $x=h+a\cos t$, $y=k+b\operatorname{sen}t$; hipérbola $x=h+a\sec t$, $y=k+b\tan t$.

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Nombra la cónica por los coeficientes antes de operar (o con el indicador, si hay término xy).
2. Completa cuadrados con el factor de fuera y comprueba desarrollando.
3. Escribe la forma ordinaria en un renglón aparte: es lo que más puntos vale.
4. Lista los elementos: centro o vértice, a, b, c o p, vértices, focos, asíntotas o directriz.
5. Dibuja con los elementos marcados y al menos dos intersecciones con los ejes.

Si la gráfica no sale, la forma ordinaria y la lista de elementos ya son la mayor parte del problema.

3.1.8 Producto mixto, volumen y coplanaridad

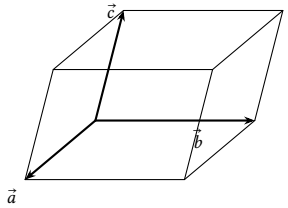
El *producto mixto* de $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ es un número que se calcula con un determinante:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

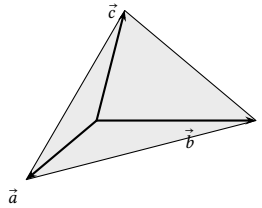
Algunos enunciados lo escriben $[\,\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\,]$. Una permutación cíclica $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\to\vec{b},\vec{c},\vec{a})$ no lo cambia; intercambiar dos vectores le cambia el signo. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (área de la base $|\vec{b}\times\vec{c}|$ por la altura):

$$V_{\text{paralelepípedo}}=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|,\qquad V_{\text{tetraedro}}=\tfrac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|.$$

Para un tetraedro de vértices A, B, C, D se usan las tres aristas que salen de un vértice: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Tres vectores son **coplanares** si y solo si su producto mixto es cero (el paralelepípedo es plano); cuatro puntos están en un mismo plano si las tres aristas que salen de uno de ellos son coplanares.



$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$



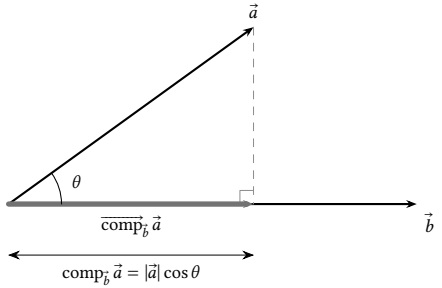
$V=\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

3.1.9 Coordenadas de puntos en una figura

Los problemas de «coordenadas de un punto» se resuelven sumando vectores a puntos conocidos ($B=A+\overrightarrow{AB}$). Las relaciones que más se usan:

- **Paralelogramo:** los lados opuestos son el mismo vector. Si los vértices en orden son A, B, C, D, entonces $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ y $D=A+C-B$ (el vértice que falta es la suma de sus dos vecinos menos el opuesto). Las diagonales se cortan en su punto medio común.
- **Rectángulo y cuadrado:** además, lados consecutivos perpendiculares ($\vec{a}\cdot\vec{b}=0$) y, en el cuadrado, del mismo módulo.
- **Segmento con dirección y longitud dadas:** $\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con $\hat{u}$ el unitario de la dirección y el sentido que indique la figura.
- **Pie de la perpendicular** desde B a la recta AC: $Q=A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$.
- **Simétrico** de P respecto a un punto M: $P'=2M-P$.

Se lee la figura con cuidado: el orden de los vértices en el nombre ($ABCD$, $ADCB$) y el sentido de cada flecha deciden los signos.



3.1.7 Producto vectorial, paralelismo y área

El *producto vectorial* (o producto cruz) es el vector

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \big(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\big).$$

(Los determinantes de 3×3 se repasan en la Unidad 0.) Propiedades:

- $\vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$; su sentido sigue la regla de la mano derecha ($\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$).
- $\vec{b}\times\vec{a} = -\,\vec{a}\times\vec{b}$ (no es conmutativo) y $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.
- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\operatorname{sen}\theta$.
- **Paralelismo:** $\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

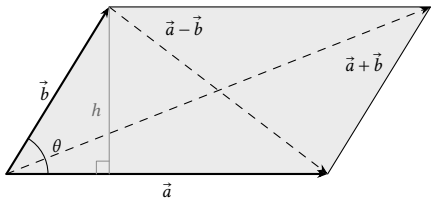
Áreas. El paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene base $|\vec{a}|$ y altura $|\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$:

$$A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{a}\times\vec{b}|, \qquad A_{\text{triángulo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Si se dan las **diagonales** $\vec{d}_1 = \vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{d}_2 = \vec{a}-\vec{b}$, entonces $\vec{d}_1\times\vec{d}_2 = -2\,\vec{a}\times\vec{b}$ y

$$A_{\text{paralelogramo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|, \qquad \vec{a} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1+\vec{d}_2), \quad \vec{b} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1-\vec{d}_2).$$

Para un triángulo de vértices A, B, C se usan dos lados que salen del mismo vértice: $A = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. Un cuadrilátero se parte en dos triángulos con una diagonal.



$A = |\vec{a}\times\vec{b}|$
$h = |\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$

Unidad 2 · Curvas en el plano polar (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno obtendrá ecuaciones en forma polar de curvas en el plano y determinará las características de éstas a partir de su ecuación en forma polar.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, un problema en cada uno de los 9 finales revisados, y siempre es el problema 1. Curvas: cardioide 3, lemniscata 3, circunferencia 3, rosa 2, caracol 1 y cónica en polares 1 (varios problemas traen dos o tres curvas). Lo que piden: bosquejo 7, intersecciones con el eje polar o con la recta a 90° 6, simetría 5, ecuación cartesiana 3, tres puntos o puntos más alejados del polo 3 y área de un triángulo formado con los vértices de una cónica 1.
- **Plan 2016:** en el Plan 2016 este tema está en Cálculo Vectorial.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad; en el examen, de 15 a 20 minutos para el problema.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 2.1.2, 2.1.3 y el catálogo 2.1.5 a 2.1.9 (30 min): basta reconocer cada ecuación y saber su forma.
  2. Aprende los procedimientos 2.3.4 (simetría) y 2.3.5 (intersecciones con los ejes): salen en 5 y 6 de los 9 finales.
  3. Sigue el ejemplo 2.4 tapando la resolución: es el catálogo completo en un problema.
  4. Resuelve los ejercicios 2.5.1 a 2.5.4 con cronómetro (15 min cada uno, con bosquejo) y el 2.5.5 (cónica en polares) en 20 min.
  5. Usa los propuestos 2.6.1 y 2.6.2 como simulacro del problema 1.

2.1 Conceptos y expresiones

2.1.1 Coordenadas polares

Se fija un punto O, el *polo*, y una semirrecta que parte de él, el *eje polar* (la parte positiva del eje x). Un punto P se describe con el par (r,θ): θ es el ángulo que va del eje polar al segmento OP, positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y r es la distancia dirigida de O a P. En este libro θ se escribe en grados, como en los exámenes.

- Si $r>0$, el punto está sobre la semirrecta de ángulo θ; si $r<0$, sobre la semirrecta opuesta, de ángulo $\theta+180^\circ$, a distancia $|r|$.
- El polo es $(0,\theta)$ para *cualquier* θ.
- La *recta a* 90° es la recta perpendicular al eje polar por el polo (el eje y).

Cuando un enunciado pide las intersecciones «con el eje polar» se usa la recta completa que lo contiene ($\theta=0^\circ$ y $\theta=180^\circ$); «con la recta a 90°», los ángulos $\theta=90^\circ$ y $\theta=270^\circ$.

2.1.2 Varias representaciones de un punto

A diferencia de las coordenadas cartesianas, un mismo punto tiene infinitas parejas polares:

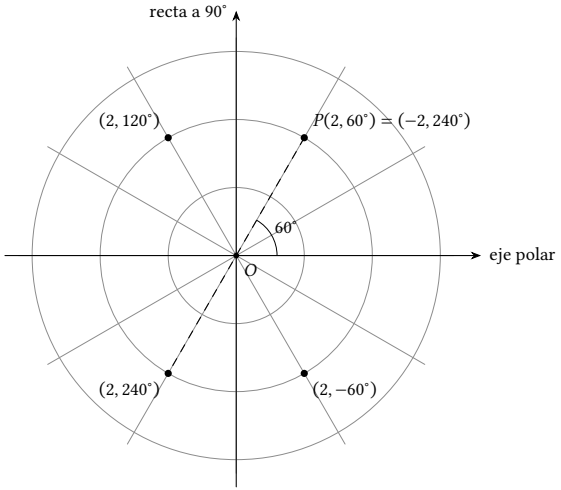
$$(r,\theta) = (r,\theta + 360^\circ k) = (-r,\theta + 180^\circ + 360^\circ k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Por ejemplo, $(2, 60^\circ) = (2, 420^\circ) = (2, -300^\circ) = (-2, 240^\circ) = (-2, -120^\circ)$. Por eso un punto puede estar en una curva aunque la pareja con la que se escribió no cumpla la ecuación: basta que *alguna* de sus representaciones la cumpla. «Dar unas coordenadas polares» de un punto es dar una cualquiera de ellas.

2.1.3 Simetría de puntos

El simétrico de $P(r,\theta)$ es:

- respecto al eje polar: $(r,-\theta)$, o también $(-r, 180^\circ - \theta)$;
- respecto a la recta a 90°: $(r, 180^\circ - \theta)$, o también $(-r,-\theta)$;
- respecto al polo: $(r, \theta + 180^\circ)$, o también $(-r,\theta)$.



2.1.4 Conversión entre polares y cartesianas

Con el polo en el origen y el eje polar sobre el eje x positivo:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

- **De polar a cartesiana (un punto):** se aplican las dos primeras. $(4, 120^\circ) \to (4\cos 120^\circ, 4\,\mathrm{sen}\,120^\circ) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.
- **De cartesiana a polar (un punto):** $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y θ con $\tan\theta = \frac{y}{x}$ *en el cuadrante del punto*. Para $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$: $r = 4$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y el punto está en el segundo cuadrante, así que $\theta = 120^\circ$ (no -60°).

3.1.4 Operaciones con vectores

Con $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y un escalar λ:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \qquad |\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|.$$

La suma se dibuja con la regla del paralelogramo: si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ salen del mismo punto, $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son las diagonales. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (no nulos) son **paralelos** si $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ para algún $\lambda \neq 0$: con $\lambda > 0$ tienen el mismo sentido y con $\lambda < 0$, sentido contrario. En componentes, sus coordenadas son proporcionales.

3.1.5 Producto escalar, ángulo y perpendicularidad

El *producto escalar* (o producto punto) es el número

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,$$

donde $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ es el ángulo entre los vectores. Es conmutativo, distributivo sobre la suma y cumple $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$. De ahí:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}, \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

El signo de $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dice si el ángulo es agudo (+), recto (0) u obtuso (−). Un ángulo no notable se deja como $\theta = \mathrm{ang}\cos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. El **ángulo interior** de un triángulo o paralelogramo en el vértice A se calcula con los dos vectores que *salen* de A.

3.1.6 Componente escalar y componente vectorial

La *componente escalar* de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es la longitud con signo de la sombra de $\vec{a}$ sobre la dirección de $\vec{b}$; la *componente vectorial* es esa sombra como vector (la proyección ortogonal):

$$\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} = \left(\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a}\right)\hat{b}.$$

La componente escalar es negativa si el ángulo es obtuso; la vectorial apunta entonces en sentido contrario a $\vec{b}$. Solo importa la *dirección* de $\vec{b}$: sobre $2\vec{b}$ o $-\vec{b}$ la componente vectorial es la misma. El orden importa: $\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ (se divide entre $|\vec{b}|$) no es $\mathrm{comp}_{\vec{a}}\,\vec{b}$. Sobre un eje: $\overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\hat{\jmath}}\,\vec{a} = (0, a_2, 0)$. Los enunciados también dicen «componente de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$» o escriben «comp esc» y «comp vect».

3.1.2 Segmento dirigido y vector

El *segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ va del punto inicial A al punto final B. Sus componentes son las diferencias de coordenadas, final menos inicial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

Dos segmentos dirigidos con las mismas componentes representan el mismo *vector*, sin importar dónde empiecen. El vector de posición del punto $P(x, y, z)$ es $\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. De aquí salen dos reglas que se usan siempre:

- $B = A + \overrightarrow{AB}$: un punto se obtiene sumando a otro el vector que los une.
- El **punto medio** de AB es $M = \frac{1}{2}(A+B)$, y el punto que divide a AB en la razón $\frac{AP}{AB} = k$ es $P = A + k\,\overrightarrow{AB}$.

3.1.3 Módulo, vector unitario y cosenos directores

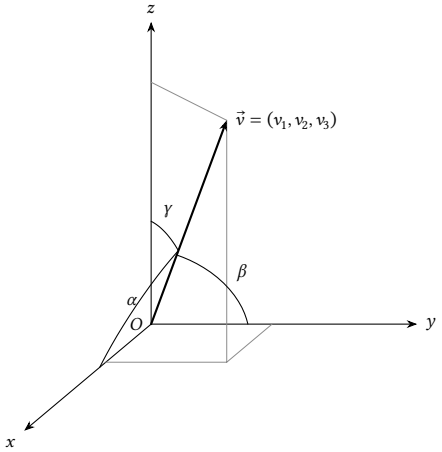
El *módulo* de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es su longitud, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Un vector de módulo 1 es *unitario*; el unitario en la dirección de $\vec{v} \neq \vec{0}$ es

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Los *ángulos directores* α, β, γ son los que forma $\vec{v}$ con los ejes x, y, z (cada uno entre 0° y 180°). Sus cosenos, los *cosenos directores*, son las componentes de $\hat{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Así, un vector de módulo r con cosenos directores conocidos es $\vec{v} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Si se conocen dos cosenos, la identidad da el tercero salvo el signo.

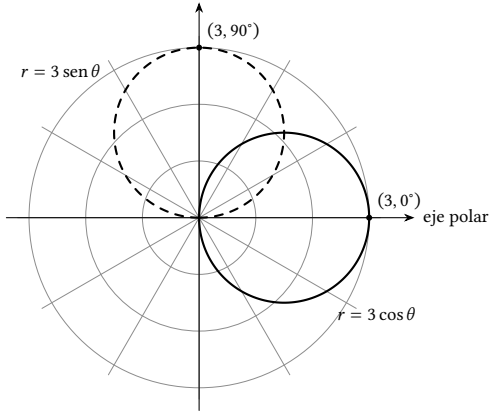


- **De una ecuación polar a cartesiana:** se busca que aparezcan $r\cos\theta$, $r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y r^2; casi siempre se multiplica por r o se eleva al cuadrado. Multiplicar por r solo puede agregar el polo, que se revisa aparte.
- **De una ecuación cartesiana a polar:** se sustituyen $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y se simplifica.

2.1.5 Rectas y circunferencias

- $\theta = \alpha$: recta por el polo con inclinación α.
- $r\cos\theta = a$ ($x = a$) y $r\,\mathrm{sen}\,\theta = b$ ($y = b$): rectas vertical y horizontal.
- $r = a$: circunferencia de centro en el polo y radio $|a|$.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia que pasa por el polo, de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ en cartesianas y radio $\frac{|a|}{2}$, pues $r^2 = ar\cos\theta$ da $x^2 + y^2 = ax$.
- $r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$: circunferencia por el polo de centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ y radio $\frac{|a|}{2}$ ($x^2 + y^2 = ay$).

Con $a < 0$ el centro queda del otro lado: $r = -6\cos\theta$ tiene centro $(-3, 0)$. Las dos circunferencias se recorren completas con $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$.



2.1.6 Cardioides y caracoles

$r = a \pm b\cos\theta$ y $r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $a, b > 0$, son *caracoles* (limazones):

- $a = b$: **cardioide**, con punta (cúspide) en el polo. $r = a(1 + \cos\theta)$ tiene la punta hacia la izquierda y su punto más alejado es $(2a, 0^\circ)$ (figura del ejemplo 2.4).
- $a < b$: caracol **con lazo interior**; pasa por el polo cuando $\cos\theta = \mp\frac{a}{b}$ (o $\mathrm{sen}\,\theta = \mp\frac{a}{b}$).
- $a > b$: caracol sin lazo, que no pasa por el polo.

Con $\cos\theta$ son simétricos respecto al eje polar; con $\mathrm{sen}\,\theta$, respecto a la recta a 90°. El signo $\pm$ decide hacia qué lado se abren: $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ se alarga hacia arriba ($r = a + b$ en 90°).

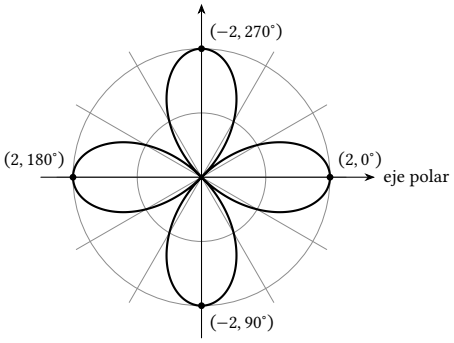
2.1.7 Rosas

$r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$ y $r = a\cos n\theta$ ($n \ge 2$ entero) son **rosas** de pétalos de longitud $|a|$:

- n impar: n pétalos, y la curva se recorre completa con $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$;

- n par: $2n$ pétalos, con $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$.

Los pétalos están separados por ángulos iguales. Con $\cos n\theta$ un pétalo está centrado en el eje polar ($\theta = 0^\circ$); con $\operatorname{sen} n\theta$, el primero está centrado en $\theta = \frac{90^\circ}{n}$. Los extremos de los pétalos son las soluciones de $|\operatorname{sen} n\theta| = 1$ (o $|\cos n\theta| = 1$) y la curva pasa por el polo donde $\operatorname{sen} n\theta = 0$ (o $\cos n\theta = 0$).



2.1.8 Lemniscatas

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$ y $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ son **lemniscatas**: dos lazos que se tocan en el polo, de longitud $|a|$.

- Solo existen para los θ que hacen el lado derecho ≥ 0: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ para $-45^\circ \le \theta \le 45^\circ$ y $135^\circ \le \theta \le 225^\circ$ (lazos sobre el eje polar); $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$, para $45^\circ \le \theta \le 135^\circ$ y $225^\circ \le \theta \le 315^\circ$ (lazos sobre la recta a 90°); $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, en los cuadrantes I y III (lazos sobre la recta a 45°).
- Cada θ válido da dos valores, $r = \pm|a|\sqrt{\ldots}$: un punto en cada lazo.
- Como r aparece al cuadrado, las tres son simétricas respecto al polo.

2.1.9 Cónicas en forma polar

Una cónica con un foco en el polo y excentricidad e tiene ecuación

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta},$$

donde $p > 0$ es la distancia del foco a la directriz: $x = p$ con $+\cos$, $x = -p$ con $-\cos$, $y = p$ con $+\operatorname{sen}$, $y = -p$ con $-\operatorname{sen}$. Es elipse si $e < 1$, parábola si $e = 1$ e hipérbola si $e > 1$. Si el denominador no empieza con 1 ($r = \frac{k}{c + d\operatorname{sen}\theta}$), se divide entre c.

Con $\cos\theta$ el eje focal es el eje polar y los vértices salen de $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$; con $\operatorname{sen}\theta$ el eje focal es la recta a 90° y los vértices salen de $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$. En una hipérbola uno de los dos valores de r es negativo: ese vértice está en la rama que no contiene al foco.

2.1.10 Simetría de una curva

Una curva es simétrica respecto a un eje o al polo si el simétrico de cada uno de sus puntos también está en ella. Las pruebas usuales son sustituciones en la ecuación:

Unidad 3 · Álgebra vectorial

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el álgebra vectorial en la resolución de problemas geométricos.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 6). Dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, el problema 2 de los 9 finales revisados (11 problemas; dos finales traen dos): área de paralelogramo, triángulo o cuadrilátero (a veces por diagonales) en 6, perpendicularidad o paralelismo con parámetro o condición de módulo en 4, componente escalar o vectorial en 3, coordenadas de puntos en 3, cosenos o ángulos directores en 2 y volumen en 1. El primer parcial anterior al programa de 2008 trae 5 problemas más. En el Plan 2016 es el problema 5 de 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (el 6 en los de siete problemas): área en 18, componente escalar o vectorial en 14, coordenadas de un punto en una figura en 12, volumen con el producto mixto en 10, ángulo o coseno en 8, vector unitario perpendicular o con ángulo dado en 5 y cosenos directores en 2 (un problema suele pedir dos o tres cosas). Es la unidad que más pesa en el Plan 2016 y la base de las Unidades 4, 5 y 6.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 3.1.5 a 3.1.8 (30 min): producto escalar, componentes, producto vectorial y producto mixto.
  2. Aprende los procedimientos 3.3.3 (componentes), 3.3.5 (áreas) y 3.3.6 (volúmenes): juntos cubren casi todos los problemas.
  3. Sigue el ejemplo de la sección 3.4 tapando la resolución (10 min).
  4. Resuelve con cronómetro, 12 min cada uno, los ejercicios 3.5.2, 3.5.5, 3.5.7, 3.5.8, 3.5.11 y 3.5.15.
  5. Termina con los propuestos 3.6.1 (Plan 2010) o 3.6.9 (Plan 2016) como simulacro.

3.1 Conceptos y expresiones

3.1.1 Recordatorio: el espacio cartesiano

Un punto del espacio es una terna $P(x, y, z)$; los tres planos coordenados (XY, XZ, YZ) dividen el espacio en ocho octantes. La distancia entre $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

La distancia de $P(x, y, z)$ al eje y es $\sqrt{x^2 + z^2}$ (y de modo análogo para los otros ejes). Los puntos simétricos respecto al origen, a los ejes y a los planos coordenados están en la Unidad 1, Parte A.

8. **Cuadrante de θ al pasar a polares.** $\tan\theta = \frac{y}{x}$ da dos ángulos; el correcto es el del cuadrante del punto.
9. **Cartesiana con r suelta.** $x^2 + y^2 - 2y = r$ aún no es cartesiana: se eleva al cuadrado con $r^2 = x^2 + y^2$.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $(r, \theta) = (r, \theta + 360^\circ k) = (-r, \theta + 180^\circ + 360^\circ k)$; el polo es $(0, \theta)$ para todo θ.
- $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r, θ): eje polar $(r, -\theta)$; recta a 90° $(r, 180^\circ - \theta)$; polo $(r, \theta + 180^\circ) = (-r, \theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta \to -\theta$ o $(-r, 180^\circ - \theta)$; recta a 90° $\theta \to 180^\circ - \theta$ o $(-r, -\theta)$; polo $r \to -r$ o $\theta + 180^\circ$. Suficientes, no necesarias.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$: centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r = a \pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a = b$, caracol con lazo si $a < b$.
- $r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$: foco en el polo; $e < 1$ elipse, $e = 1$ parábola, $e > 1$ hipérbola.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Nombra la curva en el primer renglón (cardioide, caracol, rosa, lemniscata, circunferencia o cónica): eso ya dice su forma y su simetría.
2. Simetría: prueba 1, prueba 2 y, si las dos fallan, un contraejemplo con un punto notable.
3. Intersecciones: los dos ángulos de cada eje, el polo con $r = 0$, y revisa puntos repetidos.
4. Tabla con 4 o 5 ángulos notables y los puntos más alejados del polo ($|r|$ máximo).
5. Bosquejo sobre una rejilla polar, con los puntos calculados marcados y escritos.
6. Si piden la cartesiana, multiplica por r, sustituye y completa cuadrados.

Si el tiempo no alcanza, el nombre de la curva, sus intersecciones con los ejes y un bosquejo con tres puntos ya valen la mayor parte del problema.

Simetría respecto a	Prueba 1	Prueba 2
eje polar	$\theta \to -\theta$	$r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$
recta a 90°	$\theta \to 180^\circ - \theta$	$r \to -r$, $\theta \to -\theta$
polo	$r \to -r$	$\theta \to \theta + 180^\circ$

Si alguna de las dos pruebas deja la ecuación igual (o equivalente), la curva *es* simétrica. **Las pruebas son suficientes, no necesarias:** si las dos fallan, todavía no se sabe. Para concluir que *no* es simétrica se da un contraejemplo: un punto de la curva cuyo simétrico no la cumple con *ninguna* de sus representaciones; o se pasa a cartesianas, donde la prueba sí es definitiva ($y \to -y$ para el eje polar, $x \to -x$ para la recta a 90°, las dos para el polo). Si una curva tiene dos de las tres simetrías, tiene la tercera.

2.1.11 Intersección de dos curvas polares

Como un punto tiene muchas representaciones, resolver el sistema $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$ no basta:

- se resuelve $f(\theta) = g(\theta)$;
- se resuelve también con la otra representación de la segunda curva, $f(\theta) = -g(\theta + 180^\circ)$;
- **el polo** se revisa aparte: está en las dos curvas si cada una tiene $r = 0$ para *algún* θ, aunque sean ángulos distintos.

Por ejemplo, $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 3\cos\theta$: de $1 + \cos\theta = 3\cos\theta$ sale $\cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\left(\frac{3}{2}, 60^\circ\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 300^\circ\right)$; la segunda ecuación, $1 + \cos\theta = -3\cos(\theta + 180^\circ)$, es la misma que la primera porque $-3\cos(\theta + 180^\circ) = 3\cos\theta$: no da puntos nuevos. Además, la primera pasa por el polo en 180° y la segunda en 90°: el polo es el tercer punto de intersección.

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«el simétrico de E respecto al polo», «unas coordenadas polares de» un punto	representaciones y simétricos	2.3.1
«obtener una ecuación cartesiana»	conversión	2.3.2
«identificar», «dar el nombre»	catálogo	2.3.3
«determinar si es simétrica respecto al eje polar, al polo o a la recta a 90°»	pruebas o contraejemplo	2.3.4
«intersecciones con el eje polar» o «con la recta a 90°», «número de intersecciones»	sustitución y polo	2.3.5
«coordenadas de tres puntos», «puntos más alejados del polo»	tabla, máximo de $\|r\|$	2.3.6
«bosquejar su gráfica»	bosquejo	2.3.7
$r = \frac{k}{c \pm d\,\mathrm{sen}\,\theta}$ o con $\cos\theta$; «vértices», «área del triángulo»	cónica en polares	2.3.8

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
dos curvas y «sus puntos de intersección»	intersección de curvas	2.3.9

2.3 Procedimientos

2.3.1 Representaciones de un punto y puntos simétricos

1. Escribe el punto con la pareja dada; si viene de una curva, calcula r con su θ.
2. Aplica la regla de la sección 2.1.3 según el eje o el polo.
3. Si se pide «unas coordenadas», da una pareja; si conviene, da también la equivalente con $r > 0$ y $0^\circ \le \theta < 360^\circ$.

2.3.2 De polar a cartesiana

1. Si hay $\cos\theta$ o $\operatorname{sen}\theta$ solos, multiplica la ecuación por r; si hay un cociente, quita el denominador.
2. Sustituye $r\cos\theta = x$, $r\operatorname{sen}\theta = y$, $r^2 = x^2 + y^2$.
3. Si queda r sola, aíslala y eleva al cuadrado: $r = E \Rightarrow x^2 + y^2 = E^2$.
4. Completa cuadrados para identificar la cónica (circunferencia, hipérbola…). Revisa si el polo pertenece a la curva original.

2.3.3 Identificar la curva

1. $r = a\cos\theta$, $r = a\operatorname{sen}\theta$: circunferencia por el polo.
2. $r = a \pm b\cos\theta$ o con $\operatorname{sen}\theta$: cardioide si $a = b$; caracol con lazo si $a < b$; sin lazo si $a > b$.
3. $r = a\operatorname{sen} n\theta$, $r = a\cos n\theta$: rosa de n pétalos (n impar) o $2n$ (n par).
4. $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = \pm a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata (si aparece $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$, despeja primero r^2).
5. $r = \frac{k}{c \pm d\cos\theta}$: divide entre c y compara con $\frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$; $e = \frac{d}{c}$.

2.3.4 Simetría

1. Aplica la prueba 1 de la tabla de la sección 2.1.10. Si la ecuación no cambia, la curva es simétrica: termina.
2. Si cambia, aplica la prueba 2. Si no cambia, es simétrica: termina.
3. Si las dos fallan, escribe que las pruebas no deciden. Toma un punto notable de la curva (el extremo de un pétalo, el punto más alejado), calcula su simétrico y comprueba que *ninguna* representación, $(r', \theta' + 360^\circ k)$ ni $(-r', \theta' + 180^\circ + 360^\circ k)$, cumple la ecuación. Entonces no es simétrica.

2.3.5 Intersecciones con el eje polar y la recta a 90 grados

1. **Eje polar:** sustituye $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$. **Recta a** 90°**:** sustituye $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$.
2. Escribe cada punto; si $r < 0$, da también su representación con $r > 0$ y revisa si dos resultados son el mismo punto.
3. **Polo:** resuelve $r = 0$. Si tiene solución, el polo está en la curva y en las dos rectas.
4. Si la curva tiene puntos con $r < 0$ (lazos), comprueba en cartesianas: $y = 0$ (eje polar) o $x = 0$ (recta a 90°) en la ecuación cartesiana da todas las intersecciones.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación $r = 2 + 2\cos\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección de C con el eje polar. c) Identifique a C y bosqueje su gráfica en el plano polar.

Resultado: a) Sí es simétrica. b) $(4, 0^\circ)$ y el polo, $(0, 180^\circ)$. c) Cardioide con la punta en el polo, abierta hacia la derecha hasta $(4, 0^\circ)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 135.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r = \cos\theta$. a) Obtenga unas coordenadas polares de cada uno de los puntos de intersección de C con el eje polar. b) Determine si C es simétrica respecto al polo. c) Obtenga la ecuación cartesiana de C e identifíquela.

Resultado: a) $(1, 0^\circ)$ y el polo. b) No es simétrica respecto al polo. c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$: circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 136.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: Serie de ejercicios de curvas en el plano polar, ejercicio 15.

Dada la curva de ecuación polar $r = 10 + 15\operatorname{sen}\theta$, determine: a) si es simétrica respecto al eje polar; b) todas sus intersecciones con el eje polar y con la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Resultado: a) No es simétrica respecto al eje polar. b) Eje polar: $(10, 0^\circ)$, $(10, 180^\circ)$ y el polo; recta a 90°: $(25, 90^\circ)$, $(-5, 270^\circ) = (5, 90^\circ)$ y el polo.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 136.

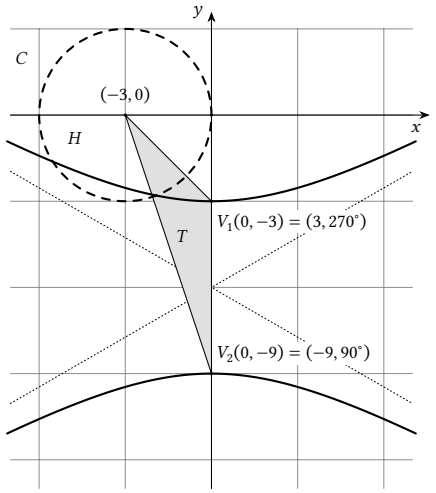
2.7 Errores frecuentes

1. **Concluir «no es simétrica» porque la prueba falla.** Las pruebas son suficientes, no necesarias; para negar la simetría hace falta un contraejemplo (ejercicio 2.5.1) o la ecuación cartesiana.
2. **Olvidar el polo.** Casi todas las curvas del examen pasan por él; en las intersecciones con los ejes o entre curvas se revisa con $r = 0$ y se cuenta como punto.
3. **Sustituir un solo ángulo.** El eje polar pide $\theta = 0^\circ$ *y* 180°; la recta a 90°, 90° *y* 270°. Y luego hay que ver si dos resultados son el mismo punto, como $(-2, 90^\circ) = (2, 270^\circ)$.
4. **Dibujar** $r < 0$ **en la dirección** θ**.** El punto $(-4, 90^\circ)$ está abajo, en 270°.
5. **Contar mal los pétalos.** $r = a\operatorname{sen} n\theta$ tiene n pétalos si n es impar y $2n$ si es par: $r = 2\cos 2\theta$ tiene 4, no 2.
6. **Lemniscata donde no existe.** $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ no tiene puntos en el segundo ni en el cuarto cuadrante; escribe el intervalo de θ antes de la tabla.
7. **Cónica sin reducir el denominador.** $r = \frac{k}{c + d\operatorname{sen}\theta}$ se divide entre c para leer $e = \frac{d}{c}$. Y el vértice con $r < 0$ va en la dirección opuesta: $(-9, 90^\circ) = (0, -9)$.

6. **b) Área:** T tiene vértices $(0,-3)$, $(0,-9)$ y $(-3,0)$. La base V_1V_2 está sobre el eje y y mide 6; la altura es la distancia de $(-3,0)$ al eje y, 3:

$$A = \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

7. **c) Bosquejo:** ramas de la hipérbola con vértices $(0,-3)$ y $(0,-9)$ y asíntotas $y = -6 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$; la circunferencia es tangente al eje y en el polo.



Resultado: a) $H:\ \frac{(y+6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ $(x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0)$; $C:\ (x+3)^2 + y^2 = 9$; b) $A = 9$ unidades de área.

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

Sean las curvas $C_1:\ r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $C_2:\ r^2 = 4\cos 2\theta$. a) De la curva C_1, determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección con la recta a 90°. b) Identifique la curva C_2, dé coordenadas polares de tres puntos de ella y bosqueje su gráfica.

Resultado: a) El polo y $(2, 90°)$. b) Lemniscata con lazos sobre el eje polar; por ejemplo $(2, 0°)$, $(2, 180°)$, $(\sqrt{2}, 30°)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 135.

2.3.6 Tabla de valores y puntos más alejados del polo

1. Evalúa r en ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, ...); en rosas y lemniscatas, en los que hacen notable a $n\theta$ o a 2θ.
2. **Puntos más alejados:** maximiza $|r|$ (o r^2): ocurre donde el seno o el coseno vale ± 1. Escribe todos los θ en $[0°, 360°)$ y los puntos que dan.
3. Para «tres puntos», escoge puntos notables: extremos de pétalos o lazos, intersecciones con los ejes.

2.3.7 Bosquejo

1. Dibuja una rejilla polar ligera: circunferencias y rayos cada 30° o 45°.
2. Marca los puntos de la tabla, las intersecciones con los ejes y el polo si pertenece.
3. Usa las simetrías para dibujar solo una parte y reflejarla.
4. Une los puntos en el orden en que crece θ; con $r < 0$, el punto va en la dirección $\theta + 180°$.
5. Escribe el nombre de la curva y las coordenadas de los puntos marcados.

2.3.8 Cónica en forma polar

1. Escribe la ecuación con denominador $1 \pm e\cos\theta$ (o $\operatorname{sen}\theta$) y lee e: identifica la cónica.
2. **Vértices:** evalúa r en los dos ángulos del eje focal y convierte a cartesianas (uno puede salir con $r < 0$).
3. **Cartesiana:** $r(1 \pm e\operatorname{sen}\theta) = ep \Rightarrow r = ep \mp ey \Rightarrow x^2 + y^2 = (ep \mp ey)^2$; completa cuadrados y lee centro y semiejes. Comprueba que los vértices coinciden.
4. Para áreas y distancias, trabaja con los puntos en cartesianas.

2.3.9 Intersección de dos curvas polares

1. Iguala las r y resuelve para θ en $[0°, 360°)$.
2. Iguala la primera con la otra representación de la segunda, $f(\theta) = -g(\theta + 180°)$, y descarta los puntos repetidos.
3. Revisa el polo por separado ($r = 0$ en cada curva).
4. Si hay duda, resuelve el sistema en cartesianas.

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Catálogo: cardioide, rosa y lemniscata

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 1.

Para cada una de las curvas siguientes, dé su nombre, las coordenadas polares de tres de sus puntos y bosqueje su gráfica indicando esos puntos: a) $r = 2 + 2\cos\theta$; b) $r = 4\operatorname{sen}3\theta$; c) $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$.

