Figura (origen en la esquina o el centro indicados)	Área	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Rectángulo $b \times h$, origen en una esquina	bh	$b/2$	$h/2$
Triángulo rectángulo de base b y altura h, origen en el ángulo recto	$bh/2$	$b/3$	$h/3$
Triángulo cualquiera de altura h (desde la base)	$bh/2$	—	$h/3$
Círculo de radio r, origen en el centro	πr^2	0	0
Semicírculo, origen en el centro del diámetro	$\pi r^2/2$	0	$4r/(3\pi)$
Cuarto de círculo, origen en el centro	$\pi r^2/4$	$4r/(3\pi)$	$4r/(3\pi)$
Enjuta parabólica $y = kx^2$, de 0 a b, bajo la curva	$bh/3$	$3b/4$	$3h/10$
Semisegmento parabólico (sobre la curva $y = kx^2$, hasta $y = h$)	$2bh/3$	$3b/8$	$3h/5$
Arco de semicírculo (línea), origen en el centro	πr	0	$2r/\pi$
Arco de cuarto de círculo (línea), origen en el centro	$\pi r/2$	$2r/\pi$	$2r/\pi$

- Carga distribuida $w(x)$ sobre una viga: la fuerza equivalente es el área del diagrama de carga y se aplica en el centroide de ese diagrama:

$$F = \int_0^L w\,\mathrm{d}x, \qquad \bar{x} = \frac{1}{F}\int_0^L x\,w\,\mathrm{d}x.$$

- Uniforme w en una longitud L: $F = wL$ en el centro. Triangular de 0 a w: $F = wL/2$, a $L/3$ del extremo de mayor carga. Trapecial: se divide en un rectángulo y un triángulo.

A.6 Equilibrio de cuerpos (Unidad 5)

- Condiciones de equilibrio: $\sum \vec{F} = \vec{0}$ y $\sum \vec{M}_A = \vec{0}$ respecto a cualquier punto A. En el plano son 3 ecuaciones ($\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum M_A$); en el espacio, 6.
- Isostático: tantas incógnitas como ecuaciones independientes y apoyos bien dispuestos. Hiperestático: más incógnitas que ecuaciones. Sin equilibrio (mecanismo): menos incógnitas, o reacciones concurrentes o paralelas que no pueden equilibrar la carga.

Apoyo o ligadura	Reacciones
Cable, cuerda o barra de dos fuerzas	Una fuerza a lo largo del cable (tensión) o de la barra
Superficie lisa, apoyo libre, rodillo, patín	Una fuerza normal a la superficie de apoyo
Articulación (pasador) en el plano	Dos componentes, R_x y R_y
Empotramiento en el plano	R_x, R_y y un par M
Rótula (articulación esférica)	Tres componentes, R_x, R_y, R_z
Empotramiento en el espacio	Tres fuerzas y tres pares

A.7 Fricción (Unidad 6)

- Leyes de Coulomb-Morin: en reposo $f \le \mu_s N$; en movimiento inminente $f = \mu_s N$; en movimiento $f = \mu_k N$. La fricción se opone al movimiento (o a la tendencia de movimiento).
- Ángulo de fricción: $\tan\phi_s = \mu_s$. Un bloque sin otras fuerzas está a punto de deslizar en un plano inclinado cuando $\tan\theta = \mu_s$.
- ¿Hay equilibrio? Se supone reposo, se calcula la fricción necesaria f con las ecuaciones de equilibrio y se compara con $\mu_s N$: si $|f| \le \mu_s N$, el cuerpo está en reposo y la fricción vale f; si no, desliza y la fricción vale $\mu_k N$.

$\sum M_z = 0$: $-\frac{2}{3}T_{AB} + 4T_{CD} = 0 \Rightarrow T_{AB} = 6\,T_{CD}$. $\sum M_x = 0$: $\frac{4}{3}T_{AB} + 2T_{CD} - 390 = 0 \Rightarrow 10\,T_{CD} = 390$, así que $T_{CD} = 39\,[\mathrm{N}]$ y $T_{AB} = 234\,[\mathrm{N}]$. ($\sum M_y$ da $0 = 0$: la barra está sobre el eje y.)

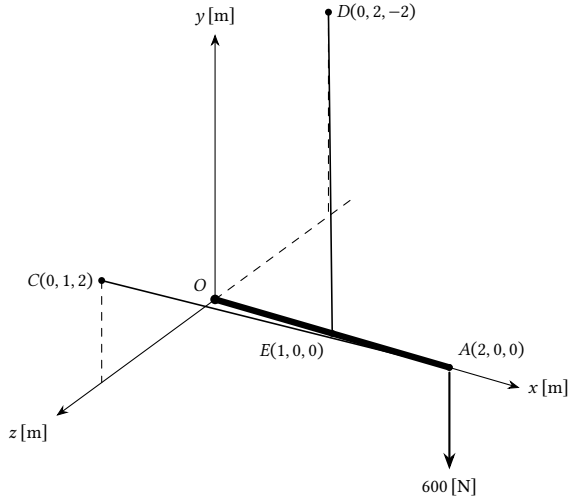
$\sum F_x$: $O_x + 78 - 26 = 0$; $\sum F_y$: $O_y - 156 - 26 = 0$; $\sum F_z$: $O_z + 156 + 13 - 130 = 0$.

Resultado. $T_{AB} = 234\,[\mathrm{N}]$, $T_{CD} = 39\,[\mathrm{N}]$; $\vec{O} = -52\,\hat{\imath} + 182\,\hat{\jmath} - 39\,\hat{k}\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 5.5.8 · brazo con rótula, dos cables y fuerza en el extremo

Adaptado de: 1er final 2012-2 (matutino), problema 4

El brazo OA, de 2 [m] y peso despreciable, está sobre el eje x, con una rótula en O. Lo sostienen los cables AC y ED, con $A(2,0,0)$, $E(1,0,0)$, $C(0,1,2)$ y $D(0,2,-2)$ [m]. En A actúa una fuerza de 600 [N] paralela al eje y, hacia abajo. Determine las tensiones en los cables y la magnitud de la reacción en O.



Planteamiento. $\hat{e}_{AC} = \frac{(-2,1,2)}{3}$, $\hat{e}_{ED} = \frac{(-1,2,-2)}{3}$, $\vec{F} = -600\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$. Momentos respecto a O.

Resolución.

$$\vec{r}_A \times \hat{e}_{AC} = \tfrac{1}{3}(0,-4,2), \quad \vec{r}_E \times \hat{e}_{ED} = \tfrac{1}{3}(0,2,2), \quad \vec{r}_A \times \vec{F} = (0,0,-1200).$$

$\sum M_y$: $-\frac{4}{3}T_{AC} + \frac{2}{3}T_{ED} = 0 \Rightarrow T_{ED} = 2T_{AC}$. $\sum M_z$: $\frac{2}{3}T_{AC} + \frac{2}{3}T_{ED} - 1200 = 0 \Rightarrow 2T_{AC} = 1200$.

