Figuras compuestas

Una figura que se descompone en partes simples cumple

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i}.$$

Un **hueco** (perforación, recorte) se trata como una parte de área **negativa**, con su centroide en el lugar del hueco. Las coordenadas $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ llevan signo según el sistema de referencia dado.

Figuras simples

En la tabla, b es la dimensión horizontal, h la vertical y r el radio; las coordenadas se miden desde el vértice o centro indicado.

Figura (origen)	Área	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Rectángulo (esquina)	bh	$b/2$	$h/2$
Triángulo rectángulo (vértice del ángulo recto)	$bh/2$	$b/3$	$h/3$
Triángulo cualquiera	$\frac{1}{2}bh$	promedio de las x de los vértices	promedio de las y
Semicírculo (centro, diámetro sobre el eje x)	$\pi r^2/2$	0	$4r/3\pi$
Cuarto de círculo (centro)	$\pi r^2/4$	$4r/3\pi$	$4r/3\pi$
Enjuta parabólica $y = kx^2$ (vértice; bajo la curva)	$bh/3$	$3b/4$	$3h/10$
Semisegmento parabólico (vértice; sobre la curva)	$2bh/3$	$3b/8$	$3h/5$
Barra recta	L (longitud)	punto medio	punto medio

Conviene recordar $\frac{4r}{3\pi} \approx 0.4244\,r$: para $r = 4$, 1.698; para $r = 35$, 14.85.

Cargas distribuidas

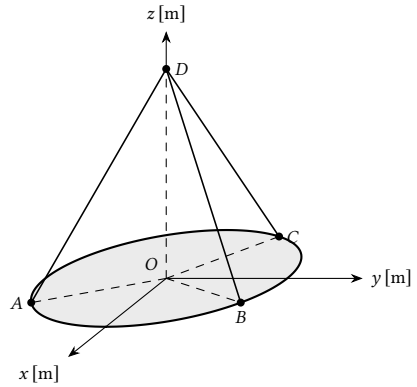
Una carga distribuida $w(x)$ en [N/m] o [lb/ft] sobre una viga equivale a una sola fuerza:

$$F = \int w\,dx = \text{área bajo el diagrama de carga},$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,w\,dx}{F} = \text{abscisa del centroide de ese diagrama.}$$

- **Uniforme** w_0 en una longitud L: $F = w_0 L$, a la mitad del tramo.
- **Triangular** de 0 a w_0: $F = \frac{1}{2} w_0 L$, a $L/3$ del lado mayor.
- **Trapecial** de w_1 a w_2: se parte en un rectángulo y un triángulo.
- **Cualquier ley** $w = f(x)$: se integra; la parábola $w = kx^2$ es una enjuta parabólica.

La fuerza equivalente produce el mismo efecto externo (la misma suma de fuerzas y de momentos) que la carga; por eso sirve para calcular reacciones (Unidad 5), pero no para estudiar esfuerzos internos.



Datos. Direcciones horizontales de OA, OB, OC medidas desde el eje x: -60°, 60°, 150°. $T_{AD} = 288$ [N].

Planteamiento. Partícula D. Cada cable jala a D hacia su punto del borde: componente horizontal $T \sin 30^\circ = T/2$ dirigida de O hacia el punto, y componente vertical $T \cos 30^\circ$ hacia abajo. Sobre D actúa además la fuerza W del soporte hacia arriba, igual al peso de la placa.

Resolución.

1. Unitarios de D hacia cada punto:

$$\hat{e}_A = \left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \hat{e}_B = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \hat{e}_C = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{4}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. $\sum F_x = 0$: $72 + \frac{1}{4}T_{BD} - \frac{\sqrt{3}}{4}T_{CD} = 0$.
3. $\sum F_y = 0$: $-72\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}T_{BD} + \frac{1}{4}T_{CD} = 0$.
4. Al resolver: $T_{BD} = 144$ [N] y $T_{CD} = 249.4$ [N].
5. $\sum F_z = 0$: $W = \frac{\sqrt{3}}{2}(288 + 144 + 249.4) = 590.1$ [N].

Resultado. $T_{BD} = 144$ [N], $T_{CD} = 249.4$ [N], $W = 590.1$ [N].

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 2.6.1 · tres niños y un carrito

Adaptado de: 1er final 2012-1 (matutino), problema 1

Tres niños jalan, en un plano horizontal, tres cuerdas atadas a un carrito que permanece en reposo. El primero jala con 20 [N] hacia el oeste y el segundo con 15 [N] en una dirección a 30° del norte hacia el este. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza del tercer niño.

Resultado: $F = 18.03$ [N], a 46.1° al sur del este (rumbo S 43.9° E).

- Pruebas: $\vec{R} = \vec{0}$ (par o nulo); $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ (una fuerza); si no, motor.
- Motor: $\vec{M}_{\parallel} = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2}\vec{R}$; eje central por $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$ con dirección $\vec{R}$.
- Fuerzas paralelas a y: $R = \sum F_i$, $\bar{x} = \sum F_i x_i / R$, $\bar{z} = \sum F_i z_i / R$.

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Haz una tabla con cada fuerza: punto de aplicación, vector unitario y vector fuerza.
2. Escribe $\vec{r}$ con su origen y su extremo antes de multiplicar.
3. Desarrolla cada determinante por separado y súmalos al final, con unidades.
4. En reducción de sistemas, escribe siempre $\vec{R}$, $\vec{M}_O$ y la prueba $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$ antes de concluir.
5. Comprueba un resultado con otro camino: $M = Fd$, Varignon o el momento respecto a otro punto.

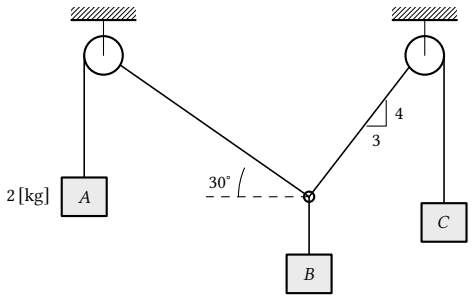
Si no se encuentra el camino, escribe los vectores de las fuerzas, sus vectores de posición y el planteamiento $\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$: el planteamiento correcto también cuenta.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.4 · cuerpos colgados de poleas

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 2

Los cuerpos están en reposo. El cuerpo A, de 2 [kg], cuelga de una cuerda que pasa por una polea fija y baja hasta un anillo, formando 30° con la horizontal. Del anillo cuelga el cuerpo B, y de él sale otra cuerda que sube con pendiente 4 : 3 (4 vertical por 3 horizontal) hasta una segunda polea fija y baja hasta el cuerpo C. Las poleas no tienen fricción. Calcule los pesos de B y C.



Resultado: $W_B = 32.5$ [N]; $W_C = 28.3$ [N].

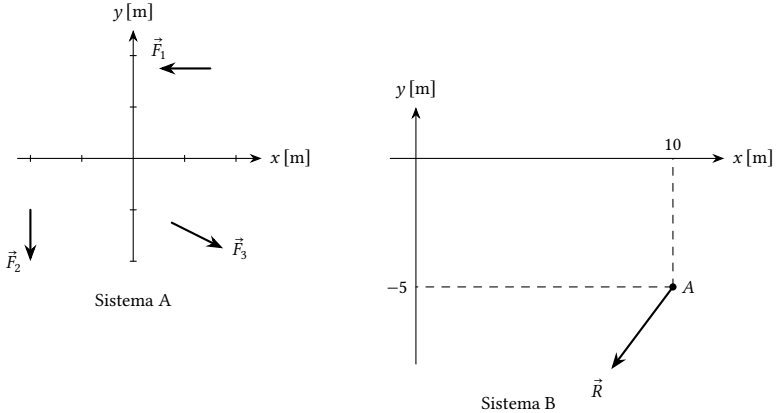
→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.5 · ancla en un muro

Adaptado de: 1er final 2015-2 (vespertino), problema 1

El ancla $A(0, 6, 6)$ está en un muro contenido en el plano yz. De ella salen el cable AB, hacia $B(3, 0, 4)$, con tensión de 210 [N], y el cable AC, hacia $C(2, 3, 0)$, con tensión de 245 [N] (coordenadas en metros). Determine el ángulo entre los cables y el vector de la resultante de las dos tensiones sobre el ancla.

dirección $-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ (hacia abajo y a la izquierda). El momento de $\vec{R}$ respecto al origen es $\vec{M}_O = -220\,\hat{k}\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$. Determine $\vec{F}_3$ y $\vec{R}$.



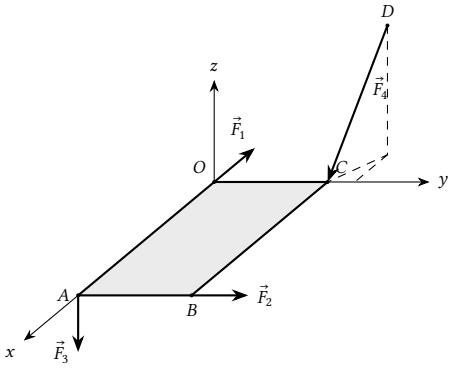
Resultado: $\vec{R} = -12\hat{\imath} - 16\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$; $\vec{F}_3 = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 3.6.5 · losa con cuatro fuerzas

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 2

La losa rectangular $OABC$ de la figura, de peso despreciable, está en el plano xy: $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,\ 0.5,\ 0)$ y $C(0,\ 0.5,\ 0)$, en metros. Sobre ella actúan $\vec{F}_1$ en O, paralela al eje x (sentido negativo); $\vec{F}_2$ en B, paralela al eje y (sentido positivo); $\vec{F}_3$ en A, paralela al eje z (sentido negativo); y $\vec{F}_4$, de 315 [N], aplicada en C y dirigida desde $D(-0.24,\ 0.62,\ 0.57)$ hacia C. El sistema se reduce a una sola fuerza vertical hacia abajo de 570 [N]. Determine las magnitudes de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ y el punto del plano xy por el que pasa la resultante.



2.7 Errores frecuentes

1. **Vector al revés.** La tensión jala al cuerpo: sobre el punto A, la fuerza del cable AB va de A hacia B. Si se escribe $A - B$, todas las tensiones salen negativas.
2. **Olvidar normalizar.** $\vec{F} = F\,\overrightarrow{AB}$ (sin dividir entre el módulo) da una fuerza con la magnitud equivocada.
3. **Ángulo equivocado en la ley de cosenos.** En $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\eta$, η es el ángulo *interior* del triángulo, el suplemento del ángulo entre las fuerzas.
4. **Ángulos medidos desde la vertical.** Si el dibujo da el ángulo con la vertical, el seno y el coseno se intercambian; conviene pasar todo a ángulos desde el eje x.
5. **Peso en kilogramos.** Si el dato es una masa, $W = mg$; 10 [kg] pesan 98.1 [N].
6. **Resorte:** $F = k\,(L - L_0)$, con el alargamiento, no con la longitud total.
7. **Respuesta incompleta.** Si piden la longitud de un cable inclinado, la proyección horizontal no es la respuesta.
8. **Fuerzas olvidadas en el DCL.** Empuje de un globo, fuerza de un resorte, tensión de la cuerda que une dos nudos: todo lo que toca a la partícula entra en el diagrama.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}$, $\hat{e}_{AB} = \dfrac{B - A}{|B - A|}$.
- $F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$; $\cos\theta_x = F_x/F$, etc.; $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$.
- Ángulo entre dos fuerzas: $\cos\theta = \dfrac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{F_1 F_2}$.
- $\vec{R} = \sum \vec{F}$; $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\eta$; $\dfrac{P}{\sin\gamma} = \dfrac{Q}{\sin\phi} = \dfrac{R}{\sin\eta}$.
- Equilibrio: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$.
- Lami: $\dfrac{F_1}{\sin\alpha_1} = \dfrac{F_2}{\sin\alpha_2} = \dfrac{F_3}{\sin\alpha_3}$.
- Resorte: $F = k(L - L_0)$. Polea ideal: misma tensión a ambos lados. $W = mg$.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja el DCL de la partícula con los ejes y todas las fuerzas, aunque el enunciado ya traiga figura.
2. Escribe cada fuerza en forma vectorial y ordena las componentes en una tabla.
3. Plantea las ecuaciones de equilibrio y resuelve primero la que tenga una sola incógnita.
4. Comprueba que las tensiones salgan positivas y sustituye en la ecuación que no usaste.
5. Escribe el resultado con unidades y, si piden dirección, con el ángulo y su referencia.

Resolución. $\vec{R} = -(375 + 260 + 400)\hat{j} = -1035\,\hat{j}\,[\mathrm{N}]$. Momentos respecto al origen:

$$M_x = \sum W_i z_i = 375(3) + 260(0.5) + 400(4.75) = 3155\,[\mathrm{N\cdot m}],$$

$$M_z = -\sum W_i x_i = -[375(1) + 260(1.5) + 400(4.75)] = -2665\,[\mathrm{N\cdot m}].$$

Con la resultante en $(x, 0, z)$: $(x\hat{\imath} + z\hat{k}) \times (-1035\hat{\jmath}) = 1035z\,\hat{\imath} - 1035x\,\hat{k}$; al igualar, $z = 3155/1035$ y $x = 2665/1035$.

Resultado. $\vec{R} = -1035\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$, con línea de acción vertical por $(2.575,\ 0,\ 3.048)\,[\mathrm{m}]$.

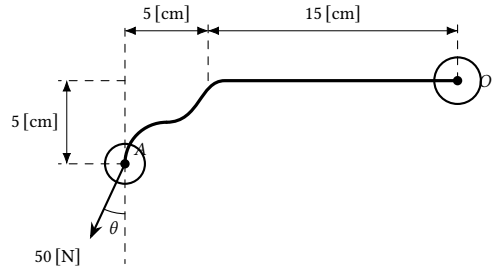
3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 3.6.1 · fuerza en la manija de una puerta

Adaptado de: 1er final 2018-1 (matutino), problema 2

Para abrir una puerta se aplica una fuerza de 50 [N] en la perilla A de la manija de la figura. A está 20 [cm] a la izquierda y 5 [cm] debajo del eje O. La fuerza apunta hacia abajo y a la izquierda, formando el ángulo θ con la vertical. a) Determine θ si la magnitud del momento de la fuerza respecto a O es 800 [N · cm]. b) ¿Para qué valor de θ $(0 < \theta < 180^\circ)$ es máxima la magnitud del momento respecto a O? ¿Cuánto vale ese momento máximo?



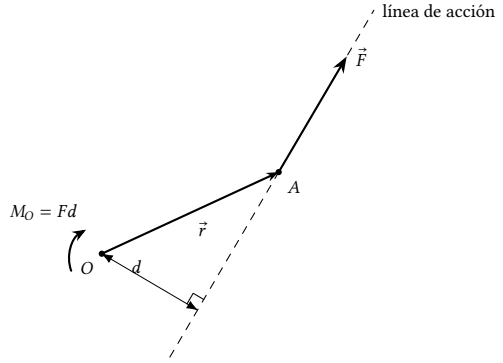
Resultado: a) $\theta = 25.1^\circ$; b) $\theta = 166.0^\circ$, $M_{\text{máx}} = 1030.8\,[\mathrm{N\cdot cm}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.2 · fuerza a partir de su momento

Adaptado de: 1er final 2015-1 (matutino), problema 2

La barra AB de la figura mide 5 [m] y forma 30° con la horizontal; está articulada en A. En su punto medio se aplica una fuerza $\vec{F}$ con pendiente de 5 vertical por 12 horizontal, dirigida hacia arriba y a la izquierda. Si la magnitud del momento de $\vec{F}$ respecto a A es 77.5 [N · m], determine $\vec{F}$.



En el plano xy el momento solo tiene componente z:

$$M_O = x\,F_y - y\,F_x \qquad \text{(positivo en sentido antihorario)}.$$

Teorema de Varignon. El momento de la resultante de fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada fuerza: $\vec{r}\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots) = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \cdots$. Sirve para descomponer una fuerza en componentes fáciles y sumar sus momentos.

Momento de una fuerza respecto a un eje

El momento de $\vec{F}$ respecto al eje que pasa por A y C es la proyección del momento respecto a cualquier punto del eje:

$$M_{AC} = \hat{e}_{AC}\cdot\left(\vec{r}_A\times\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \qquad \vec{M}_{AC} = M_{AC}\,\hat{e}_{AC}.$$

Es un escalar con signo (el signo dice si gira a favor o en contra de $\hat{e}_{AC}$); si piden el vector, se multiplica por $\hat{e}_{AC}$. Es cero si la fuerza corta al eje o es paralela a él.

Par de fuerzas

Dos fuerzas de igual magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un **par**. Su resultante es cero y su momento es el mismo respecto a **cualquier** punto:

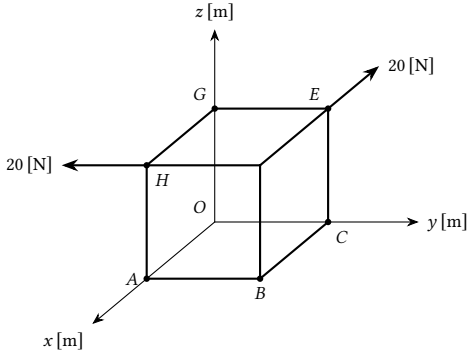
$$\vec{M} = \vec{r}_{B/A}\times\vec{F}, \qquad M = F\,d,$$

con $\vec{r}_{B/A}$ de un punto de la línea de $-\vec{F}$ a un punto de la línea de $\vec{F}$, y d la distancia entre las dos líneas. El momento de un par es un **vector libre**: perpendicular al plano del par, no a las fuerzas. Dos pares son **equivalentes** si tienen el mismo vector momento; varios pares se suman como vectores.

Ejercicio 3.5.6 · ¿se reduce a una sola fuerza?

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3

El cubo homogéneo de la figura tiene aristas de 1 [m] y pesa 10 [N]. En su esquina $E(0,1,1)$ actúa una fuerza de 20 [N] paralela al eje x, en sentido negativo, y en su esquina $H(1,0,1)$ una fuerza de 20 [N] paralela al eje y, en sentido negativo. Para el sistema formado por el peso y las dos fuerzas: a) obtenga la resultante; b) demuestre que se puede reducir a una sola fuerza.



Datos. Peso $-10\hat{k}$ [N] aplicado en el centro $(0.5,\ 0.5,\ 0.5)$ [m].

Planteamiento. $\vec{R}$, $\vec{M}_O$ y la prueba $\vec{R}\cdot\vec{M}_O$.

Resolución. a) $\vec{R} = -20\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} - 10\hat{k}$ [N] (30 [N]).

b) Momentos respecto al origen:

$$(\hat{\jmath}+\hat{k})\times(-20\hat{\imath}) = -20\hat{\jmath}+20\hat{k}, \qquad (\hat{\imath}+\hat{k})\times(-20\hat{\jmath}) = 20\hat{\imath}-20\hat{k},$$

$$(0.5\hat{\imath}+0.5\hat{\jmath}+0.5\hat{k})\times(-10\hat{k}) = -5\hat{\imath}+5\hat{\jmath},$$

de donde $\vec{M}_O = 15\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$ [N · m] y $\vec{R}\cdot\vec{M}_O = (-20)(15)+(-20)(-15)+0 = 0$. Como $\vec{R}\neq\vec{0}$ y $\vec{R}\perp\vec{M}_O$, el sistema equivale a una sola fuerza. Su línea de acción: con $\vec{r} = x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$ (punto en $z=0$), $\vec{r}\times\vec{R} = -10y\,\hat{\imath} + 10x\,\hat{\jmath} + (-20x+20y)\hat{k} = 15\hat{\imath}-15\hat{\jmath}$, así que $x = y = -1.5$ [m].

Resultado. a) $\vec{R} = -20\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} - 10\hat{k}$ [N]; b) $\vec{R}\cdot\vec{M}_O = 0$: el sistema se reduce a la fuerza $\vec{R}$, cuya línea de acción pasa por $(-1.5,\ -1.5,\ 0)$ [m].

Ejercicio 3.5.7 · reducción a un motor y eje central

Adaptado de: 1er final 2011-2 (versión A), problema 2

Un sistema S está formado por tres fuerzas, en newtons, con coordenadas en metros: $\vec{F}_1 = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$, cuya línea de acción pasa por $O(0,0,0)$; $\vec{F}_2 = 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, que pasa por $P(6,0,0)$; y $\vec{F}_3 = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, que pasa por $Q(0,0,-6)$. a) Compruebe que S se puede reducir a un motor. b) Obtenga el momento del motor. c) Determine una ecuación del eje central.

Planteamiento. $\vec{R}$, $\vec{M}_O$, prueba $\vec{R}\cdot\vec{M}_O$; luego $\vec{M}_{\parallel}$ y $\vec{r}_0 = \vec{R}\times\vec{M}_O/R^2$.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«momento de la fuerza respecto al punto (origen, A)»	$\vec{r}\times\vec{F}$	3.3.1
«momento respecto al eje AC», «respecto a la recta que pasa por…»	proyección $\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{F})$	3.3.2
«compruebe el teorema de Varignon», «suma de los momentos»	Varignon	3.3.1
«par de fuerzas», «par equivalente», «distancia entre las líneas de acción»	momento de un par	3.3.3
«reemplace por un sistema fuerza-par en E»	sistema fuerza-par	3.3.4
«los sistemas A y B son equivalentes; determine…»	igualar $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$	3.3.4
«sistema más simple», «demuestre que se reduce a una sola fuerza»	pruebas de $\vec{R}$ y $\vec{R}\cdot\vec{M}_O$	3.3.5
«motor», «eje central»	reducción general	3.3.6
pesos o fuerzas verticales sobre una placa, «ubicación de la resultante»	fuerzas paralelas	3.3.7

3.3 Procedimientos

Momento respecto a un punto

1. Escribe las coordenadas de los puntos que se necesitan.
2. Vector de la fuerza: $\vec{F} = F\,\hat{e}$ con el segmento dirigido de su línea de acción.
3. $\vec{r}$ del punto de momentos a **cualquier** punto de la línea de acción (elige el más sencillo).
4. Desarrolla el determinante $\vec{r}\times\vec{F}$ fila por fila, con unidades ([N · m], [lb · ft]).
5. En el plano basta $M_O = xF_y - yF_x$; si hay varias fuerzas, suma (Varignon).

Momento respecto a un eje

1. Unitario del eje: $\hat{e}_{AC} = \overrightarrow{AC}/|\overrightarrow{AC}|$.
2. $\vec{r}$ de un punto del eje (A o C) a un punto de la línea de acción de $\vec{F}$.
3. $M_{AC} = \hat{e}_{AC}\cdot(\vec{r}\times\vec{F})$ (triple producto escalar, determinante de 3×3).
4. Si piden el vector: $\vec{M}_{AC} = M_{AC}\,\hat{e}_{AC}$. Si piden la magnitud: $|M_{AC}|$.

Momento de un par

1. Identifica las dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ y un punto de cada línea de acción.
2. $\vec{M} = \vec{r}_{B/A}\times\vec{F}$, con $\vec{r}_{B/A}$ del punto de $-\vec{F}$ al punto de $\vec{F}$.
3. Distancia entre las líneas: $d = M/F$. Para varios pares, suma los vectores momento.

Sistema fuerza-par y sistemas equivalentes

1. Escribe cada fuerza como vector y su punto de aplicación.
2. $\vec{R} = \sum\vec{F}_i$.
3. $\vec{M}_P = \sum\vec{r}_{i/P}\times\vec{F}_i + \sum\vec{M}_j$ (los pares se suman tal cual).

Con $\vec{r}_{D/A} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 10\hat{k}$ [ft]:

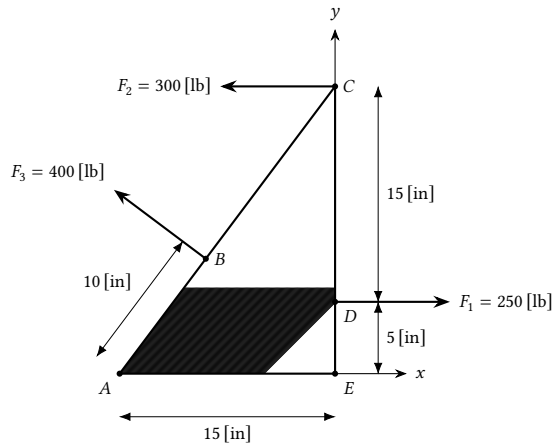
$$\vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 4 & -10 \\ 0 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 300\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 120\hat{k}\ [\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

Resultado. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 900\hat{\imath} + 600\hat{\jmath} + 600\hat{k}$ [lb · ft], de magnitud 1236.9 [lb · ft].

Ejercicio 3.5.4 · sistema fuerza-par en una placa

Adaptado de: 1er final 2014-1 (vespertino), problema 2

La placa triangular AEC de la figura tiene E en el origen, A a 15 [in] a la izquierda de E y C a 20 [in] sobre E. Sobre ella actúan $F_1 = 250$ [lb], horizontal hacia la derecha, en D (5 [in] sobre E); $F_2 = 300$ [lb], horizontal hacia la izquierda, en C; y $F_3 = 400$ [lb], perpendicular a AC y dirigida hacia afuera de la placa, en el punto B de AC que está a 10 [in] de A. Reemplace las tres fuerzas por un sistema fuerza-par con la fuerza aplicada en E.



Datos. $A(-15, 0)$, $C(0, 20)$, $D(0, 5)$ en pulgadas; $|AC| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ [in].

Planteamiento. Unitario de AC: $(0.6, 0.8)$; normal hacia afuera: $(-0.8, 0.6)$. $B = A + 10(0.6, 0.8) = (-9, 8)$. Luego $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ y $M_E = \sum(xF_y - yF_x)$.

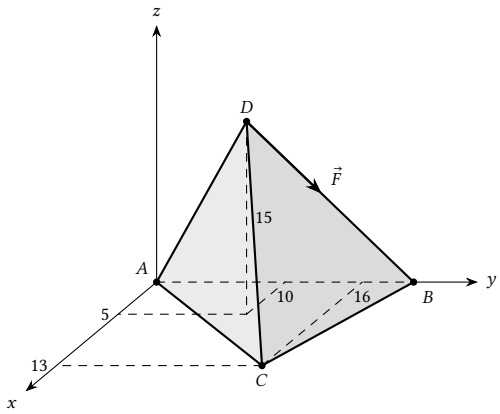
Resolución. $\vec{F}_1 = 250\hat{\imath}$, $\vec{F}_2 = -300\hat{\imath}$, $\vec{F}_3 = 400(-0.8\hat{\imath} + 0.6\hat{\jmath}) = -320\hat{\imath} + 240\hat{\jmath}$ [lb], de donde

$$\vec{R} = (250 - 300 - 320)\hat{\imath} + 240\hat{\jmath} = -370\hat{\imath} + 240\hat{\jmath}\ [\text{lb}].$$

Momentos respecto a E (antihorario positivo):

$$M_E = -(5)(250) - (20)(-300) + \big[(-9)(240) - (8)(-320)\big] = 5150\ [\text{lb}\cdot\text{in}].$$

Resultado. En E: $\vec{R} = -370\hat{\imath} + 240\hat{\jmath}$ [lb] (441.0 [lb] a 147.0° del eje x) y $\vec{M}_E = 5150\,\hat{k}$ [lb · in] $= 429.2\,\hat{k}$ [lb · ft] (antihorario).



Datos. $F = 80$ [lb]; $\overrightarrow{DB} = -5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} - 15\hat{k}$ [ft], $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{350} = 18.708$ [ft].

Planteamiento. $\vec{F} = F\,\hat{e}_{DB}$; $\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$ (el punto B está sobre la línea de acción); $M_{AC} = \hat{e}_{AC} \cdot \vec{M}_A$.

Resolución.

$$\vec{F} = \frac{80}{18.708}(-5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} - 15\hat{k}) = -21.38\hat{\imath} + 42.76\hat{\jmath} - 64.14\hat{k}\ [\text{lb}].$$

a) Con $\vec{r}_{AB} = 20\hat{\jmath}$ [ft]:

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 20 & 0 \\ -21.38 & 42.76 & -64.14 \end{vmatrix} = -1282.9\,\hat{\imath} + 427.6\,\hat{k}\ [\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

b) $\overrightarrow{AC} = 13\hat{\imath} + 16\hat{\jmath}$, $|\overrightarrow{AC}| = 20.616$ [ft], así que $\hat{e}_{AC} = 0.6306\,\hat{\imath} + 0.7761\,\hat{\jmath}$ y

$$M_{AC} = \hat{e}_{AC} \cdot \vec{M}_A = (0.6306)(-1282.9) + (0.7761)(0) + (0)(427.6) = -809.0\ [\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

Resultado. a) $\vec{M}_A = -1282.9\,\hat{\imath} + 427.6\,\hat{k}$ [lb · ft]; b) $|M_{AC}| = 809$ [lb · ft] (el signo negativo indica que gira en sentido contrario a $\hat{e}_{AC}$).

3.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 3.5.1 · momento respecto al origen y a un eje

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 2

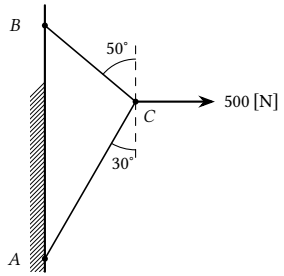
La caja de la figura mide 3 [m] en x, 12 [m] en y y 4 [m] en z. La fuerza $\vec{F}$, de magnitud 130 [N], actúa del vértice $G(3, 0, 0)$ hacia el vértice $C(0, 12, 4)$. Determine: a) el momento de $\vec{F}$ respecto al origen; b) el momento de $\vec{F}$ respecto al eje que pasa por O y por $A(3, 12, 0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 2.6.2 · dos cuerdas atadas a un muro

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 1

Dos cuerdas se amarran en el punto C y sus otros extremos se fijan a un muro vertical: la cuerda CB sube hacia el muro formando 50° con la vertical y la cuerda CA baja hacia el muro formando 30° con la vertical. En C se aplica una fuerza horizontal de 500 [N] que se aleja del muro. Determine la tensión en cada cuerda.



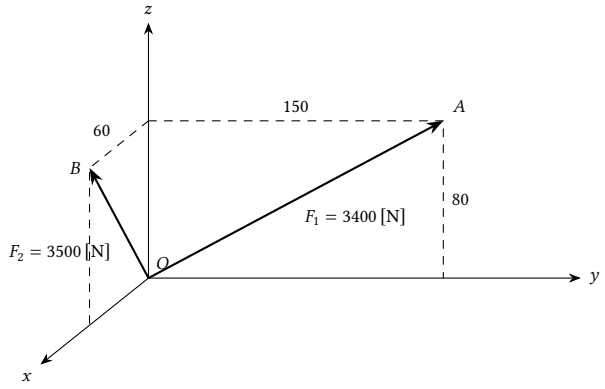
Resultado: $T_{CA} = 326.4$ [N]; $T_{CB} = 439.7$ [N].

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.3 · resultante de dos fuerzas en el espacio

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 1

Dos fuerzas parten del origen O: $F_1 = 3400$ [N] hacia el punto $A(0, 150, 80)$ y $F_2 = 3500$ [N] hacia el punto $B(60, 0, 80)$, con coordenadas en milímetros. Determine la resultante en forma vectorial.



Resultado: $\vec{R} = 2100\hat{\imath} + 3000\hat{\jmath} + 4400\hat{k}$ [N] ($R = 5724.5$ [N]).

Unidad 4 · Primeros momentos, centros de gravedad, centros de masa y centroides

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno determinará centroides, centros de gravedad y centros de masa para cuerpos de configuración sencilla.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 22 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en 11 de los 13 aplicados desde 2014-1. Suele ser el problema 3; cuando hay cargas distribuidas, también entra en el problema de reacciones (Unidad 5).
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 con la tabla de figuras simples a la vista (20 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5.1, 4.5.2 y 4.5.6 con cronómetro (20 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Primer momento y centroide de un área

El **primer momento** de un área plana A respecto a un eje mide cómo está repartida el área alrededor de ese eje:

$$Q_y = \int x\,dA = \bar{x}\,A, \qquad Q_x = \int y\,dA = \bar{y}\,A.$$

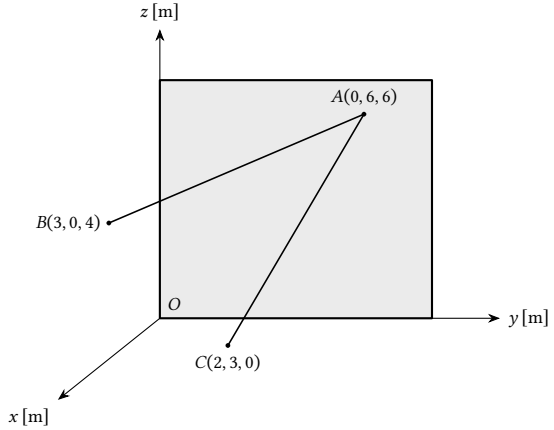
Q_y se mide respecto al eje y (usa la distancia x) y Q_x respecto al eje x (usa la distancia y). Sus unidades son de longitud al cubo, por ejemplo [cm^3]. El punto $C(\bar{x}, \bar{y})$ es el **centroide**: el «centro geométrico» del área. Si el área tiene un eje de simetría, el centroide está sobre ese eje; con dos ejes de simetría, en su intersección.

Centro de masa y centro de gravedad

Para un cuerpo con masa, el **centro de masa** pondera cada parte por su masa y el **centro de gravedad** por su peso:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i}, \qquad \bar{x} = \frac{\sum W_i \bar{x}_i}{\sum W_i}, \qquad m_i = \rho_i V_i, \quad W_i = m_i g.$$

Si el cuerpo es homogéneo (ρ constante) y la gravedad es uniforme, los tres puntos coinciden con el centroide del volumen. Para una **lámina** de espesor constante t, $V_i = t\,A_i$ y se puede trabajar con áreas; para una **barra delgada** de sección constante, con longitudes. Si las partes tienen densidades distintas, cada término se pondera con su propia ρ_i.



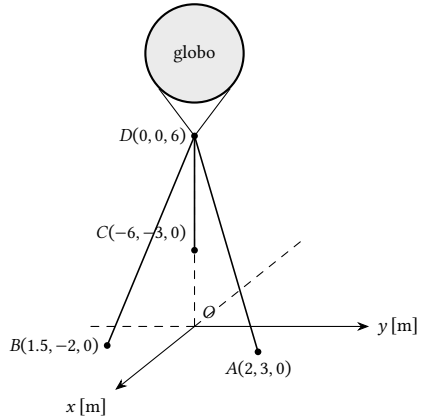
Resultado: $\theta = 42.72^\circ$; $\vec{R} = 160\hat{\imath} - 285\hat{\jmath} - 270\hat{k}\,[\mathrm{N}]$ ($R = 423.9\,[\mathrm{N}]$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.6 · globo amarrado con tres cables

Adaptado de: 1er final 2014-2 (vespertino), problema 1

Un globo de aire caliente está sujeto en $D(0, 0, 6)$ por tres cables amarrados a los puntos $A(2, 3, 0)$, $B(1.5, -2, 0)$ y $C(-6, -3, 0)$ del suelo (coordenadas en metros). La tensión del cable BD es de 1.5 [kN] y el empuje ascendente del globo es de 6 [kN]. Determine las tensiones de los cables AD y CD y el peso del globo.



Resultado: $T_{AD} = 2.22\,[\mathrm{kN}]$; $T_{CD} = 1.47\,[\mathrm{kN}]$; $W = 1.73\,[\mathrm{kN}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Resultado: $F_1 = 120\,[\mathrm{N}]$, $F_2 = 60\,[\mathrm{N}]$, $F_3 = 285\,[\mathrm{N}]$; la resultante pasa por $(0.5,\ 0.25,\ 0)\,[\mathrm{m}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 3.6.6 · seis fuerzas sobre una esfera

Adaptado de: 1er final 2012-2 (vespertino), problema 2

Sobre una esfera fija de centro en el origen y radio 5 [m] actúan seis fuerzas, en newtons, aplicadas en puntos de su superficie (coordenadas en metros): $\vec{F}_A = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ en $A(0, 0, 5)$; $\vec{F}_B = 2\hat{\imath} + 4\hat{k}$ en $B(0, -5, 0)$; $\vec{F}_C = b\,\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ en $C(5, 0, 0)$; $\vec{F}_D = -5\hat{k}$ en $D(4, 0, -3)$; $\vec{F}_E = 2\hat{\imath} - 1.5\hat{k}$ en $E(3, 0, 4)$; y $\vec{F}_G = -2\hat{\imath} + 1.5\hat{k}$ en $G(-3, 0, -4)$. Determine el valor de b para el que el sistema se reduce a una sola fuerza y, con ese valor, una ecuación cartesiana de su línea de acción.

Resultado: $b = 1$; $\vec{R} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}\,[\mathrm{N}]$; línea de acción $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

3.7 Errores frecuentes

1. **Orden del producto cruz.** Es $\vec{r} \times \vec{F}$, no $\vec{F} \times \vec{r}$: el orden inverso cambia el signo de todo el momento.
2. **$\vec{r}$ mal elegido.** Debe ir del punto de momentos a un punto de la línea de acción de la fuerza, no al revés ni a un punto cualquiera del cuerpo.
3. **Sentido del unitario.** «De D hacia B» es $B - D$. Invertirlo cambia el signo de $\vec{F}$.
4. **Signo del segundo término del determinante.** La componente $\hat{\jmath}$ lleva signo menos: $-(r_x F_z - r_z F_x)$.
5. **Momento respecto a un eje.** Es la proyección sobre el **unitario** del eje; olvidar dividir entre $|\overrightarrow{AC}|$ multiplica el resultado por esa longitud.
6. **Escalar contra vector.** Si piden «el momento respecto al eje» como vector, falta multiplicar por $\hat{e}$; si piden la magnitud, se da el valor absoluto.
7. **Par de fuerzas.** Su momento es el mismo respecto a cualquier punto; no se le suma $\vec{r} \times \vec{R}$ porque $\vec{R} = \vec{0}$.
8. **Sistema más simple.** $\vec{R} = \vec{0}$ no significa equilibrio: puede quedar un par. Y $\vec{R} \neq \vec{0}$ con $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$ no se reduce a una sola fuerza.
9. **Unidades del momento.** [N · m], [kN · m], [lb · ft]; nunca solo [N]. Con pulgadas, 1 [ft] = 12 [in].

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}$, $\hat{e}_{AB} = \overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|$.
- $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ (determinante con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$; $\vec{r}$ de O a la línea de acción); $M_O = Fd$; en el plano, $M_O = xF_y - yF_x$.
- Varignon: $\vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i$.
- Eje: $M_{AC} = \hat{e}_{AC} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$, $\vec{M}_{AC} = M_{AC}\,\hat{e}_{AC}$.
- Par: $\vec{M} = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}$, $M = Fd$; vector libre.
- Fuerza-par: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, $\vec{M}_P = \sum \vec{r}_{i/P} \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j$; $\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{r}_{P/Q} \times \vec{R}$.

Unidad 3 · Sistemas equivalentes de fuerzas: momentos, pares y reducción

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará los principios básicos de la mecánica clásica para la obtención de sistemas equivalentes de fuerzas.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 22 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en 10 de los 13 aplicados desde 2014-1. Suele ser el problema 2.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y memoriza el determinante del momento (20 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve con cronómetro los ejercicios 3.5.1 (momento respecto a punto y eje), 3.5.4 (fuerza-par), 3.5.6 (¿una sola fuerza?) y 3.5.8 (fuerzas paralelas), 20 min cada uno.

3.1 Conceptos y expresiones

Vector representativo de una fuerza

Una fuerza de magnitud F cuya línea de acción va del punto A al punto B se escribe

$$\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}, \qquad \hat{e}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},$$

$$\hat{e}_{AB} = \frac{(x_B - x_A)\,\hat{\imath} + (y_B - y_A)\,\hat{\jmath} + (z_B - z_A)\,\hat{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

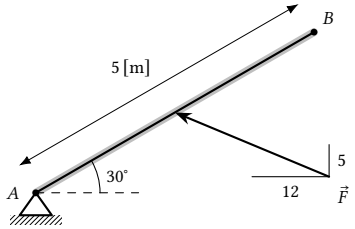
El sentido importa: «actúa de D hacia B» es $\hat{e}_{DB}$, no $\hat{e}_{BD}$.

Momento de una fuerza respecto a un punto

El momento de $\vec{F}$ respecto al punto O es

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

donde $\vec{r}$ va **de** O **a cualquier punto** de la línea de acción de $\vec{F}$. Su magnitud es $M_O = F\,d$, con d la distancia perpendicular de O a la línea de acción; su dirección es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$ (regla de la mano derecha).



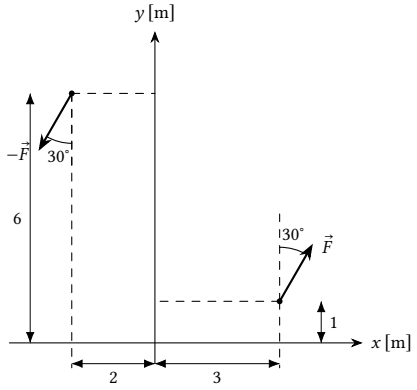
Resultado: $F = 39.01\,[\mathrm{N}]$, $\vec{F} = -36.01\,\hat{\imath} + 15.00\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.3 · momento de un par en el plano

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 3

Un par está formado por dos fuerzas de 8 [kN]. La fuerza $\vec{F}$ actúa en $(3,\ 1)$ [m], hacia arriba y a la derecha, a 30° de la vertical; $-\vec{F}$ actúa en $(-2,\ 6)$ [m], hacia abajo y a la izquierda, también a 30° de la vertical. Determine: a) el momento del par; b) geométricamente, la distancia más corta entre las líneas de acción; c) con esa distancia, compruebe el resultado de a).



Resultado: a) $\vec{M} = 54.64\,\hat{k}\,[\mathrm{kN \cdot m}]$; b) $d = 6.83\,[\mathrm{m}]$; c) $Fd = (8)(6.83) = 54.64\,[\mathrm{kN \cdot m}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.4 · sistemas equivalentes en el plano

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 2

Los sistemas A y B de la figura son equivalentes. El sistema A tiene tres fuerzas: $\vec{F}_1$, paralela al eje x, de 20 [N], hacia la izquierda; $\vec{F}_2$, paralela al eje y, de 10 [N], hacia abajo; y $\vec{F}_3$, desconocida. El sistema B es una sola fuerza $\vec{R}$ aplicada en $A(10,\ -5)$ [m], con

Sistemas equivalentes y sistema fuerza-par

Dos sistemas de fuerzas son **equivalentes** si tienen la misma resultante y el mismo momento respecto a un mismo punto (y entonces respecto a todos):

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i, \qquad \vec{M}_O^R = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j.$$

Cualquier sistema se reduce a un **sistema fuerza-par** en un punto P: la fuerza $\vec{R}$ aplicada en P y el par $\vec{M}_P = \sum \vec{r}_{i/P} \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j$. Al cambiar de punto, $\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{r}_{P/Q} \times \vec{R}$.

Sistema más simple

Con $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$ calculados, el sistema más simple equivalente depende de dos pruebas:

Condición	Sistema más simple
$\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$	Equilibrio (sistema nulo)
$\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$	Un par de momento $\vec{M}_O$
$\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$	Una sola fuerza $\vec{R}$, con línea de acción por $\vec{r}$ tal que $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$
$\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$	Un **motor** (fuerza y par colineales) sobre el eje central

Los sistemas **coplanares** y los de **fuerzas paralelas** siempre cumplen $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$: si $\vec{R} \neq \vec{0}$ se reducen a una sola fuerza.

Motor y eje central. Si $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$, el par paralelo a $\vec{R}$ es

$$\vec{M}_{\parallel} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} \vec{R},$$

que es el momento mínimo del sistema. El eje central pasa por el punto $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$ y tiene la dirección de $\vec{R}$: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{R}$. De forma equivalente, se plantea $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\parallel}$ con $\vec{r} = (x, y, z)$.

Fuerzas paralelas. Si todas las fuerzas son paralelas al eje y (por ejemplo, pesos), la resultante es $R = \sum F_i$ y su línea de acción cruza el plano xz en

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}.$$

Resolución. $\vec{R} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ [N], $R = 3$ [N]. $\vec{F}_1$ pasa por O y no da momento;

$$\vec{r}_P \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12\hat{\jmath} + 18\hat{k}, \qquad \vec{r}_Q \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12\hat{\imath} + 6\hat{\jmath},$$

así que $\vec{M}_O = 12\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 18\hat{k}$ [N · m].

a) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 12 - 12 - 36 = -36 \neq 0$ y $\vec{R} \neq \vec{0}$: es un motor.

b) $\vec{M}_{\parallel} = \dfrac{-36}{9}(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = -4\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 8\hat{k}$ [N · m] (12 [N · m], en sentido opuesto a $\vec{R}$).

c) $\vec{R} \times \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 12 & -6 & 18 \end{vmatrix} = 24\hat{\imath} - 42\hat{\jmath} - 30\hat{k}$, de donde $\vec{r}_0 = \frac{1}{9}(24, -42, -30) = (2.667, -4.667, -3.333)$ [m].

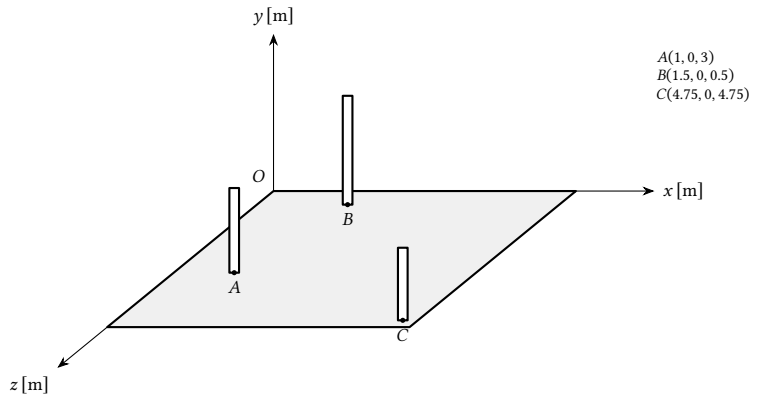
Resultado. a) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = -36 \neq 0$; b) $\vec{M}_{\parallel} = -4\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 8\hat{k}$ [N · m]; c) eje central

$$\frac{x - 8/3}{1} = \frac{y + 14/3}{2} = \frac{z + 10/3}{-2}, \quad \text{o bien} \quad 2x - 10 = y = -z - 8.$$

Ejercicio 3.5.8 · resultante de fuerzas paralelas

Adaptado de: 1er final 2015-2 (matutino), problema 2

Tres cilindros verticales homogéneos descansan sobre una plataforma horizontal de 5×5 [m] en el plano xz (el eje y es vertical, hacia arriba). Sus pesos son $W_A = 375$ [N] en $A(1,\ 0,\ 3)$, $W_B = 260$ [N] en $B(1.5,\ 0,\ 0.5)$ y $W_C = 400$ [N] en $C(4.75,\ 0,\ 4.75)$, en metros. Determine la magnitud y la ubicación de la resultante a la que se reduce el sistema de los tres pesos.



Planteamiento. Fuerzas paralelas a y: $R = \sum W_i$ y momentos respecto a los ejes x y z.

4. Si dos sistemas son equivalentes: iguala $\vec{R}_A = \vec{R}_B$ y $\vec{M}_{O,A} = \vec{M}_{O,B}$ componente a componente y despeja las incógnitas.

Sistema más simple

1. Calcula $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$ (respecto al origen).
2. Aplica las pruebas de la tabla de la sección 3.1.
3. Si es una sola fuerza, plantea $(x, y, z) \times \vec{R} = \vec{M}_O$: salen ecuaciones dependientes (es una recta); fija una coordenada (por ejemplo $z = 0$) y obtén el punto.

Motor y eje central

1. $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$; comprueba que $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$.
2. Momento del motor: $\vec{M}_{\parallel} = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2}\vec{R}$.
3. Eje central: punto $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$ y dirección $\vec{R}$. Escribe la recta en forma simétrica $\dfrac{x - x_0}{R_x} = \dfrac{y - y_0}{R_y} = \dfrac{z - z_0}{R_z}$.

Fuerzas paralelas

1. Elige el eje paralelo a las fuerzas (el vertical) y suma las magnitudes con signo: $R = \sum F_i$.
2. Momentos respecto a los dos ejes horizontales que pasan por el origen.
3. Coordenadas de la línea de acción: $\bar{x} = \sum F_i x_i / R$, $\bar{z} = \sum F_i z_i / R$.

3.4 Ejemplo resuelto

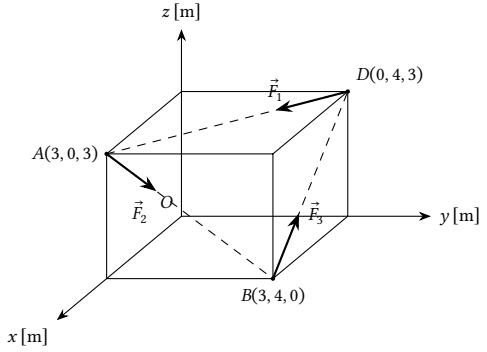
Ejemplo resuelto · momento respecto a un punto y a un eje

Basado en: 1er final 2018-1 (vespertino), problema 2.
Una fuerza $\vec{F}$ de 80 [lb] actúa a lo largo de la arista DB del tetraedro de la figura, de D hacia B. Los vértices son $A(0, 0, 0)$, $B(0, 20, 0)$, $C(13, 16, 0)$ y $D(5, 10, 15)$, en pies. Determine: a) el momento de $\vec{F}$ respecto al punto A; b) la magnitud del momento de $\vec{F}$ respecto al eje AC.

Ejercicio 3.5.5 · el sistema más simple es un par

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 2

Sobre la caja de la figura actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1$, aplicada en $D(0, 4, 3)$ y dirigida hacia $A(3, 0, 3)$; $\vec{F}_2$, aplicada en A y dirigida hacia $B(3, 4, 0)$; y $\vec{F}_3$, aplicada en B y dirigida hacia D. Las coordenadas están en metros, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 300$ [N] y $|\vec{F}_3| = 60\sqrt{18}$ [N]. Determine el sistema más simple al que puede reducirse.



Datos. $\overrightarrow{DA} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ (5 [m]), $\overrightarrow{AB} = 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ (5 [m]), $\overrightarrow{BD} = -3\hat{\imath} + 3\hat{k}$ ($\sqrt{18}$ [m]).
Planteamiento. $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$; pruebas de la sección 3.1.
Resolución.

$$\vec{F}_1 = 180\hat{\imath} - 240\hat{\jmath}, \qquad \vec{F}_2 = 240\hat{\jmath} - 180\hat{k}, \qquad \vec{F}_3 = -180\hat{\imath} + 180\hat{k}\,[\text{N}],$$

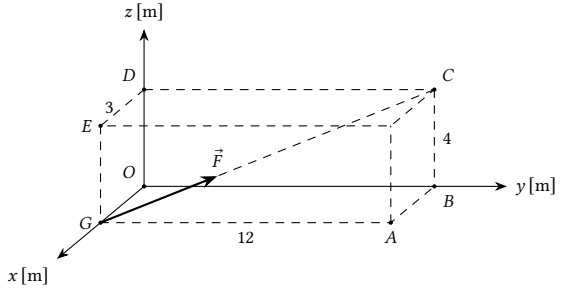
así que $\vec{R} = \vec{0}$: las tres fuerzas forman un triángulo cerrado. Momentos respecto al origen:

$$\vec{r}_D \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 180 & -240 & 0 \end{vmatrix} = 720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} - 720\hat{k},$$

$$\vec{r}_A \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 240 & -180 \end{vmatrix} = -720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} + 720\hat{k},$$

$$\vec{r}_B \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -180 & 0 & 180 \end{vmatrix} = 720\hat{\imath} - 540\hat{\jmath} + 720\hat{k}.$$

Resultado. $\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{M}_O = 720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} + 720\hat{k}$ [N · m]: el sistema se reduce a un **par** de momento $\vec{M} = 720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} + 720\hat{k}$ [N · m] (1152.6 [N · m]).



Datos. $F = 130\,[\mathrm{N}]$; $\overrightarrow{GC} = -3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}\,[\mathrm{m}]$, $|\overrightarrow{GC}| = 13\,[\mathrm{m}]$.
Planteamiento. $\vec{F} = F\,\hat{e}_{GC}$; $\vec{r} = \overrightarrow{OG}$; $M_{OA} = \hat{e}_{OA} \cdot \vec{M}_O$.
Resolución. $\vec{F} = \frac{130}{13}(-3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}) = -30\hat{\imath} + 120\hat{\jmath} + 40\hat{k}\,[\mathrm{N}]$.
a) Con $\vec{r} = 3\hat{\imath}\,[\mathrm{m}]$:

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ -30 & 120 & 40 \end{vmatrix} = (0)\hat{\imath} - (3\cdot 40)\hat{\jmath} + (3\cdot 120)\hat{k} = -120\,\hat{\jmath} + 360\,\hat{k}\,[\mathrm{N\cdot m}].$$

b) $\hat{e}_{OA} = \dfrac{3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}}{\sqrt{153}} = 0.2425\,\hat{\imath} + 0.9701\,\hat{\jmath}$, así que

$$M_{OA} = \frac{(3)(0) + (12)(-120) + (0)(360)}{\sqrt{153}} = -116.42\,[\mathrm{N\cdot m}],$$

$$\vec{M}_{OA} = M_{OA}\,\hat{e}_{OA} = -28.24\,\hat{\imath} - 112.94\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N\cdot m}].$$

Resultado. a) $\vec{M}_O = -120\,\hat{\jmath} + 360\,\hat{k}\,[\mathrm{N\cdot m}]$; b) $\vec{M}_{OA} = -28.24\,\hat{\imath} - 112.94\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N\cdot m}]$, de magnitud $116.42\,[\mathrm{N\cdot m}]$.

Ejercicio 3.5.2 · teorema de Varignon

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 1

Se tienen los puntos $P_1(5, 1, -9)$, $P_2(0, 4, 2)$, $Q(1, 2, 3)$ y $T(1, -1, -11)$, en metros, y las fuerzas $\vec{F}_1 = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 12\hat{k}\,[\mathrm{N}]$ y $\vec{F}_2 = -4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}\,[\mathrm{N}]$, cuyas líneas de acción pasan por P_1 y P_2. Determine: a) la suma de los momentos de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ respecto a Q; b) compruebe que esa suma es igual al momento de la resultante respecto a Q, si la línea de acción de la resultante pasa por T.

Datos. $\vec{r}_{P_1/Q} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 12\hat{k}$, $\vec{r}_{P_2/Q} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{r}_{T/Q} = -3\hat{\jmath} - 14\hat{k}\,[\mathrm{m}]$.
Planteamiento. $\vec{M}_Q = \sum \vec{r}_{i/Q} \times \vec{F}_i$; luego $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y $\vec{r}_{T/Q} \times \vec{R}$.
Resolución. a)

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -1 & -12 \\ 3 & -4 & -12 \end{vmatrix} = -36\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} - 13\hat{k}, \qquad \vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 10\hat{k},$$

de donde $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = -42\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}\,[\mathrm{N\cdot m}]$.
b) $\vec{R} = -\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 14\hat{k}\,[\mathrm{N}]$ y

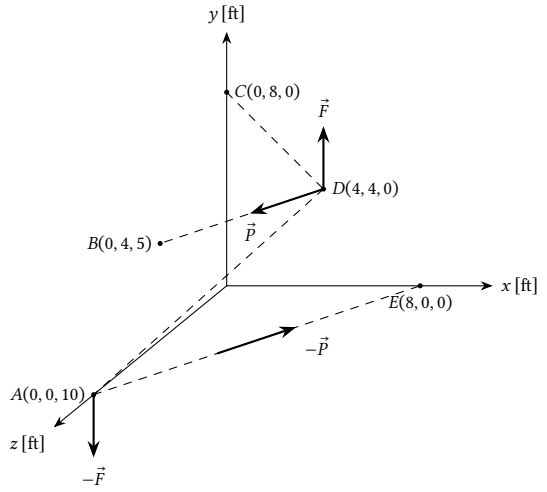
$$\vec{r}_{T/Q} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -3 & -14 \\ -1 & -6 & -14 \end{vmatrix} = (42 - 84)\hat{\imath} - (0 - 14)\hat{\jmath} + (0 - 3)\hat{k} = -42\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}\,[\mathrm{N\cdot m}].$$

Resultado. a) $\sum \vec{M}_Q = -42\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}\,[\mathrm{N\cdot m}]$; b) el momento de la resultante es el mismo vector, como afirma el teorema de Varignon (las dos fuerzas son concurrentes en T).

Ejercicio 3.5.3 · par equivalente a dos pares

Adaptado de: 1er final 2013-1 (vespertino), problema 2

Sobre el sistema de la figura actúan dos pares. El primero lo forman $\vec{P}$, aplicada en $D(4, 4, 0)$ y dirigida hacia $B(0, 4, 5)$, y $-\vec{P}$, cuya línea de acción pasa por $A(0, 0, 10)$ y $E(8, 0, 0)$, con $|\vec{P}| = 30\sqrt{41}\,[\mathrm{lb}]$. El segundo lo forman $\vec{F} = 30\hat{\jmath}\,[\mathrm{lb}]$, aplicada en D, y $-\vec{F}$, aplicada en A. Las coordenadas están en pies. Determine el momento de un par equivalente a los dos pares.



Datos. $\overrightarrow{DB} = -4\hat{\imath} + 5\hat{k}$, $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{41}\,[\mathrm{ft}]$.
Planteamiento. El par equivalente es la suma de los momentos de los dos pares; cada uno se calcula con $\vec{r}$ de un punto de la fuerza negativa a un punto de la positiva.
Resolución. $\vec{P} = \frac{30\sqrt{41}}{\sqrt{41}}(-4\hat{\imath} + 5\hat{k}) = -120\hat{\imath} + 150\hat{k}\,[\mathrm{lb}]$. Con $\vec{r}_{D/E} = -4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}\,[\mathrm{ft}]$:

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -120 & 0 & 150 \end{vmatrix} = 600\hat{\imath} + 600\hat{\jmath} + 480\hat{k}\,[\mathrm{lb\cdot ft}].$$