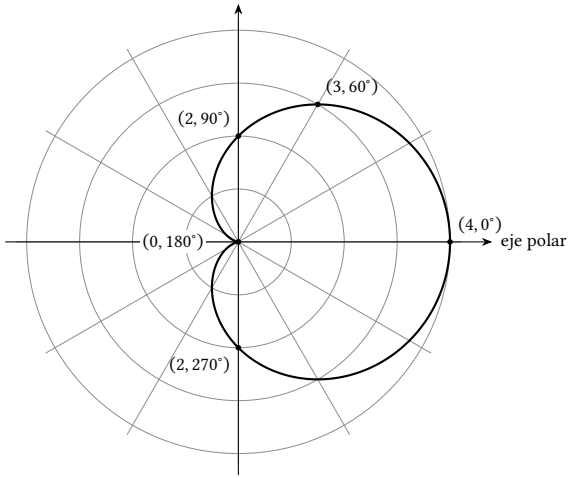
Resolución.

1. **a) Nombre:** es $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$: **cardioide**. Con $\theta \to -\theta$ no cambia: simétrica respecto al eje polar.
2. **a) Puntos:**

$$\theta = 0°:\ r = 4; \quad \theta = 90°:\ r = 2; \quad \theta = 180°:\ r = 0; \quad \theta = 270°:\ r = 2.$$

Tres puntos: $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; además pasa por el polo, $(0, 180^\circ)$, donde tiene la punta.

3. **a) Bosquejo:** con $\theta = 60^\circ$, $r = 3$. La curva sale de $(4, 0^\circ)$, sube por $(3, 60^\circ)$ y $(2, 90^\circ)$, llega al polo en 180° y la mitad de abajo es el reflejo.

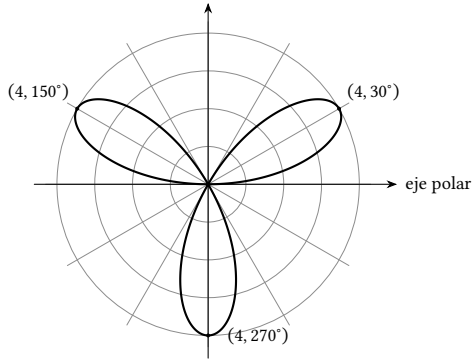


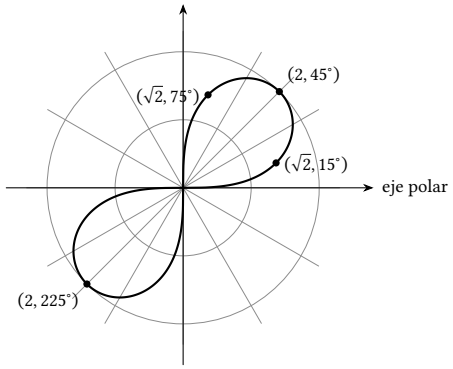
4. **b) Nombre:** $r = a \operatorname{sen} n\theta$ con $n = 3$ impar: **rosa de 3 pétalos** de longitud 4.
5. **b) Puntos:** los extremos de los pétalos, donde $|\operatorname{sen} 3\theta| = 1$:

$$\theta = 30^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 90^\circ = 4; \qquad \theta = 150^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 450^\circ = 4;$$
$$\theta = 90^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 270^\circ = -4.$$

El tercero es $(-4, 90^\circ) = (4, 270^\circ)$. Puntos: $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$.

6. **b) Bosquejo:** la curva pasa por el polo en 0°, 60°, 120° y 180° ($\operatorname{sen} 3\theta = 0$); entre ellos traza un pétalo. Los pétalos están centrados en 30°, 150° y 270°, separados 120°.





Resultado: a) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto al polo); b) $(2, 45^\circ)$ y $(2, 225^\circ)$ (este último es $(-2, 45^\circ)$); c) lemniscata en los cuadrantes I y III.

Ejercicio 2.5.5 · Hipérbola en polares, circunferencia y área de un triángulo

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 1.

Sean la hipérbola H y la circunferencia C representadas por

$$H: \ r = \frac{9}{1 - 2\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y} \qquad C: \ r = -6\cos\theta.$$

a) Obtenga la ecuación cartesiana de cada una de las curvas H y C en el plano XY. b) Determine el área del triángulo T formado por los vértices de H y el centro de la circunferencia C. c) Bosqueje las curvas H y C, así como el triángulo T.

Resolución.

1. **Identificación:** $r = \frac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$ con $e = 2 > 1$: hipérbola con un foco en el polo, $ep = 9$, $p = \frac{9}{2}$, directriz $y = -\frac{9}{2}$ y eje focal sobre la recta a 90°.
2. **a) Cartesiana de H:** $r - 2r\operatorname{sen}\theta = 9 \Rightarrow r = 9 + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 = (9 + 2y)^2 = 81 + 36y + 4y^2$:

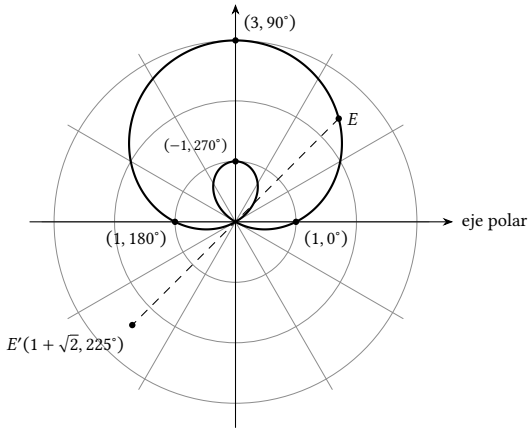
$$x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0.$$

3. **a) Forma ordinaria:** $x^2 - 3\left(y^2 + 12y + 36\right) + 108 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 - 3(y + 6)^2 = -27$:

$$\frac{(y + 6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1.$$

Centro $(0, -6)$, $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$, $c = \sqrt{9 + 27} = 6$: focos $(0, 0)$ y $(0, -12)$; el polo es un foco, como debe ser.

4. **a) Cartesiana de C:** $r^2 = -6r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = -6x \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 9$. Centro $(-3, 0)$, es decir $(3, 180^\circ)$, y radio 3.
5. **b) Vértices de H:** $\theta = 270^\circ: \ r = \frac{9}{1+2} = 3, V_1(3, 270^\circ) = (0, -3)$; $\theta = 90^\circ: \ r = \frac{9}{1-2} = -9$, $V_2(-9, 90^\circ) = (0, -9)$. Coinciden con $(0, -6 \pm 3)$.



Resultado: a) tres intersecciones: $(1, 0^\circ)$, $(1, 180^\circ)$ y el polo; b) $E'\left(1+\sqrt{2}, 225^\circ\right)$; c) $\left(x^2+y^2-2y\right)^2 = x^2+y^2$.

Ejercicio 2.5.4 · Lemniscata: simetría y puntos más alejados del polo

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Obtenga unas coordenadas polares de los puntos de la curva más alejados del polo. c) Bosqueje la gráfica de C.

Resolución.

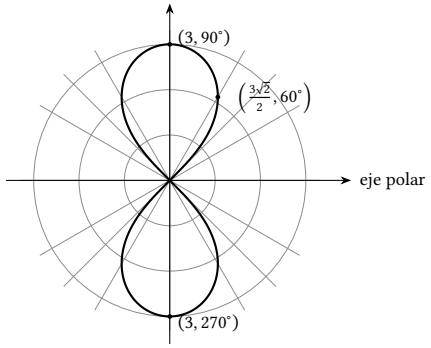
1. **Nombre y dónde existe:** lemniscata ($r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, $a = 2$); $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$ para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ y $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$.
2. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r^2 = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia.
3. **a) Prueba 2** ($r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$): $r^2 = 4\operatorname{sen}(360^\circ - 2\theta) = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **a) Contraejemplo:** $(2, 45^\circ)$ está en C ($4 = 4\operatorname{sen} 90^\circ$). Su simétrico es $(2, -45^\circ)$: $4\operatorname{sen}(-90^\circ) = -4 \neq 4$. Las demás representaciones cambian 2θ en múltiplos de 360° y r solo de signo, y r^2 no cambia: ninguna cumple. No es simétrica respecto al eje polar.
5. **b) Máximo:** $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta \leq 4$, con igualdad si $\operatorname{sen} 2\theta = 1$: $2\theta = 90^\circ$ o 450°, es decir, $\theta = 45^\circ$ o 225°, con $|r| = 2$.
6. **c) Tabla:** $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$ ($r^2 = 4\operatorname{sen} 30^\circ = 2$ en 15°). Como $r \to -r$ no cambia la ecuación, es simétrica respecto al polo: el lazo del tercer cuadrante es el reflejo del primero.

7. **c) Nombre:** $r^2 = -9\cos 2\theta$, de la forma $r^2 = -a^2\cos 2\theta$ con $a = 3$: **lemniscata** con los lazos sobre la recta a 90°.
8. **c) Dónde existe:** $-9\cos 2\theta \geq 0 \iff \cos 2\theta \leq 0 \iff 90^\circ \leq 2\theta \leq 270^\circ$, es decir, $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ (y, sumando 180°, $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$).
9. **c) Puntos:**

$$\theta = 90^\circ: \ r^2 = -9\cos 180^\circ = 9, \quad r = \pm 3;$$

$$\theta = 60^\circ: \ r^2 = -9\cos 120^\circ = \frac{9}{2}, \quad r = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Puntos: $(3, 90^\circ)$, $(-3, 90^\circ) = (3, 270^\circ)$ y $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$: los lazos se tocan en el polo.



Resultado: a) cardioide, $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; b) rosa de 3 pétalos, $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$; c) lemniscata, $(3, 90^\circ)$, $(3, 270^\circ)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Rosa de tres pétalos: recta a 90 grados y simetría

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 1.

Sea la curva de ecuación polar $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$. a) Obtenga las coordenadas de sus puntos de intersección con la recta a 90°. b) Determine si es simétrica respecto al eje polar. c) Bosqueje su gráfica.

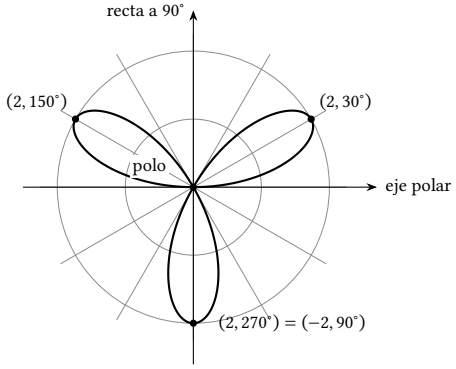
Resolución.

1. **a) Sustitución:**

$$\theta = 90^\circ: \ r = 2\operatorname{sen} 270^\circ = -2; \qquad \theta = 270^\circ: \ r = 2\operatorname{sen} 810^\circ = 2\operatorname{sen} 90^\circ = 2.$$

   $(-2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$ son el mismo punto, $(0, -2)$ en cartesianas.
2. **a) Polo:** $r = 0$ cuando $\operatorname{sen} 3\theta = 0$, por ejemplo en $\theta = 0^\circ$. El polo está en la curva y en la recta a 90°.
3. **b) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\operatorname{sen}(-3\theta) = -2\operatorname{sen} 3\theta$. Cambia.

4. **b) Prueba 2** ($r \to -r, \theta \to 180^\circ - \theta$): $-r = 2\,\mathrm{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\,\mathrm{sen}(180^\circ - 3\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,3\theta$, es decir, $r = -2\,\mathrm{sen}\,3\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
5. **b) Contraejemplo:** $(2, 30^\circ)$ está en la curva ($2\,\mathrm{sen}\,90^\circ = 2$). Su simétrico respecto al eje polar es $(2, -30^\circ) = (2, 330^\circ)$. Con $\theta = 330^\circ$: $2\,\mathrm{sen}\,990^\circ = 2\,\mathrm{sen}\,270^\circ = -2 \neq 2$. Con la otra representación, $(-2, 150^\circ)$: $2\,\mathrm{sen}\,450^\circ = 2 \neq -2$. Sumar 360° a θ suma 1080° a 3θ y no cambia nada. El simétrico no está en la curva.
6. **c) Tabla** (primer pétalo): $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$. Para $60^\circ < \theta < 120^\circ$, $r < 0$: ese pétalo se dibuja centrado en 270°. El tercero está centrado en 150°. Con la prueba 1 para la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$): $2\,\mathrm{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,3\theta$; sí es simétrica respecto a ella.



Resultado: a) el polo y $(2, 270^\circ)$ (equivalente a $(-2, 90^\circ)$); b) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto a la recta a 90°); c) rosa de 3 pétalos de longitud 2.

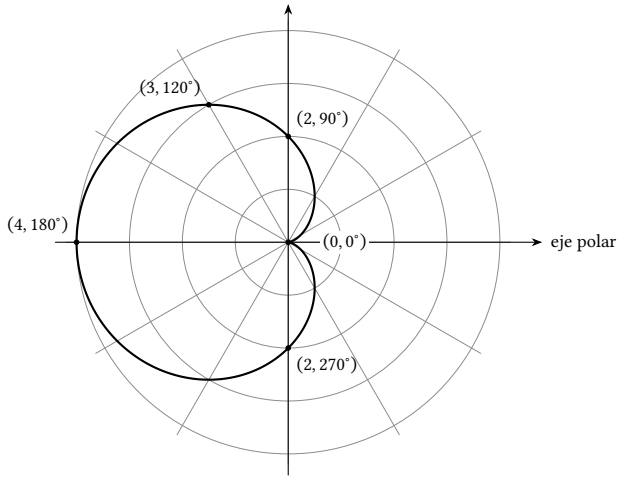
Ejercicio 2.5.2 · Cardioide: simetría e intersecciones con la recta a 90 grados

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 1.

Sea la curva $C_1:\ r = 2(1 - \cos\theta)$. a) Determine si C_1 es simétrica respecto al eje polar. b) Determine el número de intersecciones de C_1 con la recta a 90° y obtenga unas coordenadas polares de esos puntos. c) Bosqueje la gráfica de C_1.

Resolución.

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\big(1 - \cos(-\theta)\big) = 2(1 - \cos\theta)$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 90^\circ:\ r = 2(1 - 0) = 2$; $\theta = 270^\circ:\ r = 2$. Puntos $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$, distintos.
3. **b) Polo:** $r = 0 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0^\circ$. El polo es un tercer punto. Como $r \geq 0$ siempre, no hay más.
4. **c) Nombre y tabla:** $r = a - b\cos\theta$ con $a = b = 2$: cardioide. $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 0, 1, 2, 3, 4$. La punta está en el polo y el punto más alejado es $(4, 180^\circ)$; la mitad de abajo es el reflejo de la de arriba.



Resultado: a) sí es simétrica respecto al eje polar; b) tres intersecciones: el polo $(0, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$; c) cardioide que se abre hacia la izquierda.

Ejercicio 2.5.3 · Caracol con lazo: eje polar, punto simétrico y cartesiana

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$. a) Obtenga el número de intersecciones de C con el eje polar y las coordenadas polares de esas intersecciones. b) Si E es el punto de C que corresponde a $\theta = 45^\circ$, obtenga las coordenadas polares del punto E', simétrico de E respecto al polo. c) Obtenga una ecuación cartesiana de C.

Resolución.

1. **Nombre:** $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ con $a = 1 < b = 2$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90°.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ:\ r = 1$; $\theta = 180^\circ:\ r = 1$. Puntos $(1, 0^\circ)$ y $(1, 180^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0 \iff \mathrm{sen}\,\theta = -\frac{1}{2} \iff \theta = 210^\circ$ o 330°. El polo está en la curva.
4. **a) Comprobación:** el lazo ($210^\circ < \theta < 330^\circ$, con $r < 0$) queda arriba del eje polar y solo lo toca en el polo. Con la cartesiana del inciso c y $y = 0$: $x^4 = x^2$, $x = 0, \pm 1$. Son tres puntos.
5. **b) Punto** E**:** $r = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,45^\circ = 1 + \sqrt{2}$; $E\left(1 + \sqrt{2}, 45^\circ\right)$.
6. **b) Simétrico respecto al polo:** se suma 180° al ángulo:
$$E'\left(1 + \sqrt{2}, 225^\circ\right), \quad \text{o también} \quad E'\left(-1 - \sqrt{2}, 45^\circ\right).$$
7. **c) Multiplicar por** r**:** $r^2 = r + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = r$.
8. **c) Elevar al cuadrado:**
$$\left(x^2 + y^2 - 2y\right)^2 = x^2 + y^2.$$
Al elevar al cuadrado se agrega $r = -1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, que es la misma curva ($(r, \theta) \to (-r, \theta + 180^\circ)$ la convierte en $r = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$); y el polo ya estaba. La ecuación no agrega puntos.

4.3.7 Punto más cercano, simétrico y perpendicular común

1. **Punto de una recta más cercano a Q:** $M = P_0 + t\,\vec{u}$ con $t = \dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ (es decir, $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u} = 0$).
2. **Punto de un plano más cercano a Q:** recta por Q con dirección $\vec{n}$; su intersección con el plano (4.3.6).
3. **Simétrico:** $Q' = 2M - Q$.
4. **Puntos más cercanos entre dos rectas que se cruzan:** con $P(s) \in L_1$ y $Q(t) \in L_2$, pide $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_1 = 0$ y $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_2 = 0$; el sistema da s y t. La recta PQ es la perpendicular común, de dirección $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$.

4.3.8 Puntos o planos a una distancia dada

1. Escribe el punto buscado con el parámetro de su recta, $P(t)$, o el plano buscado con su incógnita, $Ax + By + Cz + D = 0$.
2. Plantea la distancia con la fórmula que toca e iguálala al dato.
3. Un valor absoluto da dos ecuaciones (±); una distancia entre puntos se eleva al cuadrado. Casi siempre hay dos soluciones: escribe las dos.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Posición relativa de dos rectas

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 4.

Sean las rectas

$$L_1:\ \vec{p} = (1,2,1) + t\,(1,-1,-2) \qquad \text{y} \qquad L_2:\ \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

En caso de que L_1 y L_2 sean paralelas, obtenga la ecuación cartesiana del plano que las contiene; en caso de que se crucen, calcule la distancia entre ellas; en caso de que se corten, determine las coordenadas de su punto de intersección.

Resolución.

1. **Datos:** $P_1(1,2,1)$, $\vec{u}_1 = (1,-1,-2)$; de las paramétricas de L_2 con $\lambda = 0$, $P_2(0,7,4)$, y $\vec{u}_2 = (1,3,-1)$.
2. **¿Son paralelas?**

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1+6)\,\hat{\imath} - (-1+2)\,\hat{\jmath} + (3+1)\,\hat{k} = (7,-1,4) \neq \vec{0}.$$

   No se cumple: no son paralelas. (También se ve directo: $\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$ pediría $k = 1$ y $k = -\frac{1}{3}$.)
3. **¿Son coplanares?** $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,5,3)$ y

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = -7 - 5 + 12 = 0.$$

3.3.3 Componente escalar y componente vectorial

1. Identifica quién se proyecta ($\vec{a}$) y *sobre* quién ($\vec{b}$). Si el vector se da como segmento, conviértelo: $\overrightarrow{AB} = B - A$.
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y $|\vec{b}|$ (o $|\vec{b}|^2$).
3. Escalar: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Vectorial: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$, simplificada y en componentes.
4. Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, las dos componentes son cero: los vectores son perpendiculares.

3.3.4 Vector perpendicular a dos vectores o con ángulo dado

1. **Perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$:** calcula $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$ y saca factores comunes.
2. **Unitario:** $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$; **con módulo r:** $\pm\frac{r}{|\vec{n}|}\vec{n}$.
3. **Con condiciones sueltas** (paralelo a un plano coordenado, ángulo dado con otro vector): escribe el vector con incógnitas (paralelo al plano XZ: $(x,0,z)$), plantea una ecuación por condición ($|\hat{v}| = 1$; $\hat{v}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta$) y resuelve el sistema.
4. Comprueba con el producto escalar que da 0 (o el coseno pedido).

3.3.5 Áreas

1. Escoge dos lados que salgan del mismo vértice. Con vértices: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Con diagonales: usa directamente $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$.
2. Calcula el producto cruz con el determinante y su módulo; simplifica el radical.
3. Paralelogramo: $|\vec{a}\times\vec{b}|$. Triángulo: $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$. Diagonales: $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$. Cuadrilátero: suma de dos triángulos separados por una diagonal.
4. **Sin componentes** (datos de módulos, ángulo y componente escalar): obtén los módulos que falten con $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$ y usa $A = |\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta$ (o la mitad).
5. Si $\vec{a}\perp\vec{b}$, el área del paralelogramo es $|\vec{a}||\vec{b}|$ (rectángulo).

3.3.6 Volúmenes y coplanaridad

1. Escribe las tres aristas que salen de un mismo vértice (con vértices: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$). Si una arista es $2\vec{w}$, el volumen se multiplica por 2.
2. Calcula el determinante de 3×3 con las tres aristas como renglones.
3. Paralelepípedo: el valor absoluto. Tetraedro: un sexto del valor absoluto.
4. Volumen con parámetro: |determinante| $= V$ da *dos* ecuaciones, det $= V$ y det $= -V$. Coplanaridad: det $= 0$.

3.3.7 Coordenadas de puntos en una figura

1. Copia la figura y marca qué es cada vector: de qué punto a qué punto va y cuáles lados son iguales como vectores (lados opuestos de un paralelogramo con el *mismo* sentido).
2. Parte de un punto conocido y avanza sumando vectores: $B = A + \overrightarrow{AB}$, $A = D - \overrightarrow{AD}$.
3. Con longitud y dirección: $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con el signo que diga la figura.
4. Para el pie de una perpendicular usa la componente vectorial (sección 3.1.9); para un punto medio, $\frac{1}{2}(A+B)$.
5. Comprueba una condición que no usaste (un lado opuesto, un ángulo recto, un módulo).

3.3.8 Problemas con parámetros

1. Escribe los vectores con el parámetro.
2. Traduce cada condición a una ecuación: perpendicular, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; paralelo, componentes proporcionales ($\vec{b}=k\vec{a}$); área, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=A^2$; volumen, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\pm V$; componente, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=c$.
3. Resuelve primero la ecuación lineal y sustituye en la cuadrática.
4. Da el *conjunto* de valores (casi siempre dos) y comprueba uno.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Paralelogramo dado por sus diagonales

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Sea el paralelogramo P cuyas diagonales son los vectores $\vec{u}=2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k}$ y $\vec{v}=(4,0,2)$. Obtenga: a) el coseno de uno de los ángulos interiores de P; b) el área de P.

Resolución.

1. **Lados a partir de las diagonales:** si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los lados que salen de un vértice, $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$. Sumando y restando:

$$\vec{a}=\tfrac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})=\tfrac{1}{2}(6,2,-2)=(3,1,-1),$$
$$\vec{b}=\tfrac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})=\tfrac{1}{2}(-2,2,-6)=(-1,1,-3).$$

2. **a) Ángulo interior:** entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que salen del mismo vértice.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3+1+3=1,\qquad |\vec{a}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11},$$
$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{11}}=\frac{1}{11}.$$

   El otro ángulo interior es el suplementario, con coseno $-\frac{1}{11}$.

3. **b) Área con las diagonales:**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&2&-4\\4&0&2\end{vmatrix}=(4-0)\hat{\imath}-(4+16)\hat{\jmath}+(0-8)\hat{k}=(4,-20,-8),$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{16+400+64}=\sqrt{480}=4\sqrt{30},\qquad A=\tfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=2\sqrt{30}.$$

4. **Comprobación con los lados:** $\vec{a}\times\vec{b}=(-2,10,4)$ y $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$.

Resultado: a) $\cos\theta=\frac{1}{11}$ (el ángulo vecino tiene coseno $-\frac{1}{11}$); b) $A=2\sqrt{30}$ unidades de área.

3. **¿Se cortan?** Calcula $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)$. Si vale 0, se cortan: iguala las paramétricas (con parámetros *distintos*, t y λ), resuelve con dos ecuaciones y comprueba la tercera.
4. **¿Se cruzan?** Si el producto mixto no es cero: $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}$.
5. **Paralelas:** si P_2 está en L_1, coinciden; si no, el plano que las contiene tiene $\vec{n}=\vec{u}_1\times\overrightarrow{P_1P_2}$, y su distancia es la de P_2 a L_1.

En el examen escribe cada caso con «se cumple» o «no se cumple»: así se ve que se revisaron los tres.

4.3.4 Distancias

1. **Punto–plano:** sustituye el punto en $Ax+By+Cz+D$, toma valor absoluto y divide entre $|\vec{n}|$.
2. **Punto–recta:** $\overrightarrow{P_0Q}\times\vec{u}$, su módulo, entre $|\vec{u}|$.
3. **Recta–recta:** primero la posición relativa (4.3.3); si se cruzan, la fórmula del producto mixto; si son paralelas, punto–recta.
4. **Plano–plano:** comprueba que sean paralelos (normales proporcionales); escribe los dos con el *mismo* $\vec{n}$ y usa $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$, o la distancia de un punto de uno al otro. Si no son paralelos, $d=0$.
5. Racionaliza: $\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

4.3.5 Ángulos y problemas con parámetro

1. Identifica qué se compara: rectas ($\vec{u}_1,\vec{u}_2$), planos ($\vec{n}_1,\vec{n}_2$) o recta y plano ($\vec{u},\vec{n}$).
2. Usa coseno en los dos primeros casos y **seno** en recta–plano.
3. **Con parámetro:** deja el parámetro en los vectores, escribe la fórmula con el valor conocido ($\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos60^\circ=\frac{1}{2}$) y eleva al cuadrado para quitar el valor absoluto y la raíz. Resuelve la ecuación de segundo grado: casi siempre hay **dos** valores («el conjunto de valores»).
4. Para 90° no hace falta la fórmula: basta la condición de perpendicularidad de la tabla de 4.1.3, que es lineal en el parámetro.

4.3.6 Intersecciones

1. **Recta–plano:** sustituye las paramétricas de la recta en la ecuación cartesiana del plano, despeja t y sustitúyelo en la recta. Si la ecuación queda $0=0$, la recta está contenida en el plano; si queda $0=k\neq 0$, es paralela.
2. **Recta–recta:** iguala las paramétricas con parámetros distintos; dos ecuaciones dan los parámetros, la tercera comprueba.
3. **Plano–plano:** la recta de 4.3.1, paso 3.
4. **Recta y un plano coordenado** (por ejemplo $z=-4$): iguala la coordenada y despeja t.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«valores de m (o B, h) para que formen 30°», «sean perpendiculares»	parámetro	4.3.5
«intersección de la recta con el plano», «de las rectas»	punto común	4.3.6
«punto más cercano», «más próximo», «simétrico», «perpendicular común»	pie de perpendicular	4.3.7
«punto de la recta que diste k unidades», «plano a distancia 7»	ecuación con valor absoluto	4.3.8

4.3 Procedimientos

4.3.1 Ecuaciones de una recta

1. **Por dos puntos** A, B: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $P_0 = A$.
2. **De simétricas a vectorial:** lleva cada fracción a la forma $\frac{x-x_0}{a}$ (coeficiente 1 en la variable); lee $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{u} = (a, b, c)$. Una ecuación aparte como $z = 4$ da componente 0.
3. **De forma general a vectorial:** $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Para el punto, da un valor a una variable (por ejemplo $z = 0$) y resuelve el sistema de 2×2 que queda. Comprueba el punto en *las dos* ecuaciones.
4. **Recta perpendicular a un plano** por un punto: $\vec{u} = \vec{n}$.
5. **Recta paralela a dos planos** (o perpendicular a dos rectas): $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (o $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$).

4.3.2 Ecuación de un plano

1. **Consigue un punto y dos vectores del plano**, no paralelos:
   - tres puntos A, B, C: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$;
   - un punto Q y una recta $(P_0, \vec{u})$ que no lo contiene: $\vec{u}$ y $\overrightarrow{P_0Q}$;
   - dos rectas que se cortan: $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ (antes comprueba que se cortan, 4.3.3);
   - dos rectas paralelas: $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ ($\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ es $\vec{0}$ y no sirve);
   - «paralelo a las rectas L y M»: $\vec{u}_L$ y $\vec{u}_M$;
   - «perpendicular al plano π_0»: $\vec{n}_0$ es uno de los vectores; «perpendicular al plano XZ»: $\hat{\jmath}$; «contiene al eje Y»: $\hat{\jmath}$ y el origen.
2. **Normal:** $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$; simplifica dividiendo entre un factor común.
3. **Ecuación:** $\vec{n} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$.
4. **Comprueba** con un punto que no usaste para el término independiente.
5. Si piden la vectorial o las paramétricas: $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$.

4.3.3 Posición relativa de dos rectas

1. **Datos:** $P_1, \vec{u}_1, P_2, \vec{u}_2$ (4.3.1).
2. **¿Paralelas?** Calcula $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Si es $\vec{0}$, se cumple; ve al paso 5.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Tres vectores con módulo dado

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 3.

Obtenga los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, de módulo 5, 7 y 3 respectivamente, tales que $\vec{a}$ es paralelo al vector $\vec{v} = (6, -2, 3)$; $\vec{b}$ tiene cosenos directores $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\cos\beta = \cos\gamma$; y $\vec{c}$ es perpendicular tanto a $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{k}$ como a $\vec{w} = (-3, 1, 4)$.

Resolución.

1. $\vec{a}$**:** $|\vec{v}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$, así que $\vec{a} = \pm\frac{5}{7}(6, -2, 3) = \pm\left(\frac{30}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{15}{7}\right)$.
2. $\vec{b}$**:** $\frac{1}{9} + 2\cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$. Entonces $\vec{b} = 7\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}, \pm\frac{14}{3}, \pm\frac{14}{3}\right)$, con los dos signos iguales.
3. $\vec{c}$**:** perpendicular a los dos, paralelo a su producto cruz (aquí $\vec{v} = (3, 0, -4)$):

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (0 + 4)\hat{\imath} - (12 - 12)\hat{\jmath} + (3 - 0)\hat{k} = (4, 0, 3), \qquad |\vec{v} \times \vec{w}| = 5.$$

Con módulo 3: $\vec{c} = \pm\frac{3}{5}(4, 0, 3) = \pm\left(\frac{12}{5}, 0, \frac{9}{5}\right)$.

Resultado: $\vec{a} = \pm\left(\frac{30}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{15}{7}\right)$; $\vec{b} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$ o $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{14}{3}\right)$; $\vec{c} = \pm\left(\frac{12}{5}, 0, \frac{9}{5}\right)$.

Ejercicio 3.5.2 · Ángulos directores, componente vectorial y área por diagonales

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sean el vector $\vec{v}$ de módulo 2, cuyos ángulos directores son α, $\beta = 30°$ y $\gamma = 60°$, y el vector $\vec{u} = -3\hat{k}$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre un vector $\vec{w}$ paralelo al eje z; b) el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo cuyas diagonales son $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución.

1. $\vec{v}$**:** $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2 30° - \cos^2 60° = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$, así que $\alpha = 90°$ y

$$\vec{v} = 2\left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \left(0, \sqrt{3}, 1\right).$$

2. **a)** Con $\vec{w} = k\hat{k}$ ($k \neq 0$): $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{w}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{-3k}{k^2}k\hat{k} = -3\hat{k}$. No depende de k: $\vec{u}$ ya es paralelo al eje z.
3. **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$: $\cos\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, así que $\theta = 120°$.
4. **c)**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = (0 + 3\sqrt{3})\hat{\imath} - (0 - 0)\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k} = \left(3\sqrt{3}, 0, 0\right),$$

y $A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Resultado: a) $(0,0,-3)$; b) $120°$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades de área.

Ejercicio 3.5.3 · Vector perpendicular con módulo dado y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sean $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 4\hat{k} - 2\hat{\imath}$, $\vec{c} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{d} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$. Determine: a) las componentes del vector $\vec{u}$ perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$ y tal que $|\vec{u}| = |\vec{a}|$; b) los cosenos directores de $\vec{a}$; c) el vector $\vec{v}$ tal que $2\vec{a} - 3\vec{v}$ es la componente vectorial de $\vec{d}$ sobre $\vec{c}$.

Resolución.

1. **a)** Con $\vec{b} = (-2,0,4)$, $\vec{c} = (1,-1,2)$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0+4)\hat{\imath} - (-4-4)\hat{\jmath} + (2-0)\hat{k} = (4,8,2) = 2(2,4,1).$$

   $|(2,4,1)| = \sqrt{21}$ y $|\vec{a}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, así que $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{21}}(2,4,1) = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2,4,1)$.
2. **b)** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\gamma = 0$.
3. **c)** $\vec{d}\cdot\vec{c} = 2 - 1 - 2 = -1$, $|\vec{c}|^2 = 6$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{c}}\,\vec{d} = -\frac{1}{6}(1,-1,2)$.
4. Despeje: $2\vec{a} - 3\vec{v} = -\frac{1}{6}\vec{c} \Rightarrow \vec{v} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{18}\vec{c} = \left(2, -\frac{4}{3}, 0\right) + \left(\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Resultado: a) $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2,4,1)$; b) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$; c) $\vec{v} = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Ejercicio 3.5.4 · Vector unitario paralelo a un plano coordenado y a 45° de otro

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2024-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Obtenga un vector unitario $\hat{v}$, paralelo al plano XZ, que forma un ángulo de $45°$ con el vector $\vec{u} = (2,0,2)$.

Resolución.

1. **Incógnitas:** paralelo al plano XZ significa componente y nula: $\hat{v} = (x,0,z)$, con $x^2 + z^2 = 1$.
2. **Ángulo:** $\hat{v}\cdot\vec{u} = |\hat{v}||\vec{u}|\cos 45° \Rightarrow 2x + 2z = 1 \cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, es decir, $x + z = 1$.
3. **Sistema:** $(x+z)^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ dan $2xz = 0$: $x = 0,\ z = 1$ o $x = 1,\ z = 0$.
4. **Comprobación:** $\hat{k}\cdot(2,0,2) = 2 = 1\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resultado: $\hat{v} = \hat{\imath} = (1,0,0)$ o $\hat{v} = \hat{k} = (0,0,1)$ (basta dar uno).

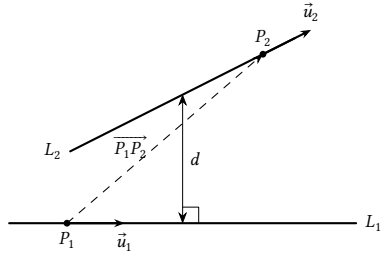
Ejercicio 3.5.5 · Área de un triángulo con ángulo y componente escalar

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 2.

Dos de los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman un ángulo de $60°$. La componente escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es 4 y $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Obtenga el área del triángulo.

Resolución.

1. **Módulo de $\vec{a}$:** $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos 60° \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}|\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = 8$.



4.1.6 Posición relativa e intersecciones

Dos rectas pueden ser:

- **paralelas** (o coincidentes): $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$; son coincidentes si además P_2 está en L_1;
- **se cortan** en un punto: no son paralelas y son coplanares, $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0$;
- **se cruzan** (no son paralelas ni se cortan): $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \neq 0$.

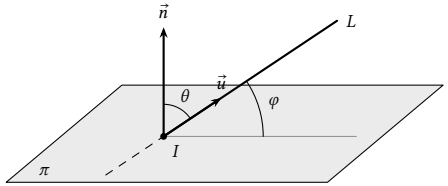
Las paralelas y las que se cortan determinan un plano; las que se cruzan, no.

Recta y plano: si $\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$, se cortan en un punto; si $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, la recta es paralela al plano (sin puntos comunes) o está contenida en él. **Dos planos:** si no son paralelos, se cortan en una recta de dirección $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Punto más cercano y simétrico. El punto M de una recta (o de un plano) más cercano a Q es el pie de la perpendicular trazada desde Q: $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{u}$ (o $\overrightarrow{MQ} \parallel \vec{n}$). El *simétrico* de Q respecto a la recta o al plano es Q' con M punto medio de QQ': $\vec{q}\,' = 2\vec{m} - \vec{q}$.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«ecuación vectorial», «paramétricas», «forma simétrica» de una recta	pasar entre formas	4.3.1
«recta intersección de los planos», dos ecuaciones juntas	forma general a vectorial	4.3.1
«plano que contiene a los puntos», «al punto y a la recta», «a las rectas»	plano por puntos o rectas	4.3.2
«paralelo a las rectas», «perpendicular al plano XZ», «cuyo vector normal es perpendicular a»	plano con condición	4.3.2
«en caso de que sean paralelas… se crucen… se corten»	posición relativa	4.3.3
«distancia del punto al plano», «a la recta», «entre las rectas», «entre los planos»	una distancia	4.3.4
«ángulo entre», «coseno del ángulo»	ángulo	4.3.5



Sin valor absoluto se obtiene el ángulo obtuso $(180^\circ - \theta)$; los exámenes piden el agudo salvo que digan otra cosa. Un ángulo que no es notable se deja como ang cos $\frac{a}{b}$ o ang sen $\frac{a}{b}$.