Con $T_{AC} = 600\,[\mathrm{N}]$ y $T_{ED} = 1200\,[\mathrm{N}]$: $O_x = \frac{2}{3}(600) + \frac{1}{3}(1200) = 800$; $O_y = 600 - \frac{1}{3}(600) - \frac{2}{3}(1200) = -400$; $O_z = -\frac{2}{3}(600) + \frac{2}{3}(1200) = 400\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. $T_{AC} = 600\,[\mathrm{N}]$, $T_{ED} = 1200\,[\mathrm{N}]$; $\vec{O} = 800\,\hat{\imath} - 400\,\hat{\jmath} + 400\,\hat{k}\,[\mathrm{N}]$, $|\vec{O}| = 979.8\,[\mathrm{N}]$.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Reúne los formularios de emergencia de las Unidades 1 a 6. Conviene escribirlo de memoria, desde cero, unos minutos cada día.

A.1 Vectores

- Vector de posición de A a B: $\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\hat{\imath} + (y_B - y_A)\,\hat{\jmath} + (z_B - z_A)\,\hat{k}$.
- Magnitud y unitario: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad \hat{e}_{AB} = \dfrac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$.
- Vector representativo de una fuerza de magnitud F dirigida de A hacia B: $\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}$.
- Componentes en el plano: $F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$ (θ medido desde el eje x). En el espacio, cosenos directores: $\hat{e} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + \cos\gamma\,\hat{k}$, con $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- Producto punto: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\theta$. Proyección de $\vec{F}$ sobre la dirección $\hat{e}$: $F_e = \vec{F}\cdot\hat{e}$.
- Producto cruz:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\,\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}.$$

A.2 Fundamentos (Unidad 1)

- Gravitación universal: $F = G\,\dfrac{m_1m_2}{r^2}$, con $G = 6.67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}]$ y r medida entre los centros.
- Peso: $W = mg$. A una altura h sobre la superficie de un planeta de masa M y radio R: $W_h = \dfrac{GMm}{(R+h)^2} = W_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$; despejando, $h = R\left(\sqrt{W_0/W_h} - 1\right)$. En la superficie, $g = GM/R^2$.
- Punto entre dos masas m_1 y m_2 separadas una distancia d donde las atracciones se anulan: a $x = \dfrac{d}{1+\sqrt{m_2/m_1}}$ de m_1.
- Tierra: $M_T = 5.98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]$, $R_T = 6370\,[\mathrm{km}]$, $g = 9.81\,[\mathrm{m/s^2}]$ (o el valor que dé el enunciado).
- Sistema inglés: $1\,[\mathrm{lb}] = 4.448\,[\mathrm{N}]$, $1\,[\mathrm{ft}] = 0.3048\,[\mathrm{m}] = 12\,[\mathrm{in}]$, $1\,[\mathrm{in}] = 2.54\,[\mathrm{cm}]$, $1\,[\mathrm{slug}] = 14.59\,[\mathrm{kg}]$, $1\,[\mathrm{kip}] = 1000\,[\mathrm{lb}]$, $1\,[\mathrm{kgf}] = 9.81\,[\mathrm{N}]$. En el sistema inglés, $g = 32.2\,[\mathrm{ft/s^2}]$.
- Homogeneidad dimensional: cada término de una ecuación tiene las mismas dimensiones.

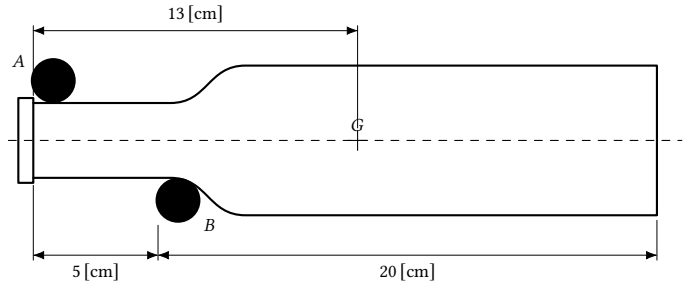
A.3 Partícula (Unidad 2)

- Resultante de fuerzas concurrentes: $\vec{R} = \sum\vec{F}_i$, $\quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$, $\quad \hat{e}_R = \vec{R}/R$.

Ejercicio propuesto 5.6.3 · botella sobre dos clavijas lisas

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 2

Una botella parcialmente llena, de 1.2 [kg] en total, descansa horizontal sobre dos clavijas lisas: la clavija A toca el cuello por arriba, en su extremo, y la clavija B lo toca por abajo, a 5 [cm] de A. El centro de gravedad G está a 13 [cm] de A. Determine la magnitud y la dirección de las reacciones de las clavijas ($g = 9.81\,[\mathrm{m/s^2}]$).



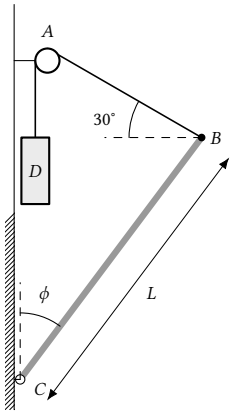
Resultado: $R_A = 18.8\,[\mathrm{N}]$ hacia abajo; $R_B = 30.6\,[\mathrm{N}]$ hacia arriba.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.4 · barra articulada, cuerda y bloque colgante

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 4

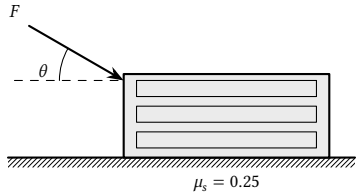
La barra homogénea CB, de 100 [N] y longitud L, está articulada en C y forma con la vertical un ángulo ϕ con $\cos\phi = 0.8$. De B sale una cuerda que forma 30° con la horizontal, pasa por una polea lisa A fija al muro y sostiene el bloque D. Determine el peso del bloque para que haya equilibrio, la tensión en la cuerda y la magnitud de la reacción en C.



Ejercicio propuesto 6.6.7 · empujar un mueble

Adaptado de: 1er final 2016-2 (vespertino), problema 4

Un mueble uniforme de 90 [lb] descansa sobre un piso con $\mu_s = 0.25$. Una persona lo empuja con una fuerza F dirigida hacia abajo, a $\theta = 30^\circ$ de la horizontal. Determine la magnitud mínima de F para moverlo. Si la persona pesa 150 [lb], encuentre el coeficiente de fricción estática más pequeño entre sus zapatos y el piso para que no resbale.



Resultado: $F = 30.4$ [lb]; $\mu_{\text{mín}} = 0.195$.

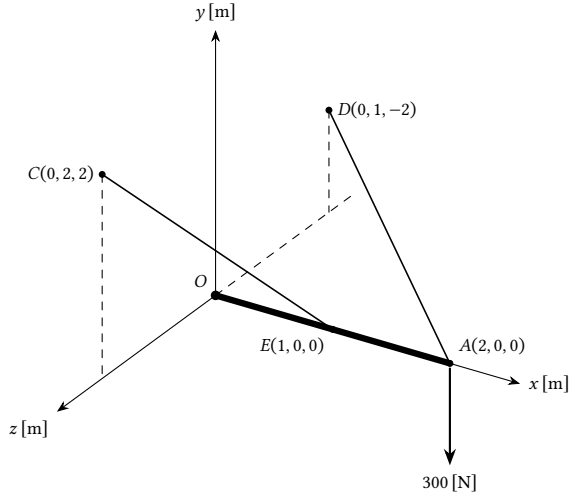
→ Resolución en el Apéndice E, p. 115.