4.1.5 Distancias

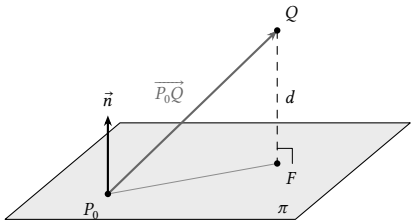
- **Punto Q a plano** $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = |\text{comp}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0Q}|.$$

- **Punto Q a recta** $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u}$: $d = \dfrac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ (altura del paralelogramo de lados $\overrightarrow{P_0Q}$ y $\vec{u}$).
- **Rectas que se cruzan** (L_1 por P_1 con $\vec{u}_1$; L_2 por P_2 con $\vec{u}_2$):

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}.$$

  Si se cortan, el numerador es cero y $d = 0$.
- **Rectas paralelas:** distancia de un punto de una a la otra (fórmula punto–recta).
- **Planos paralelos** $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (con el *mismo* vector normal): $d = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Si no son paralelos, se cortan y $d = 0$.
- **Recta paralela a un plano:** distancia de un punto de la recta al plano. Si la recta no es paralela, lo corta y $d = 0$.



2. **Área:** $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$.

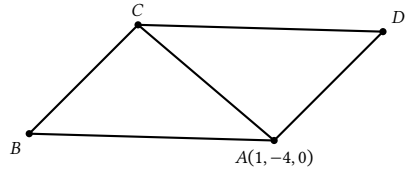
Resultado: $A = 6$ unidades de área.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 5, y 2º final 2016-2, tipo A, problema 5, con $|\vec{b}| = 3$ y componente escalar 2: $|\vec{a}| = 4$ y $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Ejercicio 3.5.6 · Área de una armadura y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 En la armadura de la figura, los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{BA}$ son paralelos, así como $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Sean el punto $A(1, -4, 0)$ y los segmentos dirigidos $\overrightarrow{BD} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\overrightarrow{BC} = (1, 3, -1)$. Determine: a) el área del paralelogramo $ABCD$; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\hat{k} \times \hat{\jmath}$.



Resolución.

1. **Lados desde B:** los lados que salen de B son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y $\overrightarrow{BD}$ es la diagonal (no dibujada): $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, así que $\overrightarrow{BA} = (3, -2, -1) - (1, 3, -1) = (2, -5, 0)$.
2. **a)**

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (5 - 0)\hat{\imath} - (-2 - 0)\hat{\jmath} + (6 + 5)\hat{k} = (5, 2, 11),$$

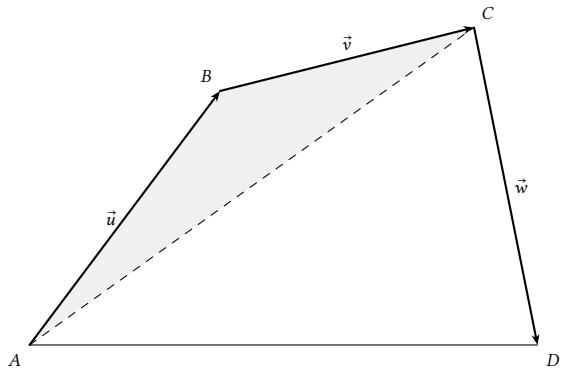
   $A = \sqrt{25 + 4 + 121} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$. (Da lo mismo $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}|$, porque $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.)
3. **b)** $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$. Con $\vec{e} = -\hat{\imath}$, $|\vec{e}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{e}}\,\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{e}\right)\vec{e} = (-1)(-\hat{\imath}) = \hat{\imath}$.

Resultado: a) $5\sqrt{6}$ unidades de área; b) $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$. El punto A no se necesita.

Ejercicio 3.5.7 · Área de un cuadrilátero dado por tres lados

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 3.

Los vectores $\vec{u} = (6, 8, 0)$, $\vec{v} = (8, 2, 0)$ y $\vec{w} = (2, -10, 0)$ son los lados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ del cuadrilátero $ABCD$ de la figura. Obtenga el área del cuadrilátero.



Resolución.

1. **Diagonal y cuarto lado:** $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = (14, 10, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (16, 0, 0)$.
2. **Triángulo** ABC**:** $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 12 - 64) = (0, 0, -52)$; área $\frac{1}{2} \cdot 52 = 26$.
3. **Triángulo** ACD**:** $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 14 & 10 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0 - 160) = (0, 0, -160)$; área 80.
4. **Suma:** $26 + 80 = 106$. (Comprobación: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|$ con $\overrightarrow{BD} = \vec{v} + \vec{w} = (10, -8, 0)$ da $\frac{1}{2} \cdot 212 = 106$.)

Resultado: 106 unidades de área.

Ejercicio 3.5.8 · Paralelepípedo de volumen dado y componente vectorial

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 2.

Los vectores $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{v} = -2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{w} = 12\hat{\imath} + b\hat{\jmath} - 12\hat{k}$ están sobre tres aristas concurrentes de un paralelepípedo. a) Determine el conjunto de valores de b para los cuales el volumen del paralelepípedo es de 162 unidades cúbicas. b) Obtenga la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

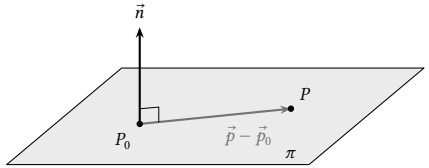
Resolución.

1. **a) Producto mixto:**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 12 & b & -12 \end{vmatrix} = 1(-24 + b) - 2(24 + 12) + 2(-2b - 24) = -3b - 144.$$

2. $|-3b - 144| = 162$: $-3b - 144 = 162 \Rightarrow b = -102$, o $-3b - 144 = -162 \Rightarrow b = 6$.
3. **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 4 - 2 = 0$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{0}{9}\vec{v} = \vec{0}$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

Resultado: a) $b \in \{-102,\ 6\}$; b) $\vec{0} = (0, 0, 0)$.



- **Ecuación cartesiana:** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$, es decir, $Ax+By+Cz+D = 0$ con $D = -\vec{n} \cdot \vec{p}_0$. Los coeficientes de x, y, z son el vector normal.
- **Ecuación vectorial:** $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\,\vec{a} + s\,\vec{b}$, con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no paralelos y contenidos en el plano; $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + ra_1 + sb_1$, $y = y_0 + ra_2 + sb_2$, $z = z_0 + ra_3 + sb_3$.
- **Planos coordenados:** $XY:\ z = 0$, normal $\hat{k}$; $XZ:\ y = 0$, normal $\hat{\jmath}$; $YZ:\ x = 0$, normal $\hat{\imath}$. Un plano «perpendicular al plano XZ» contiene la dirección $\hat{\jmath}$; uno «paralelo al plano YZ» tiene normal $\hat{\imath}$.

De paramétricas a cartesiana: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ y un punto (el que se obtiene con $r = s = 0$). De cartesiana a vectorial: un punto que la satisfaga y dos vectores perpendiculares a $\vec{n}$ y no paralelos entre sí (por ejemplo, para $\vec{n} = (3, -1, 3)$: $(1, 3, 0)$ y $(0, 3, 1)$).

4.1.3 Paralelismo y perpendicularidad

Con $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vectores directores de rectas y $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ vectores normales de planos:

Objetos	Paralelos	Perpendiculares
Recta y recta	$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ ($\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$)	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
Plano y plano	$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ ($\vec{n}_1 = k\,\vec{n}_2$)	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
Recta y plano	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (la recta va «a lo largo» del plano)	$\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$ ($\vec{u}$ es normal al plano)

Observación. En recta–plano las condiciones se *invierten*: paralelismo con producto punto y perpendicularidad con producto cruz, porque se compara la dirección de la recta con la *normal* del plano. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto de la recta satisface la ecuación del plano, la recta está *contenida* en el plano.

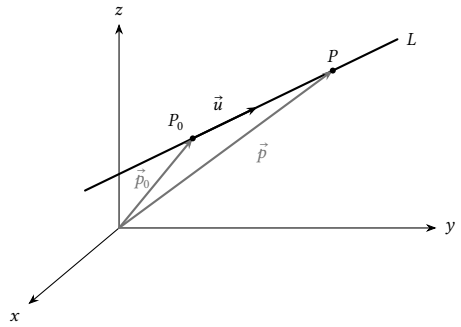
4.1.4 Ángulos

- **Entre dos rectas:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|}$, con $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$.
- **Entre dos planos:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$ (el ángulo entre sus normales).
- **Entre una recta y un plano:** es el ángulo φ entre la recta y su proyección sobre el plano, complemento del ángulo θ entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$. Por eso lleva **seno**:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}.$$

4.1.1 La recta

La recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ (*vector director*) es el conjunto de puntos P tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{u}$.



- **Ecuación vectorial:** $L:\ \ \vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$.
- **Ecuaciones cartesianas en forma simétrica** (si $a, b, c \neq 0$):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

  Si una componente es cero, esa coordenada es constante y se escribe aparte: con $\vec{u} = (a, b, 0)$, $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$; $z = z_0$.
- **Forma general** (intersección de dos planos no paralelos):

$$L:\ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

  El Plan 2016 no la nombra, pero la usa en «la recta intersección de dos planos».

Observación (leer la forma simétrica). Antes de leer el punto y el vector, cada fracción debe quedar como $\frac{x-x_0}{a}$, con coeficiente 1 en la variable. Así,

$$4 - x = \frac{2y - 4}{8} = \frac{z + 5}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 5}{3},$$

con punto $(4, 2, -5)$ y vector $(-1, 4, 3)$: en $4 - x$ se cambia el signo del denominador, y en $\frac{2y-4}{8}$ se divide numerador y denominador entre 2.

Dos puntos A y B dan la recta con $P_0 = A$ y $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

4.1.2 El plano

El plano π que pasa por P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ (*vector normal*) es el conjunto de puntos P con $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

Ejercicio 3.5.9 · Volumen con un vector dado por cosenos directores

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Tres aristas concurrentes del paralelepípedo P son los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, -2, 3)$ y $2\vec{w}$. Dos de los cosenos directores del vector unitario $\vec{w}$ son $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Obtenga: a) $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u}$; b) el volumen de P.

Resolución.

1. $\vec{w}$**:** $\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$, así que $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
2. **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 2 + 3 = 5$, $|\vec{v}|^2 = 13$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{5}{13}(0, -2, 3) = \left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 2\left(0 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + 1\left(0 - \frac{3}{2}\right) + 1\,(0 + 1) = -3\sqrt{3} - \frac{1}{2}.$$

Con la arista $2\vec{w}$ el producto mixto se duplica: $V = 2\left|-3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right| = 6\sqrt{3} + 1$.

Resultado: a) $\left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$; b) $V = 6\sqrt{3} + 1$ unidades cúbicas.

Ejercicio 3.5.10 · Componente escalar y producto mixto con parámetros

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sean $\vec{a} = (-2, 3, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -4)$ y $\vec{c} = (m, n, -6)$. Determine m y n tales que $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{c} = \frac{29}{\sqrt{17}}$ y el producto mixto $[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = -67$.

Resolución.

1. **Componente:** $|\vec{b}| = \sqrt{17}$ y $\vec{c} \cdot \vec{b} = n + 24$: $\frac{n+24}{\sqrt{17}} = \frac{29}{\sqrt{17}} \Rightarrow n = 5$.
2. **Producto mixto:**

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ m & n & -6 \end{vmatrix} = -2(-6 + 4n) - 3(0 + 4m) + 1(0 - m) = 12 - 8n - 13m.$$

3. Con $n = 5$: $12 - 40 - 13m = -67 \Rightarrow -13m = -39 \Rightarrow m = 3$.

Resultado: $m = 3$, $n = 5$; $\vec{c} = (3, 5, -6)$.

Ejercicio 3.5.11 · Tetraedro: componente escalar, área de una cara y volumen

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Un tetraedro tiene sus vértices en $A(3, 4, -1)$, $B(-2, 3, -1)$, $C(1, -4, 1)$ y $D(0, 0, 7)$. Obtenga: a) la componente escalar de $\overrightarrow{CD}$ sobre $\overrightarrow{AC}$; b) el área del triángulo ABC; c) el volumen del tetraedro.

Resolución.

1. **Vectores:** $\overrightarrow{AB} = (-5, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -8, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-3, -4, 8)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 4, 6)$.
2. **a)** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 32 + 12 = -18$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$: $\text{comp}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{CD} = \frac{-18}{6\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. **b)**

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-5&-1&0\\-2&-8&2\end{vmatrix}=(-2-0)\hat{\imath}-(-10-0)\hat{\jmath}+(40-2)\hat{k}=(-2,10,38),$$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+100+1444}=\sqrt{1548}=6\sqrt{43}$; área $3\sqrt{43}$.

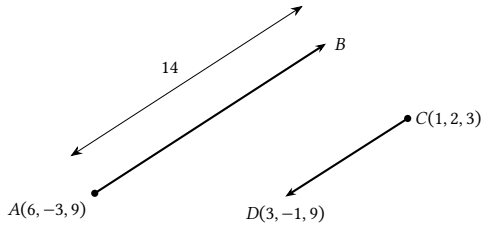
4. **c)** $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=6-40+304=270$; $V=\frac{270}{6}=45$.

Resultado: a) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; b) $3\sqrt{43}$ unidades de área; c) 45 unidades cúbicas.

Ejercicio 3.5.12 · Segmento dirigido paralelo a otro

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 2.

El segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, de longitud 14, es paralelo al segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$, como se muestra en la figura, con $A(6,-3,9)$, $C(1,2,3)$ y $D(3,-1,9)$. Empleando álgebra vectorial, determine las coordenadas del punto B.



Resolución.

1. **Dirección:** $\overrightarrow{CD}=D-C=(2,-3,6)$, $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{4+9+36}=7$.
2. **Sentido:** en la figura las flechas apuntan en sentidos contrarios, así que $\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección de $\overrightarrow{DC}=(-2,3,-6)$.
3. **Vector:** $\overrightarrow{AB}=14\cdot\frac{(-2,3,-6)}{7}=(-4,6,-12)$.
4. **Punto:** $B=A+\overrightarrow{AB}=(6-4,\ -3+6,\ 9-12)=(2,3,-3)$.

Resultado: $B(2,3,-3)$. (Si se tomara el mismo sentido que $\overrightarrow{CD}$, saldría $B(10,-9,21)$; la figura descarta esa opción.)

Ejercicio 3.5.13 · Distancia de un punto al eje y

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 2.

En la figura, el punto A está en el plano XY y su vector de posición $\vec{a}$ forma un ángulo de 60° con el eje x; el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al eje z. Si $|\vec{a}|=16$ y $|\overrightarrow{AB}|=6$, determine la distancia entre el punto B y el eje y.

Unidad 4 · La recta y el plano en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el álgebra vectorial para obtener las diferentes ecuaciones de la recta y del plano, así como para determinar las relaciones entre ellos y con puntos en el espacio de tres dimensiones.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 7). El alumno aplicará el álgebra vectorial para obtener las diferentes ecuaciones de la recta y del plano en el espacio, así como para determinar las relaciones entre estos.

Instrucciones de emergencia

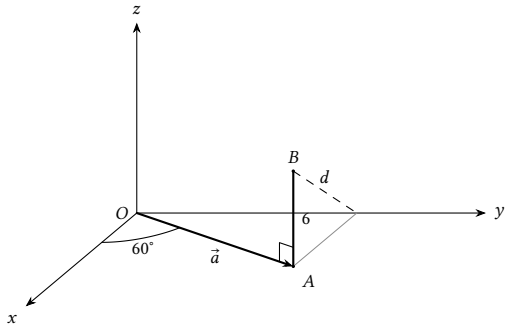
- **Frecuencia:** en el Plan 2010, sale en los 9 finales revisados, casi siempre como problema 3 (13 problemas: en cuatro finales vienen dos). Lo que piden: plano que contiene a una o dos rectas con una condición 6, ángulo recta–plano o plano–plano con parámetro 3, distancia entre rectas o punto más cercano 3, recta intersección de dos planos 3, distancia de un punto a un plano o a una recta 3, posición relativa de dos rectas 1 y punto simétrico respecto a una recta 1 (un problema cuenta en varios subtemas). El 2º parcial 2005-2 trae 6 problemas más. En el Plan 2016, el problema 6 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (el 7 en los de siete problemas): plano que contiene dos rectas o una recta y un punto 15, distancia de un punto a un plano o entre planos 11, recta o plano perpendicular 10, ángulos 8, distancia de un punto a una recta 8, plano por tres puntos 7, intersección recta–plano 6, paralelismo 6, intersección de dos rectas 5, distancia entre rectas 4 y recta intersección de dos planos 2.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Repasa en la Unidad 3 el producto cruz y el producto mixto (15 min).
  2. Lee las secciones 4.1.1 a 4.1.6 (40 min); copia la tabla de la sección 4.1.3 y las fórmulas de 4.1.5.
  3. Aprende los procedimientos 4.3.2 (plano), 4.3.3 (posición relativa) y 4.3.4 (distancias): cubren más de la mitad de los problemas.
  4. Sigue el ejemplo de la sección 4.4 tapando la resolución.
  5. Resuelve con cronómetro, 15 min cada uno, los ejercicios 4.5.1, 4.5.3, 4.5.5, 4.5.7, 4.5.11 y 4.5.12.
  6. Plan 2016: agrega los ejercicios 4.5.2, 4.5.8 y 4.5.13. Plan 2010: agrega 4.5.4 y 4.5.6.

4.1 Conceptos y expresiones

Todo lo de esta unidad se reduce a dos datos por objeto: una recta queda determinada por **un punto y un vector director**; un plano, por **un punto y un vector normal**. Los productos punto, cruz y mixto (Unidad 3) hacen el resto.

4. Escribe la fórmula antes de sustituir: comp, $\overrightarrow{\text{comp}}$, área o volumen. Así se ve si falta un $\frac{1}{2}$, un $\frac{1}{6}$ o un valor absoluto.
5. Comprueba: el producto cruz es perpendicular a los dos factores, el punto obtenido cumple la condición que no usaste, los parámetros dan el área o volumen pedidos.
6. Deja los resultados exactos (radicales racionalizados o no, pero simplificados) con sus unidades.

Un producto cruz bien hecho resuelve la mitad de los problemas de esta unidad: área, vector perpendicular, paralelismo y volumen salen de él.



Resolución.

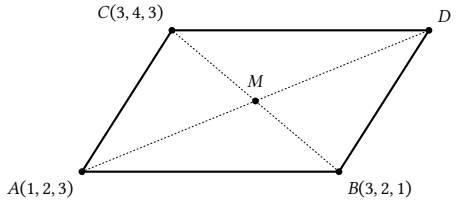
1. A**:** $\vec{a} = 16(\cos 60^\circ, \operatorname{sen} 60^\circ, 0) = \left(8, 8\sqrt{3}, 0\right)$.
2. B**:** $\overrightarrow{AB} = 6\hat{k}$ (hacia arriba), así que $B\left(8, 8\sqrt{3}, 6\right)$.
3. **Distancia al eje** y**:** $d = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$. (Con vectores: $d = \frac{|\overrightarrow{OB} \times \hat{\jmath}|}{|\hat{\jmath}|} = |(-6, 0, 8)| = 10$.)

Resultado: $d = 10$ unidades.

Ejercicio 3.5.14 · Paralelogramo: punto de cruce de las diagonales y ángulo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(3, 4, 3)$ y D son los vértices del paralelogramo de la figura, cuyas diagonales se cortan en M. Determine: a) las coordenadas de M; b) el coseno del ángulo entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



Resolución.

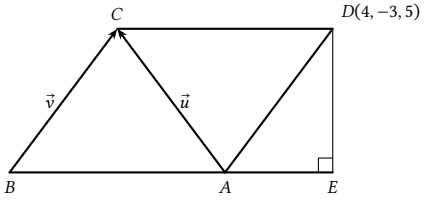
1. **Lectura de la figura:** los vértices en orden son A, B, D, C; las diagonales son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
2. **a)** Las diagonales se cortan en su punto medio: $M = \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}(6, 6, 4) = (3, 3, 2)$. (Con $D = B + C - A = (5, 4, 1)$, también $\frac{1}{2}(A + D) = (3, 3, 2)$.)
3. **b)** $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$: $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$ $(\theta = 60^\circ)$.

Resultado: a) $M(3, 3, 2)$; b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3.5.15 · Vértices de un paralelogramo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sea el paralelogramo $ADCB$ de la figura, donde $\vec{u} = (5, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 4, 6)$, y el punto E es el pie de la perpendicular desde D a la recta BA. Determine las coordenadas de los puntos A, C, B y E.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ es un lado y $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ es una diagonal. Los lados opuestos son iguales como vectores: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
2. A**:** $A = D - \vec{v} = (4, -3, 5) - (-1, 4, 6) = (5, -7, -1)$.
3. C**:** $C = A + \vec{u} = (10, -6, -1)$. B**:** $B = C - \vec{v} = (11, -10, -7)$.
4. **Comprobación:** $\overrightarrow{CD} = (-6, 3, 6) = \overrightarrow{BA}$.
5. E**:** es A más la componente vectorial de $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ sobre la dirección $\overrightarrow{BA} = (-6, 3, 6)$:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA} = 6 + 12 + 36 = 54, \quad |\overrightarrow{BA}|^2 = 81, \quad \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{BA}}\,\vec{v} = \tfrac{54}{81}(-6, 3, 6) = (-4, 2, 4),$$

$E = A + (-4, 2, 4) = (1, -5, 3)$. Comprobación: $\overrightarrow{ED} = (3, 2, 2)$ y $(3, 2, 2) \cdot (-6, 3, 6) = 0$.

Resultado: $A(5, -7, -1)$, $C(10, -6, -1)$, $B(11, -10, -7)$, $E(1, -5, 3)$.

Ejercicio 3.5.16 · Cuadrado en el espacio

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2017-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lados de 10 unidades; los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos al eje z y los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, al vector $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, con $A(-2, 1, 6)$. Determine: a) las coordenadas de B, C y D; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\overrightarrow{CD}$.

2. **Confundir las dos componentes.** La escalar es un número, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$; la vectorial es un vector, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$. Y se divide entre el módulo del vector *sobre* el que se proyecta.
3. **Área de paralelogramo por diagonales sin el $\frac{1}{2}$.** Con las diagonales, $A = \frac{1}{2}|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$; con los lados, $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.
4. **Tomar una diagonal como lado.** En el ejercicio 3.5.6 $\overrightarrow{BD}$ es diagonal y en el 3.5.15 $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ también; se lee la figura antes de multiplicar.
5. **Olvidar el valor absoluto o el $\frac{1}{6}$.** El producto mixto puede salir negativo; el volumen es su valor absoluto, y el del tetraedro es un sexto. Con parámetro, $|\det| = V$ da dos ecuaciones.
6. **Ángulo interior con un vector al revés.** El ángulo en A usa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$; con $\overrightarrow{BA}$ sale el suplemento (coseno con el signo cambiado).
7. **Cuarto vértice con la fórmula equivocada.** $D = A + C - B$ vale si B es el vértice opuesto a D. Se identifica primero cuál es el vértice opuesto (en el propuesto 3.6.2, R).
8. **Perder una solución.** «Paralelo a $\vec{v}$ con módulo 5», «unitario perpendicular» y los parámetros cuadráticos tienen dos respuestas; se dan las dos o se dice que hay dos.
9. **Errores en el determinante.** El término de $\hat{\jmath}$ lleva signo menos: $-(a_1b_3 - a_3b_1)$. Se comprueba que $\vec{a} \times \vec{b}$ sea perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\overrightarrow{AB} = B - A \cdot |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot$ punto medio $\frac{1}{2}(A + B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \hat{v}$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \cdot \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta \cdot \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a} \times \vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D = A + C - B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A + \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M - P$.

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe en componentes todos los vectores y segmentos del enunciado ($\overrightarrow{AB} = B - A$) antes de calcular nada.
2. Si hay figura, cópiala y marca qué vectores son lados, cuáles diagonales y el sentido de cada flecha.
3. Calcula una sola vez los productos que se repiten ($\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, módulos) y úsalos en todos los incisos.

Ejercicio propuesto 3.6.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sea el triángulo T de vértices $A(-1,0,2)$, $B(2,1,-1)$ y $C(1,-2,2)$. Determine: a) el coseno del ángulo A; b) la componente escalar de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{BC}$; c) el área de T.

Resultado: a) $\frac{2}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{19}$; b) $-\frac{15}{\sqrt{19}} = -\frac{15\sqrt{19}}{19}$; c) $\sqrt{34}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 3.6.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Los vértices de un tetraedro son $A(4,1,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,3,4)$ y $D(6,d_2,1)$. Obtenga el valor de d_2 para que el volumen del tetraedro sea de 5 unidades cúbicas.

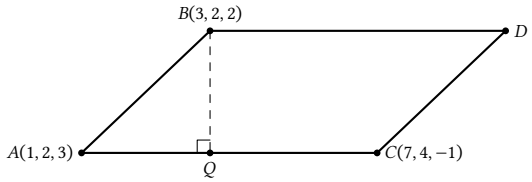
Resultado: $d_2 = 5$ o $d_2 = -5$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 3.6.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sea el paralelogramo de la figura, con $A(1,2,3)$, $B(3,2,2)$ y $C(7,4,-1)$; Q es el pie de la perpendicular desde B al lado $\overline{AC}$. Obtenga: a) las coordenadas de Q; b) el área del triángulo ABC.



Resultado: a) $Q\left(\frac{19}{7}, \frac{18}{7}, \frac{13}{7}\right)$; b) $\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 3.6.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2026-2, tipo A, problema 5.

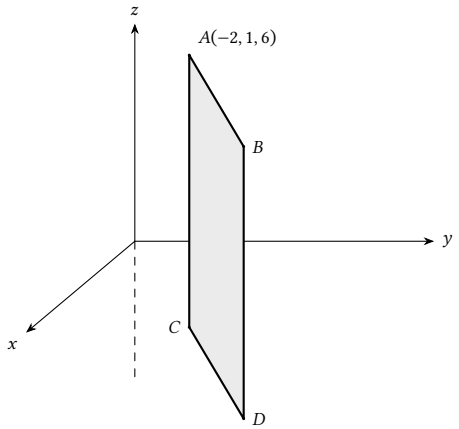
SOLO PLAN 2016 Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coinciden con los lados no paralelos de un paralelogramo de 6 unidades de área; además $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y forman un ángulo agudo. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resultado: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\sqrt{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

3.7 Errores frecuentes

1. **Restar al revés.** $\overrightarrow{AB} = B - A$ (final menos inicial). Un signo mal en $\overrightarrow{AB}$ cambia componentes, ángulos y coordenadas de puntos.



Resolución.

1. B**:** $|\vec{v}| = 5$, así que $\overrightarrow{AB} = 10 \cdot \frac{(4,3,0)}{5} = (8,6,0)$ (en la figura B está a la derecha de A): $B = (6,7,6)$.
2. C**:** C está 10 unidades abajo de A: $\overrightarrow{AC} = (0,0,-10)$, $C = (-2,1,-4)$.
3. D**:** $D = B + \overrightarrow{AC} = (6,7,-4)$. Comprobación: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ y los dos miden 10.
4. **b)** $\overrightarrow{BC} = (-8,-6,-10)$, $\overrightarrow{CD} = (8,6,0)$: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -64 - 36 = -100$, $|\overrightarrow{CD}|^2 = 100$, así que $\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CD} = (-8,-6,0)$.

Resultado: a) $B(6,7,6)$, $C(-2,1,-4)$, $D(6,7,-4)$; b) $(-8,-6,0)$.

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 2.

Sea el triángulo T cuyos vértices son el origen $O(0,0,0)$ y los puntos A y B, que están sobre los ejes x y y respectivamente. Determine unas coordenadas de A y de B tales que el área de T sea igual a 4 y la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

Resultado: $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$, o bien $A(-4,0,0)$ y $B(0,-2,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 2.

Sean los puntos $P(1,2,-3)$, $Q(0,1,2)$, $R(-1,3,-2)$ y S. a) Compruebe que P, Q y R son tres de los cuatro vértices de un rectángulo cuyo ángulo recto tiene vértice en R. b) Determine las coordenadas del cuarto vértice S.

Resultado: a) $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 0$; b) $S(2, 0, 1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 2.

Sean $\vec{a} = (6, -4, 4)$, $\vec{b} = (2, 1, -2)$ y $\vec{c} = (2, 2, c_3)$. a) Determine c_3 tal que $\vec{a}$ sea perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$. b) Obtenga el área A del paralelogramo que tiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como lados no paralelos.

Resultado: a) $c_3 = -1$; b) $A = 6\sqrt{17}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 2.

Sean $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = (-4, 1, 3)$, $\vec{c} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 10\hat{k}$ y $\vec{d} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$, donde $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{d}$ y $-2\,\vec{u} \cdot \vec{v} = -36$. Determine las componentes de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

Resultado: $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{v} = (-6, -12, 12)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 3.

Sean los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(4, 2, -1)$, $C(c_1, 0, 2)$ y $D(4, 2, d_3)$. Determine c_1 y d_3 para que los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean paralelos.

Resultado: $c_1 = 2$, $d_3 = 3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 4.

Sean $\vec{v} = -\hat{\imath} + a\hat{k}$ y $\vec{u} = \hat{\imath} + b\hat{\jmath} + \hat{k}$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, obtenga el conjunto de valores de a y el de b para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean dos lados de un paralelogramo de área 6.

Resultado: $a = 1$; $b \in \{-4,\ 4\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.7

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 5.

Sean los puntos $A\left(4\sqrt{2}, 0, -4\right)$ y $B\left(0, 4\sqrt{2}, -4\right)$, y sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Determine: a) la componente vectorial del vector de posición de B sobre el vector $\hat{\jmath}$; b) la componente escalar del vector de posición de A sobre el vector de posición de C.

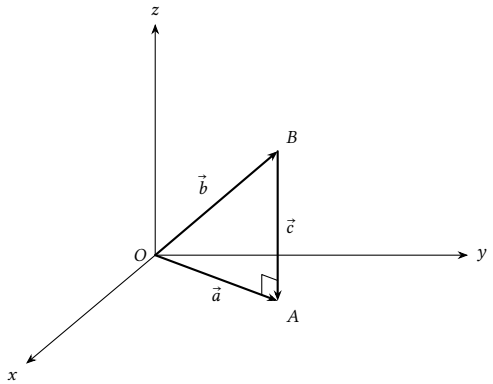
Resultado: a) $\left(0, 4\sqrt{2}, 0\right)$; b) $4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.8

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 6.

En la figura, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ está en el plano XY, $\vec{c}$ va de B a A y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, con $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$; b) el coseno del ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{a}$; c) el área del triángulo ABO.



Resultado: a) $\vec{a}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Un paralelepípedo P tiene aristas concurrentes en el vértice $A(3, -4, -2)$ que terminan en los puntos $B(-3, -3, 0)$, $C(2, -8, 0)$ y $D(-1, -7, 0)$. Determine: a) el volumen de P; b) el coseno del ángulo que forman las aristas $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

Resultado: a) 20 unidades cúbicas; b) $\cos\theta = \frac{20}{\sqrt{609}} = \frac{20\sqrt{609}}{609}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 6.

SOLO PLAN 2016 Sean $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}$ el vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, con $A(-3, 0, 1)$ y $B(-5, 1, 5)$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$; b) un vector unitario $\vec{w}$ perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo P que tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados concurrentes.

Resultado: a) $\frac{4}{7}(-2, 1, 4)$; b) $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ (o su opuesto); c) $5\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio 5.5.5 · Elipse dada por su centro y sus semiejes

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 3.

Determine unas ecuaciones paramétricas y una ecuación vectorial de la elipse con centro en $C(-2,1,5)$, semieje menor de longitud 3 y paralelo al eje de las abscisas, y semieje mayor de longitud 4 y paralelo al eje de las cotas.

Resolución.

1. **Plano:** los semiejes son paralelos a x (abscisas) y a z (cotas); la elipse está en el plano $y=1$ que pasa por el centro.
2. **Paramétricas** (sección 5.1.4): el semieje 3 multiplica en x, el 4 en z:

$$x=-2+3\cos t, \qquad y=1, \qquad z=5+4\operatorname{sen} t, \qquad t\in[0,2\pi).$$

3. **Vectorial:** $\vec{p}=(-2+3\cos t,\ 1,\ 5+4\operatorname{sen} t)=(-2,1,5)+3\cos t\,\hat{\imath}+4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.
4. **Comprobación:** $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(z-5)^2}{16}=\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$, $y=1$; focos $\big(-2,1,5\pm\sqrt{7}\big)$.

Resultado: $x=-2+3\cos t$, $y=1$, $z=5+4\operatorname{sen} t$, $t\in[0,2\pi)$; $\vec{p}=(-2,1,5)+3\cos t\,\hat{\imath}+4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.

Ejercicio 5.5.6 · Hipérbola con secante y tangente (Plan 2016)

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.

Sea la curva C representada por $\vec{r}(t)=(1,\ 2\sec t,\ 4\tan t)$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas de C; b) unas ecuaciones cartesianas de C e identifíquela.

Resolución.

1. **a)** $x=1$, $y=2\sec t$, $z=4\tan t$, con $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
2. **b) Despeje:** $\sec t=\frac{y}{2}$, $\tan t=\frac{z}{4}$. Con $\sec^2 t-\tan^2 t=1$:

$$C:\ \begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1\\ x=1\end{cases}$$

3. **Identificación:** hipérbola en el plano $x=1$, centro $(1,0,0)$, eje focal paralelo al eje y; $a=2$, $b=4$, $c=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. Vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\big(1,\pm2\sqrt{5},0\big)$, asíntotas $z=\pm2y$, $x=1$.

Resultado: $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, $x=1$: hipérbola de centro $(1,0,0)$, vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\big(1,\pm2\sqrt{5},0\big)$. Es el mismo tipo que el ejemplo 5.4.

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Se cumple: las rectas están en un mismo plano y, como no son paralelas, **se cortan**. No se cruzan.

4. **Punto de intersección:** se igualan las paramétricas con parámetros distintos:

$$1+t=\lambda, \qquad 2-t=7+3\lambda, \qquad 1-2t=4-\lambda.$$

Con la primera en la segunda: $2-t=7+3+3t$, de donde $t=-2$ y $\lambda=-1$.

5. **Comprobación** en la tercera: $1-2(-2)=5$ y $4-(-1)=5$. Se cumple.
6. **Punto:** con $t=-2$ en L_1: $(1-2,\ 2+2,\ 1+4)=(-1,4,5)$; con $\lambda=-1$ en L_2: $(-1,\ 4,\ 5)$. Coinciden.

Resultado: las rectas se cortan en $I(-1,4,5)$. No son paralelas (no hay un único plano que pedir por ese caso) ni se cruzan (su distancia es 0).

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Plano por tres puntos y distancia de un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 6.

Los puntos $A(1,-2,0)$, $B(3,-1,1)$ y $C(4,1,-2)$ pertenecen al plano π. Determine: a) una ecuación vectorial de π y sus ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana de π; c) la distancia del punto $P(-2,5,1)$ a π.

Resolución.

1. **Vectores del plano:** $\overrightarrow{AB}=(2,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(3,3,-2)$.
2. **a)** $\pi:\ \vec{p}=(1,-2,0)+r\,(2,1,1)+s\,(3,3,-2)$; paramétricas $x=1+2r+3s$, $y=-2+r+3s$, $z=r-2s$.
3. **Normal:**

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&1&1\\3&3&-2\end{vmatrix}=(-2-3,\ 3+4,\ 6-3)=(-5,7,3).$$

4. **b)** $-5(x-1)+7(y+2)+3z=0$, es decir, $5x-7y-3z-19=0$. Comprobación con C: $20-7+6-19=0$.
5. **c)** $d=\dfrac{|5(-2)-7(5)-3(1)-19|}{\sqrt{25+49+9}}=\dfrac{67}{\sqrt{83}}=\dfrac{67\sqrt{83}}{83}$.

Resultado: $\vec{p}=(1,-2,0)+r(2,1,1)+s(3,3,-2)$; $\pi:\ 5x-7y-3z-19=0$; $d=\frac{67\sqrt{83}}{83}$.

Ejercicio 4.5.2 · Plano que contiene dos rectas paralelas y su distancia

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

Sean las rectas

$$L:\ 4-x=\frac{2y-4}{8}=\frac{z+5}{3} \qquad \text{y} \qquad R:\ x-6=\frac{2-y}{4}=\frac{-2z-20}{6}.$$

Determine: a) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L y a R; b) la distancia entre L y R.

Resolución.

1. **Forma simétrica ordenada:**

$$L:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{3},\qquad R:\ \frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+10}{-3}.$$

   Entonces $P_L(4,2,-5)$, $\vec{u}_L=(-1,4,3)$; $P_R(6,2,-10)$, $\vec{u}_R=(1,-4,-3)=-\vec{u}_L$.
2. **Posición:** $\vec{u}_R=-\vec{u}_L$: son paralelas (se cumple). P_R no está en L ($\frac{6-4}{-1}=-2\neq\frac{2-2}{4}=0$): no coinciden.
3. **Normal del plano:** con $\overrightarrow{P_LP_R}=(2,0,-5)$,

$$\vec{u}_L\times\overrightarrow{P_LP_R}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&4&3\\2&0&-5\end{vmatrix}=(-20,\ 1,\ -8).$$

4. **a)** Con $\vec{n}=(20,-1,8)$ y P_L: $20(x-4)-(y-2)+8(z+5)=0$, es decir, $20x-y+8z-38=0$. Comprobación con P_R: $120-2-80-38=0$.
5. **b)** Distancia de P_R a L: el producto cruz ya está hecho,

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_LP_R}\times\vec{u}_L|}{|\vec{u}_L|}=\frac{\sqrt{400+1+64}}{\sqrt{1+16+9}}=\frac{\sqrt{465}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{465}{26}}.$$

Resultado: $\pi:\ 20x-y+8z-38=0$; $d=\sqrt{\frac{465}{26}}=\frac{\sqrt{12090}}{26}\approx 4.2$.

Ejercicio 4.5.3 · Recta intersección de dos planos y punto más próximo

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Sean el punto $Q(3,1,-2)$ y los planos $\pi_1:\ -x-y+z+2=0$ y $\pi_2:\ 2x+3y-4z-7=0$. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L intersección de π_1 y π_2; b) las coordenadas del punto M de L más próximo a Q; c) el coseno del ángulo entre π_1 y π_2.

Resolución.

1. **Dirección:** $\vec{n}_1=(-1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(2,3,-4)$,

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&-1&1\\2&3&-4\end{vmatrix}=(4-3,\ 2-4,\ -3+2)=(1,-2,-1).$$

2. **Punto:** con $z=0$: $x+y=2$ y $2x+3y=7$, de donde $y=3$, $x=-1$. $P_0(-1,3,0)$ cumple las dos ecuaciones.
3. **a)** $L:\ \vec{p}=(-1,3,0)+t\,(1,-2,-1)$.
4. **b)** $\overrightarrow{P_0Q}=(4,-2,-2)$; $t=\dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\dfrac{4+4+2}{6}=\dfrac{5}{3}$. Entonces

$$M=\left(-1+\tfrac{5}{3},\ 3-\tfrac{10}{3},\ -\tfrac{5}{3}\right)=\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{5}{3}\right).$$

   Comprobación: $\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u}=\frac{7}{3}-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=0$.

4. y**:** en $(-4,5]$, t^2 toma todos los valores de $[0,25]$ ($t=0$ da 0; $t=5$ da 25). Entonces $25-t^2\in[0,25]$ y $y\in[0,5]$.
5. z**:** $z=2\cdot\frac{3}{\sqrt{t+4}}+1=2x+1$; con $x\in[1,\infty)$, $z\in[3,\infty)$.

Observación. De $z=2x+1$ se ve que la curva está en ese plano, que no es paralelo a uno coordenado; el problema solo pide intervalos, no la identificación.

Resultado: intervalo paramétrico $(-4,5]$; $x\in[1,\infty)$, $y\in[0,5]$, $z\in[3,\infty)$.

Ejercicio 5.5.4 · Parábola en el plano $x=5$: de cartesianas a paramétricas

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 5.

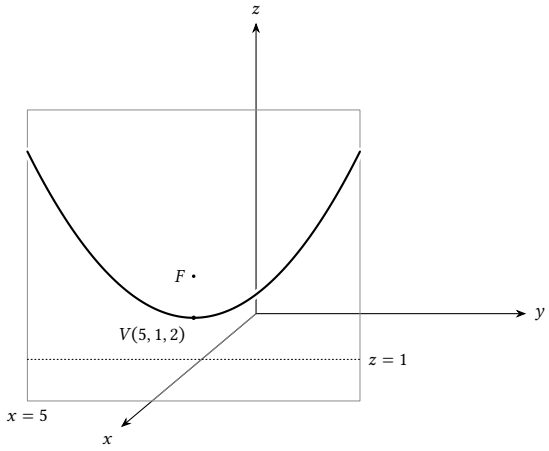
Sea la curva $C:\ \ x=5,\ y^2-2y-4z+9=0$. a) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de C. b) Determine una ecuación vectorial de C. c) Identifique a C y bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **Forma ordinaria:** $y^2-2y+1=4z-9+1$, es decir, $(y-1)^2=4(z-2)$.
2. **a) Paramétricas:** con $y-1=2t$ queda $4t^2=4(z-2)$, $z=2+t^2$:

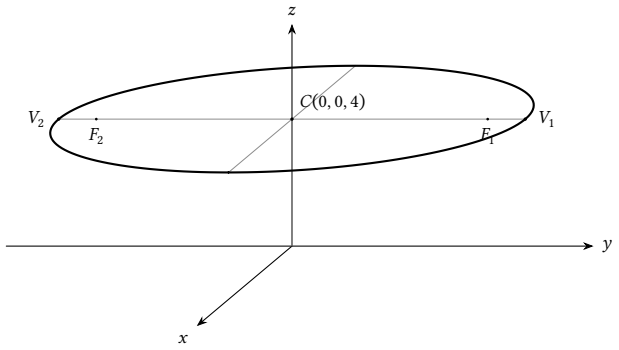
$$x=5,\qquad y=1+2t,\qquad z=2+t^2,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

   Comprobación: $(1+2t)^2-2(1+2t)-4(2+t^2)+9=1+4t+4t^2-2-4t-8-4t^2+9=0$.
3. **b) Vectorial:** $\vec{p}=(5,\ 1+2t,\ 2+t^2)=(5,1,2)+2t\,\hat{\jmath}+t^2\,\hat{k}$.
4. **c) Identificación:** parábola en el plano $x=5$, vértice $V(5,1,2)$, eje paralelo al eje z, $4p=4$, $p=1$: abre hacia las z positivas; foco $F(5,1,3)$, directriz $z=1$, $x=5$; lado recto 4.



Resultado: $x=5$, $y=1+2t$, $z=2+t^2$; $\vec{p}=(5,1,2)+2t\,\hat{\jmath}+t^2\,\hat{k}$; parábola de vértice $(5,1,2)$, eje paralelo al eje z, foco $(5,1,3)$.

1. **Despeje:** $\dfrac{x}{2\sqrt{2}} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ y $\dfrac{y}{3\sqrt{3}} = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$.
2. **Identidad:** al sumar los cuadrados se cancelan los productos $\pm 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$:
$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 = 2\big(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\big) = 2.$$
3. **Sustitución:**
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{27} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{54} = 1.$$
4. **Identificación:** elipse en el plano $z = 4$, centro $C(0,0,4)$, eje mayor paralelo al eje y ($54 > 16$); $a = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, $c = \sqrt{54-16} = \sqrt{38}$. Vértices $\big(0, \pm 3\sqrt{6}, 4\big)$, extremos del eje menor $(\pm 4, 0, 4)$, focos $\big(0, \pm\sqrt{38}, 4\big)$.



Resultado: $C:\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{54} = 1$, $z = 4$: elipse de centro $(0,0,4)$, eje mayor paralelo al eje y, $a = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, focos $\big(0, \pm\sqrt{38}, 4\big)$.

Ejercicio 5.5.3 · Intervalo paramétrico y extensión con raíces SOLO PLAN 2010

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 6.

Sea la curva C de ecuación vectorial

$$\vec{p} = \left(\frac{3}{\sqrt{t+4}}\right)\hat{\imath} + \left(\sqrt{25 - t^2}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{6}{\sqrt{t+4}} + 1\right)\hat{k}.$$

Obtenga: a) unas ecuaciones paramétricas de C; b) el intervalo paramétrico; c) el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas x, y y z de los puntos de la curva.

Resolución.

1. **a)** $x = \dfrac{3}{\sqrt{t+4}}$, $y = \sqrt{25 - t^2}$, $z = \dfrac{6}{\sqrt{t+4}} + 1$.
2. **b) Condiciones:** en x y z la raíz está en el denominador: $t + 4 > 0$, $t > -4$. En y: $25 - t^2 \geq 0$, $-5 \leq t \leq 5$. Intersección: $t \in (-4, 5]$.
3. **c)** x**:** $t + 4$ recorre $(0, 9]$, así que $\sqrt{t+4} \in (0, 3]$ y $x = \frac{3}{\sqrt{t+4}}$ es decreciente: $x = 1$ en $t = 5$ y $x \to \infty$ cuando $t \to -4^+$. Entonces $x \in [1, \infty)$.

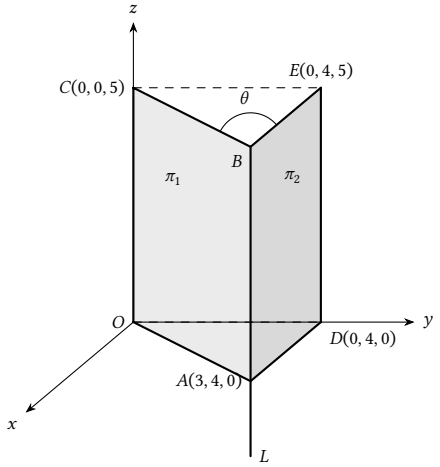
5. **c)** $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 - 3 - 4 = -9$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{29}$:
$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{87}} = \frac{3\sqrt{87}}{29}.$$
(El ángulo obtuso entre las normales tiene coseno $-\frac{3\sqrt{87}}{29}$.)

Resultado: $L:\ \vec{p} = (-1, 3, 0) + t(1, -2, -1)$; $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; $\cos\theta = \frac{3\sqrt{87}}{29}$.

Ejercicio 4.5.4 · Los dos planos de una figura

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 5.

Sean los planos π_1 y π_2 de la figura. Obtenga: a) la ecuación cartesiana de cada uno; b) el ángulo θ que forman; c) unas ecuaciones paramétricas de la recta L, intersección de π_1 y π_2; d) la distancia del origen a π_2.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** π_1 pasa por O, $C(0,0,5)$ y $A(3,4,0)$; π_2, por $D(0,4,0)$, $E(0,4,5)$ y A. B está sobre la vertical de A, a la altura de C y E: $B(3,4,5)$.
2. **a)** π_1**:** $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = (0,0,5) \times (3,4,0) = (-20, 15, 0)$, o sea $\vec{n}_1 = (4, -3, 0)$. Como pasa por el origen: $\pi_1:\ 4x - 3y = 0$. Comprobación con A: $12 - 12 = 0$.
3. **a)** π_2**:** D, E y A tienen $y = 4$: $\pi_2:\ y - 4 = 0$, $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$. (Con productos: $\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DA} = (0,0,5) \times (3,0,0) = (0, 15, 0)$.)
4. **b)** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \dfrac{3}{5}$. Lo confirma la figura: $\overrightarrow{BC} = (-3, -4, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (-3, 0, 0)$, $\cos\theta = \frac{9}{5\cdot 3} = \frac{3}{5}$. Entonces $\theta = \operatorname{ang}\cos\frac{3}{5} \approx 53.1^\circ$.
5. **c)** $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (4, -3, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 4)$: dirección $\hat{k}$, por A: $x = 3$, $y = 4$, $z = t$.
6. **d)** $d(O, \pi_2) = \dfrac{|0 - 4|}{1} = 4$.

Resultado: $\pi_1:\ 4x-3y=0$, $\pi_2:\ y=4$; $\theta=\arccos\frac{3}{5}$; $L:\ x=3,\ y=4,\ z=t$; $d=4$.

Ejercicio 4.5.5 · Recta de intersección, plano por dos rectas y ángulo recta–plano

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 3.

Sean la recta L, intersección de los planos $\pi_1:\ x-3y+z+2=0$ y $\pi_2:\ x-4y+2z+1=0$, y el plano π_3 que contiene a las rectas $L_1:\ \vec{p}=(1,1,4)+t(1,-1,5)$ y $L_2:\ \vec{p}=(-1,-1,-2)+r(1,3,1)$. a) Determine las coordenadas del punto I de intersección de L y π_3. b) Obtenga el coseno de uno de los ángulos que forman L y π_3.

Resolución.

1. **Recta L:** $(1,-3,1)\times(1,-4,2)=(-6+4,\ 1-2,\ -4+3)=(-2,-1,-1)$; se toma $\vec{u}=(2,1,1)$. Con $z=0$: $x-3y=-2$, $x-4y=-1$, de donde $y=-1$, $x=-5$. $L:\ \vec{p}=(-5,-1,0)+t(2,1,1)$.
2. **Plano π_3:**

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&-1&5\\1&3&1\end{vmatrix}=(-1-15,\ 5-1,\ 3+1)=(-16,4,4).$$

   Se comprueba que L_1 y L_2 son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_2}=(-2,-2,-6)$ y $(-2,-2,-6)\cdot(-16,4,4)=32-8-24=0$. Con $\vec{n}=(4,-1,-1)$ y $(1,1,4)$: $4(x-1)-(y-1)-(z-4)=0$, es decir, $\pi_3:\ 4x-y-z+1=0$.
3. **a)** En π_3: $4(-5+2t)-(-1+t)-t+1=6t-18=0$, $t=3$. $I(1,2,3)$; comprobación: $4-2-3+1=0$.
4. **b)** $\vec{u}\cdot\vec{n}=8-1-1=6$, $|\vec{u}|=\sqrt{6}$, $|\vec{n}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad\cos\varphi=\sqrt{1-\tfrac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Resultado: $I(1,2,3)$; $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$, con φ el ángulo entre L y π_3 (el ángulo entre L y la normal tiene coseno $\frac{\sqrt{3}}{3}$).

Ejercicio 4.5.6 · Punto más cercano entre dos rectas y plano paralelo a ambas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Sean el punto $A(1,-3,0)$ y las rectas

$$L:\ x-3=\frac{-y-1}{-2}=\frac{2-z}{-1}\qquad\text{y}\qquad M:\ \vec{p}=(0,1,3)+t\,(2,0,2),\ t\in\mathbb{R}.$$

Determine: a) las coordenadas del punto B de la recta L más cercano a M; b) una ecuación cartesiana del plano π paralelo a L y a M que contiene al punto A.

Resolución.

1. **Datos de L:** $\frac{-y-1}{-2}=\frac{y+1}{2}$ y $\frac{2-z}{-1}=z-2$: $L:\ x-3=\frac{y+1}{2}=z-2$, con $P_L(3,-1,2)$ y $\vec{u}_L=(1,2,1)$. De M: $P_M(0,1,3)$, $\vec{u}_M=(2,0,2)$.
2. **Puntos genéricos:** $P(s)=(3+s,\ -1+2s,\ 2+s)\in L$ y $Q(t)=(2t,\ 1,\ 3+2t)\in M$, con $\overrightarrow{QP}=(3+s-2t,\ -2+2s,\ -1+s-2t)$.

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Parábola con coseno del ángulo doble

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 5.

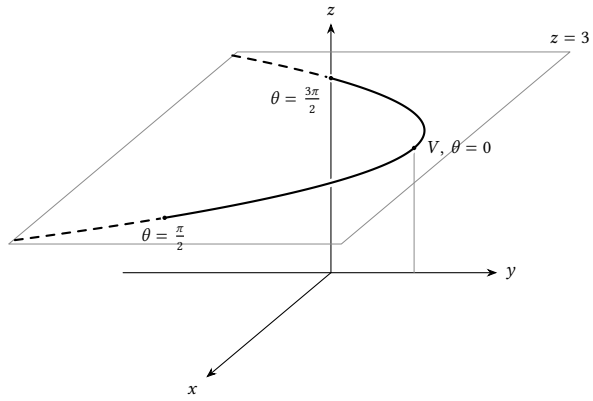
Sea la curva $C:\ x=4\operatorname{sen}\theta,\ y=2\cos2\theta,\ z=3$; $\theta\geq0$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C y el intervalo de valores para x, y y z. b) Bosqueje la gráfica de C en el plano $z=3$.

Resolución.

1. **a) Identidad:** como x trae $\operatorname{sen}\theta$, se usa $\cos2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta$ con $\operatorname{sen}\theta=\frac{x}{4}$:

$$y=2\left(1-2\cdot\frac{x^2}{16}\right)=2-\frac{x^2}{4}\quad\Longrightarrow\quad x^2=-4(y-2).$$

2. **Cartesianas:** $C:\ x^2=-4(y-2)$, $z=3$. Parábola de vértice $V(0,2,3)$, eje paralelo al eje y, $4p=-4$, $p=-1$: abre hacia las y negativas, foco $(0,1,3)$, directriz $y=3$, $z=3$.
3. **Intervalos** ($\theta\geq0$ contiene periodos completos): $-1\leq\operatorname{sen}\theta\leq1$ da $x\in[-4,4]$; $-1\leq\cos2\theta\leq1$ da $y\in[-2,2]$; $z=3$.
4. **Recorte:** la parábola completa no tiene límite en x; aquí solo se recorre el arco con $|x|\leq4$, que va de $(-4,-2,3)$ a $(4,-2,3)$ pasando por el vértice. Al crecer θ el punto va y viene sobre ese arco.
5. **b) Bosquejo:** el arco en el plano $z=3$, con sus extremos.



Resultado: $x^2=-4(y-2)$, $z=3$: arco de parábola con vértice $(0,2,3)$; $x\in[-4,4]$, $y\in[-2,2]$, $z=3$.

Ejercicio 5.5.2 · Elipse con suma y diferencia de seno y coseno

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 4.

Sea la curva $C:\ x=2\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta,\ y=3\sqrt{3}\cos\theta-3\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta,\ z=4$. Determine unas ecuaciones cartesianas de C e identifíquela.

Resolución.

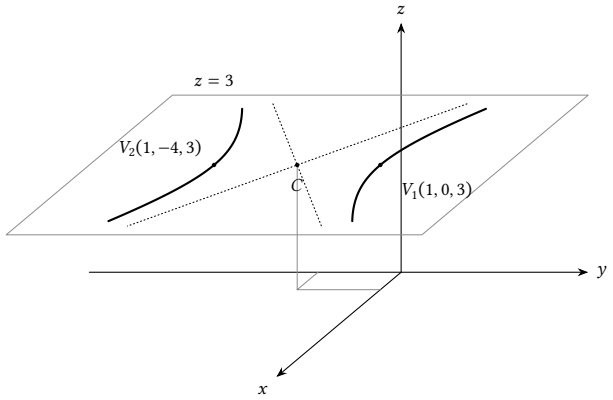
Resolución.

1. **a)** SOLO PLAN 2010 $\tan\theta$ y $\sec\theta$ existen para $\cos\theta \neq 0$; $z = 3$ no restringe. El intervalo paramétrico es $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entero); para recorrer la curva una vez basta $\theta \in [0, 2\pi)$ sin $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.
2. **b) Paramétricas:** $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
3. **Despeje:** $\tan\theta = \dfrac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \dfrac{y+2}{2}$.
4. **Identidad** $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$:

$$C: \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

5. **Identificación:** hipérbola en el plano $z = 3$, con centro $C(1, -2, 3)$ y eje focal paralelo al eje y (el término positivo es el de y); $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
   - vértices $V(1, -2 \pm 2, 3)$: $V_1(1, 0, 3)$ y $V_2(1, -4, 3)$;
   - focos $F\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$;
   - asíntotas: $y + 2 = \pm\frac{2}{3}(x-1)$, $z = 3$.

   Con $\theta \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, $\sec\theta \geq 1$ y $y \geq 0$: rama de V_1; con $\theta \in \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$, $y \leq -4$: rama de V_2. Se recorren las dos ramas completas.
6. **c) Bosquejo:** el plano $z = 3$, el centro, los vértices, las asíntotas y las dos ramas.



Resultado: SOLO PLAN 2010 intervalo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $C: \frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$, $z = 3$: hipérbola de centro $(1, -2, 3)$, eje focal paralelo al eje y, $a = 2$, $b = 3$, vértices $(1, 0, 3)$ y $(1, -4, 3)$, focos $\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$.

3. **Perpendicular común:** $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}_L = 6s - 4t - 2 = 0$ y $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}_M = 4s - 8t + 4 = 0$. De la segunda, $s = 2t - 1$; en la primera, $8t - 8 = 0$: $t = 1$, $s = 1$.
4. **a)** $B = P(1) = (4, 1, 3)$. (El punto de M más cercano es $Q(1) = (2, 1, 5)$; $\overrightarrow{QB} = (2, 0, -2)$ es perpendicular a las dos rectas y la distancia entre ellas es $2\sqrt{2}$.)
5. **b)** $\vec{n} = \vec{u}_L \times \vec{u}_M = (4-0,\ 2-2,\ 0-4) = (4, 0, -4)$, o $(1, 0, -1)$. Por A: $(x-1) - (z-0) = 0$.

Resultado: $B(4, 1, 3)$; $\pi:\ x - z - 1 = 0$.

Ejercicio 4.5.7 · Distancia entre rectas que se cruzan y plano por dos rectas

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 3.

Sean las rectas

$$L_1:\ \frac{1-x}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+5}{3}, \qquad L_2:\ \vec{p} = (5+2t,\ -5-3t,\ 1+5t), \qquad L_3:\ \begin{cases} x = 5 + 4r \\ y = 2 + 2r \\ z = -4 + r \end{cases}$$

Determine: a) la distancia entre L_1 y L_2; b) una ecuación cartesiana del plano π al que pertenecen L_1 y L_3; c) las coordenadas del punto de intersección del plano $z + 4 = 0$ con la recta L_2.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{1-x}{-2} = \frac{x-1}{2}$: $P_1(1, 0, -5)$, $\vec{u}_1 = (2, -2, 3)$; $P_2(5, -5, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -3, 5)$; $P_3(5, 2, -4)$, $\vec{u}_3 = (4, 2, 1)$.
2. **a)** $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (-10 + 9,\ 6 - 10,\ -6 + 4) = (-1, -4, -2)$, de módulo $\sqrt{21}$; $\overrightarrow{P_1P_2} = (4, -5, 6)$ y $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = -4 + 20 - 12 = 4 \neq 0$: se cruzan, y

$$d = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

3. **b)** $\vec{u}_1 \times \vec{u}_3 = (-2 - 6,\ 12 - 2,\ 4 + 8) = (-8, 10, 12)$, o $(4, -5, -6)$. Son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 2, 1)$ y $(4, 2, 1) \cdot (4, -5, -6) = 16 - 10 - 6 = 0$. Por P_1: $4(x-1) - 5y - 6(z+5) = 0$, es decir, $4x - 5y - 6z - 34 = 0$. Comprobación con P_3: $20 - 10 + 24 - 34 = 0$.
4. **c)** $1 + 5t = -4 \Rightarrow t = -1$: $(5 - 2,\ -5 + 3,\ 1 - 5) = (3, -2, -4)$.

Resultado: $d = \frac{4\sqrt{21}}{21}$; $\pi:\ 4x - 5y - 6z - 34 = 0$; $(3, -2, -4)$.

Ejercicio 4.5.8 · Plano equidistante y perpendicular común

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas

$$L:\ \vec{r}(t) = (3, 4, -7) + t\,(1, -1, 1) \qquad \text{y} \qquad R:\ \frac{x-1}{3} = \frac{-2-y}{-1} = \frac{2z-2}{2}.$$

Determine: a) la distancia entre L y R; b) la ecuación cartesiana del plano π que es paralelo a L y a R y equidista de ellas; c) una ecuación vectorial de la recta P perpendicular a L y a R que contiene al punto $A(2, 3, -1)$.

Resolución.

1. **Datos de R:** $\frac{-2-y}{-1} = y+2$ y $\frac{2z-2}{2} = z-1$: $P_R(1,-2,1)$, $\vec{u}_R = (3,1,1)$. De L: $P_L(3,4,-7)$, $\vec{u}_L = (1,-1,1)$.
2. **Dirección común:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (-1-1,\ 3-1,\ 1+3) = (-2,2,4)$; se usa $\vec{w} = (1,-1,-2)$, $|\vec{w}| = \sqrt{6}$.
3. **a)** $\overrightarrow{P_L P_R} = (-2,-6,8)$, $\overrightarrow{P_L P_R} \cdot \vec{w} = -2+6-16 = -12$:

$$d = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

4. **b)** Los planos con normal $\vec{w}$ que contienen a cada recta son $x-y-2z = 13$ (por P_L: $3-4+14$) y $x-y-2z = 1$ (por P_R: $1+2-2$). El equidistante tiene el término medio: $x-y-2z = 7$. Comprobación: su distancia a P_L es $\frac{|13-7|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, la mitad de d.
5. **c)** Perpendicular a las dos: dirección $\vec{w}$. $P:\ \vec{p} = (2,3,-1) + t(1,-1,-2)$.

Resultado: $d = 2\sqrt{6}$; $\pi:\ x-y-2z-7=0$; $P:\ \vec{p} = (2,3,-1)+t(1,-1,-2)$.

Ejercicio 4.5.9 · Intersección de dos rectas, plano que las contiene y distancia

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas $L:\ 1-x = \frac{y-3}{2};\ z=4$ y $R:\ \vec{p} = (4-t,\ 1-2t,\ 2+2t)$. Determine: a) si existen, las coordenadas del punto I de intersección de L y R; b) una ecuación vectorial del plano π que contiene a L y a R; c) la distancia del punto $B(3,4,5)$ a L.

Resolución.

1. **Datos:** $L:\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2},\ z=4$: $P_L(1,3,4)$, $\vec{u}_L = (-1,2,0)$. R: $P_R(4,1,2)$, $\vec{u}_R = (-1,-2,2)$.
2. **a)** $1-s = 4-t$, $3+2s = 1-2t$, $4 = 2+2t$. De la tercera, $t=1$; de la primera, $s=-2$; en la segunda, $3-4 = -1 = 1-2$: se cumple. $I(3,-1,4)$.
3. **b)** Se cortan; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4)+r(-1,2,0)+s(-1,-2,2)$. (Su normal es $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (4,2,4)$: $2x+y+2z-13=0$.)
4. **c)** $\overrightarrow{P_L B} = (2,1,1)$,

$$\overrightarrow{P_L B} \times \vec{u}_L = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,5), \qquad d = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}.$$

Resultado: $I(3,-1,4)$; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4) + r(-1,2,0) + s(-1,-2,2)$; $d = \sqrt{6}$.

Ejercicio 4.5.10 · Plano perpendicular al plano XZ y distancia del origen a una recta

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 3.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-4}{8} = \frac{-y-1}{5} = \frac{z+1}{3}$. Obtenga: a) la ecuación cartesiana del plano π que es perpendicular al plano coordenado XZ y contiene a la recta L; b) la distancia del origen a la recta L.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2x-4}{8} = \frac{x-2}{4}$ y $\frac{-y-1}{5} = \frac{y+1}{-5}$: $P_0(2,-1,-1)$, $\vec{u} = (4,-5,3)$.

5.3.3 *Intervalo paramétrico* SOLO PLAN 2010

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es; pasa al paso 4.
2. Para cada componente, escribe su condición: radicando ≥ 0 (o >0 si la raíz está en un denominador), denominador $\neq 0$, puntos excluidos de tan, sec, csc, cot.
3. Intersecta las condiciones: $t > -4$ y $-5 \leq t \leq 5$ dan $(-4,5]$.
4. Escríbelo con intervalos. Si es periódico, da también un periodo que recorra la curva una vez.

5.3.4 *Extensión (intervalos de variación)* SOLO PLAN 2010

1. Para cada coordenada, calcula el recorrido de su función en el intervalo paramétrico.
2. **Trigonométricas:** parte de $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ (o del intervalo de $\operatorname{sen} t$ en el intervalo dado), $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$, $\tan t \in \mathbb{R}$, y aplica las operaciones de la componente (multiplicar por un negativo invierte la desigualdad).
3. **Raíces y cocientes:** si la función es creciente o decreciente, evalúa en los extremos del intervalo y toma el límite en los extremos excluidos ($x \to \infty$ cuando el denominador tiende a 0).
4. La coordenada constante tiene un solo valor: $z = 3$.
5. Compara con la cónica completa: si la extensión es menor, la curva es solo un arco.

5.3.5 *Bosquejo en su plano*

1. Traza los ejes x, y, z en perspectiva (x oblicuo hacia el frente).
2. Dibuja el plano de la curva (un paralelogramo) y una línea guía desde el centro o el vértice hasta el plano coordenado.
3. Marca el centro (o vértice), los vértices y, si aplica, las asíntotas de la hipérbola, con sus coordenadas completas.
4. Traza la curva solo en la extensión obtenida; los puntos excluidos, vacíos.

5.3.6 *De cartesianas a paramétricas*

1. Lleva la ecuación de la curva a la forma ordinaria (completa cuadrados).
2. Usa la tabla de la sección 5.1.4: en la elipse, $u-h = a\cos t$ y $v-k = b\operatorname{sen} t$; en la parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$, toma $u-h$ proporcional a t de modo que v quede sin fracciones ($y-1 = 2t$ en $(y-1)^2 = 4(z-2)$ da $z = 2+t^2$).
3. Si la cónica se da por sus elementos (centro, semiejes y a qué eje son paralelos), el semieje paralelo a un eje multiplica a $\cos t$ o $\operatorname{sen} t$ en esa coordenada.
4. La coordenada constante es la tercera ecuación. Escribe la ecuación vectorial con 5.3.1 y comprueba sustituyendo en la cartesiana.

5.4 Ejemplo resuelto

> **Ejemplo resuelto · Hipérbola con tangente y secante**
>
> *Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 4.*
> Sea la curva C representada por la ecuación vectorial $\vec{p} = (1+3\tan\theta,\ -2+2\sec\theta,\ 3)$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine una pareja de ecuaciones cartesianas de C e identifíquela. c) Bosqueje C.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«ecuación vectorial» $\vec{p} = (\ldots)$ y «unas ecuaciones paramétricas», o al revés	reescribir componente por componente	5.3.1
«ecuaciones cartesianas», «una pareja de ecuaciones», «identificarla»	eliminar el parámetro, nombre y elementos	5.3.2
sec y tan; csc; $\cos 2\theta$; $\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta$	la identidad que corresponde	5.3.2
SOLO PLAN 2010 «intervalo paramétrico»	dominio común de las funciones	5.3.3
SOLO PLAN 2010 «intervalos de variación», «conjunto de valores de x, y, z»	recorrido de cada función	5.3.4
«bosquejar la gráfica de C», «en el plano $z = 3$»	dibujo en su plano, con ejes 3D	5.3.5
la curva dada con dos ecuaciones cartesianas, o una cónica con «centro» y «semiejes»	paramétricas y vectorial	5.3.6

5.3 Procedimientos

5.3.1 Paramétricas y ecuación vectorial

1. **De vectorial a paramétricas:** cada componente de $\vec{p}$ es una ecuación: $\vec{p} = (1 + 3\tan\theta,\ -2 + 2\sec\theta,\ 3)$ da $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
2. **De paramétricas a vectorial:** $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, o separando punto fijo y términos con el parámetro: $\vec{p} = (-2, 1, 5) + 3\cos t\,\hat{\imath} + 4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.
3. Simplifica lo que se pueda antes de seguir: $\frac{4}{\csc\theta} = 4\operatorname{sen}\theta$, $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$. Anota el intervalo del parámetro junto a las ecuaciones.

5.3.2 Ecuaciones cartesianas e identificación

1. **Plano:** la coordenada constante da la primera ecuación ($z = 3$).
2. **Despeje:** de las otras dos, aísla la función trigonométrica: $\tan\theta = \frac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \frac{y+2}{2}$.
3. **Identidad:** sustituye en la identidad de la sección 5.1.3. Con $\cos 2\theta$, escríbelo como $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, o como $2\cos^2\theta - 1$ si trae $\cos\theta$.
4. **Forma ordinaria:** ordena la ecuación como en la tabla de la sección 5.1.4 (completa cuadrados si la curva viene en forma general).
5. **Identificación:** nombre de la cónica y elementos: plano, centro o vértice, eje focal (paralelo a qué eje), semiejes, vértices, focos; asíntotas o directriz si aplica. Con la tercera coordenada en cada punto.
6. **Recorte:** SOLO PLAN 2010 si la extensión (5.3.4) no cubre toda la cónica, dilo: «arco de parábola», «semicircunferencia», «elipse sin los puntos …».

2. **a)** El plano XZ tiene normal $\hat{\jmath}$; π contiene las direcciones $\vec{u}$ y $\hat{\jmath}$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 0, 4).$$

   Por P_0: $-3(x-2) + 4(z+1) = 0$, es decir, $3x - 4z - 10 = 0$. (No tiene término en y, como todo plano perpendicular al XZ.)
3. **b)** $\overrightarrow{OP_0} \times \vec{u} = (2, -1, -1) \times (4, -5, 3) = (-3 - 5,\ -4 - 6,\ -10 + 4) = (-8, -10, -6)$, de módulo $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; $|\vec{u}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. $d = 2$.

Resultado: $\pi:\ 3x - 4z - 10 = 0$; $d = 2$.

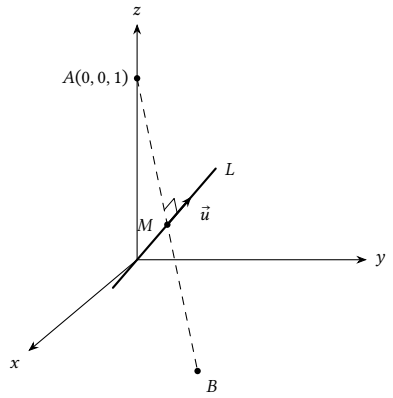
Ejercicio 4.5.11 · Punto simétrico respecto a una recta

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3.

Determine las coordenadas cartesianas del punto B, simétrico del punto $A(0, 0, 1)$ respecto a la recta L que contiene al origen y es paralela al vector $\vec{u} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Resolución.

1. **Recta:** $\vec{u}$ es paralelo a $(1, 1, 1)$: $L:\ \vec{p} = t\,(1, 1, 1)$.
2. **Pie de la perpendicular:** $t = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot (1, 1, 1)}{3} = \frac{1}{3}$, $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Comprobación: $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MA} \cdot (1, 1, 1) = 0$.
3. **Simétrico:** M es el punto medio de AB: $B = 2M - A = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - 1\right)$.



Resultado: $B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 4.5.12 · Parámetro para un ángulo de 30° entre recta y plano

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 5.

Sean la recta $R:\ \frac{3+x}{-1} = \frac{-y-1}{-1} = \frac{-z+2}{-1}$ y el plano $\pi:\ x + By + z = 0$. Determine el conjunto de valores que puede tomar B para que R y π formen un ángulo de 30°.

Resolución.

1. **Dirección de R:** $\frac{-y-1}{-1} = \frac{y+1}{1}$ y $\frac{-z+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$: $R:\ \frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$, $\vec{u} = (-1, 1, 1)$.
2. **Ángulo recta–plano (seno):** $\vec{n} = (1, B, 1)$, $\vec{u} \cdot \vec{n} = -1 + B + 1 = B$:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|B|}{\sqrt{3}\sqrt{2 + B^2}}.$$

3. **Ecuación:** $2|B| = \sqrt{3}\sqrt{2 + B^2} \Rightarrow 4B^2 = 6 + 3B^2 \Rightarrow B^2 = 6$.

Resultado: $B \in \{-\sqrt{6},\ \sqrt{6}\}$.

Ejercicio 4.5.13 · Ángulo e intersección de una recta y un plano

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 7.