6.7 Errores frecuentes

1. **Escribir $f = \mu_s N$ sin movimiento inminente.** Fuera del límite, f sale de las ecuaciones de equilibrio y solo cumple $f \leq \mu_s N$ (ejercicio 6.5.5).
2. **Fricción en la dirección equivocada.** Va contra el movimiento que está a punto de ocurrir; «a punto de subir» la pone hacia abajo del plano (propuesto 6.6.5).
3. **Suponer $N = W\cos\theta$ siempre.** Una fuerza inclinada respecto al plano, o una horizontal, cambia la normal (ejercicios 6.5.1 y 6.5.2).
4. **Olvidar el segundo caso del intervalo.** «Ni hacia arriba ni hacia abajo» pide dos cálculos con f en sentidos opuestos.
5. **Polea móvil:** el peso que cuelga de ella se reparte entre dos tramos, $T = W/2$.
6. **Volcamiento:** los momentos se toman respecto a la arista de giro; tomar momentos respecto al centro obliga a incluir N y f con brazos desconocidos.
7. **Comparar mal:** ocurre primero lo que necesita la fuerza (o el ángulo) menor.
8. **Mezclar unidades:** si el problema está en libras, los resultados van en libras.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Reposo: $f \leq \mu_s N$ · movimiento inminente: $f = \mu_s N$ · deslizando: $f_k = \mu_k N$.
- Ángulo de fricción: $\tan\phi_s = \mu_s$; un bloque solo en un plano desliza si $\tan\theta > \mu_s$.
- Plano inclinado sin otras fuerzas: $N = W\cos\theta$, componente del peso a lo largo del plano $W\sin\theta$. Pendiente 3 : 4: $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$.
- Fuerza mínima para subir con F a un ángulo α del plano: $F = \dfrac{W(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}$.
- Cuerda lisa: misma T en toda la cuerda · polea móvil: $T = W/2$.
- Volcamiento: $\sum M_{\text{arista}} = 0$ con N y f en la arista; empuje horizontal a la altura h sobre base b: desliza antes de volcar si $h < b/(2\mu_s)$.



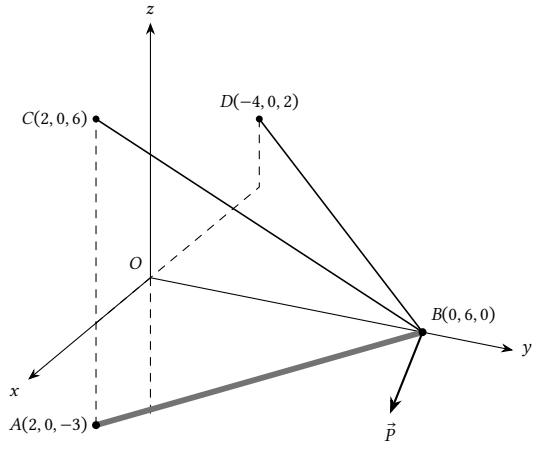
Resultado: $T_{EC} = 600$ [N], $T_{AD} = 300$ [N]; $\vec{O} = 400\,\hat{\imath} - 200\,\hat{\jmath} - 200\,\hat{k}$ [N], $|\vec{O}| = 489.9$ [N].

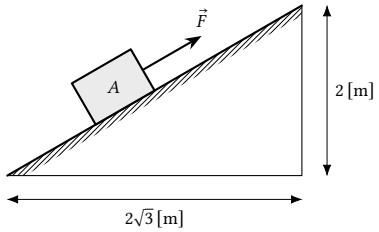
→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 5.6.7 · pescante con rótula, dos cables y fuerza dada

Adaptado de: 1er final 2018-1 (matutino), problema 4

El pescante ligero AB está unido a un muro por una rótula en $A(2, 0, -3)$ y se sostiene con dos cables que van de $B(0, 6, 0)$ a $C(2, 0, 6)$ y a $D(-4, 0, 2)$ [m]. En B actúa $\vec{P} = 12\,\hat{\imath} - 16\,\hat{k}$ [kN]. Como el pescante es un cuerpo de dos fuerzas, la reacción en A actúa a lo largo de AB. Calcule las tensiones en los cables y la magnitud de la reacción en A.





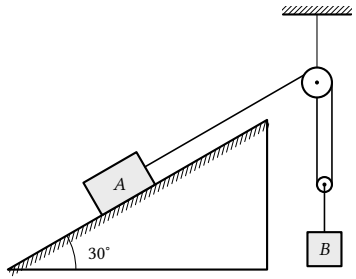
Resultado: $F = 6.70\,[\mathrm{N}]$; $F_h = 5.80\,[\mathrm{N}]$, $F_v = 3.35\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.3 · masa con polea móvil

Adaptado de: 2° final 2013-1, problema 4

El bloque A, de 98.1 [N], está sobre un plano inclinado 30°, con $\mu_s = 1/\sqrt{3}$. Una cuerda paralela al plano pasa por una polea fija, baja, rodea una polea móvil de la que cuelga el bloque B y sube hasta el soporte de la polea fija. Determine la masa de B para que A esté inmóvil, pero a punto de subir.



Resultado: $W_B = 196.2\,[\mathrm{N}]$, $m_B = 20\,[\mathrm{kg}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

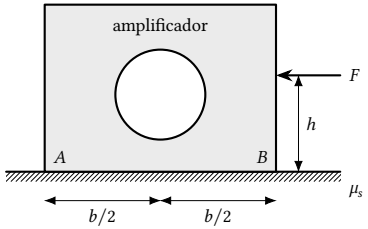
Ejercicio propuesto 6.6.4 · fuerza para subir un cuerpo que cuelga

Adaptado de: 1er final 2015-1 (matutino), problema 5

El bloque A ($W_A = 300\,[\mathrm{N}]$) está sobre un plano inclinado 45°, con $\mu_s = 0.3$. Una cuerda que sale de su lado alto pasa por una polea y termina en una fuerza horizontal $\vec{P}$; otra cuerda, que sale de su lado bajo, pasa por una polea al pie del plano y sostiene el cuerpo B ($W_B = 800\,[\mathrm{N}]$). Determine la magnitud de $\vec{P}$ para que B esté a punto de subir.

6. Resultado recuadrado con magnitud, dirección y unidades; si una reacción salió negativa, dilo («hacia abajo»).

Si no se encuentra el camino, el DCL correcto y las ecuaciones planteadas también cuentan.



Datos. Base b, μ_s, peso W, F horizontal a la altura h.

Planteamiento. En el límite, el amplificador está a punto de deslizar y de volcar a la vez alrededor de la arista A, hacia donde lo empuja F; ahí se concentran N y f.

Resolución.

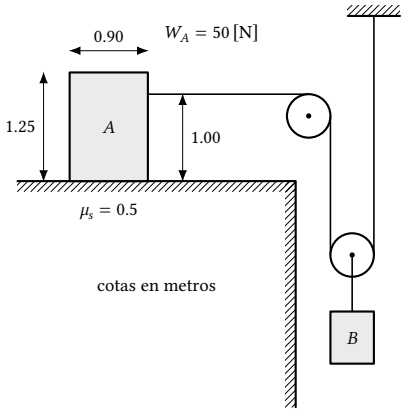
1. $\sum F_y = 0$: $N = W$. $\sum F_x = 0$: $F = f = \mu_s N = \mu_s W$.
2. $\sum M_A = 0$: $Fh - W\frac{b}{2} = 0$, es decir, $\mu_s W h = W\frac{b}{2}$.
3. $h = \frac{b}{2\mu_s}$. Con una altura menor, el momento de F no alcanza para volcarlo cuando empieza a deslizar.