Sean la recta $L:\ \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-3} = \frac{2-z}{3}$ y el plano $\pi:\ x - y - z + 19 = 0$. Determine: a) el ángulo entre L y π; b) las coordenadas del punto I de intersección de L y π.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2-z}{3} = \frac{z-2}{-3}$: $P_0(-3, 5, 2)$, $\vec{u} = (3, -3, -3)$, paralelo a $(1, -1, -1)$. $\vec{n} = (1, -1, -1)$.
2. **a)** $\vec{u} = 3\vec{n}$: la recta es paralela a la normal, es decir, **perpendicular** al plano. Con la fórmula: $\operatorname{sen}\varphi = \frac{|3+3+3|}{\sqrt{27}\sqrt{3}} = 1$, $\varphi = 90^\circ$.
3. **b)** Con $L:\ (-3 + t,\ 5 - t,\ 2 - t)$: $(-3 + t) - (5 - t) - (2 - t) + 19 = 3t + 9 = 0$, $t = -3$. $I(-6, 8, 5)$; comprobación: $-6 - 8 - 5 + 19 = 0$.

Resultado: $\varphi = 90^\circ$; $I(-6, 8, 5)$.

Ejercicio 4.5.14 · Punto de un plano más cercano a un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-1, tipo C, problema 6.

Obtenga las coordenadas del punto P del plano $\pi:\ 3x - y + 2z = 4$ más cercano al punto $M(1, 5, -4)$.

Resolución.

1. **Recta perpendicular por M:** dirección $\vec{n} = (3, -1, 2)$: $(1 + 3t,\ 5 - t,\ -4 + 2t)$.
2. **Intersección con π:** $3(1 + 3t) - (5 - t) + 2(-4 + 2t) = 14t - 10 = 4$, $t = 1$.
3. **Punto:** $P(4, 4, -2)$; comprobación: $12 - 4 - 4 = 4$. (La distancia de M al plano es $|\overrightarrow{MP}| = |\vec{n}| = \sqrt{14}$.)

Resultado: $P(4, 4, -2)$.

Ejercicio 4.5.15 · Recta por el origen que corta perpendicularmente a otra

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 1.

Sea la recta $M:\ x = 4,\ y = 5 + t,\ z = -2t$. Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al origen y corta perpendicularmente a M.

Resolución.

1. **Datos:** $\vec{u}_M = (0, 1, -2)$; punto genérico de M: $F(4,\ 5 + t,\ -2t)$.
2. **Perpendicularidad:** $\overrightarrow{OF} \cdot \vec{u}_M = 5 + t + 4t = 0$, $t = -1$, $F(4, 4, 2)$.
3. **Recta:** por O y F, dirección $(4, 4, 2)$, o $(2, 2, 1)$.

Cónica	Paramétricas	Cartesiana
Elipse	$u = h + a\cos t$, $v = k + b\operatorname{sen} t$	$\frac{(u-h)^2}{a^2} + \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$
Hipérbola	$u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$	$\frac{(u-h)^2}{a^2} - \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$
Parábola	$u = h + t$, $v = k + \frac{t^2}{4p}$	$(u - h)^2 = 4p\,(v - k)$

En la elipse y la circunferencia, $t \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez. En la hipérbola, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da la rama con $u \geq h + a$ ($\sec t > 0$) y $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la otra. El eje focal de la hipérbola es el de la variable que lleva sec.

Elementos que se piden al identificar: centro (o vértice en la parábola), plano que la contiene, semiejes a y b, vértices, focos (con $c^2 = a^2 - b^2$ en la elipse, $c^2 = a^2 + b^2$ en la hipérbola, p en la parábola), asíntotas de la hipérbola y directriz de la parábola. Todos son puntos o rectas *del espacio*: llevan la tercera coordenada constante.

5.1.5 *Intervalo paramétrico* SOLO PLAN 2010

SOLO PLAN 2010 El **intervalo paramétrico** es el conjunto de valores del parámetro para los que la ecuación vectorial está definida: el *dominio común* de las tres funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Si el enunciado da un intervalo ($\theta \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), es ese. Las restricciones vienen de:

- **raíces de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$; en un denominador, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$;
- **cocientes:** denominador $\neq 0$; $\frac{2}{t}$ excluye $t = 0$;
- **trigonométricas:** $\tan t$ y $\sec t$ excluyen $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot t$ y $\csc t$ excluyen $t = k\pi$.

Con funciones periódicas basta dar un periodo que recorra la curva una vez (por ejemplo $[0, 2\pi)$ sin los puntos excluidos), o todos los reales sin los puntos excluidos.

5.1.6 *Extensión: intervalos de variación* SOLO PLAN 2010

SOLO PLAN 2010 La **extensión** de la curva son los intervalos de variación de x, y y z: el conjunto de valores que toma cada función en el intervalo paramétrico (su recorrido). Es lo que el examen llama «el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas».

La extensión puede **recortar** la cónica: las ecuaciones cartesianas describen la cónica completa, pero las paramétricas solo recorren una parte. Casos típicos:

- $y = 2\cos 2\theta$, $x = 4\operatorname{sen}\theta$: la cartesiana es una parábola completa, pero $|x| \leq 4$ y $y \geq -2$; solo se recorre un arco (figura del ejercicio 5.5.1);
- $y = a - b\operatorname{sen}^2 t$: como $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, y va de $a - b$ a a;
- raíces: $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = 2\cos t$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da $z \geq 0$: media circunferencia;
- puntos excluidos: $z = 3 + \frac{4}{\csc\theta} = 3 + 4\operatorname{sen}\theta$ no existe donde $\operatorname{sen}\theta = 0$, así que a la elipse le faltan dos puntos.

5.2 Cómo reconocer el problema

donde $\vec{p}$ es el vector de posición del punto. Las **ecuaciones paramétricas** son las mismas tres funciones escritas por separado:

$$C:\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Pasar de una forma a la otra es solo reescribir: las componentes del vector son las paramétricas. Una misma curva admite muchas parametrizaciones distintas.

5.1.2 Curva en un plano paralelo a uno coordenado; ecuaciones cartesianas

Si una de las coordenadas es constante, por ejemplo $z(t) = 3$ para todo t, la curva está en el plano $z = 3$, paralelo al plano coordenado XY. Lo mismo con $x = k$ (paralelo al plano YZ) o $y = k$ (paralelo al plano XZ).

Una curva en el espacio se describe en forma cartesiana con **dos ecuaciones** (dos superficies que se cortan en ella). Para una curva plana son la ecuación del plano y la de la curva dentro de él:

$$C:\ \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

La primera ecuación, sola, sería una superficie (un cilindro); la segunda la recorta al plano. Por eso el examen pide «unas ecuaciones cartesianas» o «una pareja de ecuaciones cartesianas»: siempre son dos.

5.1.3 Identidades para eliminar el parámetro

Para obtener las ecuaciones cartesianas se elimina el parámetro. Con funciones trigonométricas se despejan $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$… y se usa una identidad:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \qquad \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \qquad \csc^2 t - \cot^2 t = 1,$$

$$\cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1, \qquad \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t, \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}.$$

Si aparece $\cos t + \operatorname{sen} t$ y $\cos t - \operatorname{sen} t$, se usa $(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 = 2$. Si el parámetro aparece sin funciones trigonométricas ($x = 2t$, $z = \frac{2}{t}$), se despeja t de una ecuación y se sustituye en las otras.

5.1.4 Cónicas en forma paramétrica

Las formas ordinarias de las cónicas se repasan en la Unidad 1, Parte B. En un plano con coordenadas (u, v) (dos de x, y, z; la tercera es constante), con centro o vértice (h, k):

Cónica	Paramétricas	Cartesiana
Circunferencia	$u = h + r\cos t$, $v = k + r\operatorname{sen} t$	$(u-h)^2 + (v-k)^2 = r^2$

Resultado: $L:\ x = 2s,\ y = 2s,\ z = s$ (corta a M en $F(4,4,2)$).

Ejercicio 4.5.16 · Plano en paramétricas, recta en forma general y recta perpendicular

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 2.

Sean el plano π y la recta L dados por

$$\pi:\ \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 2 - r \\ z = 2r + s \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L:\ \begin{cases} x + y - z - \frac{10}{3} = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Determine el ángulo entre π y L. b) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de la recta R perpendicular a π que contiene al punto C, intersección de π con L.

Resolución.

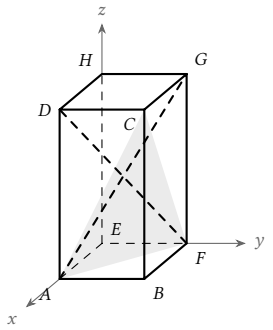
1. **Plano:** vectores $(1,-1,2)$ y $(0,0,1)$; $\vec{n} = (1,-1,2)\times(0,0,1) = (-1,-1,0)$, o $(1,1,0)$. Por $(1,2,0)$: $\pi:\ x + y - 3 = 0$.
2. **Recta:** $\vec{u} = (1,1,-1)\times(2,-3,-2) = (-2-3,\ -2+2,\ -3-2) = (-5,0,-5)$, o $(1,0,1)$.
3. **a)** $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{|1+0+0|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$: $\varphi = 30°$.
4. **Punto** C**:** con $x + y = 3$ en la primera ecuación de L, $3 - z = \frac{10}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$; en la segunda, $2x - 3y = -\frac{2}{3}$; con $x + y = 3$: $y = \frac{4}{3}$, $x = \frac{5}{3}$. $C\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
5. **b)** R tiene dirección $\vec{n} = (1,1,0)$: $x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3};\ z = -\frac{1}{3}$.

Resultado: $\varphi = 30°$; $R:\ x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3},\ z = -\frac{1}{3}$.

Ejercicio 4.5.17 · Rectas y plano en un prisma

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 4.

En el paralelepípedo recto de la figura, la base $ABFE$ es un cuadrado de lado 2 en el plano $z = 0$, sus caras son paralelas a los planos coordenados y la altura es el doble del lado de la base. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L_1 que contiene a los vértices A y G; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L_2 que contiene a F y a D; c) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a A, F y C.



Resolución.

1. **Ejes:** el enunciado no da coordenadas; se elige el origen en E, con los ejes sobre EA, EF y EH (figura). Entonces $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $F(0,2,0)$, $D(2,0,4)$, $C(2,2,4)$, $G(0,2,4)$, $H(0,0,4)$. Con otra elección los números cambian, pero no el procedimiento.
2. **a)** $\overrightarrow{AG} = (-2,2,4)$, o $(-1,1,2)$: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0) + t(-1,1,2)$.
3. **b)** $\overrightarrow{FD} = (2,-2,4)$, o $(1,-1,2)$: $L_2:\ x = s,\ y = 2 - s,\ z = 2s$.
4. **c)** $\overrightarrow{AF} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,2,4)$; $\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{AC} = (8,8,-4)$, o $(2,2,-1)$. Por A: $2(x-2) + 2y - z = 0$. Comprobación con C: $4 + 4 - 4 - 4 = 0$.

Resultado: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0) + t(-1,1,2)$; $L_2:\ x = s,\ y = 2 - s,\ z = 2s$; $\pi:\ 2x + 2y - z - 4 = 0$ (con el origen en E).

4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 4.

Sea el plano π, perpendicular al plano cartesiano XY, que contiene a la recta $L:\ \vec{p} = t\,(2,1,-3)$, y sea el plano π_0 que contiene a las rectas L_1 y L_2, paralelas a los vectores $\vec{u}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{k}$ y $\vec{u}_2 = 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + m\hat{k}$, respectivamente. Obtenga el conjunto de valores que puede tomar m para que π y π_0 formen un ángulo de 90°.

Resultado: $m = \frac{7}{2}$ (un solo valor).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 4.

Sea el plano π que contiene a la recta $L:\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3}$ y es perpendicular al plano XZ. a) Obtenga una ecuación cartesiana de π. b) Calcule la distancia del origen a π.

Resultado: $\pi:\ x - z + 8 = 0$; $d = 4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 4.

Sean la recta $L:\ \begin{cases} \frac{x}{h} = \frac{z}{\sqrt{3}} \\ y = 4 \end{cases}$ y el plano π que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y es paralelo al plano coordenado YZ. Determine el conjunto de valores de h para los cuales el ángulo entre L y π es de 60°.

Resultado: $h \in \{-3,\ 3\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Unidad 5 · Curvas en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno obtendrá ecuaciones paramétricas y en forma vectorial de curvas en el espacio e identificará curvas a partir de sus ecuaciones.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 6). No tiene objetivo propio: el tema está en los subtemas 6.12 («Representación cartesiana, paramétrica y vectorial de las cónicas») y 6.13 («Curvas en el espacio. Representación cartesiana, paramétrica y vectorial») del tema 6.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, un problema en cada uno de los 9 finales revisados (el problema 4 en los cinco más recientes; el 5 o el 6 en los de 2012-1 a 2013-1): intervalo paramétrico y extensión (intervalos de variación de x, y, z) en 6, ecuaciones cartesianas e identificación en 7 (hipérbola con sec y tan, parábola con cos 2θ o en el plano $x = 5$, elipse, circunferencia) y bosquejo en 4. En 8 de los 9 la curva está en un plano paralelo a uno coordenado. El tercer parcial 2006-2 trae otros tres problemas. En el Plan 2016 salió 1 vez en 39 finales (2º final 2016-1, problema 5: hipérbola con sec y tan); el intervalo paramétrico y la extensión solo los evalúa el Plan 2010.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad (Plan 2016: 45 minutos).
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 5.1.3 y 5.1.4 (20 min): identidades y cónicas en paramétricas.
  2. Aprende el procedimiento 5.3.2 (eliminar el parámetro e identificar) y sigue el ejemplo 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5.1 y 5.5.2 con cronómetro: 15 min cada uno, con bosquejo.
  4. Plan 2010: agrega los procedimientos 5.3.3 y 5.3.4 (intervalo paramétrico y extensión), el ejercicio 5.5.3 y los propuestos 5.6.1 a 5.6.3, que son problemas completos de final.
  5. Plan 2016: basta con los pasos 1 a 3 y el ejercicio 5.5.6.

5.1 Conceptos y expresiones

5.1.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas

Una *curva* C en el espacio se describe con un parámetro t (o θ): a cada valor del parámetro le corresponde un punto $P(x,y,z)$ de la curva. En **forma vectorial**,

$$C:\quad \vec{p}(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k},$$

9. **Punto de la recta general sin comprobar.** El punto obtenido con $z = 0$ debe satisfacer las *dos* ecuaciones de los planos.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Recta: $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{u} \cdot \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ · general: $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- Plano: $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A, B, C) \cdot \vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ · perpendiculares: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ (igual con normales). Recta ∥ plano: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; recta ⊥ plano: $\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q, \pi) = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{|\vec{n}|}$ · $d(Q, L) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$ · planos paralelos: $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $= 0$ se cortan, $\neq 0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t = \frac{\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ · simétrico: $Q' = 2M - Q$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe de cada recta su punto y su vector, y de cada plano su normal, antes de cualquier otra cosa; ordena las formas simétricas.
2. Haz un dibujo a mano alzada: qué es paralelo, qué se corta, qué distancia se pide.
3. Calcula los productos cruz con el determinante completo y comprueba el resultado con un producto punto (debe dar 0 con cada factor).
4. Antes de un plano por dos rectas o de una distancia entre rectas o planos, decide la posición relativa.
5. Comprueba cada ecuación de plano con un punto que no usaste y cada intersección en la ecuación que no usaste.
6. Deja los resultados exactos y racionalizados; los ángulos no notables, con ang cos o ang sen.

Si el tiempo no alcanza, el punto y el vector de cada recta y la normal de cada plano, bien escritos, ya son una parte importante del puntaje.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 3.

El vector normal $\vec{N}$ del plano π es perpendicular al vector $\vec{v} = (3, 5, 8)$. Además, π contiene a la recta $L: \frac{2-2x}{-2} = \frac{y+5}{-3} = z$. Determine una ecuación cartesiana de π.

Resultado: $\pi: 29x + 5y - 14z - 4 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 3.

Sean la recta $L: \begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ z = 7 \end{cases}$ y el plano $\pi: -2x - 6y + 6z = 38$. Determine la intersección de la recta con el plano.

Resultado: la recta está contenida en el plano: la intersección es toda la recta, $x = 2 + 3t,\ y = -t,\ z = 7$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 5.

Sean las rectas $M: x = 3-2t_M,\ y = -1+t_M,\ z = 2t_M$ y $N: x = -1-t_N,\ y = -3+t_N,\ z = -4 + 2t_N$, y el plano $\pi: 5x - y + 2z - 2 = 0$. Determine la ecuación cartesiana del plano π_1 paralelo a π que contiene al punto A, intersección de las rectas M y N.

Resultado: $A(-9, 5, 12)$; $\pi_1: 5x - y + 2z + 26 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.7

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 6.

Determine la distancia entre los planos $\pi_1: 2x + y + 4z = 16$ y $\pi_2: x = 4r - 4s,\ y = 8s,\ z = 2 - 2r$.

Resultado: $d = \frac{8\sqrt{21}}{21}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.8

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo A, problema 6.

Los puntos $A(-1, 1, 1)$ y $B(1, -2, 0)$ pertenecen al plano π, que contiene al origen. Determine: a) una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana de π; b) la distancia del punto $C(3, 0, -1)$ a π; c) las ecuaciones en forma simétrica de la recta L perpendicular a π que contiene a C.

Resultado: $\vec{p} = r(-1, 1, 1) + s(1, -2, 0)$, $\pi: 2x + y + z = 0$; $d = \frac{5\sqrt{6}}{6}$; $L: \frac{x-3}{2} = y = z + 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x-y+3z-9=0$ y $\pi_2:\ x+\beta y+z+D=0$. Determine: a) el valor de β para que π_1 y π_2 sean paralelos y el valor de D para que π_2 contenga al origen; b) la distancia del origen a π_1; c) una ecuación vectorial de π_1; d) unas ecuaciones paramétricas de la recta L perpendicular a π_1 que contiene al punto $A(0,0,3)$.

Resultado: $\beta=-\frac{1}{3}$, $D=0$; $d=\frac{9\sqrt{19}}{19}$; $\vec{p}=(3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$; $L:\ x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo A, problema 7.

Sean los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,1,2)$ y el plano $\pi_1:\ 2x+3y+4z-8=0$. Determine: a) unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la recta L que contiene a A y es perpendicular a π_1; b) la distancia de B a π_1; c) unas ecuaciones paramétricas del plano π_2 que contiene a B y a L.

Resultado: $L:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{4}$; $d=\frac{\sqrt{29}}{29}$; $\pi_2:\ x=2+2r-4s,\ y=1+3r,\ z=-1+4r+3s$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 4.6.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-2, tipo A, problema 7.

Sean los planos $\pi_1:\ x-2y+3z-1=0$ y $\pi_2:\ x-y-z+1=0$. Obtenga: a) el ángulo entre π_1 y π_2; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L intersección de π_1 y π_2.

Resultado: 90°; $L:\ x=-3+5t,\ y=-2+4t,\ z=t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, tipo A, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x+2y+z+4=0$ y $\pi_2:\ x=4-3t-2r,\ y=3t,\ z=2r$. a) Determine la distancia entre π_1 y π_2. b) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al punto $P(2,3,-1)$ y es paralela a π_1 y a π_2.

Resultado: los planos no son paralelos: se cortan y su distancia es 0; $L:\ x=2+t,\ y=3-2t,\ z=-1+t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 6.

Sean la recta $L:\ x=1+2t,\ y=2-t,\ z=-2t$ y el plano $\pi:\ 2x-3y+2z=-7$. Obtenga: a) las coordenadas del punto P de intersección de L y π; b) las coordenadas de un punto Q de L que diste $\frac{3}{\sqrt{17}}$ unidades de π.

Resultado: $P(-1,3,2)$; $Q(1,2,0)$ o $Q(-3,4,4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 6.

Sean las rectas $L:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y+18}{6}=2-z$ y $R:\ \frac{2x-8}{2}=\frac{y+8}{2};\ z=-5$. Obtenga: a) la distancia entre L y R; b) el coseno del ángulo entre L y R.

Resultado: $d=6$; $\cos\theta=\frac{14\sqrt{205}}{205}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 4.6.15

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 6.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-18}{6}=y-8;\ z=6$. Obtenga las coordenadas del punto B de L que se encuentra a 3 unidades del punto $Q(-1,3,4)$.

Resultado: $B(0,5,6)$ o $B(-3,4,6)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 4.6.16

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 6.

Determine una ecuación cartesiana de un plano que es perpendicular a la recta $L:\ \vec{r}=(-1,8,1)+t\,(3,-2,6)$ y cuya distancia al origen es 7.

Resultado: $3x-2y+6z-49=0$ (o $3x-2y+6z+49=0$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

4.7 Errores frecuentes

1. **Leer mal la forma simétrica.** En $4-x$, $\frac{2-y}{4}$ o $\frac{2x-4}{8}$ el punto y el vector no se leen directo: primero se deja cada fracción como $\frac{x-x_0}{a}$.
2. **Coseno en el ángulo recta–plano.** El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$ es el complemento del que se pide; con $\vec{u}$ y $\vec{n}$ va **seno**.
3. **Confundir las condiciones recta–plano.** Recta paralela al plano: $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$; perpendicular: $\vec{u}\parallel\vec{n}$. Es al revés que entre dos rectas.
4. **Plano por dos rectas paralelas con $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$.** Ese producto es $\vec{0}$; el segundo vector es $\overrightarrow{P_1P_2}$.
5. **Plano por dos rectas que se cruzan.** No existe: antes de calcular el plano se revisa con el producto mixto que las rectas sean coplanares.
6. **Mismo parámetro en las dos rectas.** Al igualar paramétricas, cada recta lleva su parámetro (t y λ); con el mismo se «pierde» la intersección.
7. **Distancia entre planos que no son paralelos.** $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$ exige el mismo vector normal en las dos ecuaciones; si no son paralelos, se cortan y $d=0$ (propuesto 4.6.12).
8. **Una sola solución con valor absoluto.** «El conjunto de valores» de un parámetro o «un punto a distancia k» casi siempre tiene dos respuestas.

6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Generatrices: escribe primero la directriz en forma ordinaria y su parametrización; con eso la ecuación vectorial sale en una línea.
2. Despeja s de la coordenada del plano de la directriz, luego $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$), y aplica la identidad.
3. Comprueba la cartesiana con el vértice (cono) y con el plano de la directriz.
4. Identificación: completa cuadrados en cada ecuación, iguala a 1 (o a 0) y nombra la superficie con la tabla 6.1.7, diciendo qué forma se cumple.
5. Escribe, para cada superficie, centro o vértice, eje, dos trazas y la extensión; si piden intervalos de variación, despeja cada cuadrado y exige ≥ 0.

Los dos problemas de esta unidad valen un tercio del examen y su procedimiento es siempre el mismo: es la unidad que más puntos da por hora de estudio.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 6.

Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{p} = \left(-1 + 2\cos\theta,\ 5,\ 3 + \dfrac{4}{\csc\theta}\right)$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C. b) Bosqueje la gráfica de C e identifíquela.

Resultado: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{16} = 1$, $y = 5$: elipse de centro $(-1, 5, 3)$, eje mayor paralelo al eje z, $a = 4$, $b = 2$; sin los puntos $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 4.

Sea la curva C representada por $\vec{p} = \big(-3,\ 2 - 5\operatorname{sen}^2 t,\ 4 - 3\operatorname{sen} t\big)$. a) Determine unas ecuaciones paramétricas de C y el intervalo paramétrico asociado a ellas. b) Determine unas ecuaciones cartesianas de C, así como los intervalos de variación de y y z.

Resultado: $x = -3$, $y = 2 - 5\operatorname{sen}^2 t$, $z = 4 - 3\operatorname{sen} t$, $t \in \mathbb{R}$; $(z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2)$, $x = -3$; $y \in [-3, 2]$, $z \in [1, 7]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 4.

Sea la curva C representada por $\vec{r}(\theta) = (3 + \operatorname{sen} 2\theta)\,\hat{\imath} - 7\,\hat{\jmath} + (\cos\theta)\,\hat{k}$. Obtenga: a) el intervalo paramétrico; b) los intervalos de variación para x y z; c) unas ecuaciones cartesianas de C.

Resultado: $\theta \in \mathbb{R}$ (una vuelta en $[0, 2\pi)$); $x \in [2, 4]$, $z \in [-1, 1]$; $y = -7$, $(x-3)^2 = 4z^2\big(1 - z^2\big)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 4.

Sea la curva $C:\ \ x = \sqrt{9 - t} - 3,\ y = -1,\ z = \dfrac{2}{\sqrt{t + 16}}$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine el conjunto de valores para cada una de las coordenadas x y z de los puntos de C.

Resultado: $t \in (-16, 9]$; $x \in [-3, 2)$, $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 1.

Sea la curva $A:\ \ x = -1,\ y = 2\operatorname{sen} t,\ z = 2\cos t$, para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Determine: a) el conjunto de valores de z donde está definida; b) una ecuación vectorial; c) las ecuaciones cartesianas. Identifique la curva.

Resultado: $z \in [0, 2]$; $\vec{p} = (-1,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$; $y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$, con $z \geq 0$: semicircunferencia de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 5.6.6

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 2.

Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = 8\,\hat{\imath} + 2t\,\hat{\jmath} + \frac{2}{t}\,\hat{k}$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas; b) las ecuaciones cartesianas; c) el intervalo paramétrico.

Resultado: $x = 8$, $y = 2t$, $z = \frac{2}{t}$; $yz = 4$, $x = 8$ (hipérbola equilátera); $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

5.7 Errores frecuentes

1. **Una sola ecuación cartesiana.** $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ sola es un cilindro; la curva necesita también el plano $z = 3$.
2. **Elementos sin la tercera coordenada.** El centro de la hipérbola del ejemplo 5.4 es $(1, -2, 3)$, no $(1, -2)$.
3. **Usar la identidad equivocada con** $\cos 2\theta$**.** Si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, se usa $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$; si trae $\cos\theta$, $2\cos^2\theta - 1$.
4. **Confundir el eje focal de la hipérbola.** Es el de la variable con signo positivo en la forma ordinaria (la que lleva sec en las paramétricas), no el de la que tiene el denominador mayor.
5. **Intervalo paramétrico con desigualdad no estricta en un denominador.** $\frac{1}{\sqrt{t+4}}$ exige $t > -4$, no $t \geq -4$.
6. **Dar la extensión de la cónica completa.** Con $x = 4\operatorname{sen}\theta$ la parábola solo llega a $|x| \leq 4$; la extensión sale de las paramétricas, no de la cartesiana.
7. **Olvidar los puntos excluidos.** Con $\frac{4}{\csc\theta}$ los valores $\theta = k\pi$ no están en el intervalo y la elipse pierde dos puntos.
8. **Invertir la desigualdad mal.** Con $z = 4 - 3\operatorname{sen} t$, $\operatorname{sen} t = 1$ da el mínimo $z = 1$, no el máximo.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Vectorial $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \iff$ paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z = k$).
- $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \csc^2 t - \cot^2 t = 1 \cdot \cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1 \cdot \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t$.
- $(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 = 2$.
- Elipse: $u = h + a\cos t$, $v = k + b\operatorname{sen} t$ · hipérbola: $u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$ · parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$: $u = h + 2t$, $v = k + \frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2 = a^2 - b^2$; hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, asíntotas $v - k = \pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en u).
- SOLO PLAN 2010 Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ } \geq 0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }} > 0$; tan, sec : $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; cot, csc : $t \neq k\pi$).
- SOLO PLAN 2010 Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$.

$x^2 + z = y^2 - 4$.

Resultado: a) dos planos paralelos, $x = -1$ y $x = -2$; b) esfera de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; c) cono circular de vértice en el origen y eje x; d) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0, 0, -4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

6.7 Errores frecuentes

1. **Usar el punto de la directriz como vértice.** En el cono la dirección de la generatriz es $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, no $\vec{q}(\theta)$. En el cilindro, en cambio, la dirección es siempre $\vec{u}$.
2. **Olvidar despejar** s **de la componente correcta.** Se despeja de la coordenada del plano de la directriz (z si la directriz está en $z = 3$; x si está en $x = 0$), que es la única lineal en s y sin θ.
3. **Parametrizar la directriz sin dividir.** $9x^2 + 4y^2 = 36$ no es $x = 9\cos\theta$: primero $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, luego $x = 2\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$.
4. **Usar** $\operatorname{sen}^2 + \cos^2$ **con una hipérbola.** Una directriz hiperbólica se parametriza con sec y tan y se elimina con $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.
5. **No comprobar.** Al hacer $z = l$ en la cartesiana debe salir la directriz; si no sale, hay un error de signo. La comprobación toma un minuto.
6. **Leer el tipo antes de completar cuadrados o de igualar a 1.** $5x^2 - 3y^2 + 15z^2 + 15 = 0$ parece de una hoja (dos positivos), pero al dividir entre -15 es de dos hojas.
7. **Confundir el eje.** En el hiperboloide de una hoja el eje es la variable con signo *menos*; en el de dos hojas, la de signo *más*; en el paraboloide, la variable lineal.
8. **Llamar elipsoide a un cilindro.** Si falta una variable ($\frac{(y-2)^2}{16} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$), es un cilindro con generatrices paralelas al eje de la variable que falta.
9. **Dar solo el nombre.** Sin centro o vértice, eje y trazas, la identificación queda incompleta.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Cilindro: $\vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big)$.
- Directriz: elipse $(h + a\cos\theta,\ k + b\operatorname{sen}\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$: $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ o $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.
- Completar cuadrados: $ax^2 + dx = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}$.
- $+\ +\ +\ = 1$ elipsoide · $+\ +\ -\ = 1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\ -\ -\ = 1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $= 0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $+\ +\ = 0$: recta; $+\ +\ = -1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h - a, h + a]$; dos hojas $|z - l| \geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.

Ejercicio propuesto 6.6.5

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 + x - 2y = 1$; b) $\dfrac{(y+1)^2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2} = \dfrac{(z-1)^2}{4}$; c) $(x+1)^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = \dfrac{z^2}{4}$.

Resultado: a) elipsoide de revolución, centro $\left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right)$, semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$, $\frac{\sqrt{34}}{4}$, $\frac{\sqrt{17}}{4}$; b) cono elíptico, vértice $(2, -1, 1)$, eje paralelo a y; c) hiperboloide de una hoja, centro $(-1, 0, 0)$, eje paralelo a z.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 6.6.6

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 4.

Obtenga una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del cono cuyo vértice es el punto $V(0, 1, 0)$ y que contiene a la curva $C:\ y = 0,\ x^2 + z^2 = 2$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0, 1, 0) + s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$; $x^2 + z^2 = 2(y-1)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 6.6.7

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 5.

Obtenga una ecuación vectorial del cilindro que se forma por circunferencias de radio igual a 3 contenidas en planos paralelos a $y = 0$, tales que todas tienen su centro en la recta $L:\ \vec{p} = (1,\ 1+t,\ 1)$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, t) = (1 + 3\cos\theta,\ 1+t,\ 1 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta)$; su cartesiana es $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 6.6.8

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 6.

Sea la superficie $S:\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z^2 - 1$. Obtenga: a) las trazas de S con los planos XZ y YZ; b) el conjunto de valores de z para los cuales está definida la superficie; c) una ecuación vectorial de la curva C que se forma por la intersección de S con el plano $z = \sqrt{2}$.

Resultado: a) hipérbolas $z^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ $(y = 0)$ y $z^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ $(x = 0)$; b) $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; c) $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 6.6.9

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 7.

Identifique las superficies cuyas ecuaciones se dan a continuación, justificando las respuestas: a) $x^2 + 3x + 2 = 0$; b) $(x-1)^2 + y^2 = 1 - (z+1)^2$; c) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$; d)

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe las paramétricas (o la vectorial) aunque no las pidan: de ahí sale todo.
2. SOLO PLAN 2010 Intervalo paramétrico: una condición por componente, e intersección.
3. SOLO PLAN 2010 Extensión: recorrido de cada coordenada, partiendo de $-1 \le \mathrm{sen}\,t \le 1$ o de la monotonía.
4. Elimina el parámetro con la identidad que corresponde; escribe la cónica en forma ordinaria y el plano.
5. Identifica: nombre, centro o vértice, eje focal, semiejes, vértices y focos, con la tercera coordenada; di si la extensión recorta la cónica.
6. Bosquejo: plano, centro, vértices, asíntotas y la curva solo en su extensión.

Si no sale la identidad, el intervalo paramétrico y la extensión (Plan 2010) ya valen buena parte del problema.

Unidad 6 · Superficies (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno identificará superficies cuádricas a partir de su ecuación cartesiana; y obtendrá la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de superficies.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 este tema está en Cálculo Vectorial.
- **Frecuencia:** en los 9 finales del Plan 2010 esta unidad vale **dos problemas** (un tercio del examen): 16 problemas en total. Superficie por generatrices, 8 (cono con vértice y directriz 4, cilindro con generatrices paralelas a un vector 4); siempre piden una ecuación vectorial y una cartesiana, y a veces las paramétricas. Identificación de cuádricas, 8, con 25 ecuaciones en total (elipsoide, esfera, hiperboloides de una y dos hojas, paraboloides elíptico e hiperbólico, cono y cilindros), casi siempre trasladadas y con cuadrados por completar; el enunciado advierte que «la identificación requiere más información que el nombre». Solo dos exámenes se salen de la plantilla: el 1er final 2012-1, tipo C, no trae generatrices, y el 2º final 2012-2 no trae identificación. En el 3er parcial 2006-2, tipo B, hay 4 problemas más (cono, cilindro, hiperboloide e identificación).
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 6.1.2, 6.1.3, 6.1.5 y 6.1.7 (40 min): generatrices, catálogo de cuádricas y tabla de reconocimiento.
  2. Aprende los procedimientos 6.3.1, 6.3.2 y 6.3.4: son los dos problemas del examen.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 6.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 6.5.1, 6.5.3, 6.5.4, 6.5.7 y 6.5.9 con cronómetro: 15 min cada uno.
  5. Para un simulacro, los propuestos 6.6.1 y 6.6.2 (generatrices) y 6.6.3 a 6.6.5 (identificación) son problemas completos de examen.

6.1 Conceptos y expresiones

6.1.1 Superficie: ecuaciones y clasificación

Una *superficie* es un conjunto de puntos del espacio que depende de *dos* parámetros (una curva depende de uno). Se representa de tres maneras:

- **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \big(x(\theta,s),\ y(\theta,s),\ z(\theta,s)\big)$, con dos parámetros θ y s.
- **Ecuaciones paramétricas:** las tres componentes por separado, $x = x(\theta, s)$, $y = y(\theta, s)$, $z = z(\theta, s)$.
- **Ecuación cartesiana:** una sola ecuación $F(x, y, z) = 0$. Se obtiene de las paramétricas *eliminando los dos parámetros.*

Clasificación. Las superficies del programa se agrupan así:

Ejercicio propuesto 6.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cónica S que tiene por vértice el punto $V(3,-2,7)$ y contiene a la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1, \qquad z = 0.$$

Resultado: $\vec{p}(\theta,s) = (3,-2,7) + s(-5+2\cos\theta,\ 3+3\operatorname{sen}\theta,\ -7)$; $9(7x-5z+14)^2 + 4(7y+3z-7)^2 = 36(z-7)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 6.6.2

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 5.

Sea el cilindro S con eje paralelo al vector $\vec{v} = (-1,2,1)$ y cuya intersección con el plano $z - 3 = 0$ es la circunferencia de radio 2 y centro en $C(0,0,3)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

Resultado: $\vec{p}(\theta,s) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s(-1,2,1)$; $(x+z-3)^2 + (y-2z+6)^2 = 4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 6.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $x^2+2x+8y^2 = 23$; b) $(x-1)^2-9 = -3(y+2)^2-3z^2$; c) $-2x^2-5z^2 = -25-3y^2$.

Resultado: a) cilindro elíptico de eje $x = -1$, $y = 0$ (paralelo a z); b) elipsoide de revolución, centro $(1,-2,0)$, semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; c) hiperboloide de una hoja, centro en el origen, eje y.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 6.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = (z-1)^2 + 1$; b) $\dfrac{(y-2)^2}{3} + \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{z^2}{4}$; c) $x^2 + y^2 - z^2 = -2z^2 + 2$.

Resultado: a) hiperboloide de una hoja, centro $(-2,3,1)$, eje paralelo a z; b) paraboloide hiperbólico, punto silla $(1,2,0)$, eje paralelo a x; c) esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

- **Eje:** el eje y; generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$; directriz, la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$.
- **Extensión:** $x \in [-2, 2]$, $z \in [-2, 2]$, $y \in \mathbb{R}$.

Resultado: a) elipsoide de centro $(1, 0, -3)$; b) hiperboloide de una hoja de centro $(0, 1, 0)$ y eje paralelo a y; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0, 0, 1)$; d) cilindro circular de radio 2 y eje y.

Ejercicio 6.5.9 · Hiperboloide de dos hojas, paraboloide hacia abajo y cilindro elíptico

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $\dfrac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 - \dfrac{(z-1)^2}{16} = 1$; b) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = -5z - 3$; c) $\dfrac{(y-2)^2}{16} = -\dfrac{(z+1)^2}{9} + 1$.

Resolución.

1. **a)** Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** $(3, -2, 1)$; **eje** la recta $y = -2$, $z = 1$, paralela a x; **vértices** $(0, -2, 1)$ y $(6, -2, 1)$.
   - **Trazas:** $x = k$ con $|k - 3| > 3$, elipses $(y + 2)^2 + \frac{(z-1)^2}{16} = \frac{(k-3)^2}{9} - 1$; plano $z = 1$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - (y + 2)^2 = 1$; plano $y = -2$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$.
   - **Extensión:** $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.
2. **b) Completar cuadrados:** $(x - 1)^2 - 1 + 2(y + 2)^2 - 8 = -5z - 3$, es decir
   $$(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = -5\left(z - \tfrac{6}{5}\right).$$
   Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal z: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.
   - **Vértice** $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$; **eje** la recta $x = 1$, $y = -2$; abre hacia z negativo (el coeficiente -5).
   - **Trazas:** plano $z = 0$, elipse $(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = 6$; plano $x = 1$, parábola $2(y + 2)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$; plano $y = -2$, parábola $(x - 1)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$.
   - **Extensión:** $z \in \left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$; $x, y \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $\dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(z+1)^2}{9} = 1$. Falta x y los dos cuadrados son positivos: **cilindro elíptico**; no es elipsoide (no hay tres cuadrados).
   - **Eje:** la recta $y = 2$, $z = -1$, paralela al eje x; generatrices paralelas a $\hat{\imath}$.
   - **Directriz:** la elipse de centro $(0, 2, -1)$ en el plano $x = 0$, semiejes 4 (en y) y 3 (en z).
   - **Extensión:** $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-2, 6]$, $z \in [-4, 2]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas, centro $(3, -2, 1)$, eje paralelo a x; b) paraboloide elíptico, vértice $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$, abre hacia z negativo; c) cilindro elíptico de eje $y = 2$, $z = -1$.

6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.6**.

- **Cuádricas:** su ecuación cartesiana es de segundo grado en x, y, z. Son el elipsoide (y la esfera), los hiperboloides de una y de dos hojas, los paraboloides elíptico e hiperbólico, el cono y los cilindros de base cónica.
- **Cilíndricas:** formadas por rectas paralelas a un vector que pasan por una curva.
- **Cónicas:** formadas por rectas que pasan por un punto fijo y por una curva.
- **Regladas y de revolución** (sección 6.1.4).

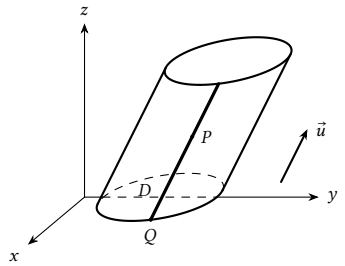
Un cono o cilindro con directriz cónica es a la vez cónico (o cilíndrico) y cuádrico; si la directriz es otra curva, la superficie ya no es cuádrica.

6.1.2 Superficies cilíndricas

Una *superficie cilíndrica* es el conjunto de rectas paralelas a un vector $\vec{u}$ que cortan a una curva D. La curva D es la **directriz**; cada recta, una **generatriz**. Si D está dada por $\vec{q}(\theta)$, cada punto de la superficie es un punto de D más un múltiplo de $\vec{u}$:

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}.$$

Con s fijo se obtiene una copia de la directriz trasladada; con θ fijo, una generatriz (figura).



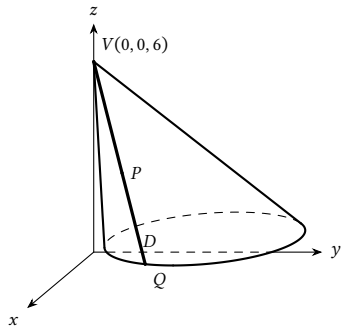
En el examen la directriz es siempre una cónica en un plano paralelo a uno coordenado ($z = 3$, $x = 0$), y $\vec{u}$ no es paralelo a ese plano. Si $\vec{u}$ es perpendicular al plano de la directriz, el cilindro es *recto* y su ecuación cartesiana es la de la directriz sin la variable que falta: $x^2 + z^2 = 4$ es un cilindro circular recto de eje y.

6.1.3 Superficies cónicas

Una *superficie cónica* es el conjunto de rectas que pasan por un punto fijo V, el **vértice**, y por los puntos de una curva D, la **directriz**. La generatriz que pasa por el punto $\vec{q}(\theta)$ de la directriz tiene dirección $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, así que

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\left(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\right),$$

donde $\vec{v}$ es el vector de posición de V. Con $s = 0$ se obtiene el vértice; con $s = 1$, la directriz; con $s < 0$, la otra hoja del cono, del otro lado del vértice.



6.1.4 Superficies regladas y de revolución

Estas dos clases se definen en el programa, pero en los exámenes nunca se piden por su nombre.

- Una superficie es **reglada** si por cada uno de sus puntos pasa una recta contenida en ella. Los cilindros y los conos son regladas; también el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico, que contienen dos familias de rectas (en $z = 9y^2 - 4(x-1)^2$, el plano $z = 0$ corta en las rectas $3y = \pm 2(x-1)$). El 2º final 2012-2 llama «superficie reglada» a un cilindro (ejercicio 6.5.5).
- Una superficie es **de revolución** si se genera al girar una curva plana alrededor de una recta, el **eje**. Sus trazas con planos perpendiculares al eje son circunferencias. En una cuádrica se reconoce porque dos de los denominadores son iguales: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ es de revolución alrededor del eje z. La esfera, el cono circular y el paraboloide circular son de revolución.

6.1.5 Cuádricas en forma canónica

Con centro (o vértice) en el origen y ejes sobre los ejes coordenados, las cuádricas tienen las formas de esta sección ($a, b, c > 0$). Se dibujan en *alambre de trazas*: las curvas que dejan los planos $z = k$ y los planos coordenados; lo que queda atrás va discontinuo. El eje de la superficie puede ser cualquiera de los tres: lo decide la variable que se distingue de las otras (por signo o por no estar al cuadrado).

Elipsoide. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Todas sus trazas son elipses (o un punto, o nada). Extensión: $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. Si dos semiejes son iguales es de revolución; si $a = b = c = r$, es la **esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

3. **c) Completar cuadrados:** $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 2(z-1)^2 - 2 + 3 = 0$, es decir $(x-2)^2 + (y+1)^2 + 2(z-1)^2 = 4$:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1.$$

   Tres cuadrados positivos igualados a 1: se cumple la forma del **elipsoide**; dos denominadores iguales: es de revolución alrededor de la recta $x = 2$, $y = -1$.
   - **Centro** $(2, -1, 1)$; semiejes 2, 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Trazas:** plano $z = 1$, circunferencia $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$; planos $x = 2$ y $y = -1$, elipses de semiejes 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Extensión:** $x \in [0, 4]$, $y \in [-3, 1]$, $z \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas de eje y, vértices $(0, \pm\sqrt{5}, 0)$; b) paraboloide elíptico de vértice $(-4, 0, 0)$ y eje x; c) elipsoide de revolución de centro $(2, -1, 1)$, semiejes 2, 2, $\sqrt{2}$.

Ejercicio 6.5.8 · Cuatro superficies, una de ellas cilindro

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $(x-1)^2 + 2y^2 + (z+3)^2 - 16 = 0$; b) $3x^2 - 2y^2 + 4y + z^2 = 26$; c) $x^2 - y^2 - z + 1 = 0$; d) $x^2 + z^2 - 4 = 0$.

Resolución.

1. **a)** $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{8} + \frac{(z+3)^2}{16} = 1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide** de revolución (eje: la recta $x = 1$, $z = -3$, paralela a y).
   - **Centro** $(1, 0, -3)$; semiejes 4, $2\sqrt{2}$, 4.
   - **Trazas:** plano $y = 0$, circunferencia $(x-1)^2 + (z+3)^2 = 16$; planos $x = 1$ y $z = -3$, elipses.
   - **Extensión:** $x \in [-3, 5]$, $y \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, $z \in [-7, 1]$.
2. **b) Completar cuadrados:** $-2(y^2 - 2y) = -2(y-1)^2 + 2$, así que $3x^2 - 2(y-1)^2 + z^2 = 24$:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{12} + \frac{z^2}{24} = 1.$$

   Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(0, 1, 0)$; **eje** la recta $x = 0$, $z = 0$, paralela a y.
   - **Trazas:** plano $y = 1$ (garganta), elipse $\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{24} = 1$; plano $z = 0$, hipérbola $\frac{x^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$; plano $x = 0$, hipérbola $\frac{z^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $z - 1 = x^2 - y^2$. Dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.
   - **Punto silla** $(0, 0, 1)$; eje paralelo a z (el eje z).
   - **Trazas:** plano $y = 0$, parábola $z - 1 = x^2$ (abre hacia arriba); plano $x = 0$, parábola $z - 1 = -y^2$ (abre hacia abajo); plano $z = 1$, rectas $y = \pm x$.
4. **d)** $x^2 + z^2 = 4$. Falta y y los dos cuadrados son positivos: **cilindro circular recto** de radio 2.

- **Trazas:** $y = k \neq 0$, circunferencias $x^2 + z^2 = k^2$ de radio $|k|$; plano $z = 0$, rectas $y = \pm x$; plano $x = 0$, rectas $y = \pm z$.
- **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. **b)** Multiplicando por -1: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de una hoja**; es de revolución (coeficientes de x^2 y y^2 iguales).
   - **Centro** en el origen; **eje** z.
   - **Trazas:** $z = k$, circunferencias de radio $\sqrt{1 + k^2}$ (la garganta, de radio 1, en $z = 0$); plano $x = 0$, hipérbola $y^2 - z^2 = 1$; plano $y = 0$, hipérbola $x^2 - z^2 = 1$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $z = 9y^2 - 4(x - 1)^2$. Dos cuadrados de signo contrario y una variable lineal: se cumple la forma del **paraboloide hiperbólico**; no se cumple la del elíptico (los signos no coinciden).
   - **Punto silla** $(1, 0, 0)$; eje paralelo a z (la recta $x = 1$, $y = 0$).
   - **Trazas:** plano $x = 1$, parábola $z = 9y^2$, abre hacia z positivo; plano $y = 0$, parábola $z = -4(x - 1)^2$, abre hacia z negativo; plano $z = 0$, rectas $3y = \pm 2(x - 1)$; $z = k \neq 0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Resultado: a) cono circular de vértice en el origen y eje y; b) hiperboloide de una hoja de revolución, centro en el origen, eje z; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(1, 0, 0)$.

Ejercicio 6.5.7 · Dos hojas, paraboloide y elipsoide trasladado

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 6.

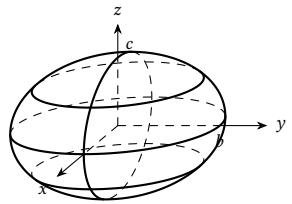
Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $5x^2 - 3y^2 + 15z^2 + 15 = 0$; b) $x - y^2 - 4z^2 = -4$; c) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 2y - 4z + 3 = 0$.

Resolución.

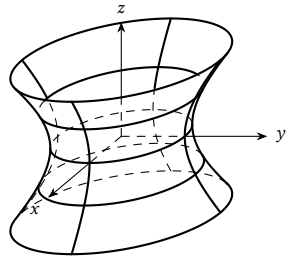
1. **a)** $5x^2 - 3y^2 + 15z^2 = -15$; dividiendo entre -15:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} - z^2 = 1.$$

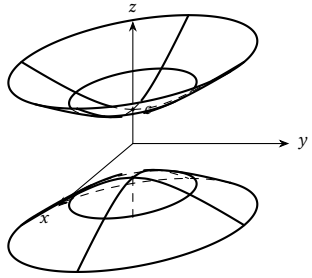
   Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y; **vértices** $(0, \pm\sqrt{5}, 0)$.
   - **Trazas:** $y = k$ con $|k| > \sqrt{5}$, elipses $\frac{x^2}{3} + z^2 = \frac{k^2}{5} - 1$; plano $z = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$; plano $x = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - z^2 = 1$.
   - **Extensión:** $y \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$; $x, z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** $x + 4 = y^2 + 4z^2$. Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal x: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.
   - **Vértice** $(-4, 0, 0)$; **eje** x; abre hacia x positivo.
   - **Trazas:** $x = k > -4$, elipses $\frac{y^2}{k+4} + \frac{z^2}{(k+4)/4} = 1$; plano $z = 0$, parábola $y^2 = x + 4$; plano $y = 0$, parábola $4z^2 = x + 4$.
   - **Extensión:** $x \in [-4, \infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.



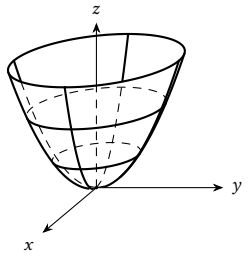
Hiperboloide de una hoja. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$: dos cuadrados positivos, uno negativo, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo menos. Las trazas $z = k$ son elipses para todo k (la menor, la *garganta*, en $z = 0$); las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son hipérbolas. Es una sola pieza: x, y, z toman todos los reales en su rango natural.



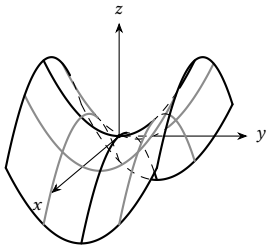
Hiperboloide de dos hojas. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: un cuadrado positivo, dos negativos, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo más. Los **vértices** son $(0, 0, \pm c)$; entre ellos no hay superficie: $|z| \geq c$. Las trazas $z = k$ con $|k| > c$ son elipses; las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son hipérbolas.



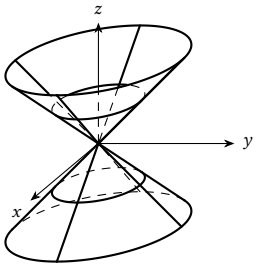
Paraboloide elíptico. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$: dos cuadrados del mismo signo y la tercera variable *lineal*. El eje es el de la variable lineal; el **vértice**, el origen. Abre hacia donde la variable lineal tiene el signo de los cuadrados ($z \geq 0$ si $c > 0$). Las trazas $z = k > 0$ son elipses; las trazas con $x = 0$ y $y = 0$, parábolas. Si $a = b$ es un paraboloide circular (de revolución).



Paraboloide hiperbólico (silla de montar). $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$: dos cuadrados de signo contrario y la tercera variable lineal. El origen es el **punto silla**. La traza con $x=0$ es una parábola que abre hacia z positivo; la traza con $y=0$, una parábola que abre hacia z negativo; las trazas $z=k\neq 0$ son hipérbolas, y la traza $z=0$ es un par de rectas. Extensión: todos los reales.



Cono. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a *cero*. El vértice es el origen; el eje, el de la variable con signo solitario. Las trazas $z=k\neq 0$ son elipses, y las trazas con $x=0$ y $y=0$ son pares de rectas (generatrices). Extensión: todos los reales.



Cilindros cuádricos. Falta una variable: la ecuación es la de una cónica del plano de las otras dos, y las generatrices son paralelas al eje de la variable que falta. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (cilindro elíptico), $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (cilindro hiperbólico), $y=ax^2$ (cilindro parabólico).

5. **Eliminación de θ:**

$$4\tan\theta = x+4-s = \frac{12x-z+51}{12}, \qquad 4\sec\theta = y-3-2s = \frac{6y-z-15}{6}.$$

6. **Identidad** $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$, multiplicada por 16:

$$\frac{(6y-z-15)^2}{36}-\frac{(12x-z+51)^2}{144}=16 \iff 4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304.$$

7. **Comprobación:** con $z=3$: $4\cdot 36(y-3)^2-144(x+4)^2=2304 \Rightarrow (y-3)^2-(x+4)^2=16$.

Resultado: $\vec{p}=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3)+s(1,2,12)$; $4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304$ (cilindro hiperbólico).

Ejercicio 6.5.5 · Superficie reglada con directriz en el plano $x=0$

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 6.

Sea la superficie reglada S que contiene a la curva $D:\ y^2+2z^2=4$, $x=0$, y la generan rectas paralelas al vector $\vec{u}=(-3,1,2)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

Resolución.

1. **Tipo:** rectas paralelas a un vector que cortan a una curva: es una superficie cilíndrica (6.1.4).
2. **Directriz:** $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ en $x=0$: $\vec{q}(\theta)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)$.
3. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s\,(-3,1,2)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
4. **Eliminación de s:** el plano de la directriz es $x=0$, así que se usa $x=-3s \Rightarrow s=-\frac{x}{3}$.
5. **Eliminación de θ:** $y=2\cos\theta+s \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{x+3y}{6}$; $z=\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta+2s \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\dfrac{2x+3z}{3\sqrt{2}}$.
6. **b) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(x+3y)^2}{36}+\dfrac{(2x+3z)^2}{18}=1$, es decir

$$(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36.$$

7. **Comprobación:** con $x=0$: $9y^2+18z^2=36 \Rightarrow y^2+2z^2=4$.

Resultado: $\vec{p}=(0,2\cos\theta,\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s(-3,1,2)$; $(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36$.

Ejercicio 6.5.6 · Cono, hiperboloide y silla sin completar cuadrados

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (nombre y algunas características): a) $z^2=y^2-x^2$; b) $z^2-y^2-x^2=-1$; c) $4(x-1)^2-9y^2+z=0$.

Resolución.

1. **a)** $x^2+z^2-y^2=0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: se cumple la forma del **cono**; denominadores de x y z iguales: cono circular.
   - **Vértice** en el origen; **eje** y (la variable de signo solitario).

5. **Ecuación cartesiana:** $\dfrac{9x^2}{z^2} + \dfrac{4(y-2)^2}{z^2} = 1$, es decir

$$9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2.$$

   Es un cono elíptico con vértice $(0,2,0)$ y eje paralelo al eje z (tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero).

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0,2,0) + s(2\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 6)$; $9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2$.

Ejercicio 6.5.3 · Cilindro con directriz elíptica y generatrices oblicuas

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 6.

Sea S la superficie cilíndrica formada por rectas paralelas al vector $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$ y que contiene a la curva $H:\ 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0,\ z = 3$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) unas ecuaciones paramétricas de S; c) una ecuación cartesiana de S.

Resolución.

1. **Directriz:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.
2. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s\,(3,0,2)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
3. **b) Paramétricas:** $x = 2\cos\theta + 3s$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$, $z = 3 + 2s$.
4. **Eliminación de s:** $s = \dfrac{z-3}{2}$.
5. **Eliminación de θ:** $\cos\theta = \dfrac{x - 3s}{2} = \dfrac{2x - 3z + 9}{4}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{3}$.
6. **c) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(2x - 3z + 9)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, es decir

$$9(2x - 3z + 9)^2 + 16y^2 = 144.$$

7. **Comprobación:** con $z = 3$: $9(2x)^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36$.

Resultado: $\vec{p} = (2\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 3) + s(3,0,2)$; $9(2x - 3z + 9)^2 + 16y^2 = 144$.

Ejercicio 6.5.4 · Cilindro con directriz hiperbólica

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica S formada por el conjunto de las rectas paralelas al vector $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 12\hat{k}$ y que tiene por intersección con el plano $z = 3$ a la curva $D:\ (y-3)^2 - (x+4)^2 = 16,\ z = 3$.

Resolución.

1. **Directriz:** $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+4)^2}{16} = 1$ es una hipérbola de centro $(-4,3,3)$ y eje focal paralelo a y. Se parametriza con $y - 3 = 4\sec\theta$, $x + 4 = 4\tan\theta$:

$$\vec{q}(\theta) = (-4 + 4\tan\theta,\ 3 + 4\sec\theta,\ 3), \quad \theta \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right).$$

2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (-4 + 4\tan\theta,\ 3 + 4\sec\theta,\ 3) + s\,(1,2,12)$, $s \in \mathbb{R}$.
3. **Paramétricas:** $x = -4 + 4\tan\theta + s$, $y = 3 + 4\sec\theta + 2s$, $z = 3 + 12s$.
4. **Eliminación de s:** $s = \dfrac{z-3}{12}$.

6.1.6 Cuádricas trasladadas

Si el centro (o vértice) es (h,k,l), en cada forma canónica se cambia x por $x - h$, y por $y - k$ y z por $z - l$. El eje deja de ser un eje coordenado y pasa a ser una recta paralela a él: en $\frac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$ el eje es la recta $y = -2$, $z = 1$, paralela al eje x.

Cuando la ecuación viene desarrollada ($x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5z + 3 = 0$), se **completan cuadrados** variable por variable:

$$ax^2 + dx = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}.$$

Los términos lineales de una variable que *también* está al cuadrado desaparecen al completar el cuadrado; los de una variable que *no* está al cuadrado se quedan y la convierten en la variable lineal de un paraboloide (o de un cilindro parabólico). Los exámenes del Plan 2010 no traen términos mixtos (xy, xz, yz).

6.1.7 Tabla de reconocimiento

Después de completar cuadrados y pasar todo a la forma $\pm\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ 0$ o -1 (con $X = x - h$, etc.), o con una variable lineal, la superficie se lee de los signos:

Forma (tras completar cuadrados)	Superficie
tres cuadrados, todos +, = 1	elipsoide (esfera si $a = b = c$)
tres cuadrados, todos +, = 0	un punto (el centro)
tres cuadrados, todos +, = −1	ningún punto (vacío)
tres cuadrados, dos + y uno −, = 1	hiperboloide de una hoja; eje: la variable con −
tres cuadrados, uno + y dos −, = 1	hiperboloide de dos hojas; eje: la variable con +
tres cuadrados con signos mixtos, = 0	cono; eje: la variable de signo solitario
dos cuadrados del mismo signo = término lineal de la tercera	paraboloide elíptico; eje: la variable lineal
dos cuadrados de signo contrario = término lineal de la tercera	paraboloide hiperbólico
dos cuadrados, + y +, = 1; falta la tercera variable	cilindro elíptico (circular si $a = b$)
dos cuadrados, + y −, = 1; falta la tercera variable	cilindro hiperbólico
dos cuadrados, + y −, = 0; falta la tercera variable	dos planos que se cortan
dos cuadrados, + y +, = 0; falta la tercera variable	una recta
un cuadrado y una variable lineal	cilindro parabólico

Forma (tras completar cuadrados)	Superficie
un solo cuadrado = constante ($x^2 = c$)	dos planos paralelos, uno, o vacío

Una ecuación con signo -1 a la derecha se multiplica por -1 antes de usar la tabla: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -1$ es $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$, un hiperboloide de dos hojas de eje y.

6.1.8 Qué es «identificar» una superficie

El enunciado dice siempre que la identificación «requiere más información que el nombre». Para cada ecuación se escribe:

1. **Nombre** completo: «hiperboloide de una hoja», «paraboloide elíptico», «de revolución» si dos denominadores son iguales.
2. **Centro** (elipsoide, hiperboloides, esfera) o **vértice** (paraboloides, cono); en el paraboloide hiperbólico, el **punto silla**.
3. **Eje**: la recta paralela a un eje coordenado que pasa por el centro o el vértice, por ejemplo $x = 1$, $y = -2$ (paralela al eje z). En un paraboloide, hacia dónde abre.
4. **Trazas**: con los planos que pasan por el centro paralelos a los coordenados (o con los planos coordenados), nombrando la cónica de cada una; y la traza $z = k$ (o la del eje) en general.
5. **Extensión** (intervalos de variación de x, y, z): de la forma ordinaria, despejando cada cuadrado y pidiendo que sea ≥ 0.
6. **Simetrías**: una cuádrica con centro es simétrica respecto a su centro y a los tres planos que pasan por él paralelos a los coordenados; un paraboloide, respecto a su eje y a los dos planos que lo contienen.

Los exámenes no exigen los seis puntos, pero el nombre solo no vale: nombre, centro o vértice, eje y dos trazas son el mínimo seguro. Si el enunciado pide «intervalos de variación», la extensión es obligatoria.

6.1.9 Ecuación vectorial de una cuádrica

Las cuádricas también se escriben con dos parámetros (tema 6.2 del programa). Basta conocer estas, que salen de las identidades $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ y $\sec^2 - \tan^2 = 1$ ($\theta \in [0, 2\pi)$):

- Elipsoide: $\vec{p} = (a \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,\ b \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,\ c\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$.
- Hiperboloide de una hoja: $\vec{p} = (a \sec\varphi \cos\theta,\ b \sec\varphi \operatorname{sen}\theta,\ c\tan\varphi)$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Hiperboloide de dos hojas: $\vec{p} = (a\tan\varphi\cos\theta,\ b\tan\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\sec\varphi)$.
- Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ r^2)$, $r \geq 0$.
- Cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ cr)$, $r \in \mathbb{R}$.

Con centro (h, k, l) se suma (h, k, l). En los exámenes esto solo se pide para conos y cilindros, por generatrices.

6.2 Cómo reconocer el problema

> **Resultado:** a) paraboloide circular, vértice $(-2, 3, -1)$, eje paralelo a z, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \geq -1$; b) esfera de centro $(1, 2, -3)$ y radio 2, $x \in [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$; c) hiperboloide de dos hojas de revolución, centro $(3, 5, -2)$, eje paralelo a y, $x, z \in \mathbb{R}$, $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$.

6.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 6.5.1 · Cono con directriz circular en $z = 2$

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

Sea el cono S con vértice en $V(2, -4, -1)$ y cuya intersección con el plano $z = 2$ es la curva de ecuación $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$. Obtenga para S: a) unas ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana.

Resolución.

1. **Directriz:** circunferencia de centro $(2, 2, 2)$ y radio 3: $\vec{q}(\theta) = (2 + 3\cos\theta,\ 2 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 2)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (3\cos\theta,\ 6 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.
3. **a) Paramétricas:**

$$x = 2 + 3s\cos\theta, \qquad y = -4 + s(6 + 3\operatorname{sen}\theta), \qquad z = -1 + 3s; \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

4. **Eliminación de s:** $3s = z + 1$.
5. **Eliminación de θ:**

$$3s\cos\theta = x - 2 \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{x-2}{z+1},$$
$$3s\operatorname{sen}\theta = y + 4 - 6s = y + 4 - 2(z+1) \quad \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{y - 2z + 2}{z+1}.$$

6. **b) Ecuación cartesiana:** con $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$,

$$(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 2$ queda $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$; el vértice da $0 + (-4+2+2)^2 = 0$.

Resultado: $x = 2 + 3s\cos\theta$, $y = -4 + s(6 + 3\operatorname{sen}\theta)$, $z = -1 + 3s$; $(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2$.

Ejercicio 6.5.2 · Cono que contiene a una elipse en $z = 6$

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 8.

Sea el cono C con vértice $V(0, 2, 0)$ que contiene a la curva $9x^2 + 4(y-2)^2 - 36 = 0$, $z = 6$. Obtenga una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana que definan a C.

Resolución.

1. **Directriz:** dividiendo entre 36, $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 6)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 6)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (0, 2, 0) + s\,(2\cos\theta,\ 3\operatorname{sen}\theta,\ 6)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación:** $z = 6s \Rightarrow s = \frac{z}{6}$; $\cos\theta = \frac{x}{2s} = \frac{3x}{z}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{y-2}{3s} = \frac{2(y-2)}{z}$.

Ejemplo resuelto · Identificación con intervalos de variación

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 6.

Para cada una de las siguientes ecuaciones cartesianas, identifique el lugar geométrico que representan, indicando los intervalos de variación para x, y, z:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z + 12 = 0$; b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$;

c) $\dfrac{(x-3)^2}{9} - \dfrac{(y-5)^2}{4} + \dfrac{(z+2)^2}{9} = -1$.

Resolución.

1. **a) Completar cuadrados:** $(x^2+4x+4) + (y^2-6y+9) - z + 12 - 4 - 9 = 0$, es decir
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = z + 1.$$
   - **Tipo:** dos cuadrados del mismo signo igualados a una variable lineal: se cumple la forma del paraboloide elíptico; los denominadores son iguales, así que es **paraboloide circular** (de revolución).
   - **Vértice** $(-2, 3, -1)$; **eje** la recta $x = -2$, $y = 3$, paralela al eje z; abre hacia z positivo.
   - **Trazas:** $z = k > -1$, circunferencias de centro $(-2, 3, k)$ y radio $\sqrt{k+1}$; plano $x = -2$, parábola $(y-3)^2 = z + 1$; plano $y = 3$, parábola $(x+2)^2 = z + 1$.
   - **Intervalos:** el primer miembro es ≥ 0, así que $z + 1 \geq 0$: $z \in [-1, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
2. **b) Tipo:** tres cuadrados con el mismo coeficiente, todos positivos, igualados a una constante positiva: se cumple la forma de la **esfera**.
   - **Centro** $(1, 2, -3)$, **radio** 2. Simétrica respecto a cualquier plano que pase por el centro.
   - **Trazas:** con el plano $z = -3$, la circunferencia $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$; con $x = 1$ y $y = 2$, circunferencias de radio 2.
   - **Intervalos:** $x \in [1-2, 1+2] = [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$.
3. **c) Forma ordinaria:** multiplicando por -1,
$$\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1.$$
   - **Tipo:** tres cuadrados, uno positivo y dos negativos, igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**; no se cumple la de una hoja (habría dos positivos). Denominadores de x y z iguales: es de revolución.
   - **Centro** $(3, 5, -2)$; **eje** la recta $x = 3$, $z = -2$, paralela al eje y; **vértices** $(3, 3, -2)$ y $(3, 7, -2)$.
   - **Trazas:** plano $z = -2$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$; plano $x = 3$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1$; plano $y = 5$, ningún punto; plano $y = 9$, circunferencia $(x-3)^2 + (z+2)^2 = 27$.
   - **Intervalos:** $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{9} = \frac{(y-5)^2}{4} - 1 \geq 0 \Rightarrow |y-5| \geq 2$: $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«cono con vértice en V» y «cuya intersección con el plano… es la curva», o «que contiene a la curva»	ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana	6.3.1
«superficie cilíndrica», «cilindro con eje paralelo a $\vec{v}$», «superficie reglada… rectas paralelas al vector»	ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana	6.3.2
la directriz es una hipérbola o una cónica sin centro en el origen	parametrizar la directriz	6.3.3
«circunferencias de radio r… con centro en la recta L»	cilindro recto	6.3.2
«identificar la superficie representada por…» (varias ecuaciones)	nombre y características	6.3.4
«intervalos de variación», «conjunto de valores de z»	extensión	6.3.5
«trazas con los planos XZ y YZ», «curva intersección con el plano $z = k$»	cónicas de corte	6.3.4, paso 5

6.3 Procedimientos

6.3.1 Cono por el método de las generatrices

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$. Si es la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ en el plano $z = l$: $\vec{q}(\theta) = (h + a\cos\theta,\ k + b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$. Si viene como $9x^2 + 4(y-2)^2 = 36$, divide primero entre 36.
2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, del vértice al punto de la directriz.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Paramétricas:** las tres componentes de la anterior.
5. **Eliminación de s:** la componente que corresponde al plano de la directriz es lineal en s (por ejemplo $z = 6 - 6s$); despeja s.
6. **Eliminación de θ:** de las otras dos componentes despeja $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (aparecen divididos entre s) y sustituye en $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$.
7. **Simplifica:** multiplica por el denominador común; deja la ecuación como una igualdad de cuadrados.
8. **Comprueba** con dos cosas: el vértice satisface la ecuación, y al hacer $z = l$ se recupera la directriz.

6.3.2 Cilindro por el método de las generatrices

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$ como en 6.3.1.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$, con $\vec{u}$ el vector de las generatrices.

3. **Paramétricas:** sus tres componentes.
4. **Eliminación de s:** en la componente del plano de la directriz ($z = 3 + 2s$) despeja s.
5. **Eliminación de θ:** despeja $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$) y usa la identidad.
6. **Comprueba:** con $s = 0$ (es decir, en el plano de la directriz) se recupera la directriz.

Observación. Si las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz, o si el enunciado describe «circunferencias en planos paralelos con centro en una recta», el cilindro es recto: la vectorial es $\vec{p} = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$ igual, y la cartesiana es la ecuación de la directriz sin la variable de $\vec{u}$.

6.3.3 Parametrizar la directriz

1. **Elipse o circunferencia:** lleva a la forma $\frac{(X)^2}{a^2} + \frac{(Y)^2}{b^2} = 1$ y usa $X = a\cos\theta, Y = b\operatorname{sen}\theta$.
2. **Hipérbola:** $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$ se parametriza con $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$, y la identidad para eliminar es $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$. Con $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ se obtienen las dos ramas.
3. **Parábola:** $Y^2 = 4pX$ se parametriza con $Y = \theta$, $X = \frac{\theta^2}{4p}$.
4. El valor de la tercera coordenada es el del plano de la directriz ($z = 0$, $z = 3$, $x = 0$).

6.3.4 Identificación de una cuádrica

1. **Ordena:** pasa todo al primer miembro y agrupa por variable.
2. **Completa cuadrados** en cada variable que aparece al cuadrado con término lineal.
3. **Forma ordinaria:** deja los cuadrados a la izquierda y la constante (o la variable lineal) a la derecha; divide para que la constante sea 1 (o 0).
4. **Caso por caso con la tabla 6.1.7:** cuenta cuadrados y signos, revisa si la constante es 1, 0 o -1 y si hay variable lineal; escribe cuál forma *se cumple* y, si hay duda, cuál *no se cumple*.
5. **Características:** centro o vértice (los valores que anulan cada paréntesis), eje (recta paralela al de la variable distinguida), semiejes (raíces de los denominadores), trazas con los planos por el centro (sustituye la variable del plano y nombra la cónica que queda).
6. **Extensión**, si la piden (6.3.5), y simetrías.

6.3.5 Intervalos de variación (extensión)

1. Parte de la forma ordinaria. Para la variable z, despeja de modo que los otros cuadrados queden solos: por ejemplo, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(z-l)^2}{c^2} - 1$.
2. El primer miembro es ≥ 0 y toma todos los valores no negativos: exige que el segundo miembro sea ≥ 0 y resuelve.
3. Elipsoide y esfera: cada variable está en $[h-a, h+a]$, etc. Hiperboloide de dos hojas: la variable del eje cumple $|z-l| \geq c$; las otras, todos los reales. Paraboloide elíptico: la variable lineal queda de un solo lado del vértice. Hiperboloide de una hoja, cono y paraboloide hiperbólico: todos los reales.
4. Escribe el resultado con intervalos: $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Cono con vértice en el eje z y directriz elíptica

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 5.

Sea el cono S con vértice en $V(0,0,6)$ y cuya intersección con el plano XY es la curva

$$D: \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Obtenga para S: a) una ecuación vectorial; b) una ecuación cartesiana.

Resolución.

1. **Directriz:** es una elipse de centro $(-1, 3, 0)$, semieje 2 en x y 3 en y:
$$\vec{q}(\theta) = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 0), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$
2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$.
3. **a) Ecuación vectorial:**
$$S: \ \vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s\,(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6), \quad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$
4. **Paramétricas:** $x = s(-1 + 2\cos\theta)$, $y = s(3 + 3\operatorname{sen}\theta)$, $z = 6 - 6s$.
5. **Eliminación de s:** de la tercera, $s = \dfrac{6-z}{6}$.
6. **Eliminación de θ:** de las dos primeras,
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s} + 1\right) = \frac{6x + 6 - z}{2(6-z)},$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{s} - 3\right) = \frac{6y - 18 + 3z}{3(6-z)} = \frac{2y + z - 6}{6 - z}.$$
7. **Identidad:** $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$:
$$\frac{(6x - z + 6)^2}{4(6-z)^2} + \frac{(2y + z - 6)^2}{(6-z)^2} = 1.$$
8. **b) Ecuación cartesiana:** multiplicando por $4(6-z)^2$,
$$(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z-6)^2,$$
que desarrollada es $36x^2 + 16y^2 + z^2 - 12xz + 16yz + 72x - 96y - 12z + 36 = 0$.
9. **Comprobación:** $V(0,0,6)$: $0 + 4\cdot 0 = 0$, se cumple. Con $z = 0$: $(6x+6)^2 + 4(2y-6)^2 = 144$, es decir $36(x+1)^2 + 16(y-3)^2 = 144$, que es la directriz.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$; $(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z-6)^2$.