Resultado. $h_{\text{máx}} = \dfrac{b}{2\mu_s}$ (se desliza antes de volcarse si $h < b/(2\mu_s)$).

Ejercicio 6.5.8 · ¿se traslada o se vuelca?

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 4

El bloque A, de 50 [N], 0.90 [m] de ancho y 1.25 [m] de alto, descansa en un piso horizontal con $\mu_s = 0.5$. Una cuerda horizontal atada a A a 1.00 [m] del piso pasa por una polea fija en el borde, baja, rodea una polea móvil de la que cuelga el bloque B y sube hasta un soporte fijo. Las cuerdas y poleas son ideales. Determine el valor mínimo del peso W_B para el cual el sistema está a punto de moverse e indique si A está a punto de trasladarse o de volcarse.



Dirección de la fricción

La fricción apunta **en contra del movimiento que está a punto de ocurrir**:

- «a punto de subir» por el plano: f hacia abajo del plano;
- «a punto de bajar»: f hacia arriba del plano;
- «¿hay equilibrio?»: se supone una dirección, se calcula f con las ecuaciones de equilibrio y el signo dice hacia dónde apunta.

Volcamiento

Un cuerpo apoyado sobre una cara puede, en lugar de deslizar, **volcar** girando alrededor de una arista de su base. En el volcamiento inminente la normal se concentra en esa arista: la suma de momentos respecto a ella es cero con N aplicada ahí. El cuerpo vuelca primero si la fuerza que lo vuelca es menor que la que lo hace deslizar.

Cuerdas y poleas

Con una cuerda lisa (o una polea sin fricción) la tensión es la misma en toda la cuerda. Una **polea móvil** que cuelga de dos tramos de la misma cuerda sostiene $2T$: si de ella cuelga un peso W_B, entonces $T = W_B/2$.

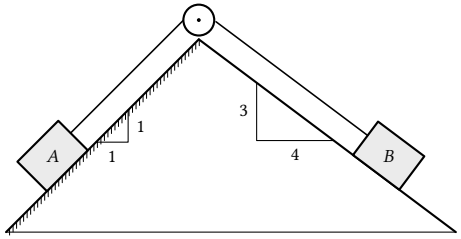
6.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«a punto de moverse», «determine el coeficiente»	un bloque con $f = \mu_s N$	6.3.1
«fuerza mínima (o máxima) para que…»	movimiento inminente en una dirección	6.3.1
«intervalo de valores», «ni hacia arriba ni hacia abajo»	dos casos de movimiento inminente	6.3.2
cuerda, polea, dos bloques unidos	cuerpos conectados	6.3.3
«a punto de volcar», «se desliza antes de volcarse»	volcamiento contra deslizamiento	6.3.4
«¿está en equilibrio?», «magnitud y dirección de la fricción»	comparar f requerida con $\mu_s N$	6.3.5

6.3 Procedimientos

Un bloque en movimiento inminente

1. Dibuja el diagrama de cuerpo libre: peso, normal, fricción y las fuerzas aplicadas.
2. Elige ejes paralelo (x) y perpendicular (y) al plano. En un plano de pendiente $3:4$, $\sin\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$.
3. Decide hacia dónde está a punto de moverse el bloque y pon f en sentido contrario.
4. Escribe $\sum F_y = 0$ y despeja N. Cuidado: una fuerza inclinada respecto al plano cambia N.
5. Escribe $\sum F_x = 0$ con $f = \mu_s N$ y despeja la incógnita (μ_s, una fuerza o un ángulo).



Datos. $m_A = 20\,[\text{kg}]$, $\theta_A = 45^\circ$; $m_B = 80\,[\text{kg}]$, $\sin\theta_B = 0.6$, $\cos\theta_B = 0.8$; $\mu_B = 0.5$.

Planteamiento. Si A está a punto de subir, B está a punto de bajar: en los dos planos la fricción vale μN; la de A apunta hacia abajo de su plano y la de B, hacia arriba del suyo.

Resolución.

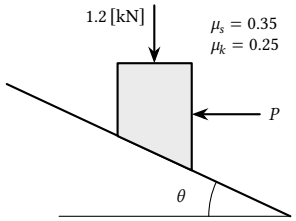
1. Bloque B: $N_B = 80g(0.8) = 64g$; a lo largo del plano, $T = 80g(0.6) - 0.5(64g) = 48g - 32g = 16g$.
2. Bloque A: $N_A = 20g\cos 45^\circ = 14.14g$; a lo largo del plano, $T - 20g\sin 45^\circ - \mu_A N_A = 0$.
3. $\mu_A = \frac{16g - 14.14g}{14.14g}$.

Resultado. $\mu_A = 0.131$ (con $T = 16g = 157\,[\text{N}]$).

Ejercicio 6.5.5 · ¿hay equilibrio?

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 4

Un cuerpo de 1.2 [kN] descansa sobre un plano inclinado $\theta = 25^\circ$ que baja hacia la derecha. Una fuerza horizontal $P = 750\,[\text{N}]$ lo empuja hacia el lado alto del plano. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$. Determine si el cuerpo está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción que el plano ejerce sobre él.

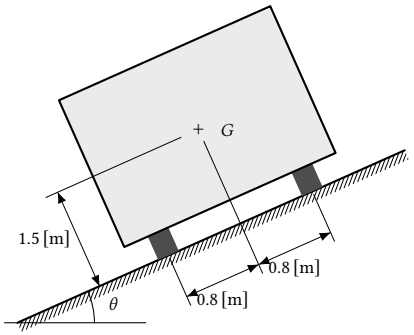


Datos. $W = 1200\,[\text{N}]$, $P = 750\,[\text{N}]$, $\theta = 25^\circ$, $\mu_s = 0.35$, $\mu_k = 0.25$.

Planteamiento. Se supone equilibrio. Eje x a lo largo del plano, positivo hacia abajo de él; eje y perpendicular. Se supone f hacia abajo del plano.

Resolución.

1. $\sum F_x = 0$: $W\sin\theta + f - P\cos\theta = 0$, así que $f = 750\cos 25^\circ - 1200\sin 25^\circ = 679.7 - 507.1 = 172.6\,[\text{N}]$. Sale positiva: la dirección supuesta es correcta.
2. $\sum F_y = 0$: $N = W\cos\theta + P\sin\theta = 1087.6 + 317.0 = 1404.5\,[\text{N}]$.
3. Fricción máxima disponible: $\mu_s N = 0.35(1404.5) = 491.6\,[\text{N}]$.



Datos. $W = 12\,[\text{ton}]$; altura de G: 1.5 [m]; distancia de G a cada eje: 0.8 [m]; $\mu_s = 0.6$.

Planteamiento. Ejes x paralelo al camino (hacia abajo) y y perpendicular. Se calcula el ángulo de deslizamiento inminente y el de volcamiento inminente; el máximo permitido es el menor.

Resolución.