Cartesianas: $(z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2)$, $x=-3$. Es una parábola en el plano $x=-3$, vértice $(-3,2,4)$, eje paralelo al eje y, abre hacia las y negativas ($4p=-\frac{9}{5}$, $p=-\frac{9}{20}$).

3. **Intervalo de z:** $-1 \le \operatorname{sen} t \le 1 \Rightarrow -3 \le -3\operatorname{sen} t \le 3 \Rightarrow z \in [1,7]$.
4. **Intervalo de y:** $0 \le \operatorname{sen}^2 t \le 1 \Rightarrow -5 \le -5\operatorname{sen}^2 t \le 0 \Rightarrow y \in [-3,2]$.
5. **Recorte:** solo se recorre el arco de la parábola entre $(-3,-3,1)$ y $(-3,-3,7)$, que pasa por el vértice $(-3,2,4)$.

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. **a)** $\operatorname{sen} 2\theta$ y $\cos\theta$ existen para todo real: $\theta \in \mathbb{R}$. Las dos funciones tienen periodo que divide a 2π, así que $\theta \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez.
2. **b)** $-1 \le \operatorname{sen} 2\theta \le 1 \Rightarrow x \in [2,4]$; $-1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow z \in [-1,1]$. (Además $y=-7$.)
3. **c) Despeje:** $x-3 = \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\cos\theta = z$. Al elevar al cuadrado y usar $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$:

$$(x-3)^2 = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = 4\big(1-z^2\big)z^2.$$

   Cartesianas: $y=-7$, $(x-3)^2 = 4z^2\big(1-z^2\big)$.
4. **Observación:** la ecuación es de cuarto grado: no es una cónica. Es una curva cerrada en forma de ocho en el plano $y=-7$, que se cruza en $(3,-7,0)$ ($\theta=\frac{\pi}{2}$ y $\theta=\frac{3\pi}{2}$). El problema no pide identificarla.

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. **a) Condiciones:** $9-t \ge 0 \Rightarrow t \le 9$; la raíz de z está en el denominador: $t+16>0 \Rightarrow t > -16$. Intervalo paramétrico: $t \in (-16, 9]$.
2. **b) x:** $9-t$ recorre $[0,25)$ (vale 0 en $t=9$ y se acerca a 25 cuando $t \to -16^+$), así que $\sqrt{9-t} \in [0,5)$ y $x \in [-3,2)$. El 2 no se alcanza porque $t=-16$ está excluido.
3. **z:** $t+16$ recorre $(0,25]$, $\sqrt{t+16} \in (0,5]$ y $z = \frac{2}{\sqrt{t+16}}$ es decreciente: $z=\frac{2}{5}$ en $t=9$ y $z \to \infty$ cuando $t \to -16^+$. Entonces $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.
4. **Observación:** la curva está en el plano $y=-1$ y y toma solo ese valor.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. **a)** En $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t$ va de 0 a 1 y regresa a 0: $0 \le \cos t \le 1$, así que $z \in [0,2]$. (Y $\operatorname{sen} t \in [-1,1]$ da $y \in [-2,2]$.)
2. **b) Vectorial:** $\vec{p} = (-1,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t) = (-1,0,0) + 2\operatorname{sen} t\,\hat{j} + 2\cos t\,\hat{k}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. **c) Cartesianas:** $\operatorname{sen} t = \frac{y}{2}$, $\cos t = \frac{z}{2}$; con $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$: $y^2 + z^2 = 4$, $x=-1$, con $z \ge 0$.
4. **Identificación:** semicircunferencia en el plano $x=-1$, de centro $(-1,0,0)$ y radio 2: la mitad con $z \ge 0$, de $(-1,-2,0)$ a $(-1,2,0)$ pasando por $(-1,0,2)$.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. **a)** $x=8$, $y=2t$, $z=\frac{2}{t}$.
2. **b) Eliminación:** $t=\frac{y}{2}$ y $z=\frac{2}{y/2}=\frac{4}{y}$. Cartesianas: $yz=4$, $x=8$.
3. **c)** $\frac{2}{t}$ exige $t \ne 0$: $t \in (-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Las líneas marcadas SOLO PLAN 2016 o SOLO PLAN 2010 son de un solo plan; las Unidades 2 y 6 son solo del Plan 2010 (en el Plan 2016 están en Cálculo Vectorial).

A.1 Secciones cónicas (Unidad 1, Parte B)

- General: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Con $B=0$: $A=C$ circunferencia, $AC=0$ parábola, $AC>0$ elipse, $AC<0$ hipérbola.
- Circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.
- Parábola: $(y-k)^2=4p(x-h)$ o $(x-h)^2=4p(y-k)$; foco a p del vértice, directriz a $-p$, lado recto $|4p|$.
- Elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (a con el denominador mayor), $c^2=a^2-b^2$, $e=\frac{c}{a}<1$.
- Hipérbola: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (eje con el término positivo), $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, $e=\frac{c}{a}>1$.
- Lado recto de elipse e hipérbola: $\frac{2b^2}{a}$.
- SOLO PLAN 2016 $I=B^2-4AC$: <0 elipse, $=0$ parábola, >0 hipérbola.
- SOLO PLAN 2016 $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}$; $x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta$, $y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$; $A'+C'=A+C$.
- Paramétricas: elipse $x=h+a\cos t$, $y=k+b\operatorname{sen} t$; hipérbola $x=h+a\sec t$, $y=k+b\tan t$.

A.2 Curvas en el plano polar (Unidad 2)

- $(r,\theta)=(r,\theta+360^\circ k)=(-r,\theta+180^\circ+360^\circ k)$; el polo es $(0,\theta)$ para todo θ.
- $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $r^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r,θ): eje polar $(r,-\theta)$; recta a 90° $(r,180^\circ-\theta)$; polo $(r,\theta+180^\circ)=(-r,\theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta\to-\theta$ o $(-r,180^\circ-\theta)$; recta a 90° $\theta\to180^\circ-\theta$ o $(-r,-\theta)$; polo $r\to-r$ o $\theta+180^\circ$. Suficientes, no necesarias.
- $r=a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2},0\right)$; $r=a\operatorname{sen}\theta$: centro $\left(0,\frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r=a\pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a=b$, caracol con lazo si $a<b$.
- $r=a\operatorname{sen} n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2=\pm a^2\cos 2\theta$, $r^2=a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1\pm e\operatorname{sen}\theta}$: foco en el polo; $e<1$ elipse, $e=1$ parábola, $e>1$ hipérbola.

A.3 Álgebra vectorial (Unidad 3)

- $\overrightarrow{AB}=B-A$ · $|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$ · $\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ · punto medio $\frac{1}{2}(A+B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\hat{v}$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ · $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
- $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ · $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.

- $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\,\operatorname{sen}\theta\cdot\ \vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a}\times\vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D=A+C-B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M-P$.

A.4 La recta y el plano en el espacio (Unidad 4)

- Recta: $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}\cdot\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\cdot$ general: $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.
- Plano: $Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=(A,B,C)\cdot\ \vec{p}=\vec{p}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}\cdot$ perpendiculares: $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$ (igual con normales). Recta $\parallel$ plano: $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$; recta $\perp$ plano: $\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta=\frac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q,\pi)=\frac{|Ax_Q+By_Q+Cz_Q+D|}{|\vec{n}|}\cdot\ d(Q,L)=\frac{|\overrightarrow{P_0Q}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1,L_2)=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}\cdot$ planos paralelos: $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Rectas paralelas: $d(L_1,L_2)=d(P_2,L_1)\cdot$ recta paralela a un plano: $d(L,\pi)=d(P_0,\pi)\cdot$ si se cortan, la distancia es 0.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $=0$ se cortan, $\neq0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t=\frac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot$ simétrico: $Q'=2M-Q$.

A.5 Curvas en el espacio (Unidad 5)

- Vectorial $\vec{p}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\Longleftrightarrow$ paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z=k$).
- $\operatorname{sen}^2t+\cos^2t=1\cdot\sec^2t-\tan^2t=1\cdot\csc^2t-\cot^2t=1\cdot\cos2t=1-2\operatorname{sen}^2t=2\cos^2t-1\cdot\operatorname{sen}2t=2\operatorname{sen}t\cos t$.
- $(\cos t+\operatorname{sen}t)^2+(\cos t-\operatorname{sen}t)^2=2$.
- Elipse: $u=h+a\cos t$, $v=k+b\operatorname{sen}t\cdot$ hipérbola: $u=h+a\sec t$, $v=k+b\tan t\cdot$ parábola $(u-h)^2=4p(v-k)$: $u=h+2t$, $v=k+\frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2=a^2-b^2$; hipérbola $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $v-k=\pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en u).
- SOLO PLAN 2010 Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ }\geq0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }}>0$; $\tan,\sec:\ t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\cot,\csc:\ t\neq k\pi$).
- SOLO PLAN 2010 Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0\leq\operatorname{sen}^2t\leq1$, $|\sec t|\geq1$.

A.6 Superficies (Unidad 6)

- Cilindro: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{q}(\theta)+s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{v}+s\big(\vec{q}(\theta)-\vec{v}\big)$.

4. **b)** $\cos\theta=\dfrac{|2+12+0|}{\sqrt{41}\sqrt{5}}=\dfrac{14}{\sqrt{205}}=\dfrac{14\sqrt{205}}{205}$.

Ejercicio 4.6.15 ← volver

1. **Recta:** $\frac{2x-18}{6}=\frac{x-9}{3}$: $P_0(9,8,6)$, $\vec{u}=(3,1,0)$; $B(t)=(9+3t,\ 8+t,\ 6)$.
2. **Distancia:** $\overrightarrow{QB}=(10+3t,\ 5+t,\ 2)$ y $|\overrightarrow{QB}|^2=9$:

$$(10+3t)^2+(5+t)^2+4=9\ \Rightarrow\ 10t^2+70t+120=0\ \Rightarrow\ t^2+7t+12=0.$$

3. **Soluciones:** $t=-3$: $B(0,5,6)$; $t=-4$: $B(-3,4,6)$. Comprobación: $\overrightarrow{QB}=(1,2,2)$ y $(-2,1,2)$, los dos de módulo 3.

Ejercicio 4.6.16 ← volver

1. **Normal:** el plano es perpendicular a L: $\vec{n}=(3,-2,6)$, $|\vec{n}|=\sqrt{9+4+36}=7$. El plano es $3x-2y+6z+D=0$.
2. **Distancia al origen:** $\dfrac{|D|}{7}=7\Rightarrow D=\pm49$.
3. **Planos:** $3x-2y+6z-49=0$ o $3x-2y+6z+49=0$; cualquiera de los dos responde.

E.5 · Unidad 5 · Curvas en el espacio

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. **Simplificación:** $\frac{4}{\csc\theta}=4\operatorname{sen}\theta$, definida solo si $\operatorname{sen}\theta\neq0$ ($\csc\theta$ no existe en $\theta=k\pi$). Paramétricas: $x=-1+2\cos\theta$, $y=5$, $z=3+4\operatorname{sen}\theta$, $\theta\neq k\pi$.
2. **a) Identidad:** $\cos\theta=\frac{x+1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{z-3}{4}$; con $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$:

$$C:\ \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(z-3)^2}{16}=1,\qquad y=5.$$

3. **b) Identificación:** elipse en el plano $y=5$, centro $(-1,5,3)$, eje mayor paralelo al eje z; $a=4$, $b=2$, $c=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$. Vértices $(-1,5,7)$ y $(-1,5,-1)$; extremos del eje menor $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$; focos $\big(-1,5,3\pm2\sqrt{3}\big)$.
4. **Puntos excluidos:** SOLO PLAN 2010 en $\theta=0$ y $\theta=\pi$ la ecuación vectorial no está definida; esos valores darían $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$, los extremos del eje menor. La curva es la elipse sin esos dos puntos.
5. **Bosquejo:** en el plano vertical $y=5$ (paralelo al plano XZ), una elipse alargada en la dirección de z, de $z=-1$ a $z=7$ y de $x=-3$ a $x=1$, con puntos vacíos en $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$.

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. **a) Paramétricas:** $x=-3$, $y=2-5\operatorname{sen}^2t$, $z=4-3\operatorname{sen}t$. Las tres funciones existen para todo real: el intervalo paramétrico es $t\in\mathbb{R}$ (con $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se recorre la curva una vez).
2. **b) Despeje:** $\operatorname{sen}t=\frac{4-z}{3}$; sustituyendo en y:

$$y=2-5\cdot\frac{(z-4)^2}{9}\quad\Longrightarrow\quad(z-4)^2=-\frac{9}{5}(y-2).$$

1. **a)** Dirección $\vec{n}_1 = (2,3,4)$, por A: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{4}$.
2. **b)** $d = \dfrac{|-4+3+8-8|}{\sqrt{4+9+16}} = \dfrac{1}{\sqrt{29}} = \dfrac{\sqrt{29}}{29}$.
3. **c)** Vectores de π_2: $(2,3,4)$ y $\overrightarrow{AB} = (-4,0,3)$ (no paralelos). Por A: $x = 2+2r-4s$, $y = 1+3r$, $z = -1+4r+3s$. Con $r=0$, $s=1$ se obtiene B.

Ejercicio 4.6.11 ← volver

1. **a)** $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1+2-3 = 0$: los planos son perpendiculares, $\theta = 90°$.
2. **Dirección:** $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2+3,\ 3+1,\ -1+2) = (5,4,1)$.
3. **Punto:** con $z=0$: $x-2y=1$, $x-y=-1$; restando, $y=-2$, $x=-3$. $(-3,-2,0)$ cumple las dos.
4. **b)** $L:\ x = -3+5t,\ y = -2+4t,\ z = t$.

Ejercicio 4.6.12 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(-3,3,0)\times(-2,0,2) = (6,6,6)$, o $(1,1,1)$. Por $(4,0,0)$: $\pi_2:\ x+y+z=4$ (sumando las paramétricas: $x+y+z=4$).
2. **a)** $(3,2,1)$ y $(1,1,1)$ no son proporcionales: no se cumple el paralelismo. Los planos se cortan en una recta y la distancia entre ellos es 0.
3. **b)** Paralela a los dos planos: dirección perpendicular a las dos normales,

$$\vec{u} = (3,2,1)\times(1,1,1) = (2-1,\ 1-3,\ 3-2) = (1,-2,1).$$

$L:\ x = 2+t,\ y = 3-2t,\ z = -1+t$.

Observación. La fórmula $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$ solo vale para planos paralelos; aplicarla aquí da un número sin sentido.

Ejercicio 4.6.13 ← volver

1. **a)** $2(1+2t)-3(2-t)+2(-2t) = 3t-4 = -7$, $t=-1$: $P(-1,3,2)$.
2. **b)** Para un punto de L: $2x-3y+2z+7 = 3t+3$, y $|\vec{n}| = \sqrt{17}$:

$$\frac{|3t+3|}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \ \Rightarrow\ |t+1| = 1 \ \Rightarrow\ t = 0 \text{ o } t = -2.$$

3. **Puntos:** $t=0$: $Q(1,2,0)$; $t=-2$: $Q(-3,4,4)$. Basta dar uno.

Ejercicio 4.6.14 ← volver

1. **Datos:** $2-z = \frac{z-2}{-1}$: $P_L(-3,-18,2)$, $\vec{u}_L = (2,6,-1)$. $\frac{2x-8}{2} = x-4$: $P_R(4,-8,-5)$, $\vec{u}_R = (1,2,0)$.
2. **Producto cruz:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (0+2,\ -1-0,\ 4-6) = (2,-1,-2)$, de módulo 3.
3. **a)** $\overrightarrow{P_L P_R} = (7,10,-7)$; $(7,10,-7)\cdot(2,-1,-2) = 14-10+14 = 18 \neq 0$: se cruzan, y $d = \frac{18}{3} = 6$.

- Directriz: elipse $(h+a\cos\theta,\ k+b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$: $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$ o $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.
- Completar cuadrados: $ax^2+dx = a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}$.
- $+\,+\,+\,=1$ elipsoide · $+\,+\,-\,=1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\,-\,-\,=1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $=0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $++\,=0$: recta; $++\,=-1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h-a, h+a]$; dos hojas $|z-l| \geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 9 finales y los 3 parciales anteriores del Plan 2010, los problemas de geometría de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) y los de cónicas de sus 12 primeros parciales, en orden. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad y el ejemplo, el ejercicio resuelto o el ejercicio propuesto donde se trabaja; «como el…» indica un problema que no está en el cuaderno pero se resuelve con el mismo procedimiento. Las versiones del mismo examen (tipos A, C, D) suelen ser el mismo problema con otros datos.

Plan 2010: Geometría Analítica, finales

1er final 2012-1, tipo C

- (1) rosa: intersección con la recta a 90°, simetría y bosquejo [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) segmento dirigido paralelo a otro: coordenadas de un extremo [U3; ejercicio 3.5.12]; (3) vectores con módulo dado: paralelo, cosenos directores, perpendicular a dos [U3; ejercicio 3.5.1]; (4) posición relativa de dos rectas [U4; ejemplo 4.4]; (5) dos planos de una figura: ecuaciones, ángulo, recta de intersección, distancia al origen [U4; ejercicio 4.5.4]; (6) curva vectorial: paramétricas, intervalo paramétrico y extensión [U5; ejercicio 5.5.3]; (7) identificación de tres cuádricas [U6; ejercicio 6.5.6].

1er final 2013-2, tipo A

- (1) circunferencia y lemniscata: intersección, tres puntos y bosquejo [U2; propuesto 2.6.1]; (2) ángulos directores, componente vectorial, ángulo y área por diagonales [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) punto de una recta más cercano a otro; plano paralelo a dos rectas [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) intervalo paramétrico y extensión [U5; propuesto 5.6.4]; (5) cono con directriz circunferencia: paramétricas y cartesiana [U6; ejercicio 6.5.1]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; ejercicio 6.5.9].

1er final 2014-1, tipo A

- (1) cardioide: simetría, intersecciones con la recta a 90°, bosquejo [U2; ejercicio 2.5.2]; (2) paralelogramo por sus diagonales: coseno de un ángulo interior y área [U3; ejemplo 3.4]; (3) recta intersección de dos planos, punto más próximo, ángulo entre planos [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) curva vectorial: intervalo paramétrico, intervalos de x y z, cartesianas [U5; propuesto 5.6.3]; (5) cono con vértice y directriz elipse: vectorial y cartesiana [U6; ejemplo 6.4]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; ejercicio 6.5.7].

2º final 2012-1

- (1) caracol: intersecciones con el eje polar, simétrico respecto al polo, cartesiana [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) triángulo con vértices en los ejes: área y perpendicularidad [U3; propuesto 3.6.1]; (3) área de un cuadrilátero dado por tres lados [U3; ejercicio 3.5.7]; (4) parámetro para que dos planos sean perpendiculares [U4; propuesto 4.6.1]; (5) parámetro para que recta y plano formen 30° [U4; ejercicio 4.5.12]; (6) curva vectorial con cosecante: cartesianas, bosquejo e identificación [U5; propuesto 5.6.1]; (7) identificación de cuatro cuádricas [U6; ejercicio 6.5.8]; (8) cono con vértice y directriz elipse: vectorial y cartesiana [U6; ejercicio 6.5.2].

2º final 2012-2

- (1) cardioide, rosa y lemniscata: nombre, tres puntos y bosquejo [U2; ejemplo 2.4]; (2) tres puntos vértices de un rectángulo; cuarto vértice [U3; propuesto 3.6.2]; (3) recta intersección de dos planos,

1. **Recta:** $\vec{u} = (1,3,0)\times(0,0,1) = (3,-1,0)$; con $y=0$: $x=2$, punto $(2,0,7)$. $L:\ x = 2+3t,\ y=-t,\ z=7$.
2. **Sustitución:** $-2(2+3t)-6(-t)+6(7) = -4-6t+6t+42 = 38$: queda $38=38$ para todo t.
3. **Conclusión:** todo punto de L está en π (además $\vec{u}\cdot\vec{n} = -6+6+0=0$). La intersección es la recta L.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. **Intersección:** $3-2t_M = -1-t_N$, $-1+t_M = -3+t_N$, $2t_M = -4+2t_N$. De la segunda, $t_N = t_M+2$; la tercera queda $2t_M = 2t_M$ (se cumple siempre); la primera da $3-2t_M = -3-t_M$, $t_M = 6$, $t_N = 8$.
2. **Punto:** $A(3-12,\ -1+6,\ 12) = (-9,5,12)$; en N: $(-1-8,\ -3+8,\ -4+16)$, el mismo.
3. **Plano paralelo:** misma normal $(5,-1,2)$: $5x-y+2z+D=0$ con $-45-5+24+D=0$, $D=26$.

Ejercicio 4.6.7 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(4,0,-2)\times(-4,8,0) = (16,8,32)$, o $(2,1,4)$: es la de π_1, así que son paralelos.
2. **Ecuación de π_2:** por $(0,0,2)$ (con $r=s=0$): $2x+y+4z=8$.
3. **Distancia:** $d = \dfrac{|16-8|}{\sqrt{4+1+16}} = \dfrac{8}{\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{21}$.

Ejercicio 4.6.8 ← volver

1. **a)** Por el origen, con $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$: $\vec{p} = r(-1,1,1)+s(1,-2,0)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0+2,\ 1-0,\ 2-1) = (2,1,1), \qquad \pi:\ 2x+y+z=0.$$

   Comprobación: $-2+1+1=0$ y $2-2+0=0$.
2. **b)** $d = \dfrac{|6+0-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$.
3. **c)** Dirección $\vec{n}=(2,1,1)$, por C: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$.

Ejercicio 4.6.9 ← volver

1. **a)** Paralelos: $(1,\beta,1) = k(3,-1,3)$; de la primera componente $k=\frac{1}{3}$, y $\beta=-\frac{1}{3}$. Contiene al origen: $D=0$.
2. **b)** $d = \dfrac{|-9|}{\sqrt{9+1+9}} = \dfrac{9}{\sqrt{19}} = \dfrac{9\sqrt{19}}{19}$.
3. **c)** Punto de π_1: $(3,0,0)$. Dos vectores perpendiculares a $(3,-1,3)$: $(1,3,0)$ y $(0,3,1)$ $(3-3=0,\ -3+3=0)$. $\pi_1:\ \vec{p} = (3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$.
4. **d)** Dirección $(3,-1,3)$, por A: $x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

Ejercicio 4.6.10 ← volver

1. **Ángulo:** $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta \Rightarrow 6 = 12\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$. Como es agudo, $\theta = 30^\circ$.
2. **Producto escalar:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12\cos 30^\circ = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

E.4 · Unidad 4 · La recta y el plano en el espacio

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. **Plano π:** contiene la dirección $(2,1,-3)$ y, por ser perpendicular al plano XY, la dirección $\hat{k}$:
$$\vec{n} = (2,1,-3)\times(0,0,1) = (1,-2,0).$$
Pasa por el origen: $\pi:\ x-2y=0$.
2. **Plano π_0:** contiene las direcciones $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$:
$$\vec{n}_0 = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & 4 & m\end{vmatrix} = (-4,\ 5-2m,\ 8).$$
3. **Perpendicularidad:** $\vec{n}\cdot\vec{n}_0 = -4-2(5-2m) = 4m-14 = 0$, $m=\frac{7}{2}$.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. **Datos:** $P_0(-2,1,6)$, $\vec{u}=(3,2,3)$; el plano contiene la dirección $\hat{\jmath}$, normal del plano XZ.
2. **a)** $\vec{n} = (3,2,3)\times(0,1,0) = (-3,0,3)$, o $(1,0,-1)$. Por P_0: $(x+2)-(z-6)=0$, es decir, $x-z+8=0$.
3. **b)** $d = \dfrac{|0-0+8|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. **Datos:** $\vec{u}=(h,0,\sqrt{3})$; $\pi:\ x=1$, con $\vec{n}=(1,0,0)$.
2. **Ángulo recta–plano:** $\operatorname{sen}60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+3}}$.
3. **Ecuación:** $3(h^2+3) = 4h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = \pm 3$.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. **Datos de L:** $\frac{2-2x}{-2} = x-1$: $L:\ x-1 = \frac{y+5}{-3} = z$, $P_0(1,-5,0)$, $\vec{u}=(1,-3,1)$.
2. **Normal:** $\vec{N}$ es perpendicular a $\vec{u}$ (el plano contiene a L) y a $\vec{v}$:
$$\vec{N} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{vmatrix} = (-24-5,\ 3-8,\ 5+9) = (-29,-5,14).$$
3. **Ecuación:** con $(29,5,-14)$ y P_0: $29(x-1)+5(y+5)-14z=0$, es decir, $29x+5y-14z-4=0$. Comprobación: $(29,5,-14)\cdot(3,5,8) = 87+25-112 = 0$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

plano por dos rectas, ángulo recta–plano [U4; ejercicio 4.5.5]; (4) plano que contiene una recta y es perpendicular al plano XZ; distancia al origen [U4; propuesto 4.6.2]; (5) curva con coseno del ángulo doble: cartesianas, extensión y bosquejo [U5; ejercicio 5.5.1]; (6) cilindro con generatrices paralelas a un vector [U6; ejercicio 6.5.5].

2º final 2013-1

- (1) cardioide: simetría, intersecciones con el eje polar, bosquejo [U2; propuesto 2.6.2]; (2) paralelepípedo de volumen dado con parámetro; componente vectorial [U3; ejercicio 3.5.8]; (3) punto simétrico respecto a una recta [U4; ejercicio 4.5.11]; (4) parámetro para un ángulo de 60° entre recta y plano [U4; propuesto 4.6.3]; (5) parábola en un plano paralelo a YZ: paramétricas, vectorial, identificación [U5; ejercicio 5.5.4]; (6) cilindro con directriz elipse: vectorial, paramétricas y cartesiana [U6; ejercicio 6.5.3]; (7) identificación de tres cuádricas [U6; propuesto 6.6.3].

2º final 2013-2

- (1) lemniscata: simetría, puntos más alejados del polo, bosquejo [U2; ejercicio 2.5.4]; (2) parámetro para perpendicularidad; área del paralelogramo [U3; propuesto 3.6.3]; (3) plano que contiene una recta con normal perpendicular a un vector [U4; propuesto 4.6.4]; (4) hipérbola con tangente y secante: intervalo, cartesianas, bosquejo [U5; ejemplo 5.4]; (5) cono con directriz elipse: vectorial y cartesiana [U6; propuesto 6.6.1]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; propuesto 6.6.4].

2º final 2014-1

- (1) cónica en polares y circunferencia: cartesianas, área de un triángulo, bosquejo [U2; ejercicio 2.5.5]; (2) combinación lineal y vector paralelo con condición de módulo [U3; propuesto 3.6.4]; (3) distancia entre rectas, plano que las contiene, intersección con z=4 [U4; ejercicio 4.5.7]; (4) curva vectorial: paramétricas, intervalo, cartesianas, intervalos de y y z [U5; propuesto 5.6.2]; (5) cilindro con directriz circunferencia [U6; ejercicio 6.5.4]; (6) identificación de tres cuádricas con intervalos de variación [U6; ejemplo 6.4].

2º final 2014-2

- (1) circunferencia: intersecciones, simetría respecto al polo, cartesiana [U2; propuesto 2.6.3]; (2) área de un triángulo con ángulo de 60° y componente escalar dada [U3; ejercicio 3.5.5]; (3) plano perpendicular al plano XZ que contiene una recta; distancia del origen a la recta [U4; ejercicio 4.5.10]; (4) curva con seno y coseno en un plano z=4: cartesianas e identificación [U5; ejercicio 5.5.2]; (5) cilindro con directriz circunferencia [U6; propuesto 6.6.2]; (6) identificación de tres cuádricas [U6; propuesto 6.6.5].

Plan 2010: parciales de la versión anterior del programa

1er parcial 2005-2, tipo B

- (1) simetrías de puntos con coordenadas cilíndricas y esféricas (fuera del programa de 2008); (2) distancia de un punto al eje Y [U3; ejercicio 3.5.13]; (3) segmentos dirigidos paralelos con parámetros [U3; propuesto 3.6.5]; (4) vectores perpendiculares y paralelogramo de área 6 [U3; propuesto 3.6.6]; (5) componentes escalar y vectorial [U3; propuesto 3.6.7]; (6) componente, coseno y área de un triángulo [U3; propuesto 3.6.8].

2º parcial 2005-2, tipo A

- (1) recta por el origen que corta perpendicularmente a otra [U4; ejercicio 4.5.15]; (2) ángulo recta–plano; recta perpendicular al plano por la intersección [U4; ejercicio 4.5.16]; (3) intersección recta–plano [U4; propuesto 4.6.5]; (4) rectas y plano en un prisma [U4; ejercicio 4.5.17]; (5) plano paralelo por la intersección de dos rectas [U4; propuesto 4.6.6]; (6) distancia entre planos [U4; propuesto 4.6.7].

3er parcial 2006-2, tipo B

- (1) circunferencia en un plano x=cte: extensión, vectorial, cartesianas [U5; propuesto 5.6.5]; (2) curva vectorial: paramétricas, cartesianas, intervalo [U5; propuesto 5.6.6]; (3) elipse con centro y semiejes dados: paramétricas y vectorial [U5; ejercicio 5.5.5]; (4) cono con vértice y directriz [U6; propuesto 6.6.6]; (5) cilindro de circunferencias con centros en una recta [U6; propuesto 6.6.7]; (6) hiperboloide de dos hojas: trazas, extensión, curva de intersección [U6; propuesto 6.6.8]; (7) identificación de cuatro superficies [U6; propuesto 6.6.9].

Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica, finales

Solo los problemas de geometría. Los problemas 1 a 4 (cálculo) están en el cuaderno de Cálculo Diferencial, Apéndice B.

1er final 2016-1, tipo A

- (5) área de un paralelogramo (armadura) [U3; ejercicio 3.5.6]; (6) plano que contiene dos rectas y distancia entre ellas [U4; ejercicio 4.5.2].

1er final 2016-1, tipo C

- (5) área de un triángulo con ángulo de 60° y componente escalar dada [U3; ejercicio 3.5.5]; (6) plano por tres puntos; distancia punto–plano [U4; ejercicio 4.5.1].

1er final 2016-2, tipo A

- (5) diagonales: componente vectorial y área [U3; como el ejercicio 3.5.2]; (6) plano por el origen y dos puntos, distancia, recta perpendicular [U4; propuesto 4.6.8].

1er final 2016-2, tipo D

- (5) cosenos directores, componente vectorial, volumen [U3; ejercicio 3.5.9]; (6) planos paralelos con parámetros, distancia, recta perpendicular [U4; propuesto 4.6.9].

1er final 2017-1, tipo A

- (6) coordenadas de un punto, coseno y área de un triángulo [U3; como el ejercicio 3.5.14]; (7) recta perpendicular a un plano, distancia, plano paramétrico [U4; propuesto 4.6.10].

1er final 2017-1, tipo C

- (5) volumen del paralelepípedo y coseno entre aristas [U3; propuesto 3.6.9]; (6) punto de una recta a distancia 3 de otro [U4; propuesto 4.6.15].

1er final 2017-2, tipo A

- (6) componente vectorial, unitario perpendicular, área [U3; propuesto 3.6.10]; (7) ángulo e intersección recta–plano [U4; ejercicio 4.5.13].

1er final 2017-2, tipo C

- (5) vértices de un paralelogramo [U3; ejercicio 3.5.15]; (6) plano paralelo por la intersección de dos rectas [U4; como el propuesto 4.6.6].

1er final 2018-1, tipo A

- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.15]; (6) intersección recta–plano, recta perpendicular simétrica [U4; como el ejercicio 4.5.13].

1er final 2018-1, tipo C

- (5) vector perpendicular a dos con módulo dado, cosenos directores, componente vectorial [U3; ejercicio 3.5.3]; (6) intersección de rectas, plano que las contiene, distancia punto–recta [U4; ejercicio 4.5.9].

1er final 2018-2, tipo A

3. **b)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=4+12+4=20$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{21}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{29}$: $\cos\theta=\frac{20}{\sqrt{609}}$.

Ejercicio 3.6.10 ← volver

1. $\vec{v}=B-A=(-2,1,4)$, $|\vec{v}|^2=21$.
2. **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2+2+12=12$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u}=\frac{12}{21}\vec{v}=\frac{4}{7}(-2,1,4)=\left(-\frac{8}{7},\frac{4}{7},\frac{16}{7}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&2&3\\-2&1&4\end{vmatrix}=(8-3)\hat{\imath}-(4+6)\hat{\jmath}+(1+4)\hat{k}=(5,-10,5)=5(1,-2,1),$$

$\vec{w}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

4. **c)** $A=|\vec{u}\times\vec{v}|=5\sqrt{6}$.

Ejercicio 3.6.11 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(3,1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,-3,3)$.
2. **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-2=4$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{19}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$: $\cos A=\frac{4}{2\sqrt{38}}=\frac{\sqrt{38}}{19}$.
3. **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3-3-9=-15$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{19}$: $\text{comp}_{\overrightarrow{BC}}\,\overrightarrow{AB}=-\frac{15}{\sqrt{19}}$.
4. **c)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\3&1&-3\\2&-2&0\end{vmatrix}=(0-6)\hat{\imath}-(0+6)\hat{\jmath}+(-6-2)\hat{k}=(-6,-6,-8)$; $|...|=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$ y el área es $\sqrt{34}$.

Ejercicio 3.6.12 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,d_2-1,-1)$.
2. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-2&-1&-1\\-2&2&2\end{vmatrix}=(-2+2)\hat{\imath}-(-4-2)\hat{\jmath}+(-4-2)\hat{k}=(0,6,-6)$.
3. $(0,6,-6)\cdot(2,d_2-1,-1)=6d_2-6+6=6d_2$.
4. $V=\frac{1}{6}|6d_2|=|d_2|=5\Rightarrow d_2=\pm5$.

Ejercicio 3.6.13 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(6,2,-4)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12+4=16$, $|\overrightarrow{AC}|^2=56$.
2. **a)** $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}=\frac{16}{56}(6,2,-4)=\frac{2}{7}(6,2,-4)$, así que $Q=A+\overrightarrow{AQ}=\left(1+\frac{12}{7},2+\frac{4}{7},3-\frac{8}{7}\right)=\left(\frac{19}{7},\frac{18}{7},\frac{13}{7}\right)$.
3. Comprobación: $\overrightarrow{QB}=\left(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$ y $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{12-8-4}{7}=0$.
4. **b)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&0&-1\\6&2&-4\end{vmatrix}=(0+2)\hat{\imath}-(-8+6)\hat{\jmath}+(4-0)\hat{k}=(2,2,4)$, de módulo $2\sqrt{6}$; el área es $\sqrt{6}$.

Ejercicio 3.6.14 ← volver

1. $\vec{u} = (9,0,6) + (-8,2,6) - (2,1,10) = (-1,1,2)$.
2. $\vec{v} = \lambda\vec{d} = \lambda(3,6,-6)$, así que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(-3+6-12) = -9\lambda$.
3. $-2(-9\lambda) = -36 \Rightarrow 18\lambda = -36 \Rightarrow \lambda = -2$ y $\vec{v} = (-6,-12,12)$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$ y $\overrightarrow{DC} = C - D = (c_1 - 4,\ -2,\ 2 - d_3)$.
2. Paralelos: $\overrightarrow{DC} = k\,\overrightarrow{AB}$. La segunda componente da $-2 = 2k \Rightarrow k = -1$.
3. Entonces $c_1 - 4 = -2 \Rightarrow c_1 = 2$ y $2 - d_3 = -1 \Rightarrow d_3 = 3$. (Quedan paralelos de sentido contrario: $\overrightarrow{DC} = (-2,-2,-1)$.)