1. Deslizamiento: $\sum F_y = 0$: $N = 12\cos\theta$. $\sum F_x = 0$: $12\sin\theta - 0.6N = 0$. Entonces $\tan\theta = 0.6$ y $\theta = 30.96^\circ$.
2. Volcamiento: el camión gira alrededor de la llanta de abajo cuando la vertical que pasa por G llega a ella. Con momentos respecto a ese punto, $(12\sin\theta)(1.5) - (12\cos\theta)(0.8) = 0$, de donde $\tan\theta = \frac{0.8}{1.5}$ y $\theta = 28.07^\circ$.
3. El volcamiento ocurre con un ángulo menor: manda el volcamiento.

Resultado. $\theta_{\text{máx}} = 28.1^\circ$; con un ángulo mayor el camión se vuelca antes de deslizarse.

6.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 6.5.1 · coeficiente con una fuerza inclinada

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 5

Un bloque de 20 [N] descansa sobre un plano de pendiente 3 : 4. Se le aplica una fuerza $F = 20\,[\text{N}]$ que forma 30° con el plano, hacia arriba de él, y con ella el bloque queda a punto de moverse. Determine el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano. (El mismo problema se repitió en el 1er final 2016-2, turno matutino.)

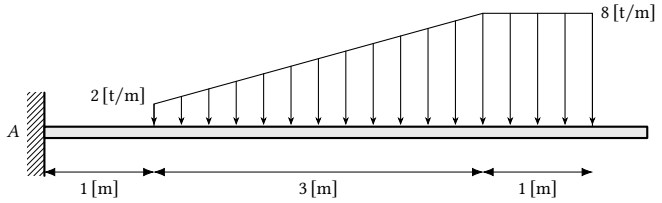
5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 5.6.1 · viga en voladizo con carga trapecial

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3

La viga en voladizo de la figura, de peso despreciable, está empotrada en A. La carga crece linealmente de 2 [t/m] (a 1 [m] de A) a 8 [t/m] (a 4 [m] de A) y sigue constante en 8 [t/m] hasta 5 [m] de A. Determine la reacción en el empotramiento.



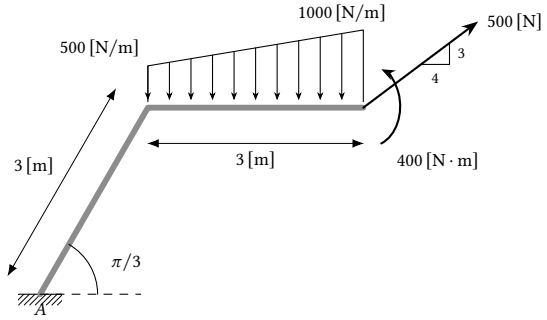
Resultado: $R_A = 23\,[\mathrm{t}]$ hacia arriba; $M_A = 78\,[\mathrm{t}\cdot\mathrm{m}]$ antihorario.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 5.6.2 · marco empotrado

Adaptado de: 1er final 2015-1 (vespertino), problema 4

El marco de la figura, de peso despreciable, está empotrado en A. Su tramo inclinado mide 3 [m] y forma $\pi/3$ [rad] con la horizontal; el tramo horizontal mide 3 [m] y lleva una carga que crece de 500 a 1000 [N/m]. En el extremo libre actúan una fuerza de 500 [N] con pendiente 3 : 4 (hacia arriba y a la derecha) y un par de 400 [N · m] antihorario. Determine la reacción en A.



Resultado: $A_x = 400\,[\mathrm{N}]$ hacia la izquierda, $A_y = 1950\,[\mathrm{N}]$ hacia arriba ($R_A = 1990.6\,[\mathrm{N}]$) y $M_A = 6414\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$ antihorario.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

- Equilibrio de la partícula: $\sum \vec{F} = \vec{0}$; en el plano, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ (dos incógnitas); en el espacio, además $\sum F_z = 0$ (tres incógnitas).
- Tres fuerzas en equilibrio en el plano (triángulo de fuerzas, ley de senos), con α_i el ángulo opuesto a F_i en el triángulo:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3}.$$

- Resorte lineal: $F = k\,|L - L_0|$.

A.4 Sistemas equivalentes (Unidad 3)

- Momento de $\vec{F}$ respecto a O: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, con $\vec{r}$ de O a cualquier punto de la línea de acción. En el plano: $M_O = xF_y - yF_x$ (positivo antihorario) o $M_O = \pm Fd$.
- Teorema de Varignon: el momento de la resultante es la suma de los momentos de las componentes.
- Momento respecto a un eje que pasa por A y B: $M_{AB} = \hat{e}_{AB} \cdot (\vec{r}_A \times \vec{F})$, con $\vec{r}_A$ de un punto del eje a la línea de acción. Vector: $\vec{M}_{AB} = M_{AB}\,\hat{e}_{AB}$.
- Par de fuerzas: $M = Fd$, perpendicular al plano del par; su momento es el mismo respecto a cualquier punto (vector libre).
- Sistema fuerza-par en O: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, $\quad \vec{M}_O^R = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j$. Cambio de punto (par de transporte): $\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{BA} \times \vec{R}$, con $\vec{r}_{BA}$ de B a A.
- Una sola fuerza (sistemas coplanares, paralelos o concurrentes): $\vec{R}$ con línea de acción a la distancia $d = M_O^R/R$ de O; en el plano, la recta cumple $xR_y - yR_x = M_O^R$.
- Fuerzas paralelas a z: $R = \sum F_i$, $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}$, $\quad \bar{y} = \dfrac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}$.
- Sistema general (motor o torsor): par paralelo a $\vec{R}$, $\vec{M}_{\parallel} = \dfrac{\vec{M}_O^R \cdot \vec{R}}{R^2}\,\vec{R}$; eje central, que pasa por el punto $\vec{r} = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O^R}{R^2}$ y es paralelo a $\vec{R}$.
- Si $\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{M} \neq \vec{0}$, el sistema más simple es un par.

A.5 Centroides y cargas distribuidas (Unidad 4)

- Áreas compuestas (los huecos con área negativa): $\bar{x} = \dfrac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$, $\quad \bar{y} = \dfrac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$.
- Líneas y barras delgadas: $\bar{x} = \dfrac{\sum L_i \bar{x}_i}{\sum L_i}$. Centro de masa: $\bar{x} = \dfrac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i}$, con $m_i = \rho_i A_i$ (láminas) o $m_i = \lambda_i L_i$ (barras).
- Primer momento: $Q_x = \sum A_i \bar{y}_i = \bar{y}A$, $\quad Q_y = \sum A_i \bar{x}_i = \bar{x}A$.

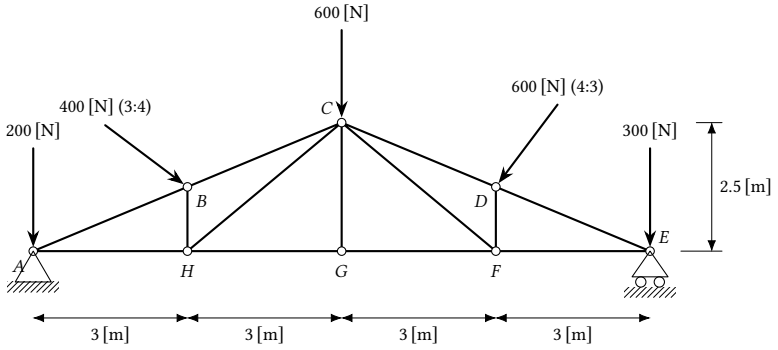
Resultado: $W_D = T = 30.2\,[\mathrm{N}]$; $\vec{C} = 26.2\,\hat{\imath} + 84.9\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$, $C = 88.8\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.5 · armadura como cuerpo rígido

Adaptado de: 2º final 2011-2, problema 4

La armadura de la figura, de peso despreciable, tiene una articulación en A y un apoyo libre en E. Su cuerda inferior mide 12 [m] (cuatro tramos de 3 [m]) y la altura en C es 2.5 [m]; B y D están a media altura. Cargas: 200 [N] vertical en A; 400 [N] en B con pendiente 3 : 4 (hacia abajo y a la derecha); 600 [N] vertical en C; 600 [N] en D con pendiente 4 : 3 (hacia abajo y a la izquierda); 300 [N] vertical en E. Determine las reacciones en A y E.



Resultado: $A_x = 40\,[\mathrm{N}]$ hacia la derecha, $A_y = 804.2\,[\mathrm{N}]$ ($A = 805.2\,[\mathrm{N}]$); $E = 1015.8\,[\mathrm{N}]$ hacia arriba.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.6 · brazo con rótula y cables, segunda versión

Adaptado de: 1er final 2012-2 (vespertino), problema 4

El brazo OA de 2 [m], sobre el eje x, tiene una rótula en O y lo sostienen los cables EC y AD, con $E(1, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 2)$ y $D(0, 1, -2)$ [m]. En A actúa una fuerza de 300 [N] paralela al eje y, hacia abajo. Determine las tensiones y la magnitud de la reacción en O.

6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo, con la dirección del movimiento inminente indicada.
2. Ejes paralelo y perpendicular al plano; componentes de cada fuerza en una tabla corta.
3. $\sum F_y = 0$ primero (da N); luego $\sum F_x = 0$ con $f = \mu_s N$.
4. Si puede volcar, el cálculo de momentos respecto a la arista y la comparación por escrito.
5. Resultado recuadrado con unidades, y la frase que pide el enunciado («está en equilibrio», «se vuelca primero»).

Resultado: $R_A = 18.67\,[\text{kN}]$ (compresión), $T_{BC} = 5.81\,[\text{kN}]$, $T_{BD} = 14.97\,[\text{kN}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

5.7 Errores frecuentes

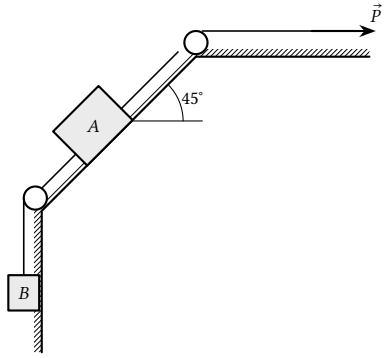
1. **Olvidar el par de empotramiento.** Un empotramiento tiene tres reacciones en el plano: R_x, R_y y M. Sin M, la ecuación de momentos queda mal (ejercicio 5.5.4).
2. **Dejar la carga distribuida sin reducir** o ponerla en el centro del tramo cuando es triangular: la resultante de un triángulo va a un tercio del lado alto.
3. **Signo del par.** Fija el sentido positivo (antihorario) antes de escribir $\sum M$ y suma el par con su signo; no lo multipliques por ninguna distancia.
4. **Reacción de un apoyo libre inclinado** dibujada vertical: es perpendicular a la superficie.
5. **Cable que empuja.** La tensión siempre jala al cuerpo, hacia el anclaje.
6. **Barra de dos fuerzas con dos componentes libres.** Su fuerza tiene dirección conocida: una sola incógnita.
7. **Vector unitario al revés** en 3D: $\hat{e}$ va del punto del cuerpo al anclaje.
8. **Momentos 3D respecto a un punto que no es la rótula:** aparecen las tres componentes de la rótula y el sistema crece sin necesidad.
9. **Confundir «sin equilibrio» con «hiperestático»**: el primero tiene ecuaciones incompatibles; el segundo, más incógnitas que ecuaciones.
10. **Unidades mezcladas:** [lb · ft] con pulgadas, [t] con newtons, masa en [kg] sin multiplicar por g.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Plano: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_P = 0$ (3 incógnitas). Espacio: $\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\sum \vec{M}_O = \vec{0}$ (6 incógnitas).
- $M_P = xF_y - yF_x$ (antihorario positivo) · $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$.
- Cable: $\vec{T} = T\,\hat{e}_{PQ}$, $\hat{e}_{PQ} = \overrightarrow{PQ}/|\overrightarrow{PQ}|$.
- Apoyo libre o superficie lisa: 1 (normal) · cable: 1 (tensión) · barra de dos fuerzas: 1 (a lo largo) · articulación: 2 · empotramiento plano: 3 (R_x, R_y, M) · rótula: 3 · empotramiento en el espacio: 6.
- Carga uniforme w en L: wL en $L/2$. Triangular de 0 a w: $\frac{1}{2}wL$ a $\frac{L}{3}$ del lado alto.
- Dos fuerzas: colineales. Tres fuerzas: concurrentes.
- $n = e$: isostático · $n > e$: hiperestático · $n < e$ o reacciones paralelas o concurrentes: sujeción parcial o impropia.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. DCL grande y limpio, con el sistema de referencia y las cotas.
2. Cargas distribuidas reducidas en el mismo dibujo (magnitud y posición).
3. Conteo de incógnitas: «3 incógnitas, 3 ecuaciones: isostático».
4. Ecuación de momentos respecto al punto con más incógnitas; después las de fuerzas.
5. En 3D: tabla de puntos, vectores unitarios, $\vec{r} \times \vec{F}$ de cada fuerza respecto a la rótula.



Resultado: $P = 1075.8\,[\text{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.5 · peso que hace subir el bloque

Adaptado de: 1er final 2018-2 (vespertino), problema 4

El cuerpo A, de 200 [N], está sobre un plano inclinado un ángulo α y se une, con una cuerda paralela al plano que pasa por una polea lisa, al cuerpo B que cuelga. Se sabe que A está a punto de deslizar hacia arriba del plano, que $\mu_s = 0.3$ y que la fricción entre A y el plano vale 46 [N]. Determine el ángulo α y el peso de B. (La figura es como la del ejercicio 6.5.3, con α en lugar de 20°.)

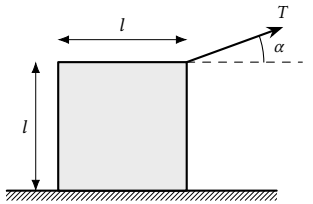
Resultado: $\alpha = 39.9°$, $W_B = 174.4\,[\text{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.6 · caja cuadrada con una fuerza inclinada

Adaptado de: 1er final 2012-2 (vespertino), problema 5

A una caja cuadrada homogénea de lado l y 200 [lb] de peso, apoyada en el piso, se le aplica en su esquina superior derecha una fuerza $T = 125\,[\text{lb}]$ que forma un ángulo α hacia arriba de la horizontal. Determine α y el coeficiente de fricción estática para que la caja esté a punto de volcarse y a punto de deslizarse a la vez.



Resultado: $\alpha = 36.87°$, $\mu_s = 0.8$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Unidad 6 · Fricción: deslizamiento, volcamiento y cuerpos conectados

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno comprenderá el fenómeno de fricción en seco y resolverá ejercicios donde intervengan fuerzas de fricción.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 23 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en 12 de los 13 aplicados desde 2014-1. Casi siempre es el último problema: el 5 hasta 2015-2 y el 4 desde 2016-2.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 6.1 y la tabla de la sección 6.2 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 6.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 6.5.1, 6.5.3 y 6.5.6 con cronómetro (20 min cada uno).

6.1 Conceptos y expresiones

Fricción en seco

Cuando dos superficies secas están en contacto, la fuerza que una ejerce sobre la otra se descompone en una **normal** N, perpendicular a la superficie, y una **fuerza de fricción** f, tangente a ella. La fricción se opone al deslizamiento (o a la tendencia a deslizar) de una superficie respecto a la otra. El programa distingue la fricción en seco (de Coulomb) de la fricción en fluidos; en el examen solo se evalúa la primera.

Leyes de Coulomb-Morin.

- Mientras el cuerpo está en reposo, f es la que haga falta para el equilibrio y cumple

$$f \le \mu_s N.$$

- En el **movimiento inminente** («a punto de deslizar», «a punto de moverse», «a punto de subir o de bajar») la fricción alcanza su valor máximo:

$$f = f_{\text{máx}} = \mu_s N.$$

- Si el cuerpo ya desliza, $f_k = \mu_k N$, con $\mu_k < \mu_s$.
- μ_s y μ_k dependen de los materiales en contacto, no del área de contacto.

Ángulo de fricción. La resultante de N y $f_{\text{máx}}$ forma con la normal el ángulo ϕ_s:

$$\tan\phi_s = \mu_s.$$

Un bloque solo, sin otras fuerzas, sobre un plano inclinado un ángulo θ está a punto de deslizar cuando $\theta = \phi_s$, es decir, cuando $\tan\theta = \mu_s$.

Datos. $W_A = 50\,[\text{N}]$, ancho $0.90\,[\text{m}]$, altura de la cuerda $1.00\,[\text{m}]$, $\mu_s = 0.5$.

Planteamiento. Polea móvil: $2T - W_B = 0$, así que $T = W_B/2$. Se calcula el W_B que hace deslizar a A y el que lo vuelca; el mínimo de los dos es la respuesta.

Resolución.

1. Traslación: $N = W_A = 50\,[\text{N}]$; $T = \mu_s N = 25\,[\text{N}]$, así que $W_B = 50\,[\text{N}]$.
2. Volcamiento alrededor de la arista inferior del lado de la polea: el peso actúa a $0.45\,[\text{m}]$ de ella y T a $1.00\,[\text{m}]$ de altura: $T(1.00) - 50(0.45) = 0$, así que $T = 22.5\,[\text{N}]$ y $W_B = 45\,[\text{N}]$.
3. $45 < 50$: el bloque se vuelca antes de trasladarse.

Resultado. $W_{B,\text{mín}} = 45\,[\text{N}]$; con ese peso A está a punto de **volcarse**.

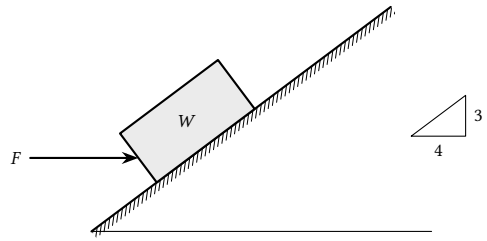
6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 6.6.1 · fuerza horizontal sobre un plano

Adaptado de: 1er final 2014-1 (vespertino), problema 5

Un bloque de $40\,[\text{N}]$ está sobre un plano de pendiente $3:4$. Una fuerza horizontal $F = 60\,[\text{N}]$ lo empuja contra el plano y lo deja a punto de moverse. Determine el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano.



Resultado: $\mu_s = 0.353$ (el bloque está a punto de subir).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 6.6.2 · componentes de la fuerza en una rampa

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 5

El bloque A pesa $100\,[\text{N}]$ y está sobre una rampa de $2\,[\text{m}]$ de altura y $2\sqrt{3}\,[\text{m}]$ de base, con $\mu_s = 0.5$. Una fuerza $\vec{F}$ paralela a la rampa lo sostiene en movimiento inminente hacia abajo. Determine las componentes horizontal y vertical de $\vec{F}$.

Intervalo de equilibrio

1. Resuelve el caso «a punto de subir» (f hacia abajo del plano) con el procedimiento 6.3.1.
2. Resuelve el caso «a punto de bajar» (f hacia arriba del plano).
3. El cuerpo queda en reposo para cualquier valor entre los dos resultados.

Cuerpos conectados

1. Haz un diagrama de cuerpo libre **por cada cuerpo**; la cuerda transmite la misma T.
2. Decide qué cuerpo se mueve hacia dónde: si uno sube, el otro baja.
3. En cada superficie donde haya movimiento inminente, $f = \mu_s N$.
4. Despeja T del cuerpo más sencillo y sustitúyela en el otro.
5. Si hay polea móvil, $T = W/2$ para el peso que cuelga de ella.

Volcamiento contra deslizamiento

1. **Deslizamiento:** $\sum F_y = 0$ da N; $\sum F_x = 0$ con $f = \mu_s N$ da la fuerza (o el ángulo) que inicia el deslizamiento.
2. **Volcamiento:** identifica la arista de giro (la del lado hacia donde empujan las fuerzas). Toma momentos respecto a ella: ahí actúan N y f, que no producen momento. Despeja la fuerza (o el ángulo, o la altura) que inicia el volcamiento.
3. Compara: ocurre primero lo que necesite la fuerza menor (o el ángulo menor).
4. Si piden «a punto de volcar y de deslizar a la vez», se plantean las dos condiciones juntas.

¿Hay equilibrio?

1. Supón que hay equilibrio y una dirección para f.
2. Con $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ calcula la f requerida y N.
3. Si $|f| \le \mu_s N$, hay equilibrio y la fricción vale f (el signo da su dirección).
4. Si $|f| > \mu_s N$, no hay equilibrio: el bloque desliza y la fricción vale $f_k = \mu_k N$, opuesta al movimiento.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · camión en una pendiente

Basado en: 2º final 2018-1, problema 4.
Un camión de 12 ton está estacionado sobre un camino inclinado un ángulo θ. Su centro de gravedad G está a 1.5 [m] del camino y a la mitad de la distancia entre ejes, que es de 1.6 [m]. El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el camino es 0.6. Determine el máximo ángulo θ con el que el camión no se vuelca ni se desliza.

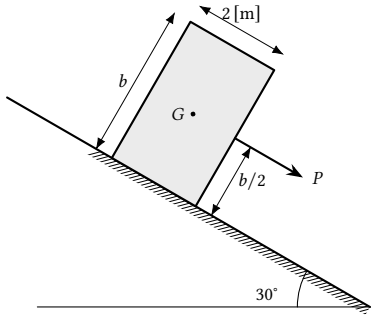
4. $172.6 < 491.6$: hay equilibrio y la fricción es la requerida, no la máxima.

Resultado. El cuerpo está en equilibrio; $f = 172.6$ [N], paralela al plano y hacia abajo de él. (μ_k no se usa.)

Ejercicio 6.5.6 · a punto de volcar y de deslizar

Adaptado de: 1er final 2012-2 (matutino), problema 5

Un cuerpo homogéneo de 20 [N], de base 2 [m] y altura b, descansa sobre un plano inclinado 30°. Se le aplica una fuerza $P = 5$ [N] paralela al plano, hacia abajo de él, en la cara de abajo y a la altura $b/2$. Con ella el cuerpo está a punto de volcar y a punto de deslizar sobre el plano. Determine el coeficiente de fricción y la dimensión b.



Datos. $W = 20$ [N], $P = 5$ [N], base 2 [m], $\theta = 30°$.

Planteamiento. Ejes a lo largo del plano (hacia abajo) y perpendicular. A punto de deslizar hacia abajo: $f = \mu_s N$ hacia arriba del plano. A punto de volcar: gira alrededor de la arista inferior de abajo, donde se concentran N y f.

Resolución.

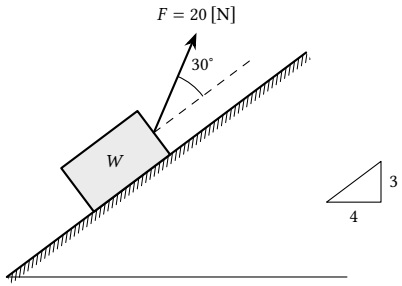
1. $\sum F_y = 0$: $N = W \cos 30° = 17.32$ [N].
2. $\sum F_x = 0$: $f = P + W \sin 30° = 5 + 10 = 15$ [N]; $\mu_s = \frac{15}{17.32}$.
3. Momentos respecto a la arista de giro: la componente $W \sin 30°$ y P actúan a la altura $b/2$ y tienden a volcar; la componente $W \cos 30°$ actúa a 1 [m] de la arista y lo estabiliza: $(10 + 5)\frac{b}{2} - 17.32(1) = 0$.

Resultado. $\mu_s = 0.866$ y $b = 2.31$ [m].

Ejercicio 6.5.7 · altura máxima del empuje

Adaptado de: 1er final 2018-2 (matutino), problema 4

Se empuja un amplificador de base b sobre el piso con una fuerza horizontal F aplicada a la altura h. Si h es muy grande, el amplificador se vuelca antes de deslizarse. El coeficiente de fricción estática entre el piso y el amplificador es μ_s y su centro de gravedad está a la mitad de la base. ¿Cuál es el valor máximo de h para que el amplificador se deslice antes de volcarse?



Datos. $W = 20\,[\text{N}]$, $F = 20\,[\text{N}]$, $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$.

Planteamiento. Ejes x hacia arriba del plano y y perpendicular. Componentes de F: $F\cos 30^\circ = 17.32\,[\text{N}]$ a lo largo del plano y $F\sin 30^\circ = 10\,[\text{N}]$ alejándose de él. La componente del peso a lo largo del plano es $W\sin\theta = 12\,[\text{N}]$, menor que 17.32: el bloque está a punto de **subir** y f apunta hacia abajo del plano.

Resolución.

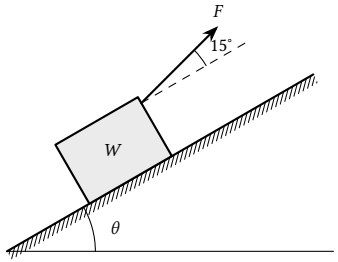
1. $\sum F_y = 0$: $N + 10 - 16 = 0$, así que $N = 6\,[\text{N}]$.
2. $\sum F_x = 0$: $17.32 - 12 - f = 0$, así que $f = 5.32\,[\text{N}]$.
3. $f = \mu_s N$: $\mu_s = \frac{5.32}{6}$.

Resultado. $\mu_s = 0.887$.

Ejercicio 6.5.2 · fuerza mínima para subir

Adaptado de: 1er final 2015-2 (vespertino), problema 5

Un bloque de 10 [N] está sobre un plano inclinado $\theta = 30^\circ$; el coeficiente de fricción estática es 0.3. Una fuerza F, que forma 15° con el plano, mantiene el bloque en reposo, a punto de ascender. Obtenga el mínimo valor de F.



Datos. $W = 10\,[\text{N}]$, $\theta = 30^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\mu_s = 0.3$.

Planteamiento. A punto de ascender: $f = \mu_s N$ hacia abajo del plano. Ejes paralelo y perpendicular al plano.

Resolución.

1. $\sum F_y = 0$: $N = W\cos\theta - F\sin\alpha$.

2. $\sum F_x = 0$: $F\cos\alpha - W\sin\theta - \mu_s(W\cos\theta - F\sin\alpha) = 0$.
3. Despejando,

$$F = \frac{W(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha} = \frac{10(0.5 + 0.3\cdot 0.8660)}{0.9659 + 0.3\cdot 0.2588} = 7.28\,[\text{N}].$$

4. Comprobación: $N = 8.660 - 1.884 = 6.776\,[\text{N}]$ (positiva: el bloque sigue apoyado).

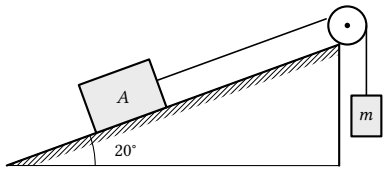
Resultado. $F_{\text{mín}} = 7.28\,[\text{N}]$.

Observación. Si el ángulo α se pudiera elegir, la fuerza más pequeña se obtiene con $\tan\alpha = \mu_s$ ($\alpha = 16.7^\circ$, $F = 7.278\,[\text{N}]$): casi la misma.

Ejercicio 6.5.3 · intervalo de la masa que cuelga

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1

Un bloque de 100 [kg] está sobre un plano inclinado 20° y se une, con una cuerda paralela al plano que pasa por una polea lisa en lo alto, a una masa m que cuelga. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es 0.3. Determine el intervalo de valores de m para que el bloque no deslice ni hacia arriba ni hacia abajo.



Datos. $m_A = 100\,[\text{kg}]$, $\theta = 20^\circ$, $\mu_s = 0.3$.

Planteamiento. Para la masa que cuelga, $T = mg$. Para el bloque, ejes paralelo y perpendicular al plano: $N = 100g\cos 20^\circ = 93.97g$ y $f_{\text{máx}} = 0.3N = 28.19g$.

Resolución.

1. A punto de subir (f hacia abajo del plano): $T = 100g\sin 20^\circ + 28.19g = 34.20g + 28.19g = 62.39g$, así que $m = 62.4\,[\text{kg}]$.
2. A punto de bajar (f hacia arriba del plano): $T = 34.20g - 28.19g = 6.01g$, así que $m = 6.01\,[\text{kg}]$.

Resultado. $6.01\,[\text{kg}] \le m \le 62.4\,[\text{kg}]$.

Ejercicio 6.5.4 · dos bloques en planos opuestos

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 5

Dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea lisa en la cumbre descansan en dos planos: el bloque A, de 20 [kg], en un plano de pendiente 1 : 1, y el bloque B, de 80 [kg], en un plano de pendiente 3 : 4. El coeficiente de fricción estática entre B y su plano es 0.5. Determine el coeficiente de fricción requerido entre A y su plano para que A esté a punto de deslizar hacia arriba.