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. **Perpendicularidad:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$.
2. **Área:** $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & b & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b,-2,b)$, así que $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = 2b^2 + 4 = 36 \Rightarrow b^2 = 16, b = \pm 4$.
3. Otra forma: como son perpendiculares, $A = |\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{2+b^2}\,\sqrt{2} = 6$.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 5, con $\vec{u} = (1,a,1)$ y $\vec{v} = (-1,0,b)$: $b = 1$ y $a = \pm 4$.

Ejercicio 3.6.7 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{OB}\cdot\hat{\jmath} = 4\sqrt{2}$ y $|\hat{\jmath}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\hat{\jmath}}\,\overrightarrow{OB} = 4\sqrt{2}\,\hat{\jmath} = \big(0, 4\sqrt{2}, 0\big)$.
2. **b)** $C = \frac{1}{2}(A+B) = \big(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -4\big)$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{8+8+16} = 4\sqrt{2}$.
3. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 16 + 0 + 16 = 32$: $\text{comp}_{\overrightarrow{OC}}\,\overrightarrow{OA} = \frac{32}{4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.6.8 ← volver

1. **Relación:** $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{AB} = -\vec{c}$, así que $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$ y $|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.
2. **a)** $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{1}{1}\vec{a} = \vec{a}$.
3. **b)** $\cos\theta = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\theta = 45°$).
4. **c)** $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times(\vec{a}-\vec{c}) = -\vec{a}\times\vec{c}$, con $|\vec{a}\times\vec{c}| = 1\cdot 1\cdot \operatorname{sen} 90° = 1$: área $\frac{1}{2}$. (Es un triángulo rectángulo en A con catetos de longitud 1.)

Ejercicio 3.6.9 ← volver

1. **Aristas:** $\overrightarrow{AB} = (-6,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,-4,2)$, $\overrightarrow{AD} = (-4,-3,2)$.
2. **a)**

$$\begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -6(-8+6) - 1(-2+8) + 2(3-16) = 12 - 6 - 26 = -20,$$

así que $V = 20$.

- (6) componente vectorial y volumen [U3; como el ejercicio 3.5.9]; (7) ángulo entre planos y recta de intersección [U4; propuesto 4.6.11].

1er final 2018-2, tipo C
- (5) punto simétrico, componente vectorial, recta por dos puntos [U3; como el propuesto 3.6.7]; (6) plano por un punto y el eje Y [U4; como el ejercicio 4.5.10].

1er final 2019-1, tipo A
- (5) triángulo: coseno, componente escalar, área [U3; propuesto 3.6.11]; (6) intersección recta–plano; punto a distancia dada del plano [U4; propuesto 4.6.13].

1er final 2019-1, tipo C
- (5) perpendiculares con parámetros y área 6 [U3; propuesto 3.6.6]; (6) distancia entre rectas, plano equidistante, perpendicular común [U4; ejercicio 4.5.8].

1er final 2019-2, tipo A
- (5) componente escalar y producto mixto con parámetros [U3; ejercicio 3.5.10]; (6) ángulo entre rectas y plano que las contiene [U4; como el propuesto 4.6.14].

1er final 2019-2, tipo C
- (5) diagonales y área con parámetro [U3; como el ejercicio 3.5.2]; (6) plano por un punto y una recta, distancia punto–recta [U4; como el ejercicio 4.5.9].

1er final 2020-1, tipo A
- (5) componente vectorial, coseno, unitario perpendicular, área [U3; como el propuesto 3.6.10]; (6) distancia punto–recta, recta paralela, plano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

1er final 2020-1, tipo C
- (5) tetraedro: componente escalar, área, volumen [U3; ejercicio 3.5.11]; (6) intersección de rectas, plano, distancia punto–plano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

1er final 2024-1, tipo C
- (5) ángulo, distancia del origen a una recta, plano por tres puntos [U3 y U4; como los ejercicios 3.5.2, 4.5.10 y 4.5.1]; (6) punto del plano más cercano a otro [U4; ejercicio 4.5.14].

1er final 2024-2, tipo A
- (5) paralelogramo: punto medio y coseno [U3; ejercicio 3.5.14]; (6) plano por un punto y una recta [U4; como el propuesto 4.6.10].

1er final 2025-1, tipo A
- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.15]; (6) plano por tres puntos, recta perpendicular, distancia entre planos [U4; como el ejercicio 4.5.1].

1er final 2025-1, tipo D
- (5) volumen del paralelepípedo [U3; como el propuesto 3.6.9]; (6) plano que contiene dos rectas paralelas [U4; como el ejercicio 4.5.2].

1er final 2025-2, tipo A
- (5) área de un triángulo y plano que lo contiene [U3; como el propuesto 3.6.11]; (6) distancia punto–plano, recta perpendicular [U4; como el propuesto 4.6.8].

1er final 2026-1, tipo A

- (5) volumen de un tetraedro [U3; como el ejercicio 3.5.11]; (6) coseno del ángulo entre rectas [U4; como el propuesto 4.6.14].

1er final 2026-2, tipo A

- (5) producto escalar a partir del área [U3; propuesto 3.6.14]; (6) plano que contiene dos rectas [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2016-1, tipo A

- (5) curva en el espacio con secante y tangente: cartesianas e identificación [U5; ejercicio 5.5.6]; (6) volumen, intersección recta–plano, plano por tres puntos [U4; como el ejercicio 4.5.1].

2º final 2016-2, tipo A

- (5) el triángulo del 1er final 2016-1, tipo C [U3; ejercicio 3.5.5]; (6) distancia entre planos, recta paralela a ambos [U4; propuesto 4.6.12].

2º final 2017-1, tipo A

- (5) cuadrado: vértices y componente vectorial [U3; ejercicio 3.5.16]; (6) plano por tres puntos, simétricas, intersección [U4; como el ejercicio 4.5.1].

2º final 2017-2, tipo A

- (6) operaciones, componente vectorial, coseno [U3; como el ejercicio 3.5.3]; (7) intersección de rectas, plano paramétrico y cartesiano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2018-1, tipo A

- (5) tetraedro de volumen 5 con parámetro [U3; propuesto 3.6.12]; (6) recta intersección de planos y ángulo [U4; como el ejercicio 4.5.3].

2º final 2018-2, tipo A

- (5) paralelogramo: un punto y área de un triángulo [U3; propuesto 3.6.13]; (6) distancia y ángulo entre rectas [U4; propuesto 4.6.14].

2º final 2019-1, tipo A

- (5) punto medio, componente vectorial, volumen [U3; como el ejercicio 3.5.9]; (6) distancia entre rectas, plano vectorial y cartesiano [U4; como el ejercicio 4.5.7].

2º final 2019-2, tipo A

- (5) operaciones, unitario perpendicular, área [U3; como el propuesto 3.6.10]; (6) ángulo entre rectas, distancia punto–recta, plano paralelo [U4; como el propuesto 4.6.14].

2º final 2020-1

- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.15]; (6) distancia del origen a una recta, intersección con un plano, plano perpendicular [U4; como el ejercicio 4.5.10].

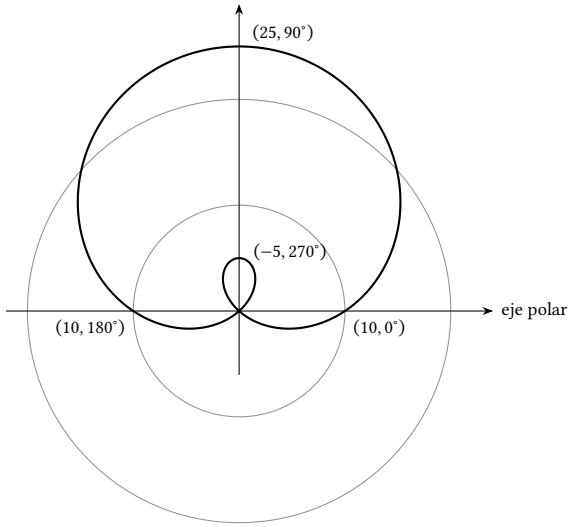
2º final 2024-2, tipo A

- (5) unitario paralelo al plano XZ a 45° de un vector [U3; ejercicio 3.5.4]; (6) plano de un paralelogramo, recta por dos puntos [U4; como el ejercicio 4.5.1].

2º final 2025-1, tipo A

- (5) punto, componente vectorial, área [U3; como el propuesto 3.6.10]; (6) distancia punto–recta, plano que contiene dos rectas [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2025-2, tipo A



E.3 · Unidad 3 · Álgebra vectorial

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. **Incógnitas:** $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$.
2. **Perpendicularidad:** $(a,b,0)\cdot(1,-2,4) = a-2b = 0 \Rightarrow a = 2b$.
3. **Área:** $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = (0,0,ab)$, así que $\frac{1}{2}|ab| = 4 \Rightarrow |ab| = 8$.
4. Con $a = 2b$: $2b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2$, $a = \pm 4$ (mismo signo).

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{RP} = (2,-1,-1)$, $\overrightarrow{RQ} = (1,-2,4)$; $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = 2+2-4 = 0$: el ángulo en R es recto, así que P, R, Q son vértices consecutivos de un rectángulo; el paralelogramo con el cuarto vértice opuesto a R tiene sus cuatro ángulos rectos.
2. **b)** S es el vértice opuesto a R: $S = P+Q-R = (1+0+1,\ 2+1-3,\ -3+2+2) = (2,0,1)$.
3. **Comprobación:** $\overrightarrow{QS} = (2,-1,-1) = \overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ} = (-1,2,-4)\cdot(-2,1,1) = 0$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12-4-8 = 0$: ya son perpendiculares. $\vec{a}\cdot\vec{c} = 12-8+4c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -1$.
2. **b)**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (8-4)\hat{\imath} - (-12-8)\hat{\jmath} + (6+8)\hat{k} = (4,20,14),$$

$A = \sqrt{16+400+196} = \sqrt{612} = 6\sqrt{17}$. Como $\vec{a}\perp\vec{b}$, también $A = |\vec{a}||\vec{b}| = 2\sqrt{17}\cdot 3$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

3. **b) Polo y valores negativos:** $r = 0$ solo en $\theta = 180^\circ$, y $r \geq 0$ siempre: no hay más puntos. En cartesianas, $\left(x^2+y^2-2x\right)^2 = 4\left(x^2+y^2\right)$ con $y = 0$ da $x^2(x-2)^2 = 4x^2$, $x = 0$ o $x = 4$.
4. **c) Identificación:** $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$, es decir, una cardioide. Tabla: $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 4, 3, 2, 1, 0$; la mitad de abajo es el reflejo. Es la curva del inciso a del ejemplo 2.4 (figura de esa sección).

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 1$, punto $(1, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = -1$, punto $(-1, 180^\circ)$, que es el mismo $(1, 0^\circ)$.
2. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 90^\circ$: el polo está en C. Intersecciones: $(1, 0^\circ)$ y el polo.
3. **b) Prueba 1** ($r \to -r$): $-r = \cos\theta$. Cambia. **Prueba 2** ($\theta \to \theta + 180^\circ$): $r = \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **b) Contraejemplo:** $(1, 0^\circ)$ está en C; su simétrico respecto al polo es $(1, 180^\circ) = (-1, 0^\circ)$. Con $(1, 180^\circ)$: $\cos 180^\circ = -1 \neq 1$; con $(-1, 0^\circ)$: $\cos 0^\circ = 1 \neq -1$. No es simétrica respecto al polo.
5. **c) Cartesiana:** $r^2 = r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = x \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Multiplicar por r no agrega puntos: el polo ya estaba en C. Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, tangente a la recta a 90° en el polo.

Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. **Nombre:** $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ con $a = 10 < b = 15$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$ no cambia la ecuación).
2. **a) Pruebas:** $\theta \to -\theta$ da $r = 10 - 15\,\mathrm{sen}\,\theta$; $r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$ da $-r = 10 + 15\,\mathrm{sen}\,\theta$. Las dos cambian.
3. **a) Contraejemplo:** $(25, 90^\circ)$ está en la curva. Su simétrico es $(25, 270^\circ)$: $10 + 15\,\mathrm{sen}\,270^\circ = -5 \neq 25$; con $(-25, 90^\circ)$: $10 + 15\,\mathrm{sen}\,90^\circ = 25 \neq -25$. No es simétrica respecto al eje polar.
4. **b) Eje polar:** $\theta = 0^\circ : r = 10$; $\theta = 180^\circ : r = 10$. Puntos $(10, 0^\circ)$ y $(10, 180^\circ)$.
5. **b) Recta a 90°:** $\theta = 90^\circ : r = 25$; $\theta = 270^\circ : r = -5$. Puntos $(25, 90^\circ)$ y $(-5, 270^\circ) = (5, 90^\circ)$: este es el extremo del lazo interior.
6. **b) Polo:** $r = 0 \iff \mathrm{sen}\,\theta = -\frac{2}{3}$, que tiene dos soluciones en el tercer y cuarto cuadrantes ($\theta = 180^\circ + \text{ang sen}\,\frac{2}{3}$ y $\theta = 360^\circ - \text{ang sen}\,\frac{2}{3}$). El polo pertenece a la curva y a las dos rectas.
7. **b) Comprobación en cartesianas:** $r^2 = 10r + 15r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \left(x^2+y^2-15y\right)^2 = 100\left(x^2+y^2\right)$. Con $y = 0$: $x^4 = 100x^2$, $x = 0, \pm 10$. Con $x = 0$: $y^2(y-15)^2 = 100y^2$, $y = 0$, $y = 5$ o $y = 25$. Coinciden.

- (5) coordenadas de un punto en una figura [U3; como el ejercicio 3.5.12]; (6) intersección de rectas, coseno, plano [U4; como el ejercicio 4.5.9].

2º final 2026-1, tipo A

- (5) área por diagonales [U3; como el ejercicio 3.5.2]; (6) plano perpendicular a una recta a distancia 7 del origen [U4; propuesto 4.6.16].

2º final 2026-2, tipo A

- (5) ángulo y área de un triángulo [U3; como el propuesto 3.6.11]; (6) recta perpendicular a otra dentro de un plano [U4; como el ejercicio 4.5.15].

Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica, primeros parciales

Solo los problemas de cónicas; el resto del primer parcial (funciones) está en el cuaderno de Cálculo Diferencial.

1er parcial 2024-1, tipo A

- (1) forma ordinaria de una hipérbola y gráfica [U1B; como el ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2024-2, tipo A

- (1) identificar y graficar una hipérbola [U1B; propuesto 1B.6.1]; (2) rotación de ejes: semieje menor [U1B; ejercicio 1B.5.6].

1er parcial 2024-2, tipo C

- (1) identificar y graficar una hipérbola [U1B; como el ejercicio 1B.5.1]; (2) centro y radio de una circunferencia [U1B; ejercicio 1B.5.3].

1er parcial 2025-1, tipo A

- (1) circunferencia con centro en la intersección de una recta con el eje Y [U1B; propuesto 1B.6.2].

1er parcial 2025-1, tipo C

- (1) parámetro para el semieje transverso de una hipérbola [U1B; ejercicio 1B.5.5].

1er parcial 2025-1, tipo D

- (1) forma ordinaria de una parábola y gráfica [U1B; ejemplo 1B.4].

1er parcial 2025-2, tipo A

- (1) hipérbola de eje vertical con sus elementos y gráfica [U1B; ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2025-2, tipo B

- (1) la misma hipérbola del tipo A (ecuación multiplicada por −1) [U1B; ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2025-2, tipo C

- (1) elipse con eje paralelo al eje X, centro y dos puntos [U1B; ejercicio 1B.5.4].

1er parcial 2026-2, tipo A

- (1) hipérbola con sus elementos y gráfica [U1B; como el ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2026-2, tipo B

- (1) la misma hipérbola del tipo A (ecuación multiplicada por −1) [U1B; como el ejercicio 1B.5.1].

1er parcial 2026-2, tipo C

- (1) parábola con sus elementos [U1B; ejercicio 1B.5.2].

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del examen de tu plan. Resuélvelo sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

- **Plan 2010:** seis problemas, 2 horas.
- **Plan 2016:** los problemas 5 (vectores) y 6 (recta y plano), 40 minutos. Se suman a los simulacros del Plan 2016 del cuaderno de Cálculo Diferencial (problemas 1 a 4, 80 minutos): el simulacro 1 de este cuaderno completa el 1 de aquel, y el 2, el 2. Juntos son un final completo de 2 horas.

Simulacro	1	2	3	4	5	6
Plan 2010, 1	2.6.1	3.6.1	4.6.1	5.6.1	6.6.1	6.6.3
Plan 2010, 2	2.6.2	3.6.3	4.6.3	5.6.2	6.6.2	6.6.4
Plan 2016, 1	—	—	—	—	3.6.9	4.6.8
Plan 2016, 2	—	—	—	—	3.6.11	4.6.11

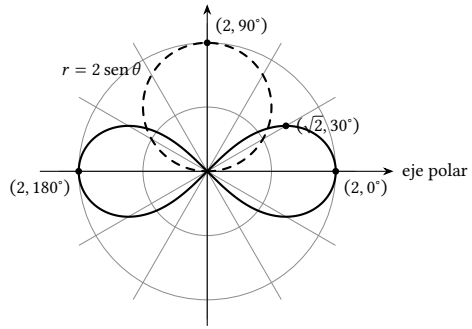
Las columnas 1 a 6 son los problemas del examen; los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). En el Plan 2010, la columna 5 es la superficie por generatrices y la 6, la identificación de cuádricas; si quieres un tercer simulacro, usa los propuestos 3.6.4, 4.6.4, 5.6.3, 6.6.6 y 6.6.5 con la curva polar 2.6.3. En el Plan 2016, las columnas 1 a 4 son las del cuaderno de Cálculo Diferencial.

1. **Indicador:** $A = B = C = 1$; $I = 1 - 4 = -3 < 0$: elipse.
2. **Ángulo:** $\cot 2\theta = \frac{1-1}{1} = 0$, $\theta = 45^\circ$.
3. **Coeficientes nuevos:** $A' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $C' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; comprobación $A' + C' = 2 = A + C$.
4. **Forma ordinaria:** $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 4$, es decir,
$$\frac{x'^2}{8/3} + \frac{y'^2}{8} = 1.$$
5. **Semiejes:** $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ sobre el eje y' (la recta $y = -x$) y $b = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ sobre el eje x' (la recta $y = x$). Comprobación: $(-2, 2)$ está en la curva $(4 - 4 + 4 = 4)$ a distancia $2\sqrt{2}$ del origen.

E.2 · Unidad 2 · Curvas en el plano polar (solo Plan 2010)

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. **a)** C_1**:** circunferencia por el polo ($r = a \operatorname{sen}\theta$, $a = 2$), de centro $(0, 1)$ y radio 1.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 90^\circ : r = 2$, punto $(2, 90^\circ)$; $\theta = 270^\circ : r = -2$, punto $(-2, 270^\circ)$, que es el mismo $(2, 90^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 0^\circ$: el polo está en C_1 y en la recta. Son dos puntos: el polo y $(2, 90^\circ)$.
4. **b) Identificación:** $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ con $a = 2$: lemniscata de lazos sobre el eje polar. Existe para $\cos 2\theta \geq 0$: $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ y $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$.
5. **b) Puntos:** $\theta = 0^\circ : r^2 = 4$, $r = \pm 2$: $(2, 0^\circ)$ y $(-2, 0^\circ) = (2, 180^\circ)$. $\theta = 30^\circ : r^2 = 4 \cos 60^\circ = 2$, $\left(\sqrt{2}, 30^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$.
6. **b) Bosquejo:** $\theta \to -\theta$ y $r \to -r$ no cambian la ecuación: simétrica respecto al eje polar y al polo (y, por tanto, a la recta a 90°). Se dibuja el lazo de 0° a 45° y se refleja.



Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2 + 2\cos(-\theta) = 2 + 2\cos\theta$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 4$, punto $(4, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = 0$, el polo.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Secciones cónicas

Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. **Identificación:** $A = 1$ y $C = -1$ de signos contrarios: hipérbola.
2. **Completar el cuadrado:** $x^2 - \left(y^2 - 8y + 16\right) = 17 - 16$, es decir, $x^2 - (y-4)^2 = 1$.
3. **Elementos:** eje transverso horizontal (el término positivo es el de x); $C(0,4)$, $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$. Vértices $(1,4)$ y $(-1,4)$; focos $\left(\pm\sqrt{2}, 4\right)$; asíntotas $y - 4 = \pm x$; $e = \sqrt{2}$.
4. **Intersecciones:** con $y = 0$, $x^2 = 17$, $x = \pm\sqrt{17}$; con $x = 0$, $-(y-4)^2 = 1$ no tiene solución: no corta al eje y.
5. **Gráfica:** dos ramas, una a la derecha de $(1,4)$ y otra a la izquierda de $(-1,4)$, que se acercan a las rectas $y = x + 4$ y $y = -x + 4$.

Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. **Centro:** el eje de las ordenadas es $x = 0$; en la recta, $-y - 6 = 0$, $y = -6$. Centro $C(0,-6)$.
2. **Forma ordinaria:** $x^2 + (y+6)^2 = 9$.
3. **Ecuación general:** $x^2 + y^2 + 12y + 36 - 9 = 0$, es decir, $x^2 + y^2 + 12y + 27 = 0$.
4. **Gráfica:** circunferencia de centro $(0,-6)$ que pasa por $(\pm 3,-6)$, $(0,-3)$ y $(0,-9)$; queda toda debajo del eje x.

Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. **Identificación:** $B = 0$, $C = 0$ y $A = 4 \neq 0$: solo x está al cuadrado; es parábola de eje vertical si no resulta degenerada.
2. **Completar el cuadrado:**

$$4\left(x^2 - 5x\right) = 24y - 97$$
$$4\left(x^2 - 5x + \tfrac{25}{4}\right) = 24y - 97 + 25 = 24y - 72$$
$$\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3).$$

3. **Elementos:** $V\left(\frac{5}{2}, 3\right)$; $4p = 6$, $p = \frac{3}{2} > 0$: abre hacia arriba, con foco $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ y directriz $y = \frac{3}{2}$.

Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. **Centro de la elipse:** $\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4y^2 = 4$, es decir, $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$: elipse horizontal con centro $(2,0)$, $a = 2$ y $b = 1$.
2. **Radio:** distancia de $C(2,2)$ a $(2,0)$: $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$.
3. **Circunferencia:** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ (ecuación general: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$).

Ejercicio 1B.6.5

← volver

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen usado en este cuaderno tiene resolución publicada: todas las resoluciones son propias. Este apéndice solo registra erratas o rarezas de los *enunciados* (datos que sobran o faltan, dos respuestas donde se pide una) y cómo se trataron.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Secciones cónicas

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Curvas en el plano polar (solo Plan 2010)

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · Álgebra vectorial

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4 · Unidad 4 · La recta y el plano en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.5 · Unidad 5 · Curvas en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.6 · Unidad 6 · Superficies (solo Plan 2010)

Sin erratas registradas en esta unidad.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de las asignaturas

- Programa de estudio de *Geometría Analítica* del Plan 2010 (primer semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Seis temas: introducción a la geometría analítica, curvas en el plano polar, álgebra vectorial, la recta y el plano en el espacio, curvas en el espacio, y superficies.
- Programa de estudio de *Cálculo y Geometría Analítica* del Plan 2016 (primer semestre, 12 créditos, 96 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Siete temas: secciones cónicas, funciones, límites y continuidad, la derivada y aplicaciones, variación de funciones, álgebra vectorial, y recta y plano. Este cuaderno cubre los temas 1, 6 y 7; los temas 2 a 5 están en el cuaderno de Cálculo Diferencial.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Ningún examen usado en las unidades tiene resolución publicada: las resoluciones de este cuaderno son propias. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó; los del Plan 2016 llevan el nombre de la asignatura.

- **Geometría Analítica, Plan 2010:** 9 exámenes finales colegiados, de 2012-1 a 2014-2 (3 primeros finales, tipos A y C, y 6 segundos finales), con 58 problemas.
- **Geometría Analítica, versión anterior del programa:** 3 exámenes parciales colegiados de 2005-2 y 2006-2 (primero y segundo parciales de 2005-2 y tercer parcial de 2006-2), con los mismos temas. Uno de sus problemas (coordenadas cilíndricas y esféricas) quedó fuera del programa de 2008 y no se usa.
- **Cálculo y Geometría Analítica, Plan 2016:** los problemas de geometría de 39 exámenes finales (25 primeros y 14 segundos finales, de 2016-1 a 2020-1 y de 2024-1 a 2026-2) y los de cónicas de 12 primeros exámenes parciales (2024-1 a 2026-2).

Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Series de ejercicios. Las series de ejercicios de las dos asignaturas (curvas polares, álgebra vectorial, recta y plano, curvas en el espacio y superficies del Plan 2010; secciones cónicas, álgebra vectorial, y recta y plano del Plan 2016) se revisaron para la notación y el orden de los temas. Los ejercicios que se tomaron de ellas lo indican en su fuente.

Bibliografía de los programas

Geometría Analítica (Plan 2010). Básica

- Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. México: Fondo de Cultura Económica, 1995.

- Castañeda de I. P., É. *Geometría analítica en el espacio*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2003.
- Solís U., R. y otros. *Geometría analítica*. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1999.
- Swokowski, E. *Cálculo con geometría analítica*. México: Cengage Learning, 2007.

Geometría Analítica (Plan 2010). Complementaria

- Lehmann, C. *Geometría analítica*. México: Limusa, 2008.
- Menna G., Z. *Geometría analítica del espacio: un enfoque vectorial*. México: Limusa, 1981.
- Riddle, D. F. *Analytic Geometry*, 6.ª ed. Boston: PWS Publishing Company, 1996.
- Ruiz Zúñiga, Á. *Geometrías no euclidianas: breve historia de una gran revolución intelectual*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1999.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016), para los temas de geometría. Básica

- Castañeda de I. P., É. *Geometría analítica en el espacio*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009.
- De Oteyza, E. y otros. *Geometría analítica y trigonometría*. México: Pearson, 2008.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016), para los temas de geometría. Complementaria

- Lehmann, C. *Geometría analítica*. México: Limusa, 2008.
- Purcell, E. J. y Varberg, D. *Cálculo*, 9.ª ed. México: Prentice Hall, 2007.
- Swokowski, E. W. y Cole, J. A. *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*, 13.ª ed. Belmont: Brooks Cole, 2011.

La bibliografía de cálculo del programa de Cálculo y Geometría Analítica está en el cuaderno de Cálculo Diferencial.

$z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

4. **c) Curva en** $z = \sqrt{2}$**:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 - 1 = 1$, una elipse de semiejes 2 y 3 en el plano $z = \sqrt{2}$: $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\operatorname{sen} t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

Ejercicio 6.6.9 ← volver

1. **a)** $(x+1)(x+2) = 0$: solo aparece x, con un cuadrado igualado a constante. Caso degenerado de la tabla 6.1.7: **dos planos paralelos** $x = -1$ y $x = -2$, perpendiculares al eje x.
2. **b)** $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$: tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a 1: **esfera** de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; $x \in [0, 2]$, $y \in [-1, 1]$, $z \in [-2, 0]$.
3. **c)** $y^2 + z^2 = 2x^2$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono circular** de vértice en el origen y eje x (la variable de signo solitario). Trazas $x = k$: circunferencias de radio $\sqrt{2}\,|k|$; planos $y = 0$ y $z = 0$: rectas $z = \pm\sqrt{2}\,x$ y $y = \pm\sqrt{2}\,x$.
4. **d)** $z + 4 = y^2 - x^2$: dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico** con punto silla $(0, 0, -4)$ y eje paralelo a z. Plano $x = 0$: parábola $z+4 = y^2$, abre hacia arriba; plano $y = 0$: $z + 4 = -x^2$, abre hacia abajo.

4. **Identificación:** hipérbola equilátera en el plano $x = 8$, con centro $(8, 0, 0)$ y asíntotas las rectas $y = 0$ y $z = 0$ de ese plano. Sus vértices están sobre la recta $y = z$: $(8, 2, 2)$ y $(8, -2, -2)$; $a = 2\sqrt{2}$. Con $t > 0$ se recorre la rama con $y, z > 0$; con $t < 0$, la otra.

E.6 · Unidad 6 · Superficies (solo Plan 2010)

Ejercicio 6.6.1 ← volver

1. **Directriz:** $\vec{q}(\theta) = (-2 + 2\cos\theta,\ 1 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 0)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -7)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (3, -2, 7) + s(-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -7)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación de** s**:** $z = 7 - 7s \Rightarrow s = \dfrac{7 - z}{7}$.
5. **Eliminación de** θ**:**

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{s} + 5\right) = \frac{7x - 5z + 14}{2(7-z)}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y+2}{s} - 3\right) = \frac{7y + 3z - 7}{3(7-z)}.$$

6. **Identidad:** $\dfrac{(7x-5z+14)^2}{4(7-z)^2} + \dfrac{(7y+3z-7)^2}{9(7-z)^2} = 1$; multiplicando por $36(7-z)^2$:

$$9(7x - 5z + 14)^2 + 4(7y + 3z - 7)^2 = 36(z-7)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 0$: $9 \cdot 49(x+2)^2 + 4 \cdot 49(y-1)^2 = 36 \cdot 49$, que es la elipse dada; el vértice da $9(21 - 35 + 14)^2 + 4(-14 + 21 - 7)^2 = 0$.

Ejercicio 6.6.2 ← volver

1. **Directriz:** $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.
2. **a) Ecuación vectorial:** las generatrices son paralelas al eje:

$$\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s(-1, 2, 1), \quad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

3. **Paramétricas:** $x = 2\cos\theta - s$, $y = 2\operatorname{sen}\theta + 2s$, $z = 3 + s$.
4. **Eliminación:** $s = z - 3$; $\cos\theta = \dfrac{x+s}{2} = \dfrac{x+z-3}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y-2s}{2} = \dfrac{y-2z+6}{2}$.
5. **b) Ecuación cartesiana:** $(x + z - 3)^2 + (y - 2z + 6)^2 = 4$; desarrollada, $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz - 4yz - 6x + 12y - 30z + 41 = 0$.
6. **Comprobación:** con $z = 3$ queda $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 6.6.3 ← volver

1. **a)** $(x+1)^2 - 1 + 8y^2 = 23 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{24} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. Falta z y los dos cuadrados son positivos: se cumple la forma del **cilindro elíptico**; no es elipsoide.
   - **Eje:** la recta $x = -1$, $y = 0$, paralela al eje z; generatrices paralelas a $\hat{k}$.
   - **Directriz:** elipse de centro $(-1, 0, 0)$ en $z = 0$, semiejes $2\sqrt{6}$ (en x) y $\sqrt{3}$ (en y).
   - **Extensión:** $x \in [-1 - 2\sqrt{6},\ -1 + 2\sqrt{6}]$, $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $z \in \mathbb{R}$.

2. **b)** $(x-1)^2+3(y+2)^2+3z^2=9 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}=1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; denominadores de y y z iguales: de revolución alrededor de la recta $y=-2$, $z=0$.
   - **Centro** $(1,-2,0)$; semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
   - **Trazas:** plano $x=1$, circunferencia $(y+2)^2+z^2=3$; plano $z=0$, elipse $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$.
   - **Extensión:** $x\in[-2,4]$, $y\in[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}]$, $z\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.
3. **c)** $2x^2-3y^2+5z^2=25 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25/2}-\dfrac{y^2}{25/3}+\dfrac{z^2}{5}=1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y.
   - **Trazas:** plano $y=0$ (garganta), elipse $2x^2+5z^2=25$, de semiejes $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y $\sqrt{5}$; planos $x=0$ y $z=0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 6.6.4 ← volver

1. **a)** $\dfrac{(x+2)^2}{2}+\dfrac{(y-3)^2}{4}-(z-1)^2=1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-2,3,1)$; **eje** la recta $x=-2$, $y=3$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z=1$ (garganta), elipse $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$, semiejes $\sqrt{2}$ y 2; planos $x=-2$ y $y=3$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
2. **b)** Multiplicando por 4 y despejando la variable lineal: $x-1=z^2-\dfrac{4}{3}(y-2)^2$. Dos cuadrados de signo contrario igualados a una variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.
   - **Punto silla** $(1,2,0)$; eje paralelo a x (la recta $y=2$, $z=0$).
   - **Trazas:** plano $y=2$, parábola $x-1=z^2$, abre hacia x positivo; plano $z=0$, parábola $x-1=-\frac{4}{3}(y-2)^2$, abre hacia x negativo; plano $x=1$, rectas $z=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(y-2)$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** Pasando $-2z^2$ al primer miembro: $x^2+y^2+z^2=2$. Tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a una constante positiva: **esfera** de centro $(0,0,0)$ y radio $\sqrt{2}$; $x,y,z\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Ejercicio 6.6.5 ← volver

1. **a) Completar cuadrados:** $2\left(x^2+\frac{x}{2}\right)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ y $y^2-2y=(y-1)^2-1$:

$$2\left(x+\tfrac{1}{4}\right)^2+(y-1)^2+2z^2=\tfrac{17}{8} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{17/16}+\frac{(y-1)^2}{17/8}+\frac{z^2}{17/16}=1.$$

   Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; los denominadores de x y z son iguales: de revolución alrededor de la recta $x=-\frac{1}{4}$, $z=0$ (paralela a y).

   - **Centro** $\left(-\frac{1}{4},1,0\right)$; semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$ (en x y en z) y $\sqrt{\frac{17}{8}}=\frac{\sqrt{34}}{4}$ (en y).
   - **Trazas:** plano $y=1$, circunferencia $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+z^2=\frac{17}{16}$; planos $x=-\frac{1}{4}$ y $z=0$, elipses.
   - **Extensión:** $x\in\left[-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right]$, $y\in\left[1-\frac{\sqrt{34}}{4},1+\frac{\sqrt{34}}{4}\right]$, $z\in\left[-\frac{\sqrt{17}}{4},\frac{\sqrt{17}}{4}\right]$.
2. **b)** $\dfrac{(y+1)^2}{2}-\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(z-1)^2}{4}=0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono**; los denominadores de x y z son distintos: cono elíptico.
   - **Vértice** $(2,-1,1)$; **eje** la recta $x=2$, $z=1$, paralela a y (la variable de signo solitario).
   - **Trazas:** $y=k\neq-1$, elipses $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}=\frac{(k+1)^2}{2}$; plano $z=1$, rectas $y+1=\pm(x-2)$; plano $x=2$, rectas $z-1=\pm\sqrt{2}(y+1)$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** $(x+1)^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-1,0,0)$; **eje** la recta $x=-1$, $y=0$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z=0$ (garganta), elipse $(x+1)^2+\frac{y^2}{4}=1$; plano $x=-1$, hipérbola $y^2-z^2=4$; plano $y=0$, hipérbola $(x+1)^2-\frac{z^2}{4}=1$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 6.6.6 ← volver

1. **Directriz:** circunferencia de radio $\sqrt{2}$ en $y=0$: $\vec{q}(\theta)=(\sqrt{2}\cos\theta,\ 0,\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(0,1,0)+s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
3. **Eliminación:** $y=1-s\Rightarrow s=1-y$; $x^2+z^2=2s^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=2s^2$.
4. **Ecuación cartesiana:** $x^2+z^2=2(y-1)^2$: cono circular de vértice $(0,1,0)$ y eje y.

Ejercicio 6.6.7 ← volver

1. **Centro de cada circunferencia:** el punto de L con parámetro t, $(1,1+t,1)$; su plano es $y=1+t$, paralelo a $y=0$.
2. **Circunferencia en ese plano:** se suma $3\cos\theta$ a x y $3\operatorname{sen}\theta$ a z (las dos coordenadas del plano).
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,t)=(1+3\cos\theta,\ 1+t,\ 1+3\operatorname{sen}\theta)=(1+3\cos\theta,\ 1,\ 1+3\operatorname{sen}\theta)+t(0,1,0)$: directriz en $y=1$ y generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$.
4. **Cartesiana** (no se pide): $(x-1)^2+(z-1)^2=9$, cilindro circular recto de eje L.

Ejercicio 6.6.8 ← volver

1. **Forma ordinaria:** $z^2-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$: hiperboloide de dos hojas de eje z, vértices $(0,0,\pm1)$.
2. **a) Trazas:** plano XZ ($y=0$): hipérbola $z^2-\frac{x^2}{4}=1$, de eje focal z; plano YZ ($x=0$): hipérbola $z^2-\frac{y^2}{9}=1$.
3. **b) Valores de z:** el primer miembro de la ecuación dada es ≥ 0, así que $z^2-1\geq 0$: