CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Estática

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.3.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 6

Unidad 1 · Fundamentos de la mecánica clásica newtoniana: gravitación universal y unidades 9

Unidad 2 · Conceptos básicos de la estática: resultante de fuerzas concurrentes y equilibrio de la partícula 16

Unidad 3 · Sistemas equivalentes de fuerzas: momentos, pares y reducción 30

Unidad 4 · Primeros momentos, centros de gravedad, centros de masa y centroides 47

Unidad 5 · Estudio del equilibrio de los cuerpos: reacciones en el plano y en el espacio 62

Unidad 6 · Fricción: deslizamiento, volcamiento y cuerpos conectados 80

Apéndice A · Formulario 94

Apéndice B · Exámenes completos 98

Apéndice C · Fe de erratas 101

Apéndice D · Fuentes 104

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 106

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Estática** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sigue el orden de los temas del programa de la asignatura:

1. Fundamentos de la mecánica clásica newtoniana.
2. Conceptos básicos de la estática.
3. Sistemas equivalentes de fuerzas.
4. Primeros momentos, centros de gravedad, centros de masa y centroides.
5. Estudio del equilibrio de los cuerpos.
6. Fricción.

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa). El alumno conocerá y comprenderá los elementos y principios fundamentales de la mecánica clásica newtoniana; analizará y resolverá ejercicios de equilibrio isostático.

De dónde salen los ejercicios.

- Se revisaron los **25 exámenes finales de la asignatura aplicados de 2006-2 a 2018-2** (39 versiones, contando por separado los turnos matutino y vespertino y las versiones A, B y C del mismo día), con 118 problemas distintos.
- El cuaderno trae 7 ejemplos resueltos, 40 ejercicios de examen resueltos y 35 propuestos con su resolución completa, elegidos de los exámenes de 2011-1 en adelante (solo un problema de unidades viene de 2006-2, porque es el único de su tipo). Cada uno indica el examen del que se adaptó; las unidades de cada problema (SI o sistema inglés) son las del enunciado original.
- Las resoluciones son propias. Cuando el valor obtenido no coincide con el de una resolución publicada, la diferencia se anota en el Apéndice C (Fe de erratas).
- Las figuras se redibujaron a partir de los datos de cada enunciado.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.

7. **Ejercicios propuestos**, solo con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E; cada propuesto tiene un enlace a su resolución y cada resolución uno de regreso.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Notación. Se sigue la de las resoluciones publicadas de los exámenes: las unidades van entre corchetes ($F = 200\,[\mathrm{N}]$, $M = 35\,[\mathrm{N \cdot m}]$); los vectores unitarios cartesianos son $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$; una fuerza se escribe como su magnitud por un vector unitario, $\vec{F} = F\,\hat{e}$, y el momento de una fuerza respecto a un punto O es $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$.

Ruta de 5 semanas (unas 10 horas por semana).

- **Cada día:** dos bloques de 60 a 90 minutos, de dos unidades distintas, y 15 minutos de cierre. En el cierre se anotan los errores del día y se elige el primer ejercicio del día siguiente.
- **Cada sábado:** un examen completo de 2 horas (Apéndice B), cronometrado y sin consultar, y su revisión con las resoluciones.

Semana	Unidades
1	2 (partícula) y, de la 3, el momento de una fuerza respecto a un punto y a un eje
2	5 (reacciones) y, de la 4, las cargas distribuidas
3	4 (centroides) y 6 (fricción)
4	3 completa (pares, fuerza-par, simplificación), 1 y repaso de errores
5	Exámenes completos y Apéndice A de memoria

El orden va de lo que más puntos da a lo que menos (véase la Unidad 0); el libro, en cambio, sigue el orden del programa.

Ruta de 2 semanas.

- Unidades 2, 5, 4 y 6, con sus ejercicios de examen resueltos.
- De la Unidad 3, solo el momento respecto a un punto y a un eje.
- Un examen completo cada 3 días.
- El formulario del Apéndice A, todos los días.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional**

(CC BY-NC-SA 4.0): `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** decidir dónde invertir el tiempo. No todos los temas valen lo mismo.

0.1 Cómo es el examen

Según los exámenes finales de 2006-2 a 2018-2:

- **Problemas y duración:** 5 problemas en 2.5 horas hasta 2012-2; 5 problemas en 2 horas de 2013-1 a 2015-2; desde 2016-2, 4 problemas en 2 horas. Cada problema vale lo mismo, salvo que el enunciado indique otra cosa.
- **Plantilla típica:** 1, partícula (Unidad 2) o gravitación (Unidad 1); 2, momentos o sistemas equivalentes (Unidad 3); 3, centroide (Unidad 4); 4, reacciones, a menudo con carga distribuida (Unidad 5); 5, fricción (Unidad 6). Desde 2016-2 el orden cambia, pero los cuatro problemas siguen saliendo de las Unidades 2 a 6.
- **Calificación:** las instrucciones de los exámenes recientes dicen que se califica la claridad del planteamiento y no solo el resultado. Un diagrama de cuerpo libre correcto y las ecuaciones de equilibrio bien escritas valen puntos aunque la aritmética falle.
- **Material:** en los enunciados no se indica si se permite formulario. Conviene confirmarlo con anticipación y, en cualquier caso, saber de memoria el Apéndice A.
- **Unidades:** hay problemas en el SI (N, m, kg) y en el sistema inglés (lb, ft, in). Se trabaja en las unidades del enunciado; no hace falta convertir.
- **Resoluciones publicadas:** escriben las unidades entre corchetes, los vectores con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, y las ecuaciones de equilibrio como $\sum F_x = 0$, $\sum M_A = 0$. Conviene escribir igual.

0.2 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2. Las versiones del mismo día (turnos matutino y vespertino, versiones A, B y C) cuentan como un solo examen, porque son el mismo problema con otros datos. Un problema que combina dos temas (por ejemplo, carga distribuida y reacciones) cuenta en las dos unidades en la columna «Exámenes» y solo en la de su tema principal en «Problemas».

U.	Tema	Exámenes (de 25)	Problemas	Desde 2014-1 (de 13)
5	Equilibrio de cuerpos: reacciones en el plano y en el espacio	**24**	16	**13**
6	Fricción: deslizamiento, volcamiento, cuerpos conectados	**23**	23	12
3	Sistemas equivalentes: momentos, pares, fuerza-par, simplificación	22	27	10
4	Centroides, centros de masa y cargas distribuidas	22	28	11
2	Resultante de fuerzas concurrentes y equilibrio de la partícula	18	19	11
1	Gravitación universal y unidades	6	5	1

Observaciones.

- Las Unidades 3 a 6 salen en casi todos los exámenes. Desde 2014-1, el equilibrio de cuerpos (Unidad 5) está en todos.
- La Unidad 2 es la base de todo lo demás: el diagrama de cuerpo libre y la descomposición de una fuerza en componentes se usan en las Unidades 3, 5 y 6.
- La Unidad 1 solo aparece en 6 exámenes, el último en 2014-1. Basta con la gravitación universal y la conversión de unidades.
- **Los problemas se reciclan:** el mismo planteamiento se repite en distintos semestres con otros datos. Resolver exámenes anteriores es la mejor preparación.

0.3 Orden de estudio por puntos

1. **Unidad 2** (partícula): es corta y es la base del diagrama de cuerpo libre.
2. **Unidad 5** (reacciones): sale en todos los exámenes recientes. Antes, lee de la Unidad 3 el momento de una fuerza respecto a un punto.
3. **Unidad 4** (centroides y cargas distribuidas): una tabla y un procedimiento fijo.
4. **Unidad 6** (fricción): un procedimiento fijo con dos casos (subir y bajar, deslizar o volcar).
5. **Unidad 3** completa: pares, sistema fuerza-par y simplificación.
6. **Unidad 1**, mínima.

Si el tiempo no alcanza, se recorta en este orden:

1. la Unidad 1;
2. el eje central (motor) de la Unidad 3;
3. el centro de masa de láminas dobladas de la Unidad 4.

No conviene recortar:

- el equilibrio de la partícula en el espacio (tres cables);
- el momento de una fuerza respecto a un punto y a un eje;
- el centroide de áreas compuestas;
- las reacciones con carga distribuida;

- la fricción con movimiento inminente.

0.4 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 22 minutos por problema si son cinco y unos 28 si son cuatro.
2. Empieza por el problema que reconozcas mejor; normalmente el centroide o la partícula.
3. En cada problema: sistema de referencia, diagrama de cuerpo libre y ecuaciones generales **antes** de sustituir números.
4. Cada inciso se califica por separado. Plantea la ecuación y sustituye aunque el inciso anterior no haya salido.
5. Reserva 10 minutos al final para revisar unidades, signos y que cada resultado tenga su unidad entre corchetes.

0.5 Formulario de emergencia

El formulario completo de todas las unidades está en el **Apéndice A**. Conviene escribirlo de memoria, desde cero, unos minutos cada día. El Apéndice B trae la lista de lo que vino en cada examen y tres exámenes completos para usar como simulacro.

Unidad 1 · Fundamentos de la mecánica clásica newtoniana: gravitación universal y unidades

↑ Volver al índice

> **Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno conocerá y comprenderá los aspectos básicos de la mecánica clásica newtoniana, así como las partes en que se divide, las leyes que las rigen y las aplicaciones de éstas.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 6 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y solo en 1 de los 13 aplicados desde 2014-1. Cuando sale, es el problema 1.
- **Tiempo:** de 1 a 1.5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1.1 (10 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 1.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve el ejercicio 1.5.1 con cronómetro (15 min).

1.1 Conceptos y expresiones

La mecánica y sus partes. La mecánica clásica newtoniana estudia el reposo y el movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas, con velocidades pequeñas frente a la de la luz. Se divide en *estática* (cuerpos en equilibrio), *cinemática* (descripción del movimiento) y *dinámica* (relación entre fuerzas y movimiento). Sus modelos son la *partícula* (masa sin dimensiones), el *cuerpo rígido* (las distancias entre sus puntos no cambian) y el cuerpo deformable. El resumen histórico, los conceptos fundamentales (espacio, tiempo, masa, fuerza) y las transformaciones de Galileo forman parte del programa, pero casi no se evalúan.

Leyes de Newton.

1. *Inercia:* si la fuerza resultante sobre una partícula es nula, la partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.
2. *Ley fundamental:* $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$. El peso es $W = mg$.
3. *Acción y reacción:* las fuerzas entre dos cuerpos son de igual magnitud, colineales y de sentidos opuestos. En estática, esta ley permite separar los cuerpos y dibujar el diagrama de cuerpo libre de cada uno.

En estática se usa la primera ley: *equilibrio* significa $\sum \vec{F} = \vec{0}$ (y, en un cuerpo rígido, también $\sum \vec{M} = \vec{0}$; véanse las Unidades 2 y 5).

Gravitación universal. Dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r se atraen con una fuerza de magnitud

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad G = 6.67 \times 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}].$$

Una esfera homogénea atrae como si toda su masa estuviera en su centro, así que r se mide *entre centros*.

Peso y aceleración de la gravedad. Sobre la superficie de un planeta de masa M y radio R:

$$W = G\,\frac{Mm}{R^2} = mg \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{GM}{R^2}, \qquad GM = gR^2.$$

A una altura h sobre la superficie, el peso disminuye con el cuadrado de la distancia al centro:

$$W_h = W\left(\frac{R}{R+h}\right)^2, \qquad g_h = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2.$$

La igualdad $GM = gR^2$ permite resolver casi todos los problemas sin conocer G ni M. Para otro planeta con $M_p = a\,M_T$ y $R_p = b\,R_T$ se cumple $g_p = \dfrac{a}{b^2}\,g_T$.

Los enunciados llaman a veces *peso aparente* al peso a cierta altura. La masa no cambia; el peso sí.

Sistemas de unidades. En el SI, las unidades base de la mecánica son el metro, el kilogramo y el segundo; la fuerza es derivada: $1\,[\mathrm{N}] = 1\,[\mathrm{kg\cdot m/s^2}]$. En el sistema inglés gravitacional la fuerza es base: libra [lb], pie [ft] y segundo [s]; la masa es derivada (slug). El kilogramo fuerza es el peso de 1 kg al nivel del mar: $1\,[\mathrm{kgf}] = 9.81\,[\mathrm{N}]$.

Unidad	Equivalencia
1 [ft]	0.3048 [m]
1 [in]	2.54 [cm]
1 [lb]	4.448 [N]
1 [kgf]	9.81 [N]
1 [UA] (unidad astronómica)	1.496×10^8 [km]

Homogeneidad dimensional. Toda ecuación física correcta tiene las mismas dimensiones en cada término. Si una fórmula empírica tiene un coeficiente numérico, ese coeficiente *tiene unidades* y, al cambiar de sistema de unidades, cambia su valor.

1.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
masas de dos astros y la distancia entre ellos	fuerza de atracción, $F = Gm_1m_2/r^2$	1.3.1
«punto entre dos astros en equilibrio»	igualar dos atracciones	1.3.1
«a qué altura», «peso aparente», «el peso disminuye un p por ciento»	peso a una altura	1.3.2
otro planeta con «a veces la masa» y «b veces el radio»	$g_p = (a/b^2)\,g_T$	1.3.2
«deduzca una expresión en otras unidades»	homogeneidad dimensional	1.3.3
«verdadero o falso»	conceptos de varias unidades	1.1

1.3 Procedimientos

Fuerza de atracción y punto de equilibrio entre dos astros

1. Pasa todas las distancias a metros (km $\times 10^3$; UA $\times 1.496 \times 10^{11}$).
2. Fuerza entre dos astros: $F = Gm_1m_2/r^2$, con r entre centros.
3. Punto de equilibrio de una masa m entre dos astros separados d: iguala $Gm_1m/x^2 = Gm_2m/(d-x)^2$; la masa m y G se cancelan:

$$\frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{d}{1+\sqrt{m_2/m_1}}.$$

Peso a una altura y en otro planeta

1. Escribe el peso en la superficie, $W = GMm/R^2$, y a la altura h, $W_h = GMm/(R+h)^2$.
2. Divide una entre otra: $W_h/W = (R/(R+h))^2$. Ya no hacen falta G ni M.
3. Si piden la altura: $h = R\left(\sqrt{W/W_h} - 1\right)$.
4. Otro planeta: $g_p = (a/b^2)\, g_T$; a una altura h sobre él, usa $R_p = bR_T$ en el paso 2.

Cambio de unidades de una fórmula empírica

1. Escribe la fórmula con un coeficiente k y obtén las unidades de k por homogeneidad.
2. Sustituye cada variable en unidades viejas por su equivalente en unidades nuevas ($D_{ft} = D_m/0.3048$, etc.).
3. Agrupa los factores numéricos: ese producto es el nuevo coeficiente.
4. Comprueba con un valor numérico cualquiera que ambas fórmulas dan el mismo resultado.

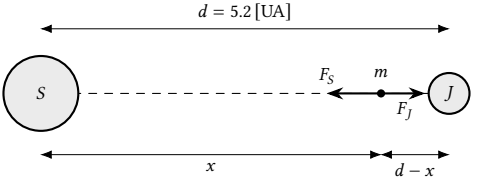
1.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · punto de equilibrio entre el Sol y Júpiter

Basado en: 1er final 2012-2 (matutino), problema 1.

Se ignoran los demás planetas. La distancia media entre Júpiter y el Sol es $d = 5.2\,[\text{UA}]$, con $1\,[\text{UA}] = 14.96 \times 10^7\,[\text{km}]$; las masas son $m_J = 1.899 \times 10^{27}\,[\text{kg}]$ y $m_S = 1.989 \times 10^{30}\,[\text{kg}]$. Determine:

a) la posición, entre Júpiter y el Sol, en la que un cuerpo puntual de masa m queda en equilibrio;
b) la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter, si su diámetro medio es $182\,984\,[\text{km}]$ y $G = 6.67 \times 10^{-11}\,[\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)]$.



Datos. $d = 5.2(14.96 \times 10^7) = 7.779 \times 10^8\,[\text{km}]$; $R_J = 91\,492\,[\text{km}]$.

Planteamiento. En el punto buscado, la atracción del Sol y la de Júpiter tienen igual magnitud y sentidos opuestos. Si x es la distancia al Sol: $G\dfrac{m_S m}{x^2} = G\dfrac{m_J m}{(d-x)^2}$.

Resolución.

1. a) $\dfrac{d-x}{x} = \sqrt{\dfrac{m_J}{m_S}} = \sqrt{\dfrac{1.899\times10^{27}}{1.989\times10^{30}}} = 0.03090.$
2. $x = \dfrac{d}{1.03090} = 7.546\times10^{8}\,[\text{km}]$ del Sol, es decir, $d - x = 2.332\times10^{7}\,[\text{km}]$ de Júpiter.
3. b) $g_J = \dfrac{Gm_J}{R_J^2} = \dfrac{(6.67\times10^{-11})(1.899\times10^{27})}{(9.1492\times10^{7})^2} = 15.13\,[\text{m/s}^2].$

Resultado. a) A 2.33×10^{7} [km] del centro de Júpiter, sobre la recta que une los dos astros; b) $g_J = 15.13\,[\text{m/s}^2]$, unas 1.5 veces la terrestre.

1.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 1.5.1 · altura para un peso dado

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 1

En la superficie terrestre un cuerpo B pesa 981 [kgf]. ¿A qué altura sobre la Tierra debe estar para que la fuerza con que la Tierra lo atrae sea de 600 [kgf]? El radio medio de la Tierra es 6370 [km].

Datos. $W = 981\,[\text{kgf}]$, $W_h = 600\,[\text{kgf}]$, $R = 6370\,[\text{km}]$.

Planteamiento. $W = G\dfrac{Mm}{R^2}$ y $W_h = G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$; al dividir, $\dfrac{W}{W_h} = \left(\dfrac{R+h}{R}\right)^2$.

Resolución. $h = R\left(\sqrt{\dfrac{W}{W_h}} - 1\right) = 6370\left(\sqrt{\dfrac{981}{600}} - 1\right) = 6370(0.27867).$

Resultado. $h = 1775.1\,[\text{km}]$. Las unidades de fuerza (kgf) se cancelan: no hace falta pasarlas a newtons.

Ejercicio 1.5.2 · peso en lo alto de un edificio

Adaptado de: 1er final 2012-2 (vespertino), problema 1

Un cuerpo pesa W al nivel del mar. Con $R = 6370$ [km] para el radio terrestre, determine:

a) la diferencia de su peso si se encuentra en lo alto de un edificio de 800 [m] de altura;
b) a qué altura debe estar para que su peso disminuya un 1 por ciento.

Datos. $R = 6\,370\,000\,[\text{m}]$; a) $h = 800\,[\text{m}]$; b) $W_h = 0.99\,W$.

Planteamiento. $W_h = W\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$ (sección 1.3.2). Como W no es dato, la diferencia se expresa como fracción de W.

Resolución.

1. a) $\dfrac{W_h}{W} = \left(\dfrac{6\,370\,000}{6\,370\,800}\right)^2 = 0.999\,749$, así que $\Delta W = W_h - W = -2.51\times10^{-4}\,W$.

2. b) $\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 = 0.99 \Rightarrow R+h = \dfrac{R}{\sqrt{0.99}}$, de donde $h = R\left(\dfrac{1}{\sqrt{0.99}} - 1\right) = 6370(0.005038)$.

Resultado. a) $\Delta W = -2.51 \times 10^{-4}\, W$: el peso disminuye un 0.025 por ciento; b) $h = 32.09\,[\text{km}]$.

Ejercicio 1.5.3 · fórmula de gasto en otras unidades

Adaptado de: 1er final 2006-2, problema 1

El gasto de descarga de cierta válvula se calcula con la fórmula empírica

$$Q = 5.354\, D^2\sqrt{H},$$

donde Q está en pies cúbicos por segundo [ft^3/s] cuando el diámetro D y la carga H están en pies [ft]. Deduzca la fórmula equivalente para calcular Q en [m^3/s] con D y H en metros. (Es anterior a 2011; se incluye porque es el único problema de homogeneidad dimensional.)

Datos. $1\,[\text{ft}] = 0.3048\,[\text{m}]$.

Planteamiento. Por homogeneidad, las unidades del coeficiente son $\dfrac{\text{ft}^3/\text{s}}{\text{ft}^2 \cdot \text{ft}^{1/2}} = \text{ft}^{1/2}/\text{s}$: el coeficiente cambia al pasar al SI. Se busca $Q_m = k\, D_m^2\sqrt{H_m}$.

Resolución.

1. $Q_m = (0.3048)^3\, Q_{ft}$, $D_{ft} = D_m/0.3048$, $H_{ft} = H_m/0.3048$.
2. Al sustituir:

$$Q_m = (0.3048)^3(5.354)\frac{D_m^2}{(0.3048)^2}\sqrt{\frac{H_m}{0.3048}} = 5.354\sqrt{0.3048}\; D_m^2\sqrt{H_m}.$$

3. $k = 5.354(0.55209) = 2.956$.
4. Comprobación: con $D = H = 1\,[\text{m}] = 3.2808\,[\text{ft}]$, la fórmula original da

$$5.354(3.2808)^2\sqrt{3.2808} = 104.4\,[\text{ft}^3/\text{s}] = 2.956\,[\text{m}^3/\text{s}].$$

Resultado. $Q = 2.956\, D^2\sqrt{H}$, con Q en [m^3/s] y D, H en [m].

1.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 1.6.1 · peso de un astronauta sobre otro planeta

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 1

Un astronauta de 80 [kg] de masa se eleva en una nave a 150 [km] sobre la superficie de un planeta que tiene el doble de la masa de la Tierra y el triple de su radio. Con $R_T = 6370\,[\text{km}]$ y $g_T = 9.81\,[\text{m}/\text{s}^2]$, obtenga:

a) la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta;
b) el peso del astronauta a la altura mencionada.

Resultado: a) $g_p = 2.18\,[\mathrm{m/s^2}]$; b) $W = 171.7\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 1.6.2 · atracción entre la Tierra y Júpiter

Adaptado de: 1er final 2011-1 (versión A), problema 1

La masa de la Tierra es 5.98×10^{24} [kg] y la de Júpiter, 1.9×10^{27} [kg]. Si la distancia media entre sus centros es 628.7×10^{6} [km], determine la magnitud de la fuerza de atracción entre ambos planetas ($G = 6.67 \times 10^{-11}\,[\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}]$).

Resultado: $F = 1.92 \times 10^{18}$ [N].

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 1.6.3 · verdadero o falso

Adaptado de: 1er final 2013-1 (vespertino), problema 1

Indique si cada aseveración es verdadera (V) o falsa (F).

a) La ley de la gravitación universal permite obtener el peso de un cuerpo si se conocen su masa, la constante de gravitación universal y su distancia al centro de la Tierra.
b) El centro de gravedad, el centro de masa y el centroide de un cuerpo siempre coinciden.
c) El teorema de Varignon afirma que el momento de una fuerza respecto al origen es igual a la suma de los momentos de esa fuerza respecto a los ejes cartesianos.
d) Cualquier sistema de fuerzas puede sustituirse por una fuerza y un par colineales.
e) El momento de un par de fuerzas es paralelo a la línea de acción de una de las fuerzas del par.

Resultado: a) V; b) F; c) F; d) F; e) F.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

1.7 Errores frecuentes

1. **Altura en lugar de distancia al centro.** En $F = Gm_1m_2/r^2$, r es la distancia entre centros: $r = R + h$, no h.
2. **Kilómetros en la fórmula con G.** Con G en el SI, las distancias van en metros. En cocientes como $W_h/W = (R/(R+h))^2$ se puede trabajar en kilómetros.
3. **Despeje invertido de la altura.** De $(R/(R+h))^2 = p$ sale $h = R(1/\sqrt{p} - 1)$, no $R(1 - \sqrt{p})$.
4. **Resultados con unidades que no son.** Si W no es dato, la diferencia de peso es una fracción de W, no una fuerza en newtons.
5. **Coeficientes «sin unidades».** El coeficiente de una fórmula empírica tiene unidades: al cambiar de sistema cambia su valor.

1.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,[\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}]$; r entre centros.
- $g = \dfrac{GM}{R^2}$; $GM = gR^2$; $W_h = W\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$; $h = R\left(\sqrt{W/W_h} - 1\right)$.

- Otro planeta: $g_p = \dfrac{a}{b^2}\, g_T$ si $M_p = aM_T$ y $R_p = bR_T$.
- Equilibrio entre dos astros: $x = \dfrac{d}{1+\sqrt{m_2/m_1}}$ (distancia al astro 1).
- Tierra: $R_T = 6370\,[\mathrm{km}]$, $g = 9.81\,[\mathrm{m/s^2}]$, $M_T = 5.98 \times 10^{24}\,[\mathrm{kg}]$.
- $1\,[\mathrm{ft}] = 0.3048\,[\mathrm{m}]$, $1\,[\mathrm{lb}] = 4.448\,[\mathrm{N}]$, $1\,[\mathrm{kgf}] = 9.81\,[\mathrm{N}]$, $1\,[\mathrm{UA}] = 1.496 \times 10^{8}\,[\mathrm{km}]$.

1.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe la ley de la gravitación con símbolos antes de sustituir.
2. Plantea el cociente entre las dos situaciones para cancelar G y M.
3. Cuida que todas las distancias estén en la misma unidad y medidas desde el centro.
4. Comprueba el orden de magnitud: a pocos kilómetros de altura el peso cambia muy poco.

Unidad 2 · Conceptos básicos de la estática: resultante de fuerzas concurrentes y equilibrio de la partícula

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno conocerá y comprenderá aspectos básicos del equilibrio.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 18 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en 11 de los 13 aplicados desde 2014-1. Casi siempre es el problema 1.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad. Es la base del diagrama de cuerpo libre de las Unidades 5 y 6: estúdiala primero.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 (20 min), sobre todo el vector representativo.
  2. Sigue el ejemplo de la sección 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2.5.4 (plano) y 2.5.7 (espacio) con cronómetro (20 min cada uno).

2.1 Conceptos y expresiones

Fuerza. Es la acción de un cuerpo sobre otro; se modela con un vector deslizante: magnitud, dirección, sentido y línea de acción (soporte). En una partícula, todas las fuerzas pasan por el mismo punto: son *concurrentes*. Las fuerzas se clasifican en de contacto y a distancia (como el peso), y en concentradas y distribuidas (Unidad 4); la clasificación casi no se evalúa.

Vector representativo. Si la línea de acción de una fuerza de magnitud F va del punto A al punto B, su vector es

$$\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}, \qquad \hat{e}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(x_B - x_A)\,\hat{\imath} + (y_B - y_A)\,\hat{\jmath} + (z_B - z_A)\,\hat{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

El sentido importa: la tensión de un cable *jala* al cuerpo, así que sobre el punto A el cable AB ejerce una fuerza dirigida de A hacia B.

Componentes. En el plano, si $\vec{F}$ forma el ángulo θ con el eje x: $F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$, $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, $\tan\theta = F_y/F_x$. En el espacio, los *cosenos directores* son

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}, \qquad \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1.$$

El ángulo entre dos fuerzas (o dos cables) sale del producto punto: $\cos\theta = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \dfrac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{F_1 F_2}$.

Resultante de fuerzas concurrentes. Es la suma vectorial

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \Big(\sum F_x\Big)\hat{\imath} + \Big(\sum F_y\Big)\hat{\jmath} + \Big(\sum F_z\Big)\hat{k}.$$

Con solo dos fuerzas en el plano conviene el triángulo de fuerzas: si η es el ángulo *interior* del triángulo (el suplemento del ángulo entre las fuerzas),

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\eta, \qquad \frac{P}{\sin\gamma} = \frac{Q}{\sin\phi} = \frac{R}{\sin\eta}.$$

Equilibrio de la partícula. Una partícula está en equilibrio si la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es nula:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0 \ \ (\text{y } \sum F_z = 0 \text{ en el espacio}).$$

En el plano hay dos ecuaciones (dos incógnitas como máximo); en el espacio, tres. Las ecuaciones se plantean sobre el *diagrama de cuerpo libre* (DCL): la partícula aislada con *todas* las fuerzas que actúan sobre ella.

Teorema de Lami. Si sobre una partícula en equilibrio actúan tres fuerzas, cada una es proporcional al seno del ángulo formado por las otras dos:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3},$$

donde α_i es el ángulo entre las dos fuerzas distintas de F_i. Equivale a la ley de senos en el triángulo de fuerzas, que se cierra porque la resultante es nula.

Elementos que aparecen en los enunciados.

- *Cuerda o cable* ideal: solo trabaja a tensión, a lo largo de su eje.
- *Polea* ideal (sin fricción): la tensión es la misma a ambos lados.
- *Resorte* lineal: $F = k\,\delta = k\,(L - L_0)$, con L_0 la longitud no deformada.
- *Peso:* $W = mg$, vertical hacia abajo; con $g = 9.81\ [\mathrm{m/s^2}]$, 1 [kg] pesa 9.81 [N].

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«la línea de acción pasa por los puntos…», coordenadas de dos puntos	vector representativo	2.3.1
«determine la resultante», «magnitud y dirección»	resultante de concurrentes	2.3.2
dos fuerzas en el plano con sus ángulos	triángulo de fuerzas (cosenos y senos)	2.3.2
«ángulo formado entre los cables»	producto punto	2.3.1
cuerpo que cuelga de dos cuerdas, nudo, anillo	equilibrio en el plano	2.3.3
dos nudos unidos por una cuerda	equilibrio de cada nudo, en cadena	2.3.3
«resorte», «longitud no deformada», k	equilibrio más $F = k\delta$	2.3.3
«cuelga de tres cables», coordenadas de los anclajes	equilibrio en el espacio	2.3.4

2.3 Procedimientos

Vector representativo y ángulo entre dos líneas

1. Identifica el punto de aplicación (A) y otro punto de la línea de acción (B), en el sentido de la fuerza.
2. Calcula $\overrightarrow{AB} = B - A$ y su módulo. Busca números «bonitos»: los exámenes usan ternas como $(2, 3, 6)$ de módulo 7, $(3, 4, 12)$ de módulo 13 o $(12, 3, 4)$ de módulo 13.
3. $\vec{F} = \dfrac{F}{|\overrightarrow{AB}|}\,\overrightarrow{AB}$.
4. Ángulo entre dos cables que salen de A: $\cos\theta = \hat{e}_{AB} \cdot \hat{e}_{AC}$.

Resultante de fuerzas concurrentes

1. Escribe cada fuerza en forma vectorial (2.3.1, o $F\cos\theta$ y $F\sin\theta$ en el plano).
2. Haz una tabla con columnas F_x, F_y, F_z y suma cada columna.
3. Magnitud: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.
4. Dirección: en el plano, $\theta = \tan^{-1}(R_y/R_x)$ dibujando el cuadrante; en el espacio, los ángulos directores $\theta_i = \cos^{-1}(R_i/R)$.
5. Con dos fuerzas en el plano también sirve el triángulo: ley de cosenos para R y ley de senos para su dirección.

Equilibrio de la partícula en el plano

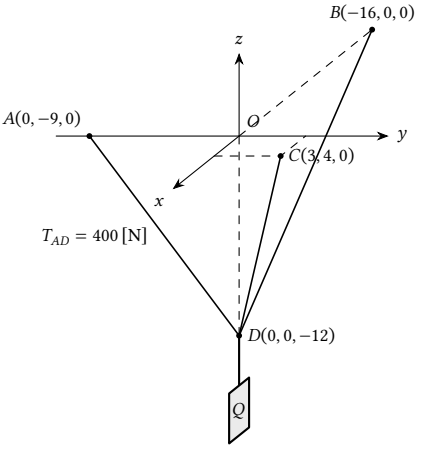
1. Elige el punto en equilibrio (nudo, anillo, centro del cuerpo) y dibuja su DCL con todas las fuerzas; el peso de lo que cuelga es la tensión de la cuerda vertical.
2. Si hay varios nudos, empieza por el que tenga solo dos incógnitas; la tensión de la cuerda que los une pasa al siguiente nudo con sentido contrario.
3. Con tres fuerzas, usa Lami (o la ley de senos en el triángulo de fuerzas). Con más, usa $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.
4. Con resorte: obtén su fuerza del equilibrio y después $\delta = F/k$, $L = L_0 + \delta$.
5. Comprueba: todas las tensiones deben salir positivas.

Equilibrio de la partícula en el espacio

1. Escribe las coordenadas del punto de unión y de cada anclaje.
2. Escribe cada tensión como $T\,\hat{e}$ (2.3.1), con $\hat{e}$ dirigido del punto de unión hacia el anclaje; el peso es $-W\hat{k}$.
3. Tabla de componentes y $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$: tres ecuaciones, tres incógnitas.
4. Resuelve primero la ecuación que tenga una sola incógnita; suele haber una.

2.4 Ejemplo resuelto

> **Ejemplo resuelto · cuerpo que pende de tres cuerdas**
>
> *Basado en: 1er final 2018-2 (matutino), problema 2.*
>
> El cuerpo Q cuelga del punto $D(0, 0, -12)$, unido por tres cuerdas a los puntos $A(0, -9, 0)$, $B(-16, 0, 0)$ y $C(3, 4, 0)$ del techo; las coordenadas están en metros. Si la tensión de la cuerda AD es de 400 [N], determine el peso de Q.



Datos. $T_{AD} = 400\,[\mathrm{N}]$; $D(0,0,-12)$, $A(0,-9,0)$, $B(-16,0,0)$, $C(3,4,0)$ [m].
Planteamiento. Partícula D en el espacio. Vectores de D hacia cada anclaje: $\overrightarrow{DA} = (0,-9,12)$, de módulo 15; $\overrightarrow{DB} = (-16,0,12)$, de módulo 20; $\overrightarrow{DC} = (3,4,12)$, de módulo 13. El peso es $-W\hat{k}$.
Resolución.
1. Tensiones en forma vectorial:

$$\vec{T}_{AD} = \tfrac{400}{15}(0,-9,12) = -240\hat{\jmath} + 320\hat{k}\,[\mathrm{N}],$$

$$\vec{T}_{BD} = \tfrac{T_{BD}}{5}(-4,0,3), \qquad \vec{T}_{CD} = \tfrac{T_{CD}}{13}(3,4,12).$$

2. $\sum F_y = 0$: $-240 + \dfrac{4}{13}T_{CD} = 0 \Rightarrow T_{CD} = 780\,[\mathrm{N}]$.
3. $\sum F_x = 0$: $-\dfrac{4}{5}T_{BD} + \dfrac{3}{13}(780) = 0 \Rightarrow T_{BD} = 225\,[\mathrm{N}]$.
4. $\sum F_z = 0$: $320 + \dfrac{3}{5}(225) + \dfrac{12}{13}(780) - W = 0 \Rightarrow W = 320 + 135 + 720$.

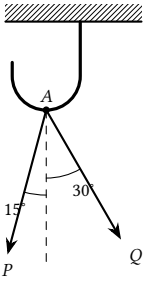
Resultado. $W = 1175\,[\mathrm{N}]$ (con $T_{BD} = 225\,[\mathrm{N}]$ y $T_{CD} = 780\,[\mathrm{N}]$).

2.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 2.5.1 · resultante de dos fuerzas sobre un gancho

Adaptado de: 1er final 2018-2 (matutino), problema 1

Sobre el punto A de un gancho actúan dos fuerzas: $P = 67\,[\mathrm{N}]$, inclinada 15° a la izquierda de la vertical hacia abajo, y $Q = 111\,[\mathrm{N}]$, inclinada 30° a la derecha de la misma vertical. Determine la magnitud y la dirección de la resultante.



Datos. $P = 67$ [N], $Q = 111$ [N]; ángulo entre las fuerzas: $15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$.

Planteamiento. Triángulo de fuerzas: el ángulo interior opuesto a R es $\eta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Se comprueba con componentes (x a la derecha, y hacia arriba).

Resolución.

1. $R = \sqrt{67^2 + 111^2 - 2(67)(111)\cos 135^\circ} = \sqrt{27\,327.6} = 165.31$ [N].
2. Ley de senos: $\sin\gamma = \dfrac{P \sin 135^\circ}{R} = \dfrac{67(0.7071)}{165.31} \Rightarrow \gamma = 16.65^\circ$, ángulo entre $\vec{R}$ y $\vec{Q}$.
3. $\vec{R}$ queda a $30^\circ - 16.65^\circ = 13.35^\circ$ a la derecha de la vertical, es decir, a 76.65° por debajo de la horizontal.
4. Comprobación por componentes:

$$R_x = -67 \sin 15^\circ + 111 \sin 30^\circ = 38.16 \text{ [N]},$$

$$R_y = -67 \cos 15^\circ - 111 \cos 30^\circ = -160.85 \text{ [N]},$$

y $\tan^{-1}(160.85/38.16) = 76.65^\circ$.

Resultado. $R = 165.3$ [N], dirigida hacia abajo y a la derecha, a 76.65° de la horizontal (13.35° a la derecha de la vertical).

Ejercicio 2.5.2 · resultante de tres fuerzas en el espacio

Adaptado de: 1er final 2018-2 (vespertino), problema 1

Tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ parten del origen y se dirigen, respectivamente, hacia los puntos $A(12, 3, 4)$, $B(-8, 8, 4)$ y $C(-8, -9, 12)$, con coordenadas en pies. Sus magnitudes son $F_1 = 260$ [lb], $F_2 = 360$ [lb] y $F_3 = 170$ [lb]. Determine la resultante en forma vectorial.

Datos. $|OA| = \sqrt{144 + 9 + 16} = 13$; $|OB| = \sqrt{64 + 64 + 16} = 12$; $|OC| = \sqrt{64 + 81 + 144} = 17$ [ft].

Planteamiento. $\vec{F}_i = F_i\,\hat{e}_i$ y $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ (sección 2.3.2).

Resolución.

Fuerza [lb]	F_x	F_y	F_z
$\vec{F}_1 = (260/13)(12, 3, 4)$	240	60	80
$\vec{F}_2 = (360/12)(-8, 8, 4)$	−240	240	120
$\vec{F}_3 = (170/17)(-8, -9, 12)$	−80	−90	120
$\vec{R}$	−80	210	320

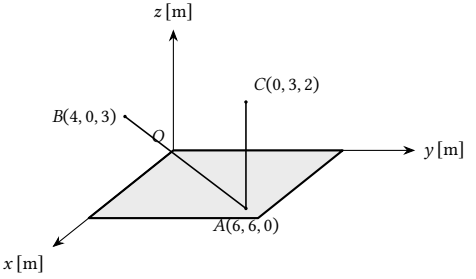
Magnitud: $R = \sqrt{80^2 + 210^2 + 320^2} = 391.0\,[\text{lb}]$; ángulos directores $\theta_x = 101.8^\circ$, $\theta_y = 57.5^\circ$, $\theta_z = 35.1^\circ$.

Resultado. $\vec{R} = -80\hat{\imath} + 210\hat{\jmath} + 320\hat{k}\,[\text{lb}]$, con $R = 391.0\,[\text{lb}]$.

Ejercicio 2.5.3 · ángulo entre dos cables y su resultante

Adaptado de: 1er final 2015-2 (matutino), problema 1

Dos cables sujetan la esquina $A(6, 6, 0)$ de una placa horizontal: el cable AB llega a $B(4, 0, 3)$ y el cable AC a $C(0, 3, 2)$ (coordenadas en metros). Las tensiones son $T_{AB} = 210\,[\text{N}]$ y $T_{AC} = 140\,[\text{N}]$. Determine el ángulo entre los cables y el vector de la resultante de las dos tensiones sobre el punto A.



Datos. $\overrightarrow{AB} = (-2, -6, 3)$, módulo 7; $\overrightarrow{AC} = (-6, -3, 2)$, módulo 7.

Planteamiento. Las tensiones jalan al punto A hacia B y hacia C. Ángulo con el producto punto de los unitarios; resultante como suma.

Resolución.

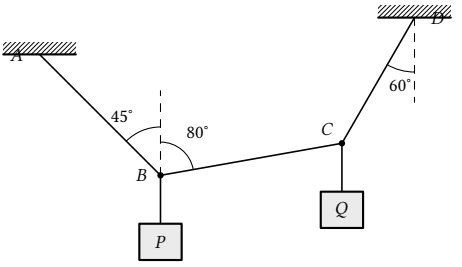
1. $\cos\theta = \hat{e}_{AB} \cdot \hat{e}_{AC} = \dfrac{(-2)(-6) + (-6)(-3) + (3)(2)}{7 \cdot 7} = \dfrac{36}{49} \Rightarrow \theta = 42.72^\circ$.
2. $\vec{T}_{AB} = 30(-2, -6, 3) = -60\hat{\imath} - 180\hat{\jmath} + 90\hat{k}\,[\text{N}]$; $\vec{T}_{AC} = 20(-6, -3, 2) = -120\hat{\imath} - 60\hat{\jmath} + 40\hat{k}\,[\text{N}]$.
3. $\vec{R} = -180\hat{\imath} - 240\hat{\jmath} + 130\hat{k}\,[\text{N}]$; $R = \sqrt{180^2 + 240^2 + 130^2} = 326.96\,[\text{N}]$.

Resultado. $\theta = 42.72^\circ$; $\vec{R} = -180\hat{\imath} - 240\hat{\jmath} + 130\hat{k}\,[\text{N}]$ ($R = 327.0\,[\text{N}]$).

Ejercicio 2.5.4 · dos nudos en cadena

Adaptado de: 1er final 2018-1 (vespertino), problema 1

El cuerpo P, de 80 [N], cuelga del nudo B; el cuerpo Q cuelga del nudo C. La cuerda AB va del nudo B a un techo y forma 45° con la vertical; la cuerda BC forma 80° con la vertical (sube 10° sobre la horizontal hacia C), y la cuerda CD va de C a otro techo formando 60° con la vertical. Determine la tensión de la cuerda BC y el peso de Q.



Datos. $W_P = 80\,[\mathrm{N}]$; direcciones medidas desde el eje x horizontal a la derecha: BA a 135°, BC a 10°, CB a 190°, CD a 30°.

Planteamiento. Primero el nudo B (dos incógnitas: T_{AB} y T_{BC}); después el nudo C (incógnitas T_{CD} y W_Q). En cada nudo actúan tres fuerzas: teorema de Lami.

Resolución.

1. Nudo B. Ángulos entre fuerzas: BA–peso, 135°; BC–peso, 100°; BA–BC, 125°.

$$\frac{T_{BC}}{\sin 135^\circ} = \frac{T_{AB}}{\sin 100^\circ} = \frac{80}{\sin 125^\circ} \Rightarrow T_{BC} = 69.06\,[\mathrm{N}], \quad T_{AB} = 96.18\,[\mathrm{N}].$$

2. Nudo C. Ángulos: CB–CD, 160°; CD–peso, 120°; CB–peso, 80°.

$$\frac{W_Q}{\sin 160^\circ} = \frac{T_{CD}}{\sin 80^\circ} = \frac{T_{BC}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow W_Q = 69.06\,\frac{0.3420}{0.8660} = 27.27\,[\mathrm{N}],$$

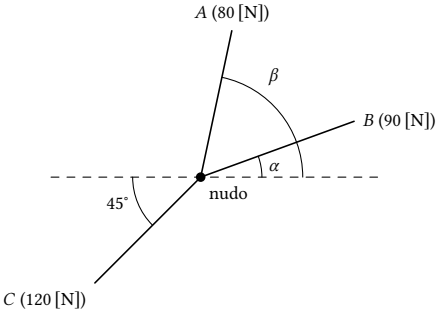
$$T_{CD} = 69.06\,\frac{\sin 80^\circ}{\sin 120^\circ} = 78.53\,[\mathrm{N}].$$

Resultado. $T_{BC} = 69.1\,[\mathrm{N}]$; $W_Q = 27.3\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 2.5.5 · ángulos para que el nudo no se mueva

Adaptado de: 1er final 2018-1 (matutino), problema 1

Tres niños, A, B y C, jalan de tres cuerdas atadas a un mismo nudo, en un plano horizontal. C jala con 120 [N] hacia abajo y a la izquierda, a 45° de la horizontal; B jala con 90 [N] formando un ángulo α sobre la horizontal derecha, y A jala con 80 [N] formando un ángulo β con la misma horizontal derecha ($\beta > \alpha$). ¿Cuáles deben ser α y β para que el nudo permanezca en su lugar?



Datos. $F_C = 120\,[\mathrm{N}]$ a 225°; $F_B = 90\,[\mathrm{N}]$ a α; $F_A = 80\,[\mathrm{N}]$ a β.

Planteamiento. $\vec{F}_A + \vec{F}_B = -\vec{F}_C$: la suma de A y B debe ser una fuerza de 120 [N] a 45°. Se forma el triángulo de lados 90, 80 y 120; θ_1 es el ángulo entre $\vec{F}_B$ y esa suma, y θ_2 el ángulo entre $\vec{F}_A$ y la suma.

Resolución.

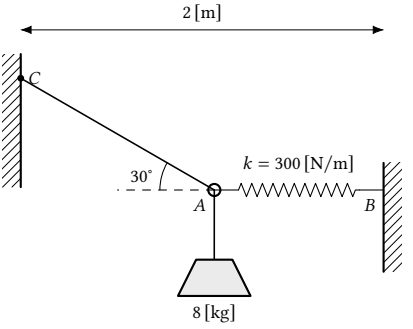
1. Ley de cosenos: $80^2 = 120^2 + 90^2 - 2(120)(90)\cos\theta_1 \Rightarrow \cos\theta_1 = 0.7454$, $\theta_1 = 41.81^\circ$.
2. Ley de senos: $\sin\theta_2 = \dfrac{90\sin 41.81^\circ}{80} = 0.7500 \Rightarrow \theta_2 = 48.59^\circ$.
3. $\alpha = 45^\circ - \theta_1 = 3.19^\circ$ y $\beta = 45^\circ + \theta_2 = 93.59^\circ$.
4. Comprobación: $80(\cos 93.59^\circ, \sin 93.59^\circ) + 90(\cos 3.19^\circ, \sin 3.19^\circ) = (84.85, 84.85)$, que es $120(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$.

Resultado. $\alpha = 3.2^\circ$ y $\beta = 93.6^\circ$ (la cuerda de A queda casi vertical). La solución simétrica respecto a la recta de 45° intercambia las posiciones de las dos cuerdas; la figura, con B por debajo de A, la descarta.

Ejercicio 2.5.6 · lámpara sostenida por un cable y un resorte

Adaptado de: 1er final 2015-1 (vespertino), problema 1

Una lámpara de 8 [kg] cuelga del anillo A. Del anillo salen un cable AC, que sube hacia la pared izquierda formando 30° con la horizontal, y un resorte horizontal AB, unido a la pared derecha. Las paredes están separadas 2 [m]. El resorte tiene longitud no deformada 0.40 [m] y rigidez $k = 300\,[\mathrm{N/m}]$. Determine la longitud que debe tener el cable AC.



Datos. $W = 8(9.81) = 78.48\,[\mathrm{N}]$; $L_0 = 0.40\,[\mathrm{m}]$; $k = 300\,[\mathrm{N/m}]$; separación $2\,[\mathrm{m}]$.

Planteamiento. Equilibrio del anillo A: tensión del cable T a 150°, fuerza del resorte F_e horizontal hacia B, peso hacia abajo. Después, alargamiento del resorte y geometría.

Resolución.

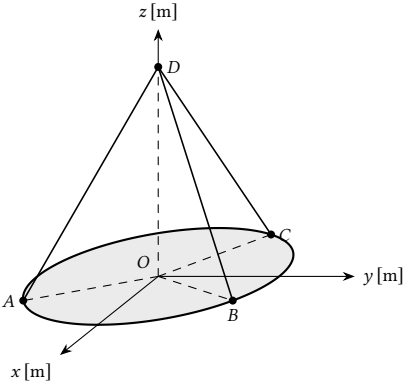
1. $\sum F_y = 0$: $T \sin 30^\circ - 78.48 = 0 \Rightarrow T = 156.96\,[\mathrm{N}]$.
2. $\sum F_x = 0$: $F_e - T\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F_e = 135.93\,[\mathrm{N}]$.
3. $\delta = F_e/k = 0.4531\,[\mathrm{m}]$, así que $AB = 0.40 + 0.4531 = 0.8531\,[\mathrm{m}]$.
4. Proyección horizontal de AC: $2 - 0.8531 = 1.1469\,[\mathrm{m}]$; $L_{AC} = \dfrac{1.1469}{\cos 30^\circ}$.

Resultado. $L_{AC} = 1.32\,[\mathrm{m}]$ (su proyección horizontal es de $1.15\,[\mathrm{m}]$).

Ejercicio 2.5.7 · placa circular colgada de tres cables

Adaptado de: 1er final 2014-2 (matutino), problema 1

Una placa circular homogénea y horizontal, con centro en el origen O, cuelga de tres cables de igual longitud que salen de los puntos A, B y C de su borde y se unen en un soporte D situado sobre O. Cada cable forma 30° con la vertical. Vistos desde arriba, OA forma 60° con el eje x (del lado de y negativa), OB forma 30° con el eje y (entre los ejes x y y positivos) y OC forma 60° con el eje y (del lado de x negativa). Si la tensión del cable AD es de 288 [N], determine las tensiones de los cables BD y CD y el peso de la placa.



Datos. Direcciones horizontales de OA, OB, OC medidas desde el eje x: -60°, 60°, 150°. $T_{AD} = 288\,[\mathrm{N}]$.

Planteamiento. Partícula D. Cada cable jala a D hacia su punto del borde: componente horizontal $T\sin 30^\circ = T/2$ dirigida de O hacia el punto, y componente vertical $T\cos 30^\circ$ hacia abajo. Sobre D actúa además la fuerza W del soporte hacia arriba, igual al peso de la placa.

Resolución.

1. Unitarios de D hacia cada punto:

$$\hat{e}_A = \left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \hat{e}_B = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \hat{e}_C = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{4}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. $\sum F_x = 0$: $72 + \frac{1}{4}T_{BD} - \frac{\sqrt{3}}{4}T_{CD} = 0$.
3. $\sum F_y = 0$: $-72\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}T_{BD} + \frac{1}{4}T_{CD} = 0$.
4. Al resolver: $T_{BD} = 144\,[\mathrm{N}]$ y $T_{CD} = 249.4\,[\mathrm{N}]$.
5. $\sum F_z = 0$: $W = \frac{\sqrt{3}}{2}(288 + 144 + 249.4) = 590.1\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. $T_{BD} = 144\,[\mathrm{N}]$, $T_{CD} = 249.4\,[\mathrm{N}]$, $W = 590.1\,[\mathrm{N}]$.

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 2.6.1 · tres niños y un carrito

Adaptado de: 1er final 2012-1 (matutino), problema 1

Tres niños jalan, en un plano horizontal, tres cuerdas atadas a un carrito que permanece en reposo. El primero jala con 20 [N] hacia el oeste y el segundo con 15 [N] en una dirección a 30° del norte hacia el este. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza del tercer niño.

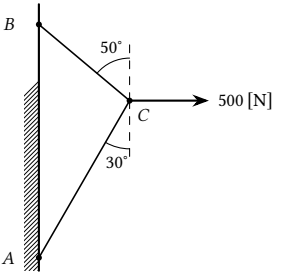
Resultado: $F = 18.03\,[\mathrm{N}]$, a 46.1° al sur del este (rumbo S 43.9° E).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 2.6.2 · dos cuerdas atadas a un muro

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 1

Dos cuerdas se amarran en el punto C y sus otros extremos se fijan a un muro vertical: la cuerda CB sube hacia el muro formando 50° con la vertical y la cuerda CA baja hacia el muro formando 30° con la vertical. En C se aplica una fuerza horizontal de 500 [N] que se aleja del muro. Determine la tensión en cada cuerda.



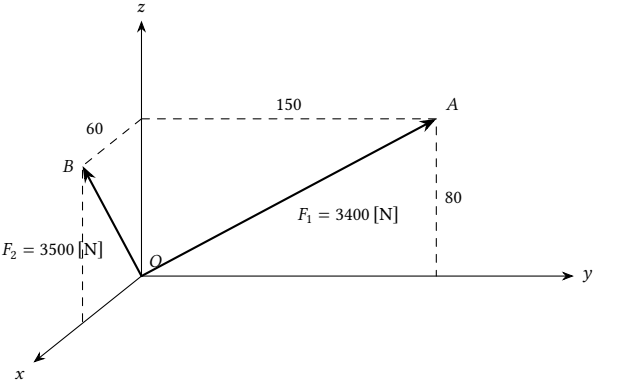
Resultado: $T_{CA} = 326.4$ [N]; $T_{CB} = 439.7$ [N].

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.3 · resultante de dos fuerzas en el espacio

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 1

Dos fuerzas parten del origen O: $F_1 = 3400$ [N] hacia el punto $A(0, 150, 80)$ y $F_2 = 3500$ [N] hacia el punto $B(60, 0, 80)$, con coordenadas en milímetros. Determine la resultante en forma vectorial.



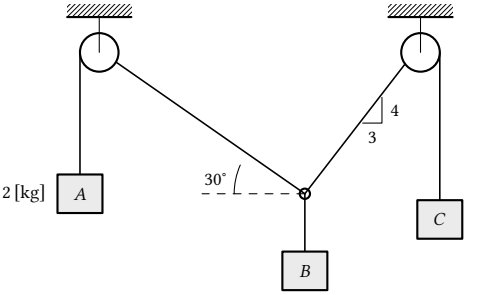
Resultado: $\vec{R} = 2100\hat{\imath} + 3000\hat{\jmath} + 4400\hat{k}$ [N] ($R = 5724.5$ [N]).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.4 · cuerpos colgados de poleas

Adaptado de: 2° final 2018-2, problema 2

Los cuerpos están en reposo. El cuerpo A, de 2 [kg], cuelga de una cuerda que pasa por una polea fija y baja hasta un anillo, formando 30° con la horizontal. Del anillo cuelga el cuerpo B, y de él sale otra cuerda que sube con pendiente $4:3$ (4 vertical por 3 horizontal) hasta una segunda polea fija y baja hasta el cuerpo C. Las poleas no tienen fricción. Calcule los pesos de B y C.



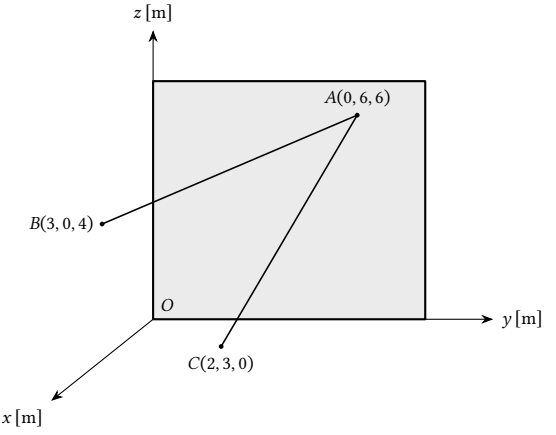
Resultado: $W_B = 32.5$ [N]; $W_C = 28.3$ [N].

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.5 · ancla en un muro

Adaptado de: 1er final 2015-2 (vespertino), problema 1

El ancla $A(0, 6, 6)$ está en un muro contenido en el plano yz. De ella salen el cable AB, hacia $B(3, 0, 4)$, con tensión de 210 [N], y el cable AC, hacia $C(2, 3, 0)$, con tensión de 245 [N] (coordenadas en metros). Determine el ángulo entre los cables y el vector de la resultante de las dos tensiones sobre el ancla.



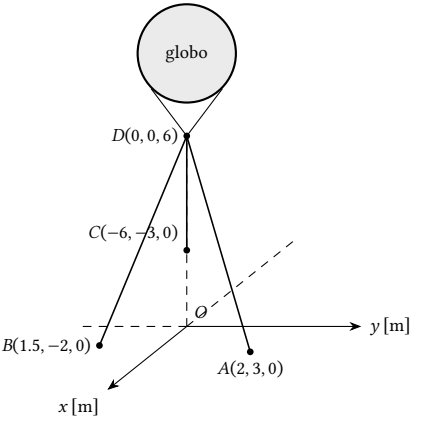
Resultado: $\theta = 42.72^{\circ}$; $\vec{R} = 160\hat{\imath} - 285\hat{\jmath} - 270\hat{k}\,[\mathrm{N}]$ ($R = 423.9\,[\mathrm{N}]$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.6 · globo amarrado con tres cables

Adaptado de: 1er final 2014-2 (vespertino), problema 1

Un globo de aire caliente está sujeto en $D(0, 0, 6)$ por tres cables amarrados a los puntos $A(2, 3, 0)$, $B(1.5, -2, 0)$ y $C(-6, -3, 0)$ del suelo (coordenadas en metros). La tensión del cable BD es de $1.5\,[\mathrm{kN}]$ y el empuje ascendente del globo es de $6\,[\mathrm{kN}]$. Determine las tensiones de los cables AD y CD y el peso del globo.



Resultado: $T_{AD} = 2.22\,[\mathrm{kN}]$; $T_{CD} = 1.47\,[\mathrm{kN}]$; $W = 1.73\,[\mathrm{kN}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

2.7 Errores frecuentes

1. **Vector al revés.** La tensión jala al cuerpo: sobre el punto A, la fuerza del cable AB va de A hacia B. Si se escribe $A - B$, todas las tensiones salen negativas.
2. **Olvidar normalizar.** $\vec{F} = F\,\overrightarrow{AB}$ (sin dividir entre el módulo) da una fuerza con la magnitud equivocada.
3. **Ángulo equivocado en la ley de cosenos.** En $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\eta$, η es el ángulo *interior* del triángulo, el suplemento del ángulo entre las fuerzas.
4. **Ángulos medidos desde la vertical.** Si el dibujo da el ángulo con la vertical, el seno y el coseno se intercambian; conviene pasar todo a ángulos desde el eje x.
5. **Peso en kilogramos.** Si el dato es una masa, $W = mg$; 10 [kg] pesan 98.1 [N].
6. **Resorte:** $F = k\,(L - L_0)$, con el alargamiento, no con la longitud total.
7. **Respuesta incompleta.** Si piden la longitud de un cable inclinado, la proyección horizontal no es la respuesta.
8. **Fuerzas olvidadas en el DCL.** Empuje de un globo, fuerza de un resorte, tensión de la cuerda que une dos nudos: todo lo que toca a la partícula entra en el diagrama.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}$, $\hat{e}_{AB} = \dfrac{B - A}{|B - A|}$.
- $F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$; $\cos\theta_x = F_x/F$, etc.; $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$.
- Ángulo entre dos fuerzas: $\cos\theta = \dfrac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{F_1 F_2}$.
- $\vec{R} = \sum \vec{F}$; $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\eta$; $\dfrac{P}{\sin\gamma} = \dfrac{Q}{\sin\phi} = \dfrac{R}{\sin\eta}$.
- Equilibrio: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$.
- Lami: $\dfrac{F_1}{\sin\alpha_1} = \dfrac{F_2}{\sin\alpha_2} = \dfrac{F_3}{\sin\alpha_3}$.
- Resorte: $F = k(L - L_0)$. Polea ideal: misma tensión a ambos lados. $W = mg$.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja el DCL de la partícula con los ejes y todas las fuerzas, aunque el enunciado ya traiga figura.
2. Escribe cada fuerza en forma vectorial y ordena las componentes en una tabla.
3. Plantea las ecuaciones de equilibrio y resuelve primero la que tenga una sola incógnita.
4. Comprueba que las tensiones salgan positivas y sustituye en la ecuación que no usaste.
5. Escribe el resultado con unidades y, si piden dirección, con el ángulo y su referencia.

Unidad 3 · Sistemas equivalentes de fuerzas: momentos, pares y reducción

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará los principios básicos de la mecánica clásica para la obtención de sistemas equivalentes de fuerzas.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 22 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en 10 de los 13 aplicados desde 2014-1. Suele ser el problema 2.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y memoriza el determinante del momento (20 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve con cronómetro los ejercicios 3.5.1 (momento respecto a punto y eje), 3.5.4 (fuerza-par), 3.5.6 (¿una sola fuerza?) y 3.5.8 (fuerzas paralelas), 20 min cada uno.

3.1 Conceptos y expresiones

Vector representativo de una fuerza

Una fuerza de magnitud F cuya línea de acción va del punto A al punto B se escribe

$$\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}, \qquad \hat{e}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},$$

$$\hat{e}_{AB} = \frac{(x_B - x_A)\,\hat{\imath} + (y_B - y_A)\,\hat{\jmath} + (z_B - z_A)\,\hat{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

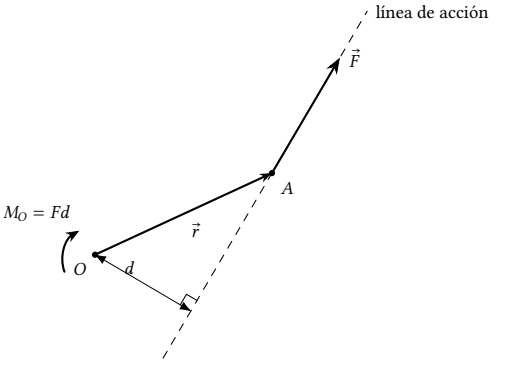
El sentido importa: «actúa de D hacia B» es $\hat{e}_{DB}$, no $\hat{e}_{BD}$.

Momento de una fuerza respecto a un punto

El momento de $\vec{F}$ respecto al punto O es

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

donde $\vec{r}$ va **de O a cualquier punto** de la línea de acción de $\vec{F}$. Su magnitud es $M_O = F\,d$, con d la distancia perpendicular de O a la línea de acción; su dirección es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$ (regla de la mano derecha).



En el plano xy el momento solo tiene componente z:

$$M_O = x\,F_y - y\,F_x \qquad \text{(positivo en sentido antihorario).}$$

Teorema de Varignon. El momento de la resultante de fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada fuerza: $\vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots)=\vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2+\cdots$. Sirve para descomponer una fuerza en componentes fáciles y sumar sus momentos.

Momento de una fuerza respecto a un eje

El momento de $\vec{F}$ respecto al eje que pasa por A y C es la proyección del momento respecto a cualquier punto del eje:

$$M_{AC} = \hat{e}_{AC}\cdot\left(\vec{r}_A\times\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \qquad \vec{M}_{AC} = M_{AC}\,\hat{e}_{AC}.$$

Es un escalar con signo (el signo dice si gira a favor o en contra de $\hat{e}_{AC}$); si piden el vector, se multiplica por $\hat{e}_{AC}$. Es cero si la fuerza corta al eje o es paralela a él.

Par de fuerzas

Dos fuerzas de igual magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un **par**. Su resultante es cero y su momento es el mismo respecto a **cualquier** punto:

$$\vec{M} = \vec{r}_{B/A}\times\vec{F}, \qquad M = F\,d,$$

con $\vec{r}_{B/A}$ de un punto de la línea de $-\vec{F}$ a un punto de la línea de $\vec{F}$, y d la distancia entre las dos líneas. El momento de un par es un **vector libre**: perpendicular al plano del par, no a las fuerzas. Dos pares son **equivalentes** si tienen el mismo vector momento; varios pares se suman como vectores.

Sistemas equivalentes y sistema fuerza-par

Dos sistemas de fuerzas son **equivalentes** si tienen la misma resultante y el mismo momento respecto a un mismo punto (y entonces respecto a todos):

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i, \qquad \vec{M}_O^R = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j.$$

Cualquier sistema se reduce a un **sistema fuerza-par** en un punto P: la fuerza $\vec{R}$ aplicada en P y el par $\vec{M}_P = \sum \vec{r}_{i/P} \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j$. Al cambiar de punto, $\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{r}_{P/Q} \times \vec{R}$.

Sistema más simple

Con $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$ calculados, el sistema más simple equivalente depende de dos pruebas:

Condición	Sistema más simple
$\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$	Equilibrio (sistema nulo)
$\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$	Un par de momento $\vec{M}_O$
$\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$	Una sola fuerza $\vec{R}$, con línea de acción por $\vec{r}$ tal que $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$
$\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$	Un **motor** (fuerza y par colineales) sobre el eje central

Los sistemas **coplanares** y los de **fuerzas paralelas** siempre cumplen $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$: si $\vec{R} \neq \vec{0}$ se reducen a una sola fuerza.

Motor y eje central. Si $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$, el par paralelo a $\vec{R}$ es

$$\vec{M}_{\parallel} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2}\, \vec{R},$$

que es el momento mínimo del sistema. El eje central pasa por el punto $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$ y tiene la dirección de $\vec{R}$: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{R}$. De forma equivalente, se plantea $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\parallel}$ con $\vec{r} = (x, y, z)$.

Fuerzas paralelas. Si todas las fuerzas son paralelas al eje y (por ejemplo, pesos), la resultante es $R = \sum F_i$ y su línea de acción cruza el plano xz en

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i\, x_i}{\sum F_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum F_i\, z_i}{\sum F_i}.$$

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«momento de la fuerza respecto al punto (origen, A)»	$\vec{r} \times \vec{F}$	3.3.1
«momento respecto al eje AC», «respecto a la recta que pasa por…»	proyección $\hat{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$	3.3.2
«compruebe el teorema de Varignon», «suma de los momentos»	Varignon	3.3.1
«par de fuerzas», «par equivalente», «distancia entre las líneas de acción»	momento de un par	3.3.3
«reemplace por un sistema fuerza-par en E»	sistema fuerza-par	3.3.4
«los sistemas A y B son equivalentes; determine…»	igualar $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$	3.3.4
«sistema más simple», «demuestre que se reduce a una sola fuerza»	pruebas de $\vec{R}$ y $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$	3.3.5
«motor», «eje central»	reducción general	3.3.6
pesos o fuerzas verticales sobre una placa, «ubicación de la resultante»	fuerzas paralelas	3.3.7

3.3 Procedimientos

Momento respecto a un punto

1. Escribe las coordenadas de los puntos que se necesitan.
2. Vector de la fuerza: $\vec{F} = F\,\hat{e}$ con el segmento dirigido de su línea de acción.
3. $\vec{r}$ del punto de momentos a **cualquier** punto de la línea de acción (elige el más sencillo).
4. Desarrolla el determinante $\vec{r} \times \vec{F}$ fila por fila, con unidades ([N · m], [lb · ft]).
5. En el plano basta $M_O = xF_y - yF_x$; si hay varias fuerzas, suma (Varignon).

Momento respecto a un eje

1. Unitario del eje: $\hat{e}_{AC} = \overrightarrow{AC}/|\overrightarrow{AC}|$.
2. $\vec{r}$ de un punto del eje (A o C) a un punto de la línea de acción de $\vec{F}$.
3. $M_{AC} = \hat{e}_{AC} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$ (triple producto escalar, determinante de 3×3).
4. Si piden el vector: $\vec{M}_{AC} = M_{AC}\,\hat{e}_{AC}$. Si piden la magnitud: $|M_{AC}|$.

Momento de un par

1. Identifica las dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ y un punto de cada línea de acción.
2. $\vec{M} = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}$, con $\vec{r}_{B/A}$ del punto de $-\vec{F}$ al punto de $\vec{F}$.
3. Distancia entre las líneas: $d = M/F$. Para varios pares, suma los vectores momento.

Sistema fuerza-par y sistemas equivalentes

1. Escribe cada fuerza como vector y su punto de aplicación.
2. $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$.
3. $\vec{M}_P = \sum \vec{r}_{i/P} \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j$ (los pares se suman tal cual).

4. Si dos sistemas son equivalentes: iguala $\vec{R}_A = \vec{R}_B$ y $\vec{M}_{O,A} = \vec{M}_{O,B}$ componente a componente y despeja las incógnitas.

Sistema más simple

1. Calcula $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$ (respecto al origen).
2. Aplica las pruebas de la tabla de la sección 3.1.
3. Si es una sola fuerza, plantea $(x, y, z) \times \vec{R} = \vec{M}_O$: salen ecuaciones dependientes (es una recta); fija una coordenada (por ejemplo $z = 0$) y obtén el punto.

Motor y eje central

1. $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$; comprueba que $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$.
2. Momento del motor: $\vec{M}_{\parallel} = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} \vec{R}$.
3. Eje central: punto $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$ y dirección $\vec{R}$. Escribe la recta en forma simétrica $\dfrac{x - x_0}{R_x} = \dfrac{y - y_0}{R_y} = \dfrac{z - z_0}{R_z}$.

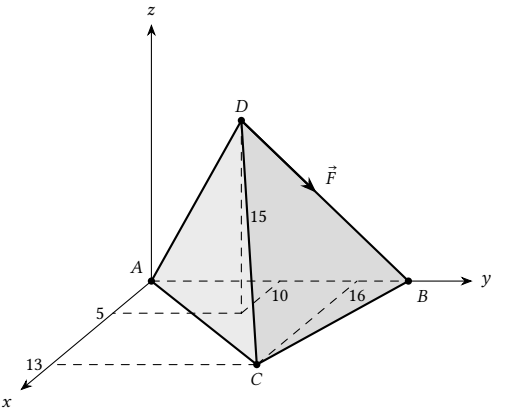
Fuerzas paralelas

1. Elige el eje paralelo a las fuerzas (el vertical) y suma las magnitudes con signo: $R = \sum F_i$.
2. Momentos respecto a los dos ejes horizontales que pasan por el origen.
3. Coordenadas de la línea de acción: $\bar{x} = \sum F_i x_i / R$, $\bar{z} = \sum F_i z_i / R$.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · momento respecto a un punto y a un eje

Basado en: 1er final 2018-1 (vespertino), problema 2.
Una fuerza $\vec{F}$ de 80 [lb] actúa a lo largo de la arista DB del tetraedro de la figura, de D hacia B. Los vértices son $A(0, 0, 0)$, $B(0, 20, 0)$, $C(13, 16, 0)$ y $D(5, 10, 15)$, en pies. Determine: a) el momento de $\vec{F}$ respecto al punto A; b) la magnitud del momento de $\vec{F}$ respecto al eje AC.



Datos. $F = 80\,[\text{lb}]$; $\overrightarrow{DB} = -5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} - 15\hat{k}\,[\text{ft}]$, $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{350} = 18.708\,[\text{ft}]$.
Planteamiento. $\vec{F} = F\,\hat{e}_{DB}$; $\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$ (el punto B está sobre la línea de acción); $M_{AC} = \hat{e}_{AC} \cdot \vec{M}_A$.
Resolución.

$$\vec{F} = \frac{80}{18.708}(-5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} - 15\hat{k}) = -21.38\hat{\imath} + 42.76\hat{\jmath} - 64.14\hat{k}\,[\text{lb}].$$

a) Con $\vec{r}_{AB} = 20\hat{\jmath}\,[\text{ft}]$:

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 20 & 0 \\ -21.38 & 42.76 & -64.14 \end{vmatrix} = -1282.9\,\hat{\imath} + 427.6\,\hat{k}\,[\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

b) $\overrightarrow{AC} = 13\hat{\imath} + 16\hat{\jmath}$, $|\overrightarrow{AC}| = 20.616\,[\text{ft}]$, así que $\hat{e}_{AC} = 0.6306\,\hat{\imath} + 0.7761\,\hat{\jmath}$ y

$$M_{AC} = \hat{e}_{AC} \cdot \vec{M}_A = (0.6306)(-1282.9) + (0.7761)(0) + (0)(427.6) = -809.0\,[\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

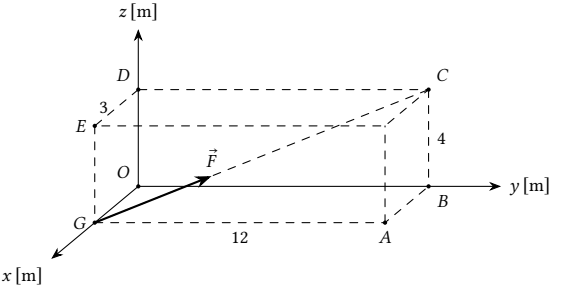
Resultado. a) $\vec{M}_A = -1282.9\,\hat{\imath} + 427.6\,\hat{k}\,[\text{lb}\cdot\text{ft}]$; b) $|M_{AC}| = 809\,[\text{lb}\cdot\text{ft}]$ (el signo negativo indica que gira en sentido contrario a $\hat{e}_{AC}$).

3.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 3.5.1 · momento respecto al origen y a un eje

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 2

La caja de la figura mide 3 [m] en x, 12 [m] en y y 4 [m] en z. La fuerza $\vec{F}$, de magnitud 130 [N], actúa del vértice $G(3, 0, 0)$ hacia el vértice $C(0, 12, 4)$. Determine: a) el momento de $\vec{F}$ respecto al origen; b) el momento de $\vec{F}$ respecto al eje que pasa por O y por $A(3, 12, 0)$.



Datos. $F = 130\,[\mathrm{N}]$; $\overrightarrow{GC} = -3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}\,[\mathrm{m}]$, $|\overrightarrow{GC}| = 13\,[\mathrm{m}]$.
Planteamiento. $\vec{F} = F\,\hat{e}_{GC}$; $\vec{r} = \overrightarrow{OG}$; $M_{OA} = \hat{e}_{OA} \cdot \vec{M}_O$.
Resolución. $\vec{F} = \frac{130}{13}(-3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}) = -30\hat{\imath} + 120\hat{\jmath} + 40\hat{k}\,[\mathrm{N}]$.
a) Con $\vec{r} = 3\hat{\imath}\,[\mathrm{m}]$:

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ -30 & 120 & 40 \end{vmatrix} = (0)\hat{\imath} - (3 \cdot 40)\hat{\jmath} + (3 \cdot 120)\hat{k} = -120\,\hat{\jmath} + 360\,\hat{k}\,[\mathrm{N \cdot m}].$$

b) $\hat{e}_{OA} = \dfrac{3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}}{\sqrt{153}} = 0.2425\,\hat{\imath} + 0.9701\,\hat{\jmath}$, así que

$$M_{OA} = \frac{(3)(0) + (12)(-120) + (0)(360)}{\sqrt{153}} = -116.42\,[\mathrm{N \cdot m}],$$

$$\vec{M}_{OA} = M_{OA}\,\hat{e}_{OA} = -28.24\,\hat{\imath} - 112.94\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N \cdot m}].$$

Resultado. a) $\vec{M}_O = -120\,\hat{\jmath} + 360\,\hat{k}\,[\mathrm{N \cdot m}]$; b) $\vec{M}_{OA} = -28.24\,\hat{\imath} - 112.94\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N \cdot m}]$, de magnitud $116.42\,[\mathrm{N \cdot m}]$.

Ejercicio 3.5.2 · teorema de Varignon

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 1

Se tienen los puntos $P_1(5, 1, -9)$, $P_2(0, 4, 2)$, $Q(1, 2, 3)$ y $T(1, -1, -11)$, en metros, y las fuerzas $\vec{F}_1 = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 12\hat{k}\,[\mathrm{N}]$ y $\vec{F}_2 = -4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}\,[\mathrm{N}]$, cuyas líneas de acción pasan por P_1 y P_2. Determine: a) la suma de los momentos de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ respecto a Q; b) compruebe que esa suma es igual al momento de la resultante respecto a Q, si la línea de acción de la resultante pasa por T.
Datos. $\vec{r}_{P_1/Q} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 12\hat{k}$, $\vec{r}_{P_2/Q} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{r}_{T/Q} = -3\hat{\jmath} - 14\hat{k}\,[\mathrm{m}]$.
Planteamiento. $\vec{M}_Q = \sum \vec{r}_{i/Q} \times \vec{F}_i$; luego $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y $\vec{r}_{T/Q} \times \vec{R}$.
Resolución. a)

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -1 & -12 \\ 3 & -4 & -12 \end{vmatrix} = -36\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} - 13\hat{k}, \qquad \vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 10\hat{k},$$

de donde $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = -42\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$.
b) $\vec{R} = -\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 14\hat{k}\,[\mathrm{N}]$ y

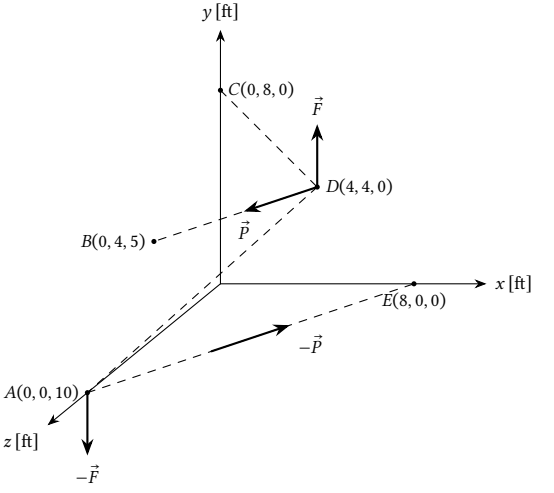
$$\vec{r}_{T/Q}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -3 & -14 \\ -1 & -6 & -14 \end{vmatrix} = (42-84)\hat{\imath} - (0-14)\hat{\jmath} + (0-3)\hat{k} = -42\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}].$$

Resultado. a) $\sum \vec{M}_Q = -42\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$; b) el momento de la resultante es el mismo vector, como afirma el teorema de Varignon (las dos fuerzas son concurrentes en T).

Ejercicio 3.5.3 · par equivalente a dos pares

Adaptado de: 1er final 2013-1 (vespertino), problema 2

Sobre el sistema de la figura actúan dos pares. El primero lo forman $\vec{P}$, aplicada en $D(4,4,0)$ y dirigida hacia $B(0,4,5)$, y $-\vec{P}$, cuya línea de acción pasa por $A(0,0,10)$ y $E(8,0,0)$, con $|\vec{P}| = 30\sqrt{41}\,[\mathrm{lb}]$. El segundo lo forman $\vec{F} = 30\hat{\jmath}\,[\mathrm{lb}]$, aplicada en D, y $-\vec{F}$, aplicada en A. Las coordenadas están en pies. Determine el momento de un par equivalente a los dos pares.



Datos. $\overrightarrow{DB} = -4\hat{\imath} + 5\hat{k}$, $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{41}\,[\mathrm{ft}]$.
Planteamiento. El par equivalente es la suma de los momentos de los dos pares; cada uno se calcula con $\vec{r}$ de un punto de la fuerza negativa a un punto de la positiva.
Resolución. $\vec{P} = \frac{30\sqrt{41}}{\sqrt{41}}(-4\hat{\imath} + 5\hat{k}) = -120\hat{\imath} + 150\hat{k}\,[\mathrm{lb}]$. Con $\vec{r}_{D/E} = -4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}\,[\mathrm{ft}]$:

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -120 & 0 & 150 \end{vmatrix} = 600\hat{\imath} + 600\hat{\jmath} + 480\hat{k}\,[\mathrm{lb}\cdot\mathrm{ft}].$$

Con $\vec{r}_{D/A} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 10\hat{k}\,[\text{ft}]$:

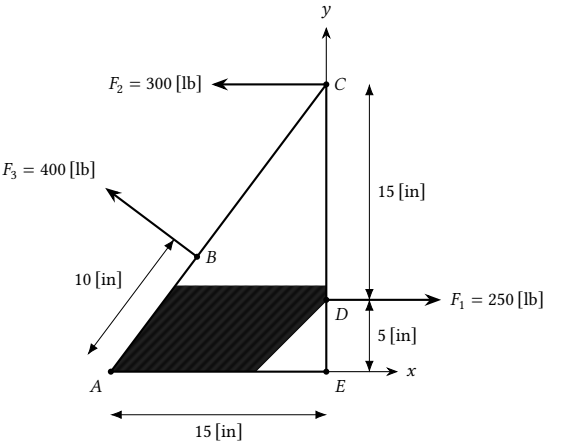
$$\vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 4 & -10 \\ 0 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 300\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 120\hat{k}\,[\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

Resultado. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 900\hat{\imath} + 600\hat{\jmath} + 600\hat{k}\,[\text{lb}\cdot\text{ft}]$, de magnitud $1236.9\,[\text{lb}\cdot\text{ft}]$.

Ejercicio 3.5.4 · sistema fuerza-par en una placa

Adaptado de: 1er final 2014-1 (vespertino), problema 2

La placa triangular AEC de la figura tiene E en el origen, A a 15 [in] a la izquierda de E y C a 20 [in] sobre E. Sobre ella actúan $F_1 = 250$ [lb], horizontal hacia la derecha, en D (5 [in] sobre E); $F_2 = 300$ [lb], horizontal hacia la izquierda, en C; y $F_3 = 400$ [lb], perpendicular a AC y dirigida hacia afuera de la placa, en el punto B de AC que está a 10 [in] de A. Reemplace las tres fuerzas por un sistema fuerza-par con la fuerza aplicada en E.



Datos. $A(-15, 0)$, $C(0, 20)$, $D(0, 5)$ en pulgadas; $|AC| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\,[\text{in}]$.

Planteamiento. Unitario de AC: $(0.6,\ 0.8)$; normal hacia afuera: $(-0.8,\ 0.6)$. $B = A + 10(0.6,\ 0.8) = (-9,\ 8)$. Luego $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ y $M_E = \sum(xF_y - yF_x)$.

Resolución. $\vec{F}_1 = 250\hat{\imath}$, $\vec{F}_2 = -300\hat{\imath}$, $\vec{F}_3 = 400(-0.8\hat{\imath} + 0.6\hat{\jmath}) = -320\hat{\imath} + 240\hat{\jmath}\,[\text{lb}]$, de donde

$$\vec{R} = (250 - 300 - 320)\hat{\imath} + 240\hat{\jmath} = -370\hat{\imath} + 240\hat{\jmath}\,[\text{lb}].$$

Momentos respecto a E (antihorario positivo):

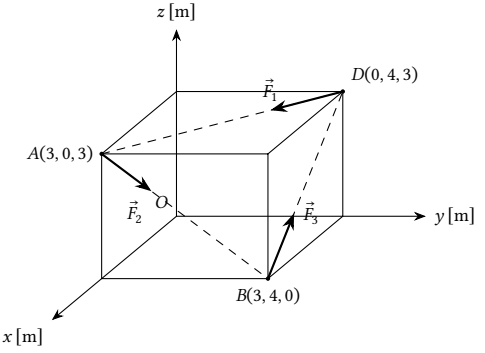
$$M_E = -(5)(250) - (20)(-300) + \big[(-9)(240) - (8)(-320)\big] = 5150\,[\text{lb}\cdot\text{in}].$$

Resultado. En E: $\vec{R} = -370\hat{\imath} + 240\hat{\jmath}\,[\text{lb}]$ ($441.0\,[\text{lb}]$ a 147.0° del eje x) y $\vec{M}_E = 5150\,\hat{k}\,[\text{lb}\cdot\text{in}] = 429.2\,\hat{k}\,[\text{lb}\cdot\text{ft}]$ (antihorario).

Ejercicio 3.5.5 · el sistema más simple es un par

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 2

Sobre la caja de la figura actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1$, aplicada en $D(0,4,3)$ y dirigida hacia $A(3,0,3)$; $\vec{F}_2$, aplicada en A y dirigida hacia $B(3,4,0)$; y $\vec{F}_3$, aplicada en B y dirigida hacia D. Las coordenadas están en metros, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 300\,[\mathrm{N}]$ y $|\vec{F}_3| = 60\sqrt{18}\,[\mathrm{N}]$. Determine el sistema más simple al que puede reducirse.



Datos. $\overrightarrow{DA} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}\ (5\,[\mathrm{m}])$, $\overrightarrow{AB} = 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}\ (5\,[\mathrm{m}])$, $\overrightarrow{BD} = -3\hat{\imath} + 3\hat{k}\ (\sqrt{18}\,[\mathrm{m}])$.
Planteamiento. $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$; pruebas de la sección 3.1.
Resolución.

$$\vec{F}_1 = 180\hat{\imath} - 240\hat{\jmath}, \qquad \vec{F}_2 = 240\hat{\jmath} - 180\hat{k}, \qquad \vec{F}_3 = -180\hat{\imath} + 180\hat{k}\,[\mathrm{N}],$$

así que $\vec{R} = \vec{0}$: las tres fuerzas forman un triángulo cerrado. Momentos respecto al origen:

$$\vec{r}_D \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 180 & -240 & 0 \end{vmatrix} = 720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} - 720\hat{k},$$

$$\vec{r}_A \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 240 & -180 \end{vmatrix} = -720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} + 720\hat{k},$$

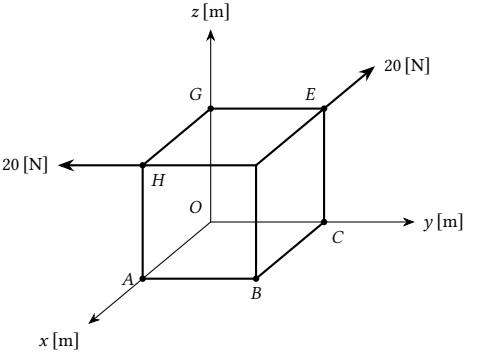
$$\vec{r}_B \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -180 & 0 & 180 \end{vmatrix} = 720\hat{\imath} - 540\hat{\jmath} + 720\hat{k}.$$

Resultado. $\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{M}_O = 720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} + 720\hat{k}\,[\mathrm{N \cdot m}]$: el sistema se reduce a un **par** de momento $\vec{M} = 720\hat{\imath} + 540\hat{\jmath} + 720\hat{k}\,[\mathrm{N \cdot m}]$ (1152.6 $[\mathrm{N \cdot m}]$).

Ejercicio 3.5.6 · ¿se reduce a una sola fuerza?

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3

El cubo homogéneo de la figura tiene aristas de 1 [m] y pesa 10 [N]. En su esquina $E(0, 1, 1)$ actúa una fuerza de 20 [N] paralela al eje x, en sentido negativo, y en su esquina $H(1, 0, 1)$ una fuerza de 20 [N] paralela al eje y, en sentido negativo. Para el sistema formado por el peso y las dos fuerzas: a) obtenga la resultante; b) demuestre que se puede reducir a una sola fuerza.



Datos. Peso $-10\hat{k}$ [N] aplicado en el centro $(0.5,\ 0.5,\ 0.5)$ [m].

Planteamiento. $\vec{R}$, $\vec{M}_O$ y la prueba $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$.

Resolución. a) $\vec{R} = -20\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} - 10\hat{k}$ [N] (30 [N]).

b) Momentos respecto al origen:

$$(\hat{\jmath} + \hat{k}) \times (-20\hat{\imath}) = -20\hat{\jmath} + 20\hat{k}, \qquad (\hat{\imath} + \hat{k}) \times (-20\hat{\jmath}) = 20\hat{\imath} - 20\hat{k},$$

$$(0.5\hat{\imath} + 0.5\hat{\jmath} + 0.5\hat{k}) \times (-10\hat{k}) = -5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath},$$

de donde $\vec{M}_O = 15\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$ [N · m] y $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = (-20)(15) + (-20)(-15) + 0 = 0$. Como $\vec{R} \neq \vec{0}$ y $\vec{R} \perp \vec{M}_O$, el sistema equivale a una sola fuerza. Su línea de acción: con $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ (punto en $z = 0$), $\vec{r} \times \vec{R} = -10y\,\hat{\imath} + 10x\,\hat{\jmath} + (-20x + 20y)\hat{k} = 15\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$, así que $x = y = -1.5$ [m].

Resultado. a) $\vec{R} = -20\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} - 10\hat{k}$ [N]; b) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$: el sistema se reduce a la fuerza $\vec{R}$, cuya línea de acción pasa por $(-1.5,\ -1.5,\ 0)$ [m].

Ejercicio 3.5.7 · reducción a un motor y eje central

Adaptado de: 1er final 2011-2 (versión A), problema 2

Un sistema S está formado por tres fuerzas, en newtons, con coordenadas en metros: $\vec{F}_1 = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$, cuya línea de acción pasa por $O(0, 0, 0)$; $\vec{F}_2 = 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, que pasa por $P(6, 0, 0)$; y $\vec{F}_3 = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, que pasa por $Q(0, 0, -6)$. a) Compruebe que S se puede reducir a un motor. b) Obtenga el momento del motor. c) Determine una ecuación del eje central.

Planteamiento. $\vec{R}$, $\vec{M}_O$, prueba $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$; luego $\vec{M}_{\parallel}$ y $\vec{r}_0 = \vec{R} \times \vec{M}_O / R^2$.

Resolución. $\vec{R} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}\,[\mathrm{N}]$, $R = 3\,[\mathrm{N}]$. $\vec{F}_1$ pasa por O y no da momento;

$$\vec{r}_P \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12\hat{\jmath} + 18\hat{k}, \qquad \vec{r}_Q \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12\hat{\imath} + 6\hat{\jmath},$$

así que $\vec{M}_O = 12\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 18\hat{k}\,[\mathrm{N \cdot m}]$.

a) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 12 - 12 - 36 = -36 \neq 0$ y $\vec{R} \neq \vec{0}$: es un motor.

b) $\vec{M}_{\|} = \dfrac{-36}{9}(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = -4\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 8\hat{k}\,[\mathrm{N \cdot m}]$ ($12\,[\mathrm{N \cdot m}]$, en sentido opuesto a $\vec{R}$).

c) $\vec{R} \times \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 12 & -6 & 18 \end{vmatrix} = 24\hat{\imath} - 42\hat{\jmath} - 30\hat{k}$, de donde $\vec{r}_0 = \frac{1}{9}(24, -42, -30) = (2.667, -4.667, -3.333)\,[\mathrm{m}]$.

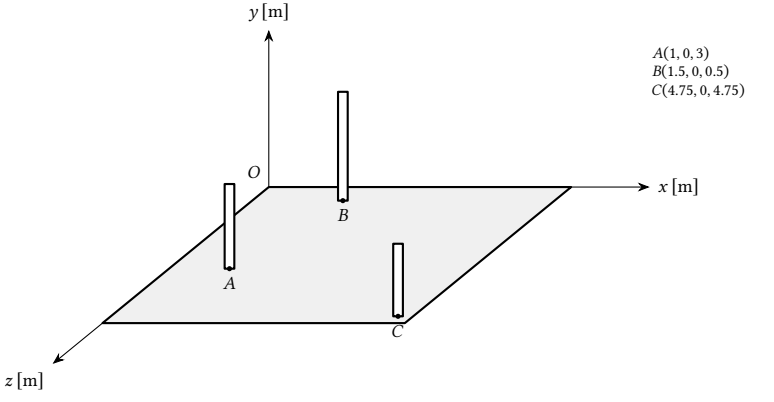
Resultado. a) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = -36 \neq 0$; b) $\vec{M}_{\|} = -4\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 8\hat{k}\,[\mathrm{N \cdot m}]$; c) eje central

$$\frac{x - 8/3}{1} = \frac{y + 14/3}{2} = \frac{z + 10/3}{-2}, \quad \text{o bien} \quad 2x - 10 = y = -z - 8.$$

Ejercicio 3.5.8 · resultante de fuerzas paralelas

Adaptado de: 1er final 2015-2 (matutino), problema 2

Tres cilindros verticales homogéneos descansan sobre una plataforma horizontal de $5 \times 5\,[\mathrm{m}]$ en el plano xz (el eje y es vertical, hacia arriba). Sus pesos son $W_A = 375\,[\mathrm{N}]$ en $A(1, 0, 3)$, $W_B = 260\,[\mathrm{N}]$ en $B(1.5, 0, 0.5)$ y $W_C = 400\,[\mathrm{N}]$ en $C(4.75, 0, 4.75)$, en metros. Determine la magnitud y la ubicación de la resultante a la que se reduce el sistema de los tres pesos.



Planteamiento. Fuerzas paralelas a y: $R = \sum W_i$ y momentos respecto a los ejes x y z.

Resolución. $\vec{R} = -(375 + 260 + 400)\hat{\jmath} = -1035\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$. Momentos respecto al origen:

$$M_x = \sum W_i z_i = 375(3) + 260(0.5) + 400(4.75) = 3155\,[\mathrm{N \cdot m}],$$

$$M_z = -\sum W_i x_i = -[375(1) + 260(1.5) + 400(4.75)] = -2665\,[\mathrm{N \cdot m}].$$

Con la resultante en $(x, 0, z)$: $(x\hat{\imath} + z\hat{k}) \times (-1035\hat{\jmath}) = 1035z\,\hat{\imath} - 1035x\,\hat{k}$; al igualar, $z = 3155/1035$ y $x = 2665/1035$.

Resultado. $\vec{R} = -1035\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$, con línea de acción vertical por $(2.575,\ 0,\ 3.048)\,[\mathrm{m}]$.

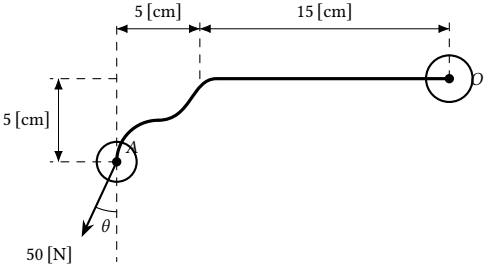
3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 3.6.1 · fuerza en la manija de una puerta

Adaptado de: 1er final 2018-1 (matutino), problema 2

Para abrir una puerta se aplica una fuerza de 50 [N] en la perilla A de la manija de la figura. A está 20 [cm] a la izquierda y 5 [cm] debajo del eje O. La fuerza apunta hacia abajo y a la izquierda, formando el ángulo θ con la vertical. a) Determine θ si la magnitud del momento de la fuerza respecto a O es 800 [N · cm]. b) ¿Para qué valor de θ $(0 < \theta < 180^\circ)$ es máxima la magnitud del momento respecto a O? ¿Cuánto vale ese momento máximo?



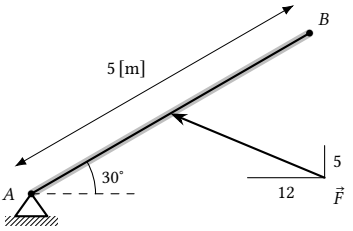
Resultado: a) $\theta = 25.1^\circ$; b) $\theta = 166.0^\circ$, $M_{\text{máx}} = 1030.8\,[\mathrm{N \cdot cm}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.2 · fuerza a partir de su momento

Adaptado de: 1er final 2015-1 (matutino), problema 2

La barra AB de la figura mide 5 [m] y forma 30° con la horizontal; está articulada en A. En su punto medio se aplica una fuerza $\vec{F}$ con pendiente de 5 vertical por 12 horizontal, dirigida hacia arriba y a la izquierda. Si la magnitud del momento de $\vec{F}$ respecto a A es 77.5 [N · m], determine $\vec{F}$.



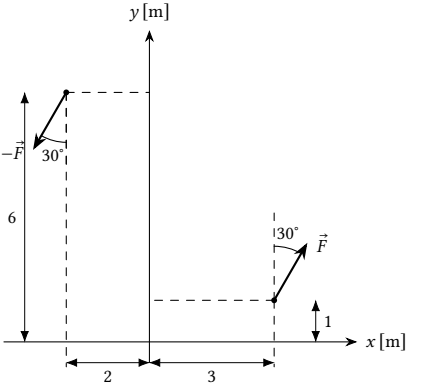
Resultado: $F = 39.01\,[\text{N}]$, $\vec{F} = -36.01\,\hat{\imath} + 15.00\,\hat{\jmath}\,[\text{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.3 · momento de un par en el plano

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 3

Un par está formado por dos fuerzas de 8 [kN]. La fuerza $\vec{F}$ actúa en $(3,\ 1)$ [m], hacia arriba y a la derecha, a 30° de la vertical; $-\vec{F}$ actúa en $(-2,\ 6)$ [m], hacia abajo y a la izquierda, también a 30° de la vertical. Determine: a) el momento del par; b) geométricamente, la distancia más corta entre las líneas de acción; c) con esa distancia, compruebe el resultado de a).



Resultado: a) $\vec{M} = 54.64\,\hat{k}\,[\text{kN}\cdot\text{m}]$; b) $d = 6.83\,[\text{m}]$; c) $Fd = (8)(6.83) = 54.64\,[\text{kN}\cdot\text{m}]$.

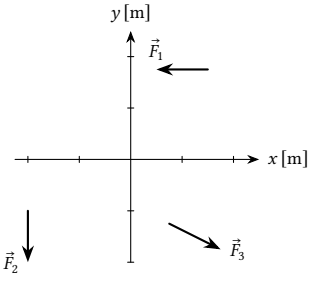
→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.4 · sistemas equivalentes en el plano

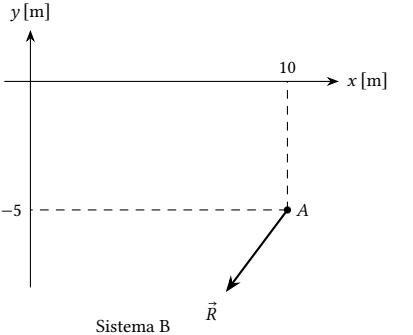
Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 2

Los sistemas A y B de la figura son equivalentes. El sistema A tiene tres fuerzas: $\vec{F}_1$, paralela al eje x, de 20 [N], hacia la izquierda; $\vec{F}_2$, paralela al eje y, de 10 [N], hacia abajo; y $\vec{F}_3$, desconocida. El sistema B es una sola fuerza $\vec{R}$ aplicada en $A(10,\ -5)$ [m], con

dirección $-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ (hacia abajo y a la izquierda). El momento de $\vec{R}$ respecto al origen es $\vec{M}_O = -220\,\hat{k}\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$. Determine $\vec{F}_3$ y $\vec{R}$.



Sistema A



Sistema B

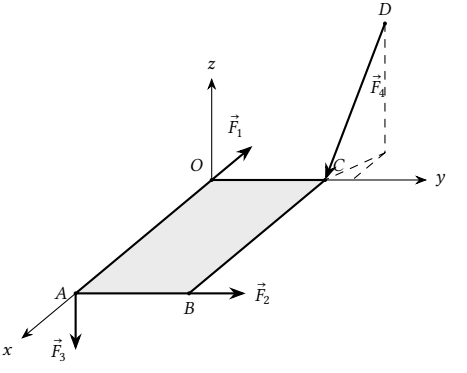
Resultado: $\vec{R} = -12\hat{\imath} - 16\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$; $\vec{F}_3 = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 3.6.5 · losa con cuatro fuerzas

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 2

La losa rectangular $OABC$ de la figura, de peso despreciable, está en el plano xy: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1,\ 0.5,\ 0)$ y $C(0,\ 0.5,\ 0)$, en metros. Sobre ella actúan $\vec{F}_1$ en O, paralela al eje x (sentido negativo); $\vec{F}_2$ en B, paralela al eje y (sentido positivo); $\vec{F}_3$ en A, paralela al eje z (sentido negativo); y $\vec{F}_4$, de 315 [N], aplicada en C y dirigida desde $D(-0.24,\ 0.62,\ 0.57)$ hacia C. El sistema se reduce a una sola fuerza vertical hacia abajo de 570 [N]. Determine las magnitudes de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ y el punto del plano xy por el que pasa la resultante.



Resultado: $F_1 = 120\,[\mathrm{N}]$, $F_2 = 60\,[\mathrm{N}]$, $F_3 = 285\,[\mathrm{N}]$; la resultante pasa por $(0.5,\ 0.25,\ 0)\,[\mathrm{m}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 3.6.6 · seis fuerzas sobre una esfera

Adaptado de: 1er final 2012-2 (vespertino), problema 2

Sobre una esfera fija de centro en el origen y radio $5\,[\mathrm{m}]$ actúan seis fuerzas, en newtons, aplicadas en puntos de su superficie (coordenadas en metros): $\vec{F}_A = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ en $A(0,0,5)$; $\vec{F}_B = 2\hat{\imath} + 4\hat{k}$ en $B(0,-5,0)$; $\vec{F}_C = b\,\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ en $C(5,0,0)$; $\vec{F}_D = -5\hat{k}$ en $D(4,0,-3)$; $\vec{F}_E = 2\hat{\imath} - 1.5\hat{k}$ en $E(3,0,4)$; y $\vec{F}_G = -2\hat{\imath} + 1.5\hat{k}$ en $G(-3,0,-4)$. Determine el valor de b para el que el sistema se reduce a una sola fuerza y, con ese valor, una ecuación cartesiana de su línea de acción.

Resultado: $b = 1$; $\vec{R} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}\,[\mathrm{N}]$; línea de acción $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

3.7 Errores frecuentes

1. **Orden del producto cruz.** Es $\vec{r} \times \vec{F}$, no $\vec{F} \times \vec{r}$: el orden inverso cambia el signo de todo el momento.
2. $\vec{r}$ **mal elegido.** Debe ir del punto de momentos a un punto de la línea de acción de la fuerza, no al revés ni a un punto cualquiera del cuerpo.
3. **Sentido del unitario.** «De D hacia B» es $B - D$. Invertirlo cambia el signo de $\vec{F}$.
4. **Signo del segundo término del determinante.** La componente $\hat{\jmath}$ lleva signo menos: $-(r_x F_z - r_z F_x)$.
5. **Momento respecto a un eje.** Es la proyección sobre el **unitario** del eje; olvidar dividir entre $|\overrightarrow{AC}|$ multiplica el resultado por esa longitud.
6. **Escalar contra vector.** Si piden «el momento respecto al eje» como vector, falta multiplicar por $\hat{e}$; si piden la magnitud, se da el valor absoluto.
7. **Par de fuerzas.** Su momento es el mismo respecto a cualquier punto; no se le suma $\vec{r} \times \vec{R}$ porque $\vec{R} = \vec{0}$.
8. **Sistema más simple.** $\vec{R} = \vec{0}$ no significa equilibrio: puede quedar un par. Y $\vec{R} \neq \vec{0}$ con $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$ no se reduce a una sola fuerza.
9. **Unidades del momento.** $[\mathrm{N \cdot m}]$, $[\mathrm{kN \cdot m}]$, $[\mathrm{lb \cdot ft}]$; nunca solo [N]. Con pulgadas, $1\,[\mathrm{ft}] = 12\,[\mathrm{in}]$.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}$, $\hat{e}_{AB} = \overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|$.
- $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ (determinante con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$; $\vec{r}$ de O a la línea de acción); $M_O = Fd$; en el plano, $M_O = xF_y - yF_x$.
- Varignon: $\vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i$.
- Eje: $M_{AC} = \hat{e}_{AC} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$, $\vec{M}_{AC} = M_{AC}\,\hat{e}_{AC}$.
- Par: $\vec{M} = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}$, $M = Fd$; vector libre.
- Fuerza-par: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, $\vec{M}_P = \sum \vec{r}_{i/P} \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j$; $\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{r}_{P/Q} \times \vec{R}$.

- Pruebas: $\vec{R} = \vec{0}$ (par o nulo); $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ (una fuerza); si no, motor.
- Motor: $\vec{M}_{\parallel} = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2}\vec{R}$; eje central por $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$ con dirección $\vec{R}$.
- Fuerzas paralelas a y: $R = \sum F_i$, $\bar{x} = \sum F_i x_i / R$, $\bar{z} = \sum F_i z_i / R$.

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Haz una tabla con cada fuerza: punto de aplicación, vector unitario y vector fuerza.
2. Escribe $\vec{r}$ con su origen y su extremo antes de multiplicar.
3. Desarrolla cada determinante por separado y súmalos al final, con unidades.
4. En reducción de sistemas, escribe siempre $\vec{R}$, $\vec{M}_O$ y la prueba $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$ antes de concluir.
5. Comprueba un resultado con otro camino: $M = Fd$, Varignon o el momento respecto a otro punto.

Si no se encuentra el camino, escribe los vectores de las fuerzas, sus vectores de posición y el planteamiento $\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$: el planteamiento correcto también cuenta.

Unidad 4 · Primeros momentos, centros de gravedad, centros de masa y centroides

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno determinará centroides, centros de gravedad y centros de masa para cuerpos de configuración sencilla.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 22 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en 11 de los 13 aplicados desde 2014-1. Suele ser el problema 3; cuando hay cargas distribuidas, también entra en el problema de reacciones (Unidad 5).
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 con la tabla de figuras simples a la vista (20 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5.1, 4.5.2 y 4.5.6 con cronómetro (20 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Primer momento y centroide de un área

El **primer momento** de un área plana A respecto a un eje mide cómo está repartida el área alrededor de ese eje:

$$Q_y = \int x\,dA = \bar{x}\,A, \qquad Q_x = \int y\,dA = \bar{y}\,A.$$

Q_y se mide respecto al eje y (usa la distancia x) y Q_x respecto al eje x (usa la distancia y). Sus unidades son de longitud al cubo, por ejemplo $[\mathrm{cm}^3]$. El punto $C(\bar{x}, \bar{y})$ es el **centroide**: el «centro geométrico» del área. Si el área tiene un eje de simetría, el centroide está sobre ese eje; con dos ejes de simetría, en su intersección.

Centro de masa y centro de gravedad

Para un cuerpo con masa, el **centro de masa** pondera cada parte por su masa y el **centro de gravedad** por su peso:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i}, \qquad \bar{x} = \frac{\sum W_i \bar{x}_i}{\sum W_i}, \qquad m_i = \rho_i V_i, \quad W_i = m_i g.$$

Si el cuerpo es homogéneo (ρ constante) y la gravedad es uniforme, los tres puntos coinciden con el centroide del volumen. Para una **lámina** de espesor constante t, $V_i = t A_i$ y se puede trabajar con áreas; para una **barra delgada** de sección constante, con longitudes. Si las partes tienen densidades distintas, cada término se pondera con su propia ρ_i.

Figuras compuestas

Una figura que se descompone en partes simples cumple

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i}.$$

Un **hueco** (perforación, recorte) se trata como una parte de área **negativa**, con su centroide en el lugar del hueco. Las coordenadas $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ llevan signo según el sistema de referencia dado.

Figuras simples

En la tabla, b es la dimensión horizontal, h la vertical y r el radio; las coordenadas se miden desde el vértice o centro indicado.

Figura (origen)	Área	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Rectángulo (esquina)	bh	$b/2$	$h/2$
Triángulo rectángulo (vértice del ángulo recto)	$bh/2$	$b/3$	$h/3$
Triángulo cualquiera	$\frac{1}{2}bh$	promedio de las x de los vértices	promedio de las y
Semicírculo (centro, diámetro sobre el eje x)	$\pi r^2/2$	0	$4r/3\pi$
Cuarto de círculo (centro)	$\pi r^2/4$	$4r/3\pi$	$4r/3\pi$
Enjuta parabólica $y = kx^2$ (vértice; bajo la curva)	$bh/3$	$3b/4$	$3h/10$
Semisegmento parabólico (vértice; sobre la curva)	$2bh/3$	$3b/8$	$3h/5$
Barra recta	L (longitud)	punto medio	punto medio

Conviene recordar $\frac{4r}{3\pi} \approx 0.4244\,r$: para $r = 4$, 1.698; para $r = 35$, 14.85.

Cargas distribuidas

Una carga distribuida $w(x)$ en [N/m] o [lb/ft] sobre una viga equivale a una sola fuerza:

$$F = \int w\,dx = \text{área bajo el diagrama de carga,}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,w\,dx}{F} = \text{abscisa del centroide de ese diagrama.}$$

- **Uniforme** w_0 en una longitud L: $F = w_0 L$, a la mitad del tramo.
- **Triangular** de 0 a w_0: $F = \frac{1}{2} w_0 L$, a $L/3$ del lado mayor.
- **Trapecial** de w_1 a w_2: se parte en un rectángulo y un triángulo.
- **Cualquier ley** $w = f(x)$: se integra; la parábola $w = kx^2$ es una enjuta parabólica.

La fuerza equivalente produce el mismo efecto externo (la misma suma de fuerzas y de momentos) que la carga; por eso sirve para calcular reacciones (Unidad 5), pero no para estudiar esfuerzos internos.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«coordenadas del centroide», región sombreada	área compuesta (tabla)	4.3.1
figura con semicírculos o cuartos de círculo recortados	partes de área negativa	4.3.1
«determine el valor de a para que $\bar{x}$ sea…»	parámetro desconocido	4.3.2
«rango de valores», «que el centroide quede dentro de…»	desigualdades con $\bar{x}(a)$, $\bar{y}(a)$	4.3.2
«dos densidades», «parte sombreada y no sombreada»	centro de masa ponderado por ρ_i	4.3.3
«barras homogéneas», «determine la densidad»	centro de masa conocido, ρ incógnita	4.3.3
«hoja doblada», «lámina de espesor…», «lb/pie³»	centro de gravedad en 3D	4.3.3
«carga distribuida», w en N/m o lb/ft, «zapata»	fuerza equivalente y su posición	4.3.4

4.3 Procedimientos

Centroide de un área compuesta

1. Copia el sistema de referencia de la figura. No lo cambies: el resultado se pide respecto a él.
2. Descompón la figura en partes simples de la tabla de la sección 4.1. Prefiere sumar una figura «llena» (un rectángulo grande) y restar los huecos.
3. Haz la tabla: parte, A_i (con signo), $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $A_i\bar{x}_i$, $A_i\bar{y}_i$.
4. Suma cada columna y divide: $\bar{x} = \sum A_i\bar{x}_i / \sum A_i$, $\bar{y} = \sum A_i\bar{y}_i / \sum A_i$.
5. Revisa que el punto quede en un lugar razonable (cerca del «grueso» del área y del lado de los ejes de simetría).

Centroide con un parámetro desconocido

1. Haz la tabla de 4.3.1 dejando el parámetro a como literal en A_i y en $\bar{x}_i$.
2. Escribe $\bar{x}(a) = \dfrac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}$ e iguálala al valor dado: queda una ecuación en a (lineal, cuadrática o cúbica).
3. Descarta las raíces negativas o que no caben en la figura.
4. Con a conocida, calcula la otra coordenada.
5. Si piden un **intervalo**, escribe las desigualdades que expresan la condición (por ejemplo $\bar{x} \le 0$ y $\bar{y} \ge 0$) y verifica también los bordes inclinados de la región.

Centro de masa o de gravedad de cuerpos compuestos

1. Identifica cada parte y su densidad ρ_i (o su peso específico γ_i).
2. Calcula $m_i = \rho_i V_i$ (láminas: $V_i = t A_i$; barras: $V_i = A_{\text{sección}} L_i$). En láminas de un solo material basta $W_i = \gamma\, t\, A_i$.
3. Para piezas dobladas, ubica cada parte en su plano (xy, yz o xz) y escribe sus tres coordenadas $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$; la coordenada perpendicular al plano de la parte es la del plano.
4. Tabla con m_i (o W_i) y sus productos por cada coordenada; divide entre $\sum m_i$.
5. Si la incógnita es una densidad, despéjala de la ecuación de la coordenada que la contenga.

Fuerza equivalente de una carga distribuida

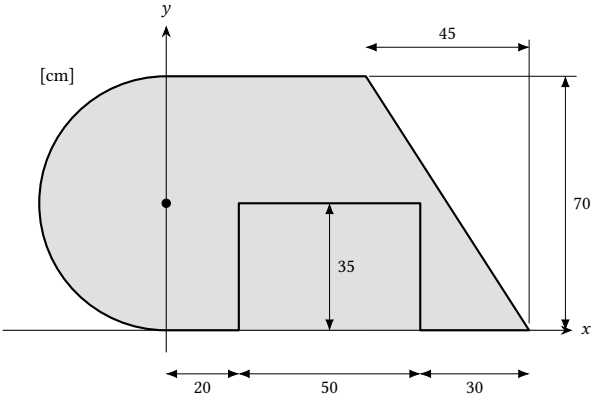
1. Descompón el diagrama de carga en rectángulos, triángulos o una ley $w(x)$.
2. Para cada parte: F_i = área y $\bar{x}_i$ = abscisa de su centroide.
3. Fuerza equivalente: $F = \sum F_i$; posición: $\bar{x} = \sum F_i \bar{x}_i / F$.
4. Dibuja la fuerza en el diagrama de cuerpo libre con su sentido (hacia abajo si es peso; hacia arriba si es la reacción del suelo) y sigue con las ecuaciones de equilibrio (Unidad 5).

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · centroide de una placa con semicírculo, triángulo y hueco

Basado en: 1er final 2018-1 (matutino), problema 3.

Determine las coordenadas del centroide del área de la figura. El eje y pasa por el borde recto de un semicírculo de radio 35 [cm], cuyo centro está a 35 [cm] sobre el eje x. A la derecha del semicírculo hay un rectángulo de 55×70 [cm] y después un triángulo de base 45 [cm] y altura 70 [cm]. Se recorta un hueco rectangular de 50×35 [cm] apoyado en el eje x, que empieza a 20 [cm] del eje y.



Datos. $r = 35$ [cm]; rectángulo 55×70; triángulo 45×70; hueco 50×35 desde $x = 20$.
Planteamiento. Cuatro partes: semicírculo, rectángulo y triángulo (positivas) y el hueco (negativo). El centroide del semicírculo está a $4r/3\pi = 14.85$ [cm] a la **izquierda** del eje y, y el del triángulo a un tercio de su base desde el lado vertical.
Resolución.

Parte	A_i [cm^2]	$\bar{x}_i$ [cm]	$\bar{y}_i$ [cm]	$A_i\bar{x}_i$	$A_i\bar{y}_i$
Semicírculo	1924.23	−14.85	35	−28 583	67 348
Rectángulo	3850	27.5	35	105 875	134 750
Triángulo	1575	70	23.33	110 250	36 750
Hueco	−1750	45	17.5	−78 750	−30 625
$\sum$	5599.23			108 792	208 223

$$\bar{x} = \frac{108\,792}{5599.23} = 19.43\,[\text{cm}], \qquad \bar{y} = \frac{208\,223}{5599.23} = 37.19\,[\text{cm}].$$

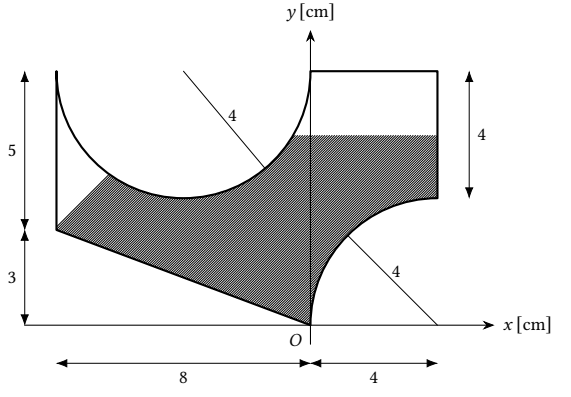
Resultado. $C(19.43,\ 37.19)\,[\text{cm}]$, respecto a los ejes de la figura.

4.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 4.5.1 · placa con recortes circulares y triangular

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 3

Determine las coordenadas del centroide de la región sombreada respecto al sistema de referencia indicado. La región está dentro del rectángulo $-8 \le x \le 4$, $0 \le y \le 8$ (en cm) y le faltan: un semicírculo de radio 4 con el diámetro en el borde superior, de $x = -8$ a $x = 0$; un cuarto de círculo de radio 4 con centro en la esquina $(4, 0)$; y el triángulo de vértices $(-8, 0)$, $(0, 0)$ y $(-8, 3)$.



Datos. Rectángulo $12 \times 8\,[\text{cm}]$; $r = 4\,[\text{cm}]$ en ambos recortes; triángulo de catetos 8 y 3.

Planteamiento. Rectángulo lleno menos tres huecos. Semicírculo: centro $(-4, 8)$, su centroide queda **debajo** del diámetro, en $\bar{y} = 8 - \frac{4(4)}{3\pi} = 6.30$. Cuarto de círculo: centro $(4, 0)$, centroide en $(4 - 1.70,\ 1.70)$. Triángulo rectángulo con el ángulo recto en $(-8, 0)$: centroide a un tercio de cada cateto, $\left(-8 + \frac{8}{3},\ 1\right)$.

Resolución.

Parte	$A_i\,[\text{cm}^2]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i\bar{x}_i$	$A_i\bar{y}_i$
Rectángulo	96	−2	4	−192	384
Semicírculo	−25.13	−4	6.30	100.53	−158.40
Triángulo	−12	−5.33	1	64.00	−12.00
Cuarto de círculo	−12.57	2.30	1.70	−28.93	−21.33
$\sum$	46.30			−56.40	192.27

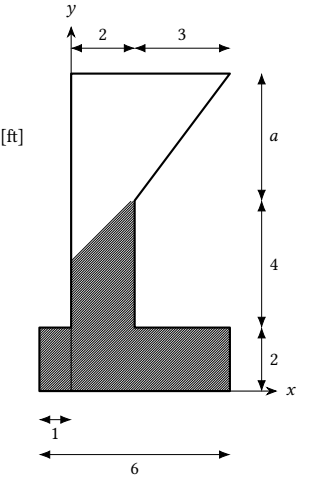
$$\bar{x} = \frac{-56.40}{46.30} = -1.22\,[\text{cm}], \qquad \bar{y} = \frac{192.27}{46.30} = 4.15\,[\text{cm}].$$

Resultado. $C(-1.22,\ 4.15)\,[\text{cm}]$.

Ejercicio 4.5.2 · dimensión para una abscisa del centroide dada

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 3

La región plana de la figura (cotas en pies) está formada por una base de 6×2, que sobresale 1 pie a la izquierda del eje y; un poste de ancho 2 apoyado en el eje y, de altura $4 + a$ sobre la base; y un triángulo rectángulo adosado a la parte alta del poste, de catetos 3 (horizontal, en el borde superior) y a (vertical, contra el poste). Determine el valor de a para que $\bar{x} = \frac{29}{17}$ [ft] y, con ese valor, obtenga $\bar{y}$.



Datos. $\bar{x} = 29/17\,[\text{ft}]$; dimensiones de la figura.

Planteamiento. Tres partes positivas; a aparece en el área del poste y en la del triángulo. El triángulo tiene el ángulo recto en $(2,\ 6 + a)$: su centroide está en $\bar{x} = 2 + \frac{3}{3} = 3$ y $\bar{y} = 6 + a - \frac{a}{3}$.

Resolución.

Parte	$A_i\,[\text{ft}^2]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i\bar{x}_i$
Base	12	2	1	24
Poste	$2(4+a)$	1	$2 + \frac{4+a}{2}$	$2(4+a)$
Triángulo	$\frac{3a}{2}$	3	$6 + \frac{2a}{3}$	$\frac{9a}{2}$

1. $\sum A_i = 20 + \frac{7a}{2}$ y $\sum A_i\bar{x}_i = 32 + \frac{13a}{2}$.
2. $\dfrac{32 + 6.5a}{20 + 3.5a} = \dfrac{29}{17} \;\Rightarrow\; 544 + 110.5a = 580 + 101.5a \;\Rightarrow\; a = 4\,[\text{ft}]$.

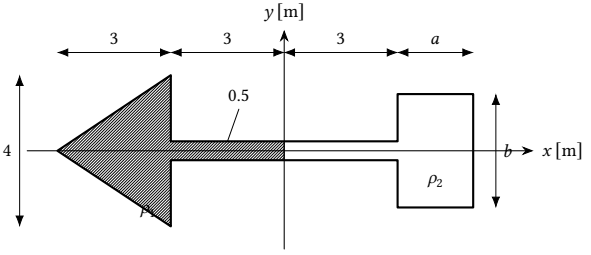
3. Con $a = 4$: áreas 12, 16 y 6 ($\sum = 34$); $\bar{y}_i = 1$, 6 y 8.67; $\sum A_i \bar{y}_i = 12 + 96 + 52 = 160$.
4. $\bar{y} = \frac{160}{34} = 4.71\,[\text{ft}]$.

Resultado. $a = 4\,[\text{ft}]$; $\bar{y} = 4.71\,[\text{ft}]$.

Ejercicio 4.5.3 · figura con dos densidades

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 3

La figura compuesta tiene espesor constante de 1 [m]. La parte sombreada (un triángulo de base 4 y altura 3, con el vértice en $x = -6$, y la mitad izquierda del vástago de 3×0.5) tiene densidad $\rho_1 = 40\,[\text{kg/m}^3]$; la parte no sombreada (la mitad derecha del vástago, de 3×0.5, y un rectángulo de ancho a y altura b, centrado en el eje x, que empieza en $x = 3$) tiene $\rho_2 = 100\,[\text{kg/m}^3]$. Si $b = 1.5a$, determine a y b para que el centro de masa tenga $\bar{x} = 1.5\,[\text{m}]$.



Datos. $\rho_1 = 40$, $\rho_2 = 100\,[\text{kg/m}^3]$; $t = 1\,[\text{m}]$; $b = 1.5a$; $\bar{x} = 1.5\,[\text{m}]$.

Planteamiento. $m_i = \rho_i\, t\, A_i$. La figura es simétrica respecto al eje x, así que $\bar{y} = 0$ y solo interesa $\bar{x} = \sum m_i \bar{x}_i / \sum m_i$. El triángulo tiene su base vertical en $x = -3$: su centroide está a un tercio de la base, en $x = -4$.

Resolución.

Parte	$V_i\,[\text{m}^3]$	$m_i\,[\text{kg}]$	$\bar{x}_i\,[\text{m}]$	$m_i \bar{x}_i$
Triángulo (ρ_1)	6	240	-4	-960
Vástago izquierdo (ρ_1)	1.5	60	-1.5	-90
Vástago derecho (ρ_2)	1.5	150	1.5	225
Rectángulo (ρ_2)	$1.5a^2$	$150a^2$	$3 + \frac{a}{2}$	$450a^2 + 75a^3$

$$\frac{75a^3 + 450a^2 - 825}{150a^2 + 450} = 1.5 \;\Rightarrow\; 75a^3 + 225a^2 - 1500 = 0 \;\Rightarrow\; a^3 + 3a^2 - 20 = 0.$$

$a = 2$ cumple ($8 + 12 - 20 = 0$); el factor restante $a^2 + 5a + 10$ no tiene raíces reales.

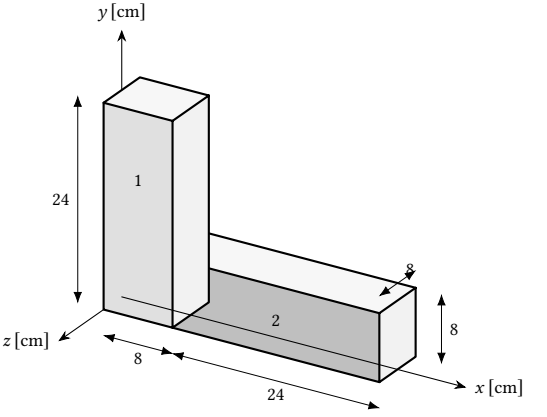
Resultado. $a = 2\,[\text{m}]$, $b = 3\,[\text{m}]$.

Ejercicio 4.5.4 · densidad de una barra a partir del centro de masa

Adaptado de: 1er final 2014-2 (matutino), problema 4

Una pieza simétrica respecto al plano xy está formada por dos barras homogéneas del mismo espesor (8 [cm] en z). La barra vertical (1) mide 8 [cm] de ancho y 24 [cm] de alto,

con un lado sobre el eje y; la barra horizontal (2) mide 24 [cm] de largo y 8 [cm] de alto, y va de $x = 8$ a $x = 32$ [cm] sobre el eje x. La barra (1) tiene densidad 14 000 [kg/m^3] y el centro de masa de la pieza está en $(10,\ 9,\ 0)$ [cm]. Determine la densidad de la barra (2).



Datos. $\rho_1 = 14\,000\,[\text{kg/m}^3]$; $G(10, 9, 0)$ [cm]; $V_1 = V_2 = 8 \cdot 24 \cdot 8 = 1536\,[\text{cm}^3]$.

Planteamiento. Centroides: barra 1 en $(4,\ 12)$, barra 2 en $(20,\ 4)$. Como los volúmenes son iguales, $m_2/m_1 = \rho_2/\rho_1$. Cualquiera de las dos coordenadas sirve.

Resolución.

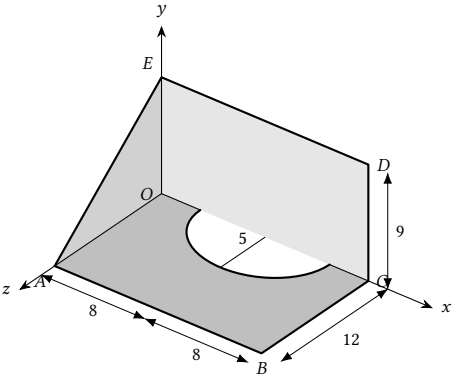
1. Con $\bar{y}$: $\dfrac{12m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2} = 9 \ \Rightarrow\ 3m_1 = 5m_2 \ \Rightarrow\ \dfrac{m_2}{m_1} = 0.6.$
2. Comprobación con $\bar{x}$: $\dfrac{4 + 20(0.6)}{1 + 0.6} = \dfrac{16}{1.6} = 10\,[\text{cm}]$. Coincide.
3. $\rho_2 = 0.6\,\rho_1 = 0.6(14\,000)$.

Resultado. $\rho_2 = 8400\,[\text{kg/m}^3]$.

Ejercicio 4.5.5 · centro de gravedad de una lámina doblada

Adaptado de: 1er final 2013-2 (matutino), problema 3

Una hoja de acero homogénea de 0.2 [in] de espesor y peso específico 540 [lb/ft^3] se cortó y dobló para formar la pieza de la figura (cotas en pulgadas): una base $OABC$ en el plano xz, de 16 (en x) por 12 (en z), a la que se le recortó un semicírculo de radio 5 con centro en $(8, 0, 0)$ sobre el borde OC; una pared rectangular $OCDE$ en el plano xy, de 16×9; y una pared triangular OEA en el plano yz, con $E(0, 9, 0)$ y $A(0, 0, 12)$. Determine las coordenadas del centro de gravedad de la pieza.



Datos. $\gamma = 540\,[\text{lb/ft}^3] = \frac{540}{1728} = 0.3125\,[\text{lb/in}^3]$; $t = 0.2\,[\text{in}]$, así que $\gamma t = 0.0625\,[\text{lb/in}^2]$.
Planteamiento. $W_i = \gamma\, t\, A_i$. Cada parte tiene la coordenada de su plano igual a cero: la base $y = 0$, la pared $OCDE$ $z = 0$ y la pared OEA $x = 0$. El semicírculo recortado tiene su centroide a $\frac{4(5)}{3\pi} = 2.12\,[\text{in}]$ del borde OC, hacia $+z$.
Resolución.

Parte	A_i	$W_i\,[\text{lb}]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$W_i\bar{x}_i$	$W_i\bar{z}_i$
OEA	54	3.375	0	3	4	0	13.50
$OCDE$	144	9.000	8	4.5	0	72.00	0
$OABC$	192	12.000	8	0	6	96.00	72.00
Semicírculo	−39.27	−2.454	8	0	2.12	−19.63	−5.21
$\sum$		21.921				148.37	80.29

Además $\sum W_i\bar{y}_i = 3.375(3) + 9(4.5) = 50.63\,[\text{lb}\cdot\text{in}]$. Entonces

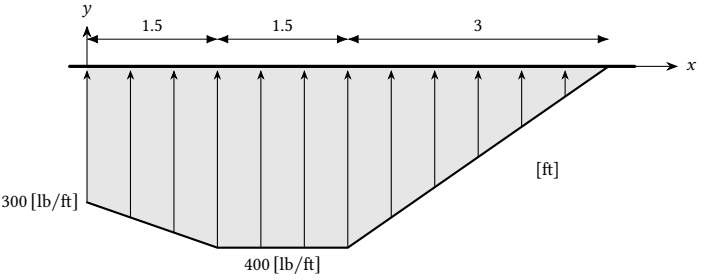
$$\bar{x} = \frac{148.37}{21.921} = 6.77, \qquad \bar{y} = \frac{50.63}{21.921} = 2.31, \qquad \bar{z} = \frac{80.29}{21.921} = 3.66\,[\text{in}].$$

Resultado. $G(6.77,\ 2.31,\ 3.66)\,[\text{in}]$; la pieza pesa $21.92\,[\text{lb}]$.

Ejercicio 4.5.6 · resultante de la reacción bajo una zapata

Adaptado de: 2º final 2011-2, problema 3

La reacción del suelo en la base de una zapata se aproxima con la carga distribuida de la figura (hacia arriba): crece linealmente de 300 a 400 [lb/ft] en los primeros 1.5 [ft], se mantiene en 400 [lb/ft] los siguientes 1.5 [ft] y disminuye linealmente hasta cero en los últimos 3 [ft]. Determine: a) la magnitud de la fuerza resultante sobre la zapata; b) la ubicación de dicha resultante.



Datos. Tramos de 1.5, 1.5 y 3 [ft]; intensidades 300 y 400 [lb/ft].

Planteamiento. El diagrama se parte en un rectángulo y un triángulo en el primer tramo, un rectángulo en el segundo y un triángulo en el tercero. Cada fuerza vale el área y actúa en el centroide.

Resolución.

Parte	F_i [lb]	$\bar{x}_i$ [ft]	$F_i\bar{x}_i$ [lb · ft]
Rectángulo 300×1.5	450	0.75	337.5
Triángulo $\frac{1}{2}(100)(1.5)$	75	1.0	75.0
Rectángulo 400×1.5	600	2.25	1350.0
Triángulo $\frac{1}{2}(400)(3)$	600	4.0	2400.0
$\sum$	1725		4162.5

El triángulo del primer tramo tiene su lado mayor en $x = 1.5$, así que su centroide está en $1.5 - \frac{1.5}{3} = 1.0$; el del último tramo, en $3 + \frac{3}{3} = 4.0$.

$$\bar{x} = \frac{4162.5}{1725} = 2.41\,[\text{ft}].$$

Resultado. a) $R = 1725$ [lb], hacia arriba; b) su línea de acción pasa a 2.41 [ft] del extremo izquierdo.

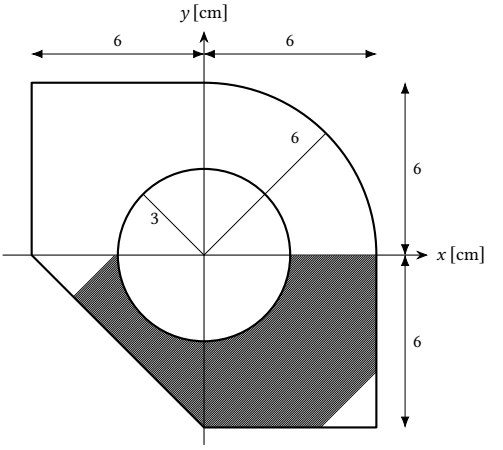
4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 4.6.1 · placa con agujero circular

Adaptado de: 1er final 2014-1 (vespertino), problema 3

La placa de la figura ocupa el cuadrado $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$ (en cm), salvo que en el primer cuadrante su borde es un cuarto de circunferencia de radio 6 con centro en el origen y que en el tercer cuadrante solo existe el triángulo de vértices $(-6, 0)$, $(0, 0)$ y $(0, -6)$. Tiene un agujero circular de radio 3 con centro en el origen. Determine las coordenadas de su centroide.



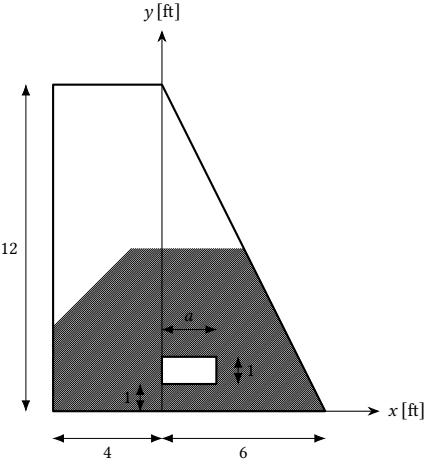
Resultado: $\bar{x} = \bar{y} = 0.40\,[\mathrm{cm}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 4.6.2 · placa trapecial con hueco rectangular

Adaptado de: 1er final 2013-1 (vespertino), problema 3

La región sombreada (cotas en pies) es un rectángulo de 4×12 a la izquierda del eje y unido a un triángulo rectángulo de catetos 6 (sobre el eje x) y 12 (sobre el eje y). Tiene un hueco rectangular de ancho a y altura 1 que empieza en el eje y, entre $y = 1$ y $y = 2$. Determine a para que $\bar{x} = -\frac{26}{82}\,[\mathrm{ft}]$ y, con ese valor, obtenga $\bar{y}$.



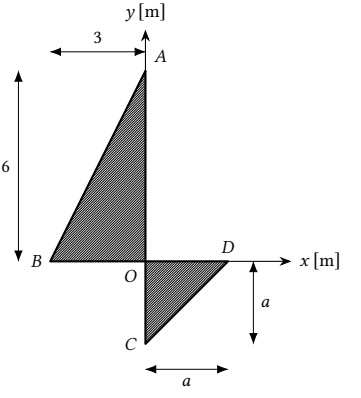
Resultado: $a = 2\,[\text{ft}]$; $\bar{y} = 5.23\,[\text{ft}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

Ejercicio propuesto 4.6.3 · intervalo de un parámetro

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 3

La figura plana está formada por dos triángulos rectángulos: OAB, con $O(0,0)$, $A(0,6)$ y $B(-3,0)$ (en metros), y OCD, con $C(0,-a)$ y $D(a,0)$. Determine el intervalo de valores de a para que el centroide de la figura quede dentro del triángulo superior OAB.



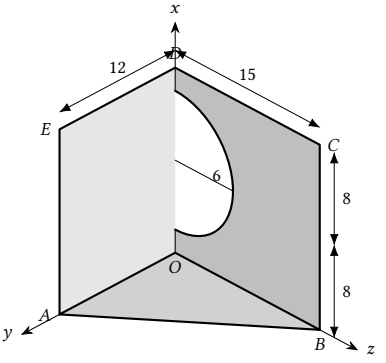
Resultado: $0 < a < \sqrt[3]{54} = 3.78\,[\text{m}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

Ejercicio propuesto 4.6.4 · lámina doblada con recorte semicircular

Adaptado de: 1er final 2013-2 (vespertino), problema 3

Una hoja de acero de $0.2\,[\text{in}]$ de espesor y $540\,[\text{lb/ft}^3]$ se dobló para formar la pieza de la figura (cotas en pulgadas): una pared triangular OAB en el plano yz, con $A(0,12,0)$ y $B(0,0,15)$; una pared rectangular $ODEA$ en el plano xy, de 16 (en x) por 12 (en y); y una pared rectangular $OBCD$ en el plano xz, de 16×15, a la que se le recortó un semicírculo de radio 6 con centro en $(8,0,0)$ sobre el borde OD. Determine las coordenadas del centro de gravedad.



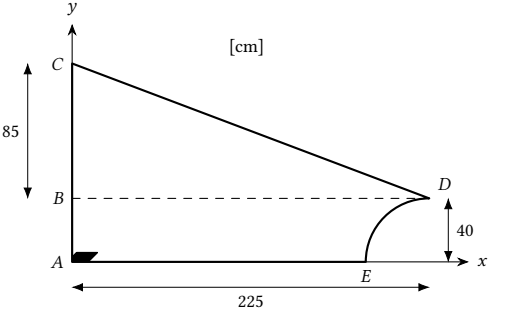
Resultado: $G(6.45,\ 3.25,\ 4.52)\,[\text{in}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

Ejercicio propuesto 4.6.5 · placa con recorte de cuarto de círculo

Adaptado de: 1er final 2016-2 (vespertino), problema 2

La placa de la figura (cotas en cm) tiene vértices $A(0,0)$, $C(0,125)$ y $D(225,40)$; $B(0,40)$ está sobre el lado AC. Su borde inferior va de A a $E(185,0)$ y de E a D sigue un cuarto de circunferencia de radio 40 con centro en $(225,0)$. Determine las coordenadas del centroide.



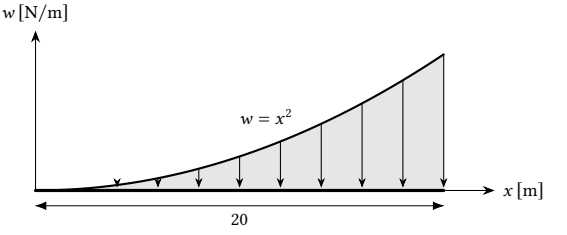
Resultado: $C(84.84,\ 46.93)\,[\text{cm}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 4.6.6 · fuerza equivalente de una carga parabólica

Adaptado de: 1er final 2011-1 (versión B), problema 4

Una viga de $20\,[\text{m}]$ soporta una carga distribuida hacia abajo que sigue la ley $w = x^2$ (w en N/m, x en metros, desde el apoyo izquierdo). Determine la magnitud de la fuerza equivalente y la abscisa de su línea de acción. (En el examen, la viga tiene además peso, una fuerza y un par, y se piden las reacciones: ese paso es el de la Unidad 5.)



Resultado: $F = 2666.7\,[\mathrm{N}]$ hacia abajo, en $x = 15\,[\mathrm{m}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

4.7 Errores frecuentes

1. **Huecos con área positiva.** Un recorte resta: su A_i va con signo negativo y su $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ se escriben con el signo de su posición.
2. **Cambiar el origen.** El resultado se pide respecto al sistema de la figura. Si para la tabla conviene otro origen, hay que trasladar el resultado al final (véase el ejemplo de la sección 4.4).
3. **Copiar mal una columna.** Es fácil poner $A_i\bar{y}_i$ en la columna de $A_i\bar{x}_i$. Revisa cada producto antes de sumar.
4. $4r/3\pi$ **medido desde el lugar equivocado.** Se mide desde el **centro** (el diámetro), hacia el lado curvo. En un semicírculo recortado desde arriba, el centroide queda debajo del diámetro.
5. **Triángulo al revés.** El centroide está a 1/3 del lado del ángulo recto (o de la base), no a 1/3 del vértice agudo. Si hay duda, se promedian los tres vértices.
6. **Mezclar unidades** en láminas en el sistema inglés: $\mathrm{lb/ft^3}$ se divide entre 1728 para pasar a $\mathrm{lb/in^3}$.
7. **Olvidar la tercera coordenada** en piezas dobladas: la coordenada perpendicular al plano de cada parte es cero (o la del plano), no se omite.
8. **Carga triangular a** $L/2$**.** La fuerza de una carga triangular actúa a $L/3$ del lado mayor; la de una uniforme, a $L/2$.
9. **Raíces sin sentido físico.** En problemas con parámetro, una longitud negativa o mayor que la figura se descarta.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $Q_y = \bar{x}A = \sum A_i\bar{x}_i$, $Q_x = \bar{y}A = \sum A_i\bar{y}_i$.
- $\bar{x} = \dfrac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}$ (huecos con $A_i < 0$); masas: $\bar{x} = \dfrac{\sum m_i\bar{x}_i}{\sum m_i}$, $m_i = \rho_i V_i$; láminas: $W_i = \gamma t A_i$.
- Rectángulo $(b/2,\ h/2)$; triángulo rectángulo $(b/3,\ h/3)$, área $bh/2$; triángulo cualquiera: promedio de vértices.
- Semicírculo: $\pi r^2/2$, $\bar{y} = 4r/3\pi$; cuarto de círculo: $\pi r^2/4$, $(4r/3\pi,\ 4r/3\pi)$; $4/3\pi = 0.4244$.
- Enjuta parabólica: $bh/3$, $(3b/4,\ 3h/10)$; semisegmento parabólico: $2bh/3$, $(3b/8,\ 3h/5)$.
- Carga distribuida: F es el área del diagrama de carga y actúa en su centroide. Uniforme: w_0L a $L/2$; triangular: $\frac{1}{2}w_0L$ a $L/3$ del lado mayor.

- $1\,[\text{ft}] = 12\,[\text{in}]$; $1\,[\text{ft}^3] = 1728\,[\text{in}^3]$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Redibuja la figura con los ejes y numera las partes $(1, 2, 3, \ldots)$.
2. Escribe la tabla completa con unidades en el encabezado; los huecos con signo negativo.
3. Suma columnas, divide y recuadra $\bar{x}$, $\bar{y}$ (y $\bar{z}$ si es 3D).
4. Marca el punto en el dibujo: si queda fuera del «grueso» de la figura, revisa signos.
5. En cargas distribuidas, dibuja cada fuerza equivalente sobre el diagrama de cuerpo libre, con su valor y su distancia, antes de escribir las ecuaciones de equilibrio.

Si no se encuentra el valor del parámetro, deja planteada la ecuación $\bar{x}(a) =$ valor dado con la tabla completa: el planteamiento correcto también cuenta.

Unidad 5 · Estudio del equilibrio de los cuerpos: reacciones en el plano y en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno resolverá ejercicios de equilibrio isostático para cuerpos rígidos, sistemas mecánicos y estructuras de uso frecuente en ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 24 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en los 13 aplicados desde 2014-1. Es la unidad que más sale. Suele ser el problema 4, muchas veces con una carga distribuida (Unidad 4).
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 con la tabla de apoyos a la vista (20 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve con cronómetro los ejercicios 5.5.2 (viga), 5.5.5 (barras articuladas) y 5.5.7 (rótula y cables), 20 min cada uno.

5.1 Conceptos y expresiones

Condiciones de equilibrio

Un cuerpo rígido está en equilibrio cuando el sistema de todas las fuerzas que actúan sobre él es equivalente a cero, es decir, cuando la resultante y el momento resultante respecto a cualquier punto son nulos:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \qquad \sum \vec{M}_P = \vec{0} \quad \text{(para cualquier punto } P\text{)}.$$

- **En el plano** (xy) quedan tres ecuaciones escalares independientes: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_P = 0$. Con ellas se calculan, como máximo, **tres** incógnitas.
- **En el espacio** quedan seis: $\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$ y $\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$. Como máximo, **seis** incógnitas.
- El momento de cada fuerza se calcula con $\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F}$ (Unidad 3). En el plano basta $M_P = xF_y - yF_x$, con (x, y) medidos desde P; el signo positivo es el antihorario.
- Un **par** de momento $\vec{M}$ se suma tal cual en la ecuación de momentos y no aparece en las de fuerzas.
- Una **carga distribuida** se sustituye por su fuerza equivalente: magnitud igual al área del diagrama de carga, aplicada en el centroide de esa área (Unidad 4). La sustitución vale para calcular reacciones, no para calcular esfuerzos internos.

Diagrama de cuerpo libre

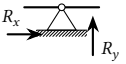
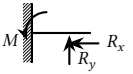
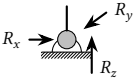
El diagrama de cuerpo libre (DCL) es el dibujo del cuerpo *aislado*: se quitan los apoyos y en su lugar se dibujan las fuerzas y pares que ejercen sobre el cuerpo. Lleva:

1. el contorno del cuerpo y el sistema de referencia;
2. las cargas conocidas (pesos en el centro de gravedad, fuerzas, pares, cargas distribuidas ya reducidas);
3. una reacción por cada apoyo, según la tabla de la sección 5.1.3, con un sentido supuesto;
4. las cotas necesarias para los momentos.

Si una incógnita sale negativa, el sentido real es el contrario al supuesto; no hace falta redibujar.

Apoyos y sus reacciones

Cada apoyo impide ciertos movimientos y, por eso, ejerce una fuerza (o un par) en esa dirección.

Apoyo	Dibujo	Reacción	Incógnitas
Apoyo libre: rodillo, patín, collarín liso o superficie lisa		Una fuerza perpendicular a la superficie de apoyo	1
Cable o cuerda		Una tensión a lo largo del cable, que jala al cuerpo	1
Barra de dos fuerzas (eslabón articulado en sus dos extremos y sin cargas intermedias)		Una fuerza a lo largo de la línea que une las dos articulaciones	1
Articulación (pasador)		Dos componentes, R_x y R_y	2
Empotramiento en el plano		R_x, R_y y un par M	3
Rótula (articulación esférica)		R_x, R_y, R_z; no ejerce par	3
Empotramiento en el espacio	—	R_x, R_y, R_z y M_x, M_y, M_z	6
Chumacera o bisagra	—	Dos fuerzas perpendiculares al eje (y dos pares si es la única)	2 o 4

Cuerpos de dos y de tres fuerzas

- **Dos fuerzas.** Si sobre un cuerpo actúan solo dos fuerzas (por ejemplo, una barra sin peso articulada en sus extremos), en equilibrio son iguales, opuestas y **colineales**: van a lo largo de la recta que une sus puntos de aplicación. Se usa para reducir incógnitas: una articulación unida a una barra de dos fuerzas da una sola incógnita, no dos.
- **Tres fuerzas.** Si actúan solo tres fuerzas no paralelas, sus líneas de acción son **concurrentes** (pasan por un mismo punto).

Isostático, hiperestático o mal sujeto

Sea n el número de incógnitas de reacción y e el número de ecuaciones independientes (3 en el plano, 6 en el espacio).

- $n = e$ y los apoyos están bien dispuestos: **isostático**; las reacciones salen de las ecuaciones de equilibrio. Es lo que pide el programa.
- $n > e$: **hiperestático**; las ecuaciones de la estática no bastan (hace falta la deformación). En el examen solo se pide reconocerlo.
- $n < e$, o apoyos con reacciones todas paralelas o todas concurrentes en un punto: **sujeción parcial o impropia**; el cuerpo solo queda en equilibrio para ciertas cargas. Si las ecuaciones resultan incompatibles, no hay equilibrio.

Algunos ejercicios dan una **condición extra** («la reacción en A es la mitad de la vertical en B») y piden una carga o una distancia desconocida: es una ecuación más para una incógnita más.

5.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«viga», «apoyo libre», «articulación», cargas en N/m	reacciones en el plano con carga distribuida	5.3.2
«determine M (o d) para que la reacción en A sea…»	condición extra: una ecuación más	5.3.3
«empotrado», «voladizo», «ménsula empotrada»	empotramiento: R_x, R_y y par M	5.3.2
«palanca», «aguilón», «pescante», «cable de control»	cuerpo con articulación y cable	5.3.2
«dos barras articuladas», «marco», «armadura»	barras de dos fuerzas y estructura como cuerpo rígido	5.3.4
«rótula», «cables», coordenadas de puntos	reacciones en el espacio	5.3.5
«placa (o viga en L) sostenida por cables verticales»	fuerzas paralelas en el espacio	5.3.5
«para cada tipo de apoyo», «¿está en equilibrio?»	clasificar la sujeción	5.3.6

5.3 Procedimientos

Diagrama de cuerpo libre

1. Aísla el cuerpo (o el sistema que te convenga) y dibuja su contorno con los ejes.
2. Reduce cada carga distribuida a su fuerza equivalente y anota dónde actúa.
3. Pon el peso en el centro de gravedad (si no es despreciable).
4. Sustituye cada apoyo por sus reacciones (tabla de la sección 5.1.3). En una barra de dos fuerzas, una sola fuerza a lo largo de la barra.
5. Cuenta las incógnitas y compáralas con 3 (plano) o 6 (espacio).

Reacciones en el plano

1. DCL (5.3.1). Si hay cables o fuerzas inclinadas, escribe sus componentes con el triángulo de pendiente $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ o con senos y cosenos.
2. Toma momentos respecto al punto por donde pasan **más incógnitas** (una articulación o un empotramiento): sale una ecuación con una sola incógnita.

3. Con $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ obtén las demás.
4. En un empotramiento, la ecuación de momentos da directamente el par de empotramiento M_A.
5. Comprueba con una ecuación de momentos respecto a otro punto.
6. Da la magnitud $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ y la dirección si piden «la reacción».

Viga con una condición extra

1. Plantea las tres ecuaciones con la incógnita adicional (M, d, una carga).
2. Escribe la condición del enunciado como ecuación: $R_A = \frac{1}{2}B_y$, $R_B = 9R_A$, etc.
3. Usa primero $\sum F_y = 0$ junto con la condición (dos ecuaciones, dos reacciones verticales) y después la ecuación de momentos para la incógnita adicional.

Barras articuladas y armaduras

1. Busca las barras de dos fuerzas: su fuerza va a lo largo de la barra.
2. Si la estructura completa tiene más de tres incógnitas, sepárala: DCL de la barra que tiene la carga, con la fuerza de la barra de dos fuerzas como una sola incógnita.
3. Una armadura sin peso, apoyada en una articulación y un apoyo libre, se trata como **un solo cuerpo rígido** para las reacciones: no hace falta calcular las fuerzas en sus barras.

Reacciones en el espacio

1. Escribe las coordenadas de todos los puntos.
2. Para cada cable PQ (del cuerpo al anclaje): $\vec{T}_{PQ} = T_{PQ}\,\hat{e}_{PQ}$ con $\hat{e}_{PQ} = \overrightarrow{PQ}/|\overrightarrow{PQ}|$.
3. Toma momentos respecto a la **rótula** O: sus tres componentes desaparecen y quedan solo las tensiones. $\sum \vec{M}_O = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$.
4. Iguala a cero cada componente $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ y resuelve las tensiones. Si una componente queda $0 = 0$ (giro alrededor del eje de una barra), es normal: esa ecuación no da información.
5. Con $\sum \vec{F} = \vec{0}$ obtén O_x, O_y, O_z.
6. Fuerzas paralelas (cables verticales): solo quedan $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$ y $\sum M_y = 0$.

Clasificar la sujeción

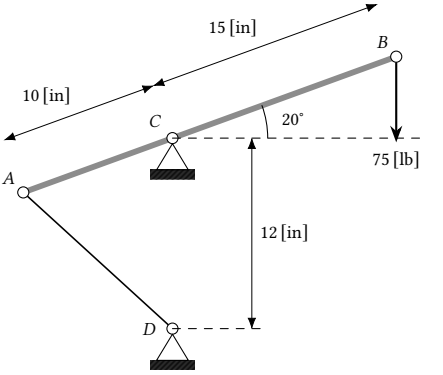
1. Cuenta las incógnitas n de los apoyos y compáralas con e (3 o 6).
2. Si $n = e$, revisa que las reacciones no sean todas paralelas ni concurrentes: si no lo son, es isostático.
3. Si $n < e$, resuelve con las ecuaciones que tengas y comprueba la que sobra: si se cumple, hay equilibrio solo para esa carga; si no, no hay equilibrio.
4. Si $n > e$, escribe «hiperestático de grado $n - e$».

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · palanca con cable de control

Basado en: 1er final 2016-2 (vespertino), problema 3.
La palanca AB, de peso despreciable, está articulada en C y se sujeta con el cable AD.

Forma 20° con la horizontal; $AC = 10\,[\text{in}]$, $CB = 15\,[\text{in}]$, y el anclaje D está $12\,[\text{in}]$ debajo de C, en la misma vertical. En B actúa una fuerza vertical de $75\,[\text{lb}]$ hacia abajo. Determine: a) la tensión en el cable; b) la reacción en C.



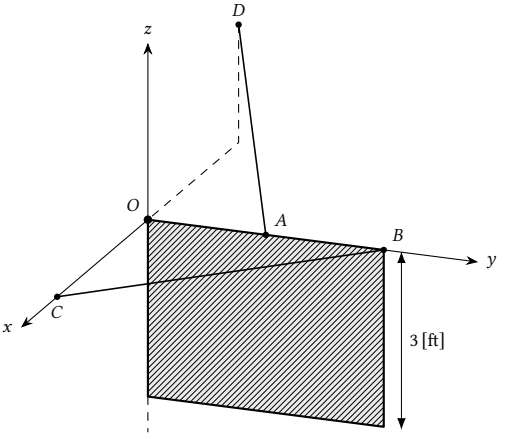
Datos. Origen en C: $A(-10\cos 20^\circ, -10\sin 20^\circ) = (-9.397, -3.420)\,[\text{in}]$, $B(15\cos 20^\circ, 15\sin 20^\circ) = (14.095, 5.130)\,[\text{in}]$, $D(0, -12)\,[\text{in}]$.
Planteamiento. DCL de la palanca: T en A dirigida hacia D; C_x, C_y en la articulación; $75\,[\text{lb}]$ en B. Tres incógnitas, tres ecuaciones. Momentos respecto a C.
Resolución. $\overrightarrow{AD} = (9.397, -8.580)$, $|AD| = 12.725\,[\text{in}]$, así que $\hat{e}_{AD} = (0.7385, -0.6743)$.

$$\sum M_C = (-9.397)(-0.6743\,T) - (-3.420)(0.7385\,T) + (14.095)(-75) = 0,$$

es decir, $8.861\,T = 1057.2$, de donde $T = 119.3\,[\text{lb}]$. $\sum F_x = 0$: $C_x + 0.7385(119.3) = 0 \Rightarrow C_x = -88.1\,[\text{lb}]$. $\sum F_y = 0$: $C_y - 0.6743(119.3) - 75 = 0 \Rightarrow C_y = 155.4\,[\text{lb}]$.
Resultado. a) $T = 119.3\,[\text{lb}]$. b) $\vec{C} = -88.1\,\hat{\imath} + 155.4\,\hat{\jmath}\,[\text{lb}]$; $|\vec{C}| = 178.7\,[\text{lb}]$, a 119.5° del eje x positivo.

Ejemplo resuelto · letrero con rótula y dos cables

Basado en: 1er final 2018-1 (vespertino), problema 4.
Un letrero rectangular homogéneo de $120\,[\text{lb}]$, de $4\,[\text{ft}]$ por $3\,[\text{ft}]$, está en el plano yz, colgado del borde OB (sobre el eje y). Se sostiene con una rótula en O y con los cables AD y BC: $A(0, 2, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(3, 0, 0)$, $D(-3, 0, 2)\,[\text{ft}]$. Determine las tensiones y la reacción en la rótula.



Datos. $W = 120\,[\text{lb}]$ en el centro del letrero, $G(0, 2, -1.5)\,[\text{ft}]$.
Planteamiento. Cinco incógnitas (T_{AD}, T_{BC}, O_x, O_y, O_z). Con momentos respecto a O desaparece la rótula.
Resolución. $\hat{e}_{AD} = \frac{(-3,-2,2)}{\sqrt{17}}$, $\hat{e}_{BC} = \frac{(3,-4,0)}{5}$.

$$\vec{r}_A \times \hat{e}_{AD} = \frac{(4,0,6)}{\sqrt{17}}, \qquad \vec{r}_B \times \hat{e}_{BC} = \left(0, 0, -\tfrac{12}{5}\right),$$

$$\vec{r}_G \times \vec{W} = (0, 2, -1.5) \times (0, 0, -120) = (-240, 0, 0).$$

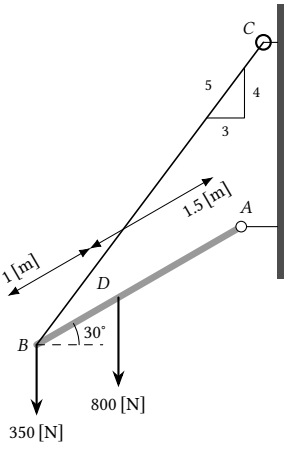
$\sum M_x = 0$: $\frac{4}{\sqrt{17}} T_{AD} - 240 = 0 \Rightarrow T_{AD} = 60\sqrt{17} = 247.4\,[\text{lb}]$.
$\sum M_z = 0$: $\frac{6}{\sqrt{17}} T_{AD} - \frac{12}{5} T_{BC} = 0 \Rightarrow T_{BC} = 150\,[\text{lb}]$.
$\sum \vec{F} = \vec{0}$: $O_x = \frac{3}{\sqrt{17}} T_{AD} - \frac{3}{5} T_{BC} = 180 - 90 = 90$; $O_y = \frac{2}{\sqrt{17}} T_{AD} + \frac{4}{5} T_{BC} = 120 + 120 = 240$; $O_z = 120 - \frac{2}{\sqrt{17}} T_{AD} = 0$.
Resultado. $T_{AD} = 247.4\,[\text{lb}]$, $T_{BC} = 150\,[\text{lb}]$, $\vec{O} = 90\,\hat{\imath} + 240\,\hat{\jmath}\,[\text{lb}]$ ($|\vec{O}| = 256.3\,[\text{lb}]$).

5.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 5.5.1 · aguilón con dos cargas

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 4

El aguilón AB, de peso despreciable, está articulado en A a un muro y forma 30° con la horizontal. El cable CB tiene pendiente 4 : 3. En B cuelga una carga de 350 [N] y en D (a 1 [m] de B; $DA = 1.5$ [m]) una de 800 [N]. Ignore el tamaño de los collarines. Determine: a) las componentes horizontal y vertical de la fuerza en la articulación A; b) la fuerza en el cable CB.



Datos. $AB = 2.5\,[\mathrm{m}]$. Con origen en B: $D(0.866, 0.5)$, $A(2.165, 1.25)\,[\mathrm{m}]$. Dirección del cable: $\hat{e}_{BC} = (0.6, 0.8)$.

Planteamiento. DCL del aguilón: T en B, cargas en B y D, A_x y A_y. Momentos respecto a A.

Resolución. Posiciones relativas a A: $\vec{r}_{B/A} = (-2.165, -1.25)$, $\vec{r}_{D/A} = (-1.299, -0.75)$.

$$\sum M_A = (-2.165)(0.8T - 350) - (-1.25)(0.6T) + (-1.299)(-800) = -0.982\,T + 1796.95 = 0$$

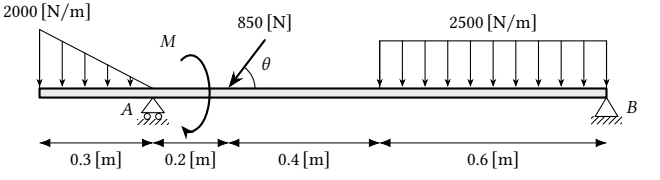
de donde $T = 1830\,[\mathrm{N}]$. Luego $\sum F_x = A_x + 0.6(1830) = 0 \Rightarrow A_x = -1098\,[\mathrm{N}]$ y $\sum F_y = A_y + 0.8(1830) - 350 - 800 = 0 \Rightarrow A_y = -314\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. a) $A_x = 1098\,[\mathrm{N}]$ hacia la izquierda, $A_y = 314\,[\mathrm{N}]$ hacia abajo. b) $T_{CB} = 1830\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 5.5.2 · viga con carga triangular, uniforme, fuerza inclinada y par

Adaptado de: 1er final 2013-2 (matutino), problema 4

La viga de la figura, de peso despreciable, tiene un apoyo libre en A y una articulación en B. Sobre ella actúan una carga triangular de 2000 [N/m] a 0, una fuerza de 850 [N] inclinada ($\cos\theta = \frac{3}{5}$), una carga uniforme de 2500 [N/m] y un par M de 1200 [N · m] en sentido horario. Determine las magnitudes de las reacciones en A y en B.



Datos. Origen en el extremo izquierdo: A en $x = 0.3$, fuerza de 850 [N] en $x = 0.5$, carga uniforme de $x = 0.9$ a 1.5, B en $x = 1.5$ [m].

Planteamiento. Cargas equivalentes: triángulo $\frac{1}{2}(2000)(0.3) = 300$ [N] en $x = 0.1$ (a 0.2 [m] a la izquierda de A); rectángulo $2500(0.6) = 1500$ [N] en $x = 1.2$. Componentes de la fuerza: $850(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-510, -680)$ [N]. Incógnitas: A (vertical), B_x, B_y.

Resolución. Momentos respecto a A (antihorario positivo):

$$\sum M_A = (0.2)(300) - (0.2)(680) - (0.9)(1500) - 1200 + 1.2\,B_y = 0,$$

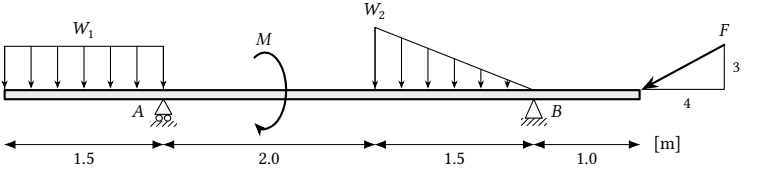
de donde $B_y = \frac{2626}{1.2} = 2188.3$ [N]. $\sum F_x$: $B_x - 510 = 0 \Rightarrow B_x = 510$ [N]. $\sum F_y$: $A - 300 - 680 - 1500 + B_y = 0 \Rightarrow A = 291.7$ [N].

Resultado. $A = 291.7$ [N] (hacia arriba); $\vec{B} = 510\,\hat{\imath} + 2188.3\,\hat{\jmath}$ [N], $|\vec{B}| = 2247.0$ [N].

Ejercicio 5.5.3 · momento del par para una condición entre reacciones

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 4

La viga de la figura (acotaciones en metros), de peso despreciable, tiene un apoyo libre en A y una articulación en B. Las cargas son $W_1 = 200$ [N/m] (uniforme), $W_2 = 600$ [N/m] (triangular, que baja a cero en B), $F = 500$ [N] con pendiente 3 : 4 y un par de momento M. La reacción en A es la mitad de la componente vertical de la reacción en B. Determine el momento M.



Datos. Origen en el extremo izquierdo: A en $x = 1.5$, W_2 de 3.5 a 5, B en 5, F en 6 [m]. $\vec{F} = 500(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = (-400, -300)$ [N].

Planteamiento. Cargas equivalentes: $200(1.5) = 300$ [N] en $x = 0.75$; $\frac{1}{2}(600)(1.5) = 450$ [N] en $x = 3.5 + \frac{1.5}{3} = 4.0$. Incógnitas: A, B_x, B_y y M; la condición $A = \frac{1}{2}B_y$ completa cuatro ecuaciones.

Resolución. $\sum F_x$: $B_x - 400 = 0 \Rightarrow B_x = 400$ [N]. $\sum F_y$: $A + B_y - 300 - 450 - 300 = 0$ y $A = \frac{1}{2}B_y$, así que $B_y = 700$ [N] y $A = 350$ [N]. Momentos respecto a B (antihorario positivo; M supuesto antihorario):

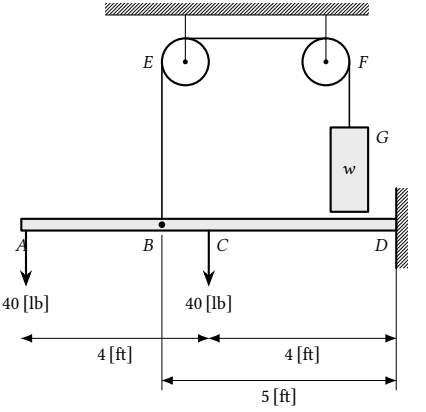
$$\sum M_B = (-4.25)(-300) + (-3.5)(350) + (-1)(-450) + (1)(-300) + M = 200 + M = 0.$$

Resultado. $M = -200$ [N · m]: 200 [N · m] en sentido **horario** ($\vec{M} = -200\,\hat{k}$ [N · m]); $A = 350$ [N], $B_x = 400$ [N], $B_y = 700$ [N].

Ejercicio 5.5.4 · viga empotrada con cable y contrapeso

Adaptado de: 1er final 2016-2 (matutino), problema 3

La viga AD, de peso despreciable, está empotrada en D. En A y en C cuelgan cargas de 40 [lb]. Un cable unido en B sube, pasa por las poleas lisas E y F y sostiene un contrapeso G de $w = 100$ [lb]. Desprecie el peso de las poleas y sus soportes. Determine las reacciones en el empotramiento y diga si el sistema está en equilibrio.



Datos. Origen en D: A en $x = -8$, B en $x = -5$, C en $x = -4$ [ft].

Planteamiento. Contrapeso: $\sum F_y = T - w = 0 \Rightarrow T = 100$ [lb] (poleas lisas: la tensión es la misma en todo el cable). Viga: cargas de 40 [lb] en A y C, T hacia arriba en B, y en el empotramiento D_x, D_y, M_D. Tres incógnitas: isostático, siempre hay equilibrio.

Resolución. $\sum F_x$: $D_x = 0$. $\sum F_y$: $D_y + 100 - 40 - 40 = 0 \Rightarrow D_y = -20$ [lb].

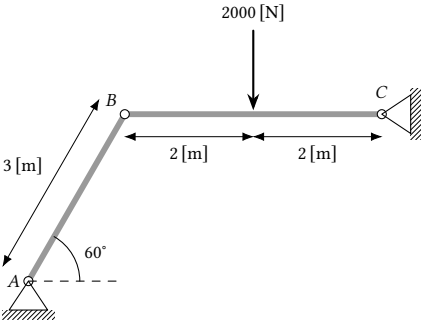
$$\sum M_D = (-8)(-40) + (-4)(-40) + (-5)(100) + M_D = -20 + M_D = 0 \;\Rightarrow\; M_D = 20\,[\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

Resultado. $T = 100$ [lb]; $D_x = 0$, $D_y = 20$ [lb] hacia abajo y $M_D = 20$ [lb · ft] antihorario. El sistema sí está en equilibrio: el empotramiento absorbe la diferencia. **Observación:** si D fuera solo una articulación, el equilibrio exigiría $5T = 480$, es decir, un contrapeso de 96 [lb], y con 100 [lb] la viga giraría.

Ejercicio 5.5.5 · dos barras articuladas

Adaptado de: 1er final 2015-1 (matutino), problema 4

Dos barras de peso despreciable están articuladas entre sí en B y a apoyos fijos en A y C. La barra AB mide 3 [m] y forma 60° con la horizontal; la barra BC es horizontal, de 4 [m], y en su punto medio actúa una fuerza vertical de 2000 [N] hacia abajo. Determine las magnitudes de las reacciones en las articulaciones A, B y C.



Planteamiento. AB no tiene cargas entre sus extremos: es una **barra de dos fuerzas** y la fuerza que ejerce sobre BC en B va a lo largo de AB, $\vec{F}_B = F_{AB}(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$. DCL de BC: $\vec{F}_B$, 2000 [N] a 2 [m] de B, C_x y C_y. Tres incógnitas.

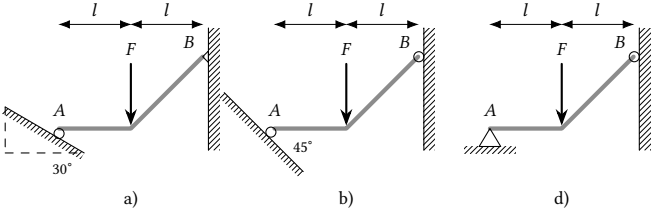
Resolución. Momentos respecto a C (a 4 [m] de B): $\sum M_C = -4\,F_{AB}\sin 60^\circ + 2(2000) = 0 \Rightarrow F_{AB}\sin 60^\circ = 1000$ [N], así que $F_{AB} = \frac{1000}{0.8660} = 1154.7$ [N] y $F_{AB}\cos 60^\circ = 577.4$ [N]. $\sum F_x$: $577.4 + C_x = 0 \Rightarrow C_x = -577.4$ [N]. $\sum F_y$: $1000 - 2000 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = 1000$ [N].

Resultado. $A = B = 1154.7$ [N] (la barra AB trabaja a compresión); $\vec{C} = -577.4\,\hat{\imath} + 1000\,\hat{\jmath}$ [N], $C = 1154.7$ [N].

Ejercicio 5.5.6 · la misma ménsula con distintos apoyos

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 4

Una ménsula de peso despreciable va de A a un codo a la distancia l (tramo horizontal) y de ahí a B, que está l más a la derecha y l más arriba, junto a un muro vertical. En el codo actúa una fuerza vertical F. Para cada caso, determine las reacciones en función de F: a) articulación en B y apoyo deslizante en A sobre un plano inclinado 30°; b) apoyos deslizantes en A (sobre un plano inclinado 45°) y en B (contra el muro); d) articulación en A y apoyo deslizante en B contra el muro.



Planteamiento. Origen en A; codo en $(l, 0)$ y B en $(2l, l)$. Un apoyo deslizante da una fuerza perpendicular a su superficie: contra el muro, horizontal hacia la izquierda; sobre el plano de 30°, a 60° de la horizontal, $R_A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; sobre el de 45°, $R_A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Resolución.

a) Incógnitas R_A, B_x, B_y (con B_x hacia la izquierda). $\sum F_x$: $\frac{1}{2}R_A - B_x = 0$; $\sum F_y$: $\frac{\sqrt{3}}{2}R_A + B_y - F = 0$; $\sum M_A$: $-lF + 2l\,B_y + l\,B_x = 0$. Sustituyendo, $F = (\sqrt{3} - \frac{1}{2})R_A$, de donde $R_A = 0.812F$, $B_x = 0.406F$, $B_y = 0.297F$ y $R_B = 0.503F$. Isostático.

b) Solo dos incógnitas, R_A y R_B, para tres ecuaciones. $\sum F_y$: $\frac{R_A}{\sqrt{2}} = F$; $\sum F_x$: $\frac{R_A}{\sqrt{2}} = R_B$; $\sum M_A$: $-lF + l\,R_B = 0$. Las tres se cumplen con $R_A = \sqrt{2}\,F$ y $R_B = F$ porque las tres líneas de acción pasan por el punto (l, l). La sujeción es **parcial**: hay equilibrio con esta carga, pero si F se moviera de lugar la ménsula deslizaría.

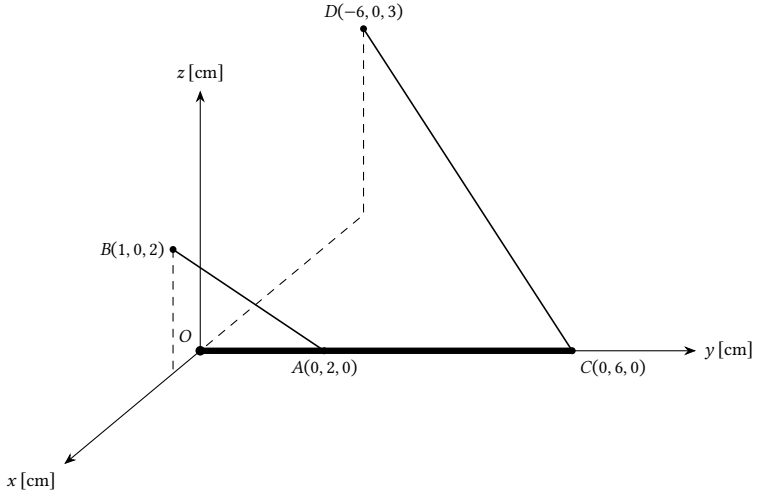
d) Incógnitas A_x, A_y, R_B. $\sum M_A$: $-lF + l\,R_B = 0 \Rightarrow R_B = F$; $A_x = R_B = F$, $A_y = F$, así que $R_A = \sqrt{2}\,F$. Isostático.

Resultado. a) $R_A = 0.812F$, $R_B = 0.503F$. b) $R_A = \sqrt{2}F = 1.414F$, $R_B = F$ (sujeción parcial). d) $R_A = \sqrt{2}F$, $R_B = F$.

Ejercicio 5.5.7 · barra con rótula y dos cables

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 4

La barra delgada y homogénea OC, de 130 [N], está sobre el eje y y se apoya en una rótula en O. La sostienen los cables AB y CD, con $A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, 6, 0)$ y $D(-6, 0, 3)$ [cm]. Determine las tensiones en los cables y las componentes de la reacción en O.



Datos. $W = 130$ [N] en el punto medio $G(0, 3, 0)$.

Planteamiento. $\hat{e}_{AB} = \frac{(1,-2,2)}{3}$, $\hat{e}_{CD} = \frac{(-6,-6,3)}{9} = \frac{(-2,-2,1)}{3}$. Momentos respecto a O.

Resolución.

$$\vec{r}_A \times \hat{e}_{AB} = \tfrac{1}{3}(4, 0, -2), \quad \vec{r}_C \times \hat{e}_{CD} = (2, 0, 4), \quad \vec{r}_G \times \vec{W} = (-390, 0, 0).$$

$\sum M_z = 0$: $-\frac{2}{3}T_{AB} + 4T_{CD} = 0 \Rightarrow T_{AB} = 6\,T_{CD}$. $\sum M_x = 0$: $\frac{4}{3}T_{AB} + 2T_{CD} - 390 = 0 \Rightarrow 10\,T_{CD} = 390$, así que $T_{CD} = 39\,[\text{N}]$ y $T_{AB} = 234\,[\text{N}]$. ($\sum M_y$ da $0 = 0$: la barra está sobre el eje y.)

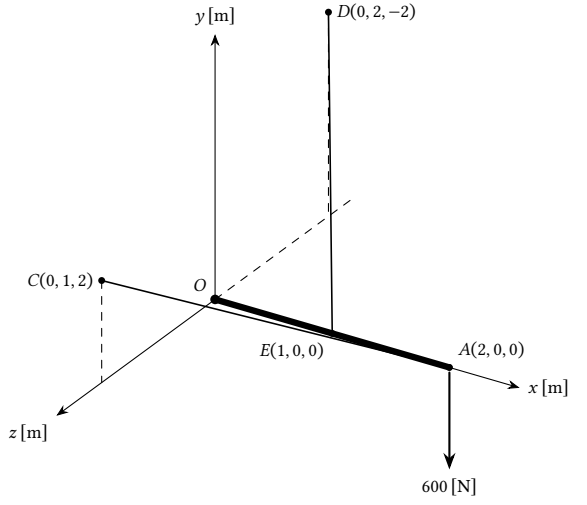
$\sum F_x$: $O_x + 78 - 26 = 0$; $\sum F_y$: $O_y - 156 - 26 = 0$; $\sum F_z$: $O_z + 156 + 13 - 130 = 0$.

Resultado. $T_{AB} = 234\,[\text{N}]$, $T_{CD} = 39\,[\text{N}]$; $\vec{O} = -52\,\hat{\imath} + 182\,\hat{\jmath} - 39\,\hat{k}\,[\text{N}]$.

Ejercicio 5.5.8 · brazo con rótula, dos cables y fuerza en el extremo

Adaptado de: 1er final 2012-2 (matutino), problema 4

El brazo OA, de $2\,[\text{m}]$ y peso despreciable, está sobre el eje x, con una rótula en O. Lo sostienen los cables AC y ED, con $A(2,0,0)$, $E(1,0,0)$, $C(0,1,2)$ y $D(0,2,-2)\,[\text{m}]$. En A actúa una fuerza de $600\,[\text{N}]$ paralela al eje y, hacia abajo. Determine las tensiones en los cables y la magnitud de la reacción en O.



Planteamiento. $\hat{e}_{AC} = \frac{(-2,1,2)}{3}$, $\hat{e}_{ED} = \frac{(-1,2,-2)}{3}$, $\vec{F} = -600\,\hat{\jmath}\,[\text{N}]$. Momentos respecto a O.

Resolución.

$$\vec{r}_A \times \hat{e}_{AC} = \tfrac{1}{3}(0,-4,2), \quad \vec{r}_E \times \hat{e}_{ED} = \tfrac{1}{3}(0,2,2), \quad \vec{r}_A \times \vec{F} = (0,0,-1200).$$

$\sum M_y$: $-\frac{4}{3}T_{AC} + \frac{2}{3}T_{ED} = 0 \Rightarrow T_{ED} = 2T_{AC}$. $\sum M_z$: $\frac{2}{3}T_{AC} + \frac{2}{3}T_{ED} - 1200 = 0 \Rightarrow 2T_{AC} = 1200$.

Con $T_{AC} = 600\,[\text{N}]$ y $T_{ED} = 1200\,[\text{N}]$: $O_x = \frac{2}{3}(600) + \frac{1}{3}(1200) = 800$; $O_y = 600 - \frac{1}{3}(600) - \frac{2}{3}(1200) = -400$; $O_z = -\frac{2}{3}(600) + \frac{2}{3}(1200) = 400\,[\text{N}]$.

Resultado. $T_{AC} = 600\,[\text{N}]$, $T_{ED} = 1200\,[\text{N}]$; $\vec{O} = 800\,\hat{\imath} - 400\,\hat{\jmath} + 400\,\hat{k}\,[\text{N}]$, $|\vec{O}| = 979.8\,[\text{N}]$.

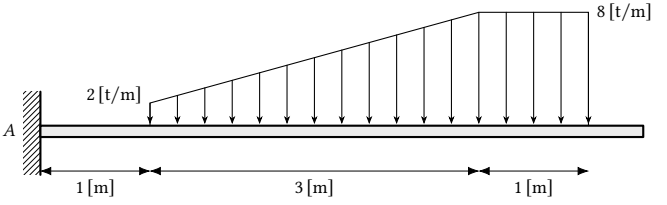
5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 5.6.1 · viga en voladizo con carga trapecial

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3

La viga en voladizo de la figura, de peso despreciable, está empotrada en A. La carga crece linealmente de 2 [t/m] (a 1 [m] de A) a 8 [t/m] (a 4 [m] de A) y sigue constante en 8 [t/m] hasta 5 [m] de A. Determine la reacción en el empotramiento.



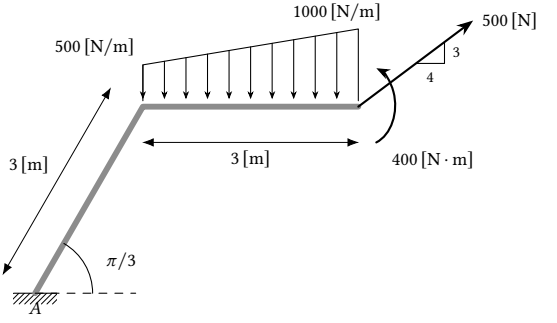
Resultado: $R_A = 23\,[\mathrm{t}]$ hacia arriba; $M_A = 78\,[\mathrm{t}\cdot\mathrm{m}]$ antihorario.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 5.6.2 · marco empotrado

Adaptado de: 1er final 2015-1 (vespertino), problema 4

El marco de la figura, de peso despreciable, está empotrado en A. Su tramo inclinado mide 3 [m] y forma $\pi/3$ [rad] con la horizontal; el tramo horizontal mide 3 [m] y lleva una carga que crece de 500 a 1000 [N/m]. En el extremo libre actúan una fuerza de 500 [N] con pendiente 3 : 4 (hacia arriba y a la derecha) y un par de 400 [N · m] antihorario. Determine la reacción en A.



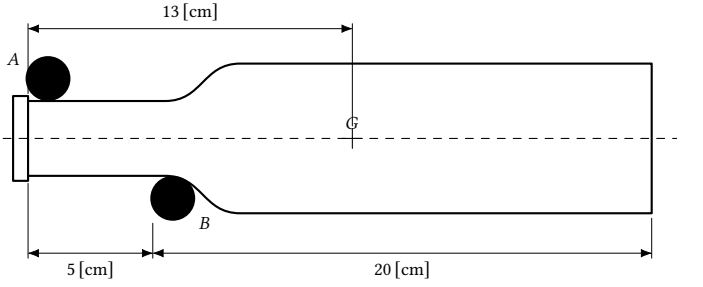
Resultado: $A_x = 400\,[\mathrm{N}]$ hacia la izquierda, $A_y = 1950\,[\mathrm{N}]$ hacia arriba ($R_A = 1990.6\,[\mathrm{N}]$) y $M_A = 6414\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$ antihorario.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.3 · botella sobre dos clavijas lisas

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 2

Una botella parcialmente llena, de 1.2 [kg] en total, descansa horizontal sobre dos clavijas lisas: la clavija A toca el cuello por arriba, en su extremo, y la clavija B lo toca por abajo, a 5 [cm] de A. El centro de gravedad G está a 13 [cm] de A. Determine la magnitud y la dirección de las reacciones de las clavijas ($g = 9.81\,[\mathrm{m/s^2}]$).



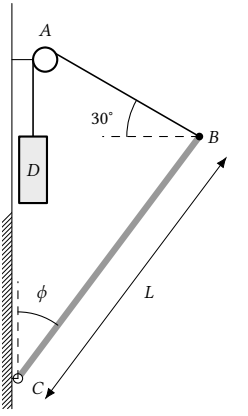
Resultado: $R_A = 18.8$ [N] hacia abajo; $R_B = 30.6$ [N] hacia arriba.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.4 · barra articulada, cuerda y bloque colgante

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 4

La barra homogénea CB, de 100 [N] y longitud L, está articulada en C y forma con la vertical un ángulo ϕ con $\cos\phi = 0.8$. De B sale una cuerda que forma 30° con la horizontal, pasa por una polea lisa A fija al muro y sostiene el bloque D. Determine el peso del bloque para que haya equilibrio, la tensión en la cuerda y la magnitud de la reacción en C.



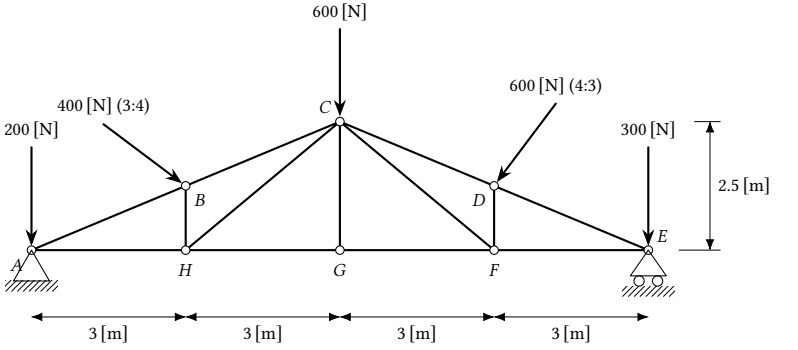
Resultado: $W_D = T = 30.2\,[\mathrm{N}]$; $\vec{C} = 26.2\,\hat{\imath} + 84.9\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$, $C = 88.8\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.5 · armadura como cuerpo rígido

Adaptado de: 2º final 2011-2, problema 4

La armadura de la figura, de peso despreciable, tiene una articulación en A y un apoyo libre en E. Su cuerda inferior mide 12 [m] (cuatro tramos de 3 [m]) y la altura en C es 2.5 [m]; B y D están a media altura. Cargas: 200 [N] vertical en A; 400 [N] en B con pendiente 3 : 4 (hacia abajo y a la derecha); 600 [N] vertical en C; 600 [N] en D con pendiente 4 : 3 (hacia abajo y a la izquierda); 300 [N] vertical en E. Determine las reacciones en A y E.



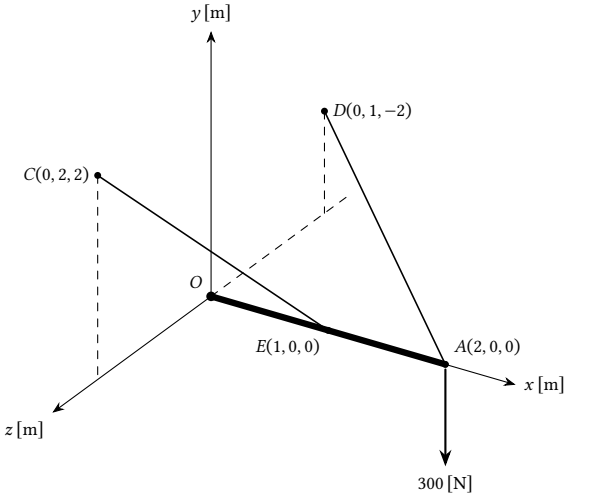
Resultado: $A_x = 40\,[\mathrm{N}]$ hacia la derecha, $A_y = 804.2\,[\mathrm{N}]$ ($A = 805.2\,[\mathrm{N}]$); $E = 1015.8\,[\mathrm{N}]$ hacia arriba.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.6 · brazo con rótula y cables, segunda versión

Adaptado de: 1er final 2012-2 (vespertino), problema 4

El brazo OA de 2 [m], sobre el eje x, tiene una rótula en O y lo sostienen los cables EC y AD, con $E(1, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 2)$ y $D(0, 1, -2)$ [m]. En A actúa una fuerza de 300 [N] paralela al eje y, hacia abajo. Determine las tensiones y la magnitud de la reacción en O.

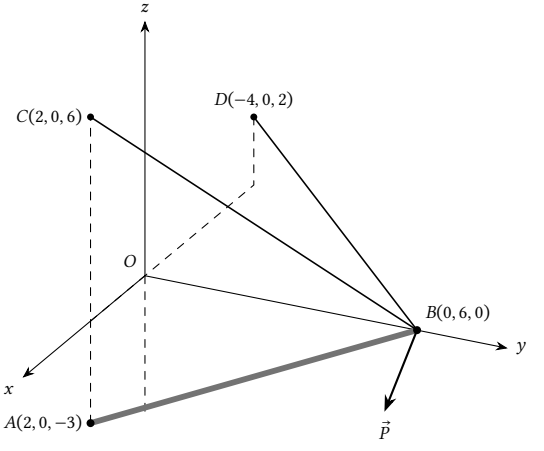


Resultado: $T_{EC} = 600\,[\mathrm{N}]$, $T_{AD} = 300\,[\mathrm{N}]$; $\vec{O} = 400\,\hat{\imath} - 200\,\hat{\jmath} - 200\,\hat{k}\,[\mathrm{N}]$, $|\vec{O}| = 489.9\,[\mathrm{N}]$.
→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 5.6.7 · pescante con rótula, dos cables y fuerza dada

Adaptado de: 1er final 2018-1 (matutino), problema 4

El pescante ligero AB está unido a un muro por una rótula en $A(2, 0, -3)$ y se sostiene con dos cables que van de $B(0, 6, 0)$ a $C(2, 0, 6)$ y a $D(-4, 0, 2)\,[\mathrm{m}]$. En B actúa $\vec{P} = 12\,\hat{\imath} - 16\,\hat{k}\,[\mathrm{kN}]$. Como el pescante es un cuerpo de dos fuerzas, la reacción en A actúa a lo largo de AB. Calcule las tensiones en los cables y la magnitud de la reacción en A.



Resultado: $R_A = 18.67\,[\text{kN}]$ (compresión), $T_{BC} = 5.81\,[\text{kN}]$, $T_{BD} = 14.97\,[\text{kN}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

5.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar el par de empotramiento.** Un empotramiento tiene tres reacciones en el plano: R_x, R_y y M. Sin M, la ecuación de momentos queda mal (ejercicio 5.5.4).
2. **Dejar la carga distribuida sin reducir** o ponerla en el centro del tramo cuando es triangular: la resultante de un triángulo va a un tercio del lado alto.
3. **Signo del par.** Fija el sentido positivo (antihorario) antes de escribir $\sum M$ y suma el par con su signo; no lo multipliques por ninguna distancia.
4. **Reacción de un apoyo libre inclinado** dibujada vertical: es perpendicular a la superficie.
5. **Cable que empuja.** La tensión siempre jala al cuerpo, hacia el anclaje.
6. **Barra de dos fuerzas con dos componentes libres.** Su fuerza tiene dirección conocida: una sola incógnita.
7. **Vector unitario al revés** en 3D: $\hat{e}$ va del punto del cuerpo al anclaje.
8. **Momentos 3D respecto a un punto que no es la rótula:** aparecen las tres componentes de la rótula y el sistema crece sin necesidad.
9. **Confundir «sin equilibrio» con «hiperestático»**: el primero tiene ecuaciones incompatibles; el segundo, más incógnitas que ecuaciones.
10. **Unidades mezcladas:** [lb · ft] con pulgadas, [t] con newtons, masa en [kg] sin multiplicar por g.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Plano: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_P = 0$ (3 incógnitas). Espacio: $\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\sum \vec{M}_O = \vec{0}$ (6 incógnitas).
- $M_P = xF_y - yF_x$ (antihorario positivo) · $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$.
- Cable: $\vec{T} = T\,\hat{e}_{PQ}$, $\hat{e}_{PQ} = \overrightarrow{PQ}/|\overrightarrow{PQ}|$.
- Apoyo libre o superficie lisa: 1 (normal) · cable: 1 (tensión) · barra de dos fuerzas: 1 (a lo largo) · articulación: 2 · empotramiento plano: 3 (R_x, R_y, M) · rótula: 3 · empotramiento en el espacio: 6.
- Carga uniforme w en L: wL en $L/2$. Triangular de 0 a w: $\frac{1}{2}wL$ a $\frac{L}{3}$ del lado alto.
- Dos fuerzas: colineales. Tres fuerzas: concurrentes.
- $n = e$: isostático · $n > e$: hiperestático · $n < e$ o reacciones paralelas o concurrentes: sujeción parcial o impropia.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. DCL grande y limpio, con el sistema de referencia y las cotas.
2. Cargas distribuidas reducidas en el mismo dibujo (magnitud y posición).
3. Conteo de incógnitas: «3 incógnitas, 3 ecuaciones: isostático».
4. Ecuación de momentos respecto al punto con más incógnitas; después las de fuerzas.
5. En 3D: tabla de puntos, vectores unitarios, $\vec{r} \times \vec{F}$ de cada fuerza respecto a la rótula.

6. Resultado recuadrado con magnitud, dirección y unidades; si una reacción salió negativa, dilo («hacia abajo»).

Si no se encuentra el camino, el DCL correcto y las ecuaciones planteadas también cuentan.

Unidad 6 · Fricción: deslizamiento, volcamiento y cuerpos conectados

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno comprenderá el fenómeno de fricción en seco y resolverá ejercicios donde intervengan fuerzas de fricción.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 23 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en 12 de los 13 aplicados desde 2014-1. Casi siempre es el último problema: el 5 hasta 2015-2 y el 4 desde 2016-2.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 6.1 y la tabla de la sección 6.2 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 6.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 6.5.1, 6.5.3 y 6.5.6 con cronómetro (20 min cada uno).

6.1 Conceptos y expresiones

Fricción en seco

Cuando dos superficies secas están en contacto, la fuerza que una ejerce sobre la otra se descompone en una **normal** N, perpendicular a la superficie, y una **fuerza de fricción** f, tangente a ella. La fricción se opone al deslizamiento (o a la tendencia a deslizar) de una superficie respecto a la otra. El programa distingue la fricción en seco (de Coulomb) de la fricción en fluidos; en el examen solo se evalúa la primera.

Leyes de Coulomb-Morin.

- Mientras el cuerpo está en reposo, f es la que haga falta para el equilibrio y cumple

$$f \le \mu_s N.$$

- En el **movimiento inminente** («a punto de deslizar», «a punto de moverse», «a punto de subir o de bajar») la fricción alcanza su valor máximo:

$$f = f_{\text{máx}} = \mu_s N.$$

- Si el cuerpo ya desliza, $f_k = \mu_k N$, con $\mu_k < \mu_s$.
- μ_s y μ_k dependen de los materiales en contacto, no del área de contacto.

Ángulo de fricción. La resultante de N y $f_{\text{máx}}$ forma con la normal el ángulo ϕ_s:

$$\tan \phi_s = \mu_s.$$

Un bloque solo, sin otras fuerzas, sobre un plano inclinado un ángulo θ está a punto de deslizar cuando $\theta = \phi_s$, es decir, cuando $\tan\theta = \mu_s$.

Dirección de la fricción

La fricción apunta **en contra del movimiento que está a punto de ocurrir**:

- «a punto de subir» por el plano: f hacia abajo del plano;
- «a punto de bajar»: f hacia arriba del plano;
- «¿hay equilibrio?»: se supone una dirección, se calcula f con las ecuaciones de equilibrio y el signo dice hacia dónde apunta.

Volcamiento

Un cuerpo apoyado sobre una cara puede, en lugar de deslizar, **volcar** girando alrededor de una arista de su base. En el volcamiento inminente la normal se concentra en esa arista: la suma de momentos respecto a ella es cero con N aplicada ahí. El cuerpo vuelca primero si la fuerza que lo vuelca es menor que la que lo hace deslizar.

Cuerdas y poleas

Con una cuerda lisa (o una polea sin fricción) la tensión es la misma en toda la cuerda. Una **polea móvil** que cuelga de dos tramos de la misma cuerda sostiene $2T$: si de ella cuelga un peso W_B, entonces $T = W_B/2$.

6.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«a punto de moverse», «determine el coeficiente»	un bloque con $f = \mu_s N$	6.3.1
«fuerza mínima (o máxima) para que…»	movimiento inminente en una dirección	6.3.1
«intervalo de valores», «ni hacia arriba ni hacia abajo»	dos casos de movimiento inminente	6.3.2
cuerda, polea, dos bloques unidos	cuerpos conectados	6.3.3
«a punto de volcar», «se desliza antes de volcarse»	volcamiento contra deslizamiento	6.3.4
«¿está en equilibrio?», «magnitud y dirección de la fricción»	comparar f requerida con $\mu_s N$	6.3.5

6.3 Procedimientos

Un bloque en movimiento inminente

1. Dibuja el diagrama de cuerpo libre: peso, normal, fricción y las fuerzas aplicadas.
2. Elige ejes paralelo (x) y perpendicular (y) al plano. En un plano de pendiente $3:4$, $\sin\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$.
3. Decide hacia dónde está a punto de moverse el bloque y pon f en sentido contrario.
4. Escribe $\sum F_y = 0$ y despeja N. Cuidado: una fuerza inclinada respecto al plano cambia N.
5. Escribe $\sum F_x = 0$ con $f = \mu_s N$ y despeja la incógnita (μ_s, una fuerza o un ángulo).

Intervalo de equilibrio

1. Resuelve el caso «a punto de subir» (f hacia abajo del plano) con el procedimiento 6.3.1.
2. Resuelve el caso «a punto de bajar» (f hacia arriba del plano).
3. El cuerpo queda en reposo para cualquier valor entre los dos resultados.

Cuerpos conectados

1. Haz un diagrama de cuerpo libre **por cada cuerpo**; la cuerda transmite la misma T.
2. Decide qué cuerpo se mueve hacia dónde: si uno sube, el otro baja.
3. En cada superficie donde haya movimiento inminente, $f = \mu_s N$.
4. Despeja T del cuerpo más sencillo y sustitúyela en el otro.
5. Si hay polea móvil, $T = W/2$ para el peso que cuelga de ella.

Volcamiento contra deslizamiento

1. **Deslizamiento:** $\sum F_y = 0$ da N; $\sum F_x = 0$ con $f = \mu_s N$ da la fuerza (o el ángulo) que inicia el deslizamiento.
2. **Volcamiento:** identifica la arista de giro (la del lado hacia donde empujan las fuerzas). Toma momentos respecto a ella: ahí actúan N y f, que no producen momento. Despeja la fuerza (o el ángulo, o la altura) que inicia el volcamiento.
3. Compara: ocurre primero lo que necesite la fuerza menor (o el ángulo menor).
4. Si piden «a punto de volcar y de deslizar a la vez», se plantean las dos condiciones juntas.

¿Hay equilibrio?

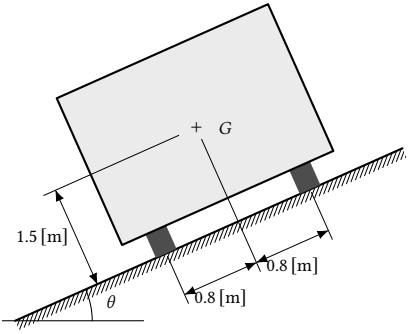
1. Supón que hay equilibrio y una dirección para f.
2. Con $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ calcula la f requerida y N.
3. Si $|f| \leq \mu_s N$, hay equilibrio y la fricción vale f (el signo da su dirección).
4. Si $|f| > \mu_s N$, no hay equilibrio: el bloque desliza y la fricción vale $f_k = \mu_k N$, opuesta al movimiento.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · camión en una pendiente

Basado en: 2º final 2018-1, problema 4.

Un camión de 12 ton está estacionado sobre un camino inclinado un ángulo θ. Su centro de gravedad G está a 1.5 [m] del camino y a la mitad de la distancia entre ejes, que es de 1.6 [m]. El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el camino es 0.6. Determine el máximo ángulo θ con el que el camión no se vuelca ni se desliza.



Datos. $W = 12\,[\text{ton}]$; altura de G: $1.5\,[\text{m}]$; distancia de G a cada eje: $0.8\,[\text{m}]$; $\mu_s = 0.6$.
Planteamiento. Ejes x paralelo al camino (hacia abajo) y y perpendicular. Se calcula el ángulo de deslizamiento inminente y el de volcamiento inminente; el máximo permitido es el menor.
Resolución.

1. Deslizamiento: $\sum F_y = 0$: $N = 12\cos\theta$. $\sum F_x = 0$: $12\sin\theta - 0.6N = 0$. Entonces $\tan\theta = 0.6$ y $\theta = 30.96^\circ$.
2. Volcamiento: el camión gira alrededor de la llanta de abajo cuando la vertical que pasa por G llega a ella. Con momentos respecto a ese punto, $(12\sin\theta)(1.5) - (12\cos\theta)(0.8) = 0$, de donde $\tan\theta = \frac{0.8}{1.5}$ y $\theta = 28.07^\circ$.
3. El volcamiento ocurre con un ángulo menor: manda el volcamiento.

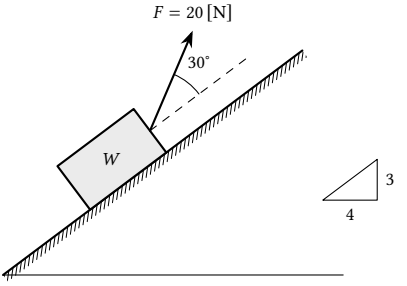
Resultado. $\theta_{\text{máx}} = 28.1^\circ$; con un ángulo mayor el camión se vuelca antes de deslizarse.

6.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 6.5.1 · coeficiente con una fuerza inclinada

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 5

Un bloque de 20 [N] descansa sobre un plano de pendiente 3 : 4. Se le aplica una fuerza $F = 20\,[\text{N}]$ que forma 30° con el plano, hacia arriba de él, y con ella el bloque queda a punto de moverse. Determine el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano. (El mismo problema se repitió en el 1er final 2016-2, turno matutino.)



Datos. $W = 20\,[\text{N}]$, $F = 20\,[\text{N}]$, $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$.

Planteamiento. Ejes x hacia arriba del plano y y perpendicular. Componentes de F: $F\cos 30^\circ = 17.32\,[\text{N}]$ a lo largo del plano y $F\sin 30^\circ = 10\,[\text{N}]$ alejándose de él. La componente del peso a lo largo del plano es $W\sin\theta = 12\,[\text{N}]$, menor que 17.32: el bloque está a punto de **subir** y f apunta hacia abajo del plano.

Resolución.

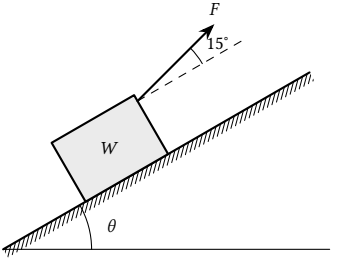
1. $\sum F_y = 0$: $N + 10 - 16 = 0$, así que $N = 6\,[\text{N}]$.
2. $\sum F_x = 0$: $17.32 - 12 - f = 0$, así que $f = 5.32\,[\text{N}]$.
3. $f = \mu_s N$: $\mu_s = \frac{5.32}{6}$.

Resultado. $\mu_s = 0.887$.

Ejercicio 6.5.2 · fuerza mínima para subir

Adaptado de: 1er final 2015-2 (vespertino), problema 5

Un bloque de 10 [N] está sobre un plano inclinado $\theta = 30^\circ$; el coeficiente de fricción estática es 0.3. Una fuerza F, que forma 15° con el plano, mantiene el bloque en reposo, a punto de ascender. Obtenga el mínimo valor de F.



Datos. $W = 10\,[\text{N}]$, $\theta = 30^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\mu_s = 0.3$.

Planteamiento. A punto de ascender: $f = \mu_s N$ hacia abajo del plano. Ejes paralelo y perpendicular al plano.

Resolución.

1. $\sum F_y = 0$: $N = W\cos\theta - F\sin\alpha$.

2. $\sum F_x = 0$: $F\cos\alpha - W\sin\theta - \mu_s(W\cos\theta - F\sin\alpha) = 0$.
3. Despejando,

$$F = \frac{W(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha} = \frac{10(0.5 + 0.3\cdot 0.8660)}{0.9659 + 0.3\cdot 0.2588} = 7.28\,[\text{N}].$$

4. Comprobación: $N = 8.660 - 1.884 = 6.776$ [N] (positiva: el bloque sigue apoyado).

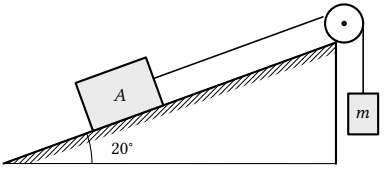
Resultado. $F_{\text{mín}} = 7.28$ [N].

Observación. Si el ángulo α se pudiera elegir, la fuerza más pequeña se obtiene con $\tan\alpha = \mu_s$ ($\alpha = 16.7^\circ$, $F = 7.278$ [N]): casi la misma.

Ejercicio 6.5.3 · intervalo de la masa que cuelga

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1

Un bloque de 100 [kg] está sobre un plano inclinado 20° y se une, con una cuerda paralela al plano que pasa por una polea lisa en lo alto, a una masa m que cuelga. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es 0.3. Determine el intervalo de valores de m para que el bloque no deslice ni hacia arriba ni hacia abajo.



Datos. $m_A = 100$ [kg], $\theta = 20^\circ$, $\mu_s = 0.3$.

Planteamiento. Para la masa que cuelga, $T = mg$. Para el bloque, ejes paralelo y perpendicular al plano: $N = 100g\cos 20^\circ = 93.97g$ y $f_{\text{máx}} = 0.3N = 28.19g$.

Resolución.

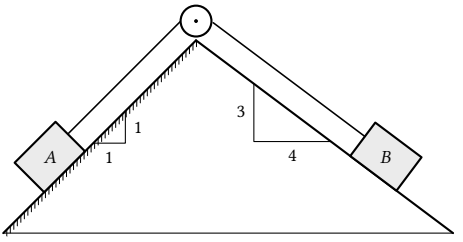
1. A punto de subir (f hacia abajo del plano): $T = 100g\sin 20^\circ + 28.19g = 34.20g + 28.19g = 62.39g$, así que $m = 62.4$ [kg].
2. A punto de bajar (f hacia arriba del plano): $T = 34.20g - 28.19g = 6.01g$, así que $m = 6.01$ [kg].

Resultado. $6.01\,[\text{kg}] \le m \le 62.4\,[\text{kg}]$.

Ejercicio 6.5.4 · dos bloques en planos opuestos

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 5

Dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea lisa en la cumbre descansan en dos planos: el bloque A, de 20 [kg], en un plano de pendiente $1:1$, y el bloque B, de 80 [kg], en un plano de pendiente $3:4$. El coeficiente de fricción estática entre B y su plano es 0.5. Determine el coeficiente de fricción requerido entre A y su plano para que A esté a punto de deslizar hacia arriba.



Datos. $m_A = 20\,[\text{kg}]$, $\theta_A = 45^\circ$; $m_B = 80\,[\text{kg}]$, $\sin\theta_B = 0.6$, $\cos\theta_B = 0.8$; $\mu_B = 0.5$.

Planteamiento. Si A está a punto de subir, B está a punto de bajar: en los dos planos la fricción vale μN; la de A apunta hacia abajo de su plano y la de B, hacia arriba del suyo.

Resolución.

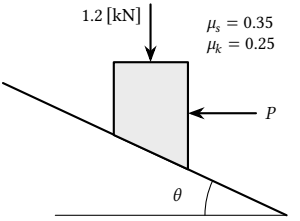
1. Bloque B: $N_B = 80g(0.8) = 64g$; a lo largo del plano, $T = 80g(0.6) - 0.5(64g) = 48g - 32g = 16g$.
2. Bloque A: $N_A = 20g\cos 45^\circ = 14.14g$; a lo largo del plano, $T - 20g\sin 45^\circ - \mu_A N_A = 0$.
3. $\mu_A = \frac{16g - 14.14g}{14.14g}$.

Resultado. $\mu_A = 0.131$ (con $T = 16g = 157\,[\text{N}]$).

Ejercicio 6.5.5 · ¿hay equilibrio?

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 4

Un cuerpo de 1.2 [kN] descansa sobre un plano inclinado $\theta = 25^\circ$ que baja hacia la derecha. Una fuerza horizontal $P = 750\,[\text{N}]$ lo empuja hacia el lado alto del plano. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$. Determine si el cuerpo está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción que el plano ejerce sobre él.



Datos. $W = 1200\,[\text{N}]$, $P = 750\,[\text{N}]$, $\theta = 25^\circ$, $\mu_s = 0.35$, $\mu_k = 0.25$.

Planteamiento. Se supone equilibrio. Eje x a lo largo del plano, positivo hacia abajo de él; eje y perpendicular. Se supone f hacia abajo del plano.

Resolución.

1. $\sum F_x = 0$: $W\sin\theta + f - P\cos\theta = 0$, así que $f = 750\cos 25^\circ - 1200\sin 25^\circ = 679.7 - 507.1 = 172.6\,[\text{N}]$. Sale positiva: la dirección supuesta es correcta.
2. $\sum F_y = 0$: $N = W\cos\theta + P\sin\theta = 1087.6 + 317.0 = 1404.5\,[\text{N}]$.
3. Fricción máxima disponible: $\mu_s N = 0.35(1404.5) = 491.6\,[\text{N}]$.

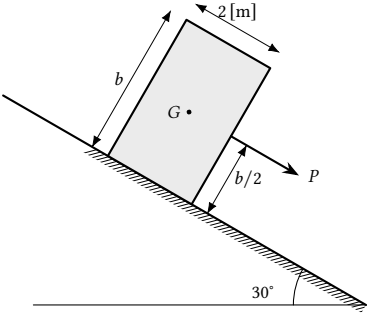
4. $172.6 < 491.6$: hay equilibrio y la fricción es la requerida, no la máxima.

Resultado. El cuerpo está en equilibrio; $f = 172.6\,[\text{N}]$, paralela al plano y hacia abajo de él. (μ_k no se usa.)

Ejercicio 6.5.6 · a punto de volcar y de deslizar

Adaptado de: 1er final 2012-2 (matutino), problema 5

Un cuerpo homogéneo de $20\,[\text{N}]$, de base $2\,[\text{m}]$ y altura b, descansa sobre un plano inclinado 30°. Se le aplica una fuerza $P = 5\,[\text{N}]$ paralela al plano, hacia abajo de él, en la cara de abajo y a la altura $b/2$. Con ella el cuerpo está a punto de volcar y a punto de deslizar sobre el plano. Determine el coeficiente de fricción y la dimensión b.



Datos. $W = 20\,[\text{N}]$, $P = 5\,[\text{N}]$, base $2\,[\text{m}]$, $\theta = 30^\circ$.

Planteamiento. Ejes a lo largo del plano (hacia abajo) y perpendicular. A punto de deslizar hacia abajo: $f = \mu_s N$ hacia arriba del plano. A punto de volcar: gira alrededor de la arista inferior de abajo, donde se concentran N y f.

Resolución.

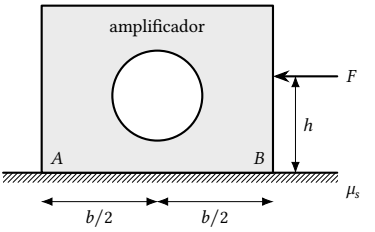
1. $\sum F_y = 0$: $N = W\cos 30^\circ = 17.32\,[\text{N}]$.
2. $\sum F_x = 0$: $f = P + W\sin 30^\circ = 5 + 10 = 15\,[\text{N}]$; $\mu_s = \frac{15}{17.32}$.
3. Momentos respecto a la arista de giro: la componente $W\sin 30^\circ$ y P actúan a la altura $b/2$ y tienden a volcar; la componente $W\cos 30^\circ$ actúa a $1\,[\text{m}]$ de la arista y lo estabiliza: $(10+5)\frac{b}{2} - 17.32(1) = 0$.

Resultado. $\mu_s = 0.866$ y $b = 2.31\,[\text{m}]$.

Ejercicio 6.5.7 · altura máxima del empuje

Adaptado de: 1er final 2018-2 (matutino), problema 4

Se empuja un amplificador de base b sobre el piso con una fuerza horizontal F aplicada a la altura h. Si h es muy grande, el amplificador se vuelca antes de deslizarse. El coeficiente de fricción estática entre el piso y el amplificador es μ_s y su centro de gravedad está a la mitad de la base. ¿Cuál es el valor máximo de h para que el amplificador se deslice antes de volcarse?



Datos. Base b, μ_s, peso W, F horizontal a la altura h.

Planteamiento. En el límite, el amplificador está a punto de deslizar y de volcar a la vez alrededor de la arista A, hacia donde lo empuja F; ahí se concentran N y f.

Resolución.

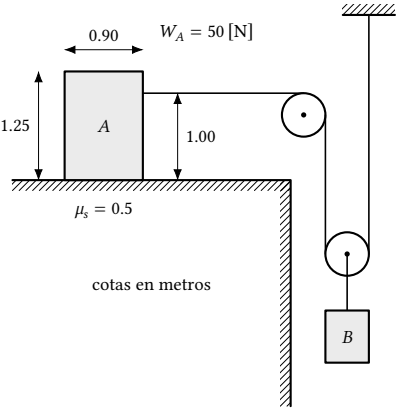
1. $\sum F_y = 0$: $N = W$. $\sum F_x = 0$: $F = f = \mu_s N = \mu_s W$.
2. $\sum M_A = 0$: $Fh - W\frac{b}{2} = 0$, es decir, $\mu_s W h = W\frac{b}{2}$.
3. $h = \frac{b}{2\mu_s}$. Con una altura menor, el momento de F no alcanza para volcarlo cuando empieza a deslizar.

Resultado. $h_{\text{máx}} = \dfrac{b}{2\mu_s}$ (se desliza antes de volcarse si $h < b/(2\mu_s)$).

Ejercicio 6.5.8 · ¿se traslada o se vuelca?

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 4

El bloque A, de 50 [N], 0.90 [m] de ancho y 1.25 [m] de alto, descansa en un piso horizontal con $\mu_s = 0.5$. Una cuerda horizontal atada a A a 1.00 [m] del piso pasa por una polea fija en el borde, baja, rodea una polea móvil de la que cuelga el bloque B y sube hasta un soporte fijo. Las cuerdas y poleas son ideales. Determine el valor mínimo del peso W_B para el cual el sistema está a punto de moverse e indique si A está a punto de trasladarse o de volcarse.



Datos. $W_A = 50\,[\text{N}]$, ancho $0.90\,[\text{m}]$, altura de la cuerda $1.00\,[\text{m}]$, $\mu_s = 0.5$.

Planteamiento. Polea móvil: $2T - W_B = 0$, así que $T = W_B/2$. Se calcula el W_B que hace deslizar a A y el que lo vuelca; el mínimo de los dos es la respuesta.

Resolución.

1. Traslación: $N = W_A = 50\,[\text{N}]$; $T = \mu_s N = 25\,[\text{N}]$, así que $W_B = 50\,[\text{N}]$.
2. Volcamiento alrededor de la arista inferior del lado de la polea: el peso actúa a $0.45\,[\text{m}]$ de ella y T a $1.00\,[\text{m}]$ de altura: $T(1.00) - 50(0.45) = 0$, así que $T = 22.5\,[\text{N}]$ y $W_B = 45\,[\text{N}]$.
3. $45 < 50$: el bloque se vuelca antes de trasladarse.

Resultado. $W_{B,\text{mín}} = 45\,[\text{N}]$; con ese peso A está a punto de **volcarse**.

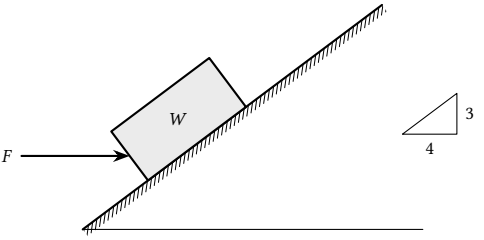
6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 6.6.1 · fuerza horizontal sobre un plano

Adaptado de: 1er final 2014-1 (vespertino), problema 5

Un bloque de $40\,[\text{N}]$ está sobre un plano de pendiente $3:4$. Una fuerza horizontal $F = 60\,[\text{N}]$ lo empuja contra el plano y lo deja a punto de moverse. Determine el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano.



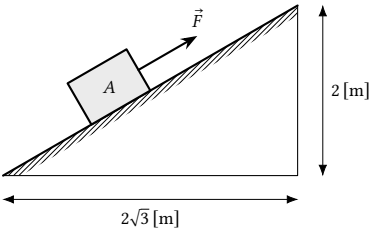
Resultado: $\mu_s = 0.353$ (el bloque está a punto de subir).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 6.6.2 · componentes de la fuerza en una rampa

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 5

El bloque A pesa $100\,[\text{N}]$ y está sobre una rampa de $2\,[\text{m}]$ de altura y $2\sqrt{3}\,[\text{m}]$ de base, con $\mu_s = 0.5$. Una fuerza $\vec{F}$ paralela a la rampa lo sostiene en movimiento inminente hacia abajo. Determine las componentes horizontal y vertical de $\vec{F}$.



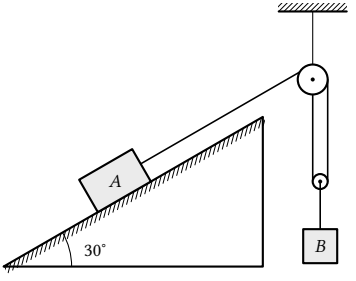
Resultado: $F = 6.70\,[\mathrm{N}]$; $F_h = 5.80\,[\mathrm{N}]$, $F_v = 3.35\,[\mathrm{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.3 · masa con polea móvil

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 4

El bloque A, de 98.1 [N], está sobre un plano inclinado 30°, con $\mu_s = 1/\sqrt{3}$. Una cuerda paralela al plano pasa por una polea fija, baja, rodea una polea móvil de la que cuelga el bloque B y sube hasta el soporte de la polea fija. Determine la masa de B para que A esté inmóvil, pero a punto de subir.



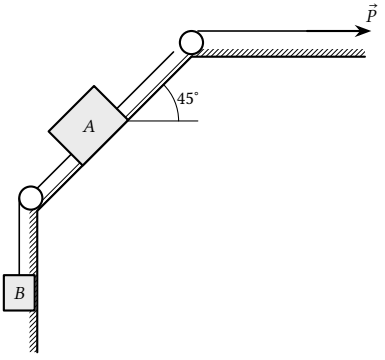
Resultado: $W_B = 196.2\,[\mathrm{N}]$, $m_B = 20\,[\mathrm{kg}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.4 · fuerza para subir un cuerpo que cuelga

Adaptado de: 1er final 2015-1 (matutino), problema 5

El bloque A ($W_A = 300\,[\mathrm{N}]$) está sobre un plano inclinado 45°, con $\mu_s = 0.3$. Una cuerda que sale de su lado alto pasa por una polea y termina en una fuerza horizontal $\vec{P}$; otra cuerda, que sale de su lado bajo, pasa por una polea al pie del plano y sostiene el cuerpo B ($W_B = 800\,[\mathrm{N}]$). Determine la magnitud de $\vec{P}$ para que B esté a punto de subir.



Resultado: $P = 1075.8\,[\text{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.5 · peso que hace subir el bloque

Adaptado de: 1er final 2018-2 (vespertino), problema 4

El cuerpo A, de 200 [N], está sobre un plano inclinado un ángulo α y se une, con una cuerda paralela al plano que pasa por una polea lisa, al cuerpo B que cuelga. Se sabe que A está a punto de deslizar hacia arriba del plano, que $\mu_s = 0.3$ y que la fricción entre A y el plano vale 46 [N]. Determine el ángulo α y el peso de B. (La figura es como la del ejercicio 6.5.3, con α en lugar de 20°.)

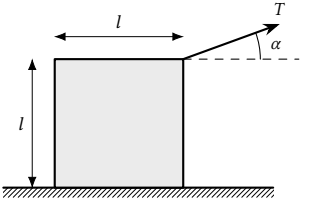
Resultado: $\alpha = 39.9°$, $W_B = 174.4\,[\text{N}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.6 · caja cuadrada con una fuerza inclinada

Adaptado de: 1er final 2012-2 (vespertino), problema 5

A una caja cuadrada homogénea de lado l y 200 [lb] de peso, apoyada en el piso, se le aplica en su esquina superior derecha una fuerza $T = 125\,[\text{lb}]$ que forma un ángulo α hacia arriba de la horizontal. Determine α y el coeficiente de fricción estática para que la caja esté a punto de volcarse y a punto de deslizarse a la vez.



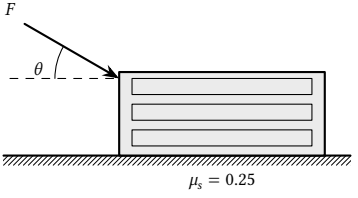
Resultado: $\alpha = 36.87°$, $\mu_s = 0.8$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 6.6.7 · empujar un mueble

Adaptado de: 1er final 2016-2 (vespertino), problema 4

Un mueble uniforme de 90 [lb] descansa sobre un piso con $\mu_s = 0.25$. Una persona lo empuja con una fuerza F dirigida hacia abajo, a $\theta = 30^\circ$ de la horizontal. Determine la magnitud mínima de F para moverlo. Si la persona pesa 150 [lb], encuentre el coeficiente de fricción estática más pequeño entre sus zapatos y el piso para que no resbale.



Resultado: $F = 30.4\,[\text{lb}]$; $\mu_{\text{mín}} = 0.195$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 115.

6.7 Errores frecuentes

1. **Escribir $f = \mu_s N$ sin movimiento inminente.** Fuera del límite, f sale de las ecuaciones de equilibrio y solo cumple $f \le \mu_s N$ (ejercicio 6.5.5).
2. **Fricción en la dirección equivocada.** Va contra el movimiento que está a punto de ocurrir; «a punto de subir» la pone hacia abajo del plano (propuesto 6.6.5).
3. **Suponer $N = W\cos\theta$ siempre.** Una fuerza inclinada respecto al plano, o una horizontal, cambia la normal (ejercicios 6.5.1 y 6.5.2).
4. **Olvidar el segundo caso del intervalo.** «Ni hacia arriba ni hacia abajo» pide dos cálculos con f en sentidos opuestos.
5. **Polea móvil:** el peso que cuelga de ella se reparte entre dos tramos, $T = W/2$.
6. **Volcamiento:** los momentos se toman respecto a la arista de giro; tomar momentos respecto al centro obliga a incluir N y f con brazos desconocidos.
7. **Comparar mal:** ocurre primero lo que necesita la fuerza (o el ángulo) menor.
8. **Mezclar unidades:** si el problema está en libras, los resultados van en libras.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Reposo: $f \le \mu_s N$ · movimiento inminente: $f = \mu_s N$ · deslizando: $f_k = \mu_k N$.
- Ángulo de fricción: $\tan\phi_s = \mu_s$; un bloque solo en un plano desliza si $\tan\theta > \mu_s$.
- Plano inclinado sin otras fuerzas: $N = W\cos\theta$, componente del peso a lo largo del plano $W\sin\theta$. Pendiente 3 : 4: $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$.
- Fuerza mínima para subir con F a un ángulo α del plano: $F = \dfrac{W(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}$.
- Cuerda lisa: misma T en toda la cuerda · polea móvil: $T = W/2$.
- Volcamiento: $\sum M_{\text{arista}} = 0$ con N y f en la arista; empuje horizontal a la altura h sobre base b: desliza antes de volcar si $h < b/(2\mu_s)$.

6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo, con la dirección del movimiento inminente indicada.
2. Ejes paralelo y perpendicular al plano; componentes de cada fuerza en una tabla corta.
3. $\sum F_y = 0$ primero (da N); luego $\sum F_x = 0$ con $f = \mu_s N$.
4. Si puede volcar, el cálculo de momentos respecto a la arista y la comparación por escrito.
5. Resultado recuadrado con unidades, y la frase que pide el enunciado («está en equilibrio», «se vuelca primero»).

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Reúne los formularios de emergencia de las Unidades 1 a 6. Conviene escribirlo de memoria, desde cero, unos minutos cada día.

A.1 Vectores

- Vector de posición de A a B: $\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\hat{\imath} + (y_B - y_A)\,\hat{\jmath} + (z_B - z_A)\,\hat{k}$.
- Magnitud y unitario: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad \hat{e}_{AB} = \dfrac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$.
- Vector representativo de una fuerza de magnitud F dirigida de A hacia B: $\vec{F} = F\,\hat{e}_{AB}$.
- Componentes en el plano: $F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$ (θ medido desde el eje x). En el espacio, cosenos directores: $\hat{e} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + \cos\gamma\,\hat{k}$, con $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- Producto punto: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\theta$. Proyección de $\vec{F}$ sobre la dirección $\hat{e}$: $F_e = \vec{F}\cdot\hat{e}$.
- Producto cruz:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\,\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}.$$

A.2 Fundamentos (Unidad 1)

- Gravitación universal: $F = G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, con $G = 6.67\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}]$ y r medida entre los centros.
- Peso: $W = mg$. A una altura h sobre la superficie de un planeta de masa M y radio R: $W_h = \dfrac{GMm}{(R+h)^2} = W_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$; despejando, $h = R\left(\sqrt{W_0/W_h} - 1\right)$. En la superficie, $g = GM/R^2$.
- Punto entre dos masas m_1 y m_2 separadas una distancia d donde las atracciones se anulan: a $x = \dfrac{d}{1+\sqrt{m_2/m_1}}$ de m_1.
- Tierra: $M_T = 5.98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]$, $R_T = 6370\,[\mathrm{km}]$, $g = 9.81\,[\mathrm{m/s^2}]$ (o el valor que dé el enunciado).
- Sistema inglés: $1\,[\mathrm{lb}] = 4.448\,[\mathrm{N}]$, $1\,[\mathrm{ft}] = 0.3048\,[\mathrm{m}] = 12\,[\mathrm{in}]$, $1\,[\mathrm{in}] = 2.54\,[\mathrm{cm}]$, $1\,[\mathrm{slug}] = 14.59\,[\mathrm{kg}]$, $1\,[\mathrm{kip}] = 1000\,[\mathrm{lb}]$, $1\,[\mathrm{kgf}] = 9.81\,[\mathrm{N}]$. En el sistema inglés, $g = 32.2\,[\mathrm{ft/s^2}]$.
- Homogeneidad dimensional: cada término de una ecuación tiene las mismas dimensiones.

A.3 Partícula (Unidad 2)

- Resultante de fuerzas concurrentes: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, $\quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$, $\quad \hat{e}_R = \vec{R}/R$.

- Equilibrio de la partícula: $\sum \vec{F} = \vec{0}$; en el plano, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ (dos incógnitas); en el espacio, además $\sum F_z = 0$ (tres incógnitas).
- Tres fuerzas en equilibrio en el plano (triángulo de fuerzas, ley de senos), con α_i el ángulo opuesto a F_i en el triángulo:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3}.$$

- Resorte lineal: $F = k\,|L - L_0|$.

A.4 Sistemas equivalentes (Unidad 3)

- Momento de $\vec{F}$ respecto a O: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, con $\vec{r}$ de O a cualquier punto de la línea de acción. En el plano: $M_O = xF_y - yF_x$ (positivo antihorario) o $M_O = \pm Fd$.
- Teorema de Varignon: el momento de la resultante es la suma de los momentos de las componentes.
- Momento respecto a un eje que pasa por A y B: $M_{AB} = \hat{e}_{AB} \cdot (\vec{r}_A \times \vec{F})$, con $\vec{r}_A$ de un punto del eje a la línea de acción. Vector: $\vec{M}_{AB} = M_{AB}\,\hat{e}_{AB}$.
- Par de fuerzas: $M = Fd$, perpendicular al plano del par; su momento es el mismo respecto a cualquier punto (vector libre).
- Sistema fuerza-par en O: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, $\quad \vec{M}_O^R = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{M}_j$. Cambio de punto (par de transporte): $\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{BA} \times \vec{R}$, con $\vec{r}_{BA}$ de B a A.
- Una sola fuerza (sistemas coplanares, paralelos o concurrentes): $\vec{R}$ con línea de acción a la distancia $d = M_O^R / R$ de O; en el plano, la recta cumple $xR_y - yR_x = M_O^R$.
- Fuerzas paralelas a z: $R = \sum F_i$, $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}$, $\quad \bar{y} = \dfrac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}$.
- Sistema general (motor o torsor): par paralelo a $\vec{R}$, $\vec{M}_{\parallel} = \dfrac{\vec{M}_O^R \cdot \vec{R}}{R^2}\,\vec{R}$; eje central, que pasa por el punto $\vec{r} = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O^R}{R^2}$ y es paralelo a $\vec{R}$.
- Si $\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{M} \neq \vec{0}$, el sistema más simple es un par.

A.5 Centroides y cargas distribuidas (Unidad 4)

- Áreas compuestas (los huecos con área negativa): $\bar{x} = \dfrac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$, $\quad \bar{y} = \dfrac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$.
- Líneas y barras delgadas: $\bar{x} = \dfrac{\sum L_i \bar{x}_i}{\sum L_i}$. Centro de masa: $\bar{x} = \dfrac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i}$, con $m_i = \rho_i A_i$ (láminas) o $m_i = \lambda_i L_i$ (barras).
- Primer momento: $Q_x = \sum A_i \bar{y}_i = \bar{y} A$, $\quad Q_y = \sum A_i \bar{x}_i = \bar{x} A$.

Figura (origen en la esquina o el centro indicados)	Área	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Rectángulo $b \times h$, origen en una esquina	bh	$b/2$	$h/2$
Triángulo rectángulo de base b y altura h, origen en el ángulo recto	$bh/2$	$b/3$	$h/3$
Triángulo cualquiera de altura h (desde la base)	$bh/2$	—	$h/3$
Círculo de radio r, origen en el centro	πr^2	0	0
Semicírculo, origen en el centro del diámetro	$\pi r^2/2$	0	$4r/(3\pi)$
Cuarto de círculo, origen en el centro	$\pi r^2/4$	$4r/(3\pi)$	$4r/(3\pi)$
Enjuta parabólica $y = kx^2$, de 0 a b, bajo la curva	$bh/3$	$3b/4$	$3h/10$
Semisegmento parabólico (sobre la curva $y = kx^2$, hasta $y = h$)	$2bh/3$	$3b/8$	$3h/5$
Arco de semicírculo (línea), origen en el centro	πr	0	$2r/\pi$
Arco de cuarto de círculo (línea), origen en el centro	$\pi r/2$	$2r/\pi$	$2r/\pi$

- Carga distribuida $w(x)$ sobre una viga: la fuerza equivalente es el área del diagrama de carga y se aplica en el centroide de ese diagrama:

$$F = \int_0^L w\,\mathrm{d}x, \qquad \bar{x} = \frac{1}{F}\int_0^L x\,w\,\mathrm{d}x.$$

- Uniforme w en una longitud L: $F = wL$ en el centro. Triangular de 0 a w: $F = wL/2$, a $L/3$ del extremo de mayor carga. Trapecial: se divide en un rectángulo y un triángulo.

A.6 Equilibrio de cuerpos (Unidad 5)

- Condiciones de equilibrio: $\sum \vec{F} = \vec{0}$ y $\sum \vec{M}_A = \vec{0}$ respecto a cualquier punto A. En el plano son 3 ecuaciones ($\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum M_A$); en el espacio, 6.
- Isostático: tantas incógnitas como ecuaciones independientes y apoyos bien dispuestos. Hiperestático: más incógnitas que ecuaciones. Sin equilibrio (mecanismo): menos incógnitas, o reacciones concurrentes o paralelas que no pueden equilibrar la carga.

Apoyo o ligadura	Reacciones
Cable, cuerda o barra de dos fuerzas	Una fuerza a lo largo del cable (tensión) o de la barra
Superficie lisa, apoyo libre, rodillo, patín	Una fuerza normal a la superficie de apoyo
Articulación (pasador) en el plano	Dos componentes, R_x y R_y
Empotramiento en el plano	R_x, R_y y un par M
Rótula (articulación esférica)	Tres componentes, R_x, R_y, R_z
Empotramiento en el espacio	Tres fuerzas y tres pares

A.7 Fricción (Unidad 6)

- Leyes de Coulomb-Morin: en reposo $f \le \mu_s N$; en movimiento inminente $f = \mu_s N$; en movimiento $f = \mu_k N$. La fricción se opone al movimiento (o a la tendencia de movimiento).
- Ángulo de fricción: $\tan\phi_s = \mu_s$. Un bloque sin otras fuerzas está a punto de deslizar en un plano inclinado cuando $\tan\theta = \mu_s$.
- ¿Hay equilibrio? Se supone reposo, se calcula la fricción necesaria f con las ecuaciones de equilibrio y se compara con $\mu_s N$: si $|f| \le \mu_s N$, el cuerpo está en reposo y la fricción vale f; si no, desliza y la fricción vale $\mu_k N$.

- Intervalo de una fuerza P para el reposo: un cálculo con movimiento inminente hacia arriba ($P_{\text{máx}}$) y otro hacia abajo ($P_{\text{mín}}$), cambiando el sentido de f.
- Volcamiento: a punto de volcar, la normal se concentra en la arista de giro y se cumple $\sum M_{\text{arista}} = 0$. Se compara la fuerza que hace deslizar con la que hace volcar; ocurre primero lo que requiere la fuerza menor.

Apéndice B · Exámenes completos

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Unidad de cada problema, en el orden del examen. «4+5» indica un problema que combina dos unidades (por ejemplo, una carga distribuida y las reacciones que produce). Las versiones del mismo día que tienen los mismos temas van en una sola fila; las que difieren, en filas separadas.

Examen	1	2	3	4	5	6
1er final 2006-2	1	3	3	4		
1er final 2011-1 (A)	1	2	3	4	4+5	6
1er final 2011-1 (B)	2	3	4	4+5	6	
1er final 2011-1 (C)	3	2	4	5	6	
1er final 2011-2 (A/B)	2	3	4	4+5	6	
2º final 2011-2	2+3	3	4	5	6	
1er final 2012-1 (mat./ves.)	2	3	4	4+5	6	
2º final 2012-1	1	3	4	4+5	6	
1er final 2012-2 (mat./ves.)	1	3	4	5	6	
2º final 2012-2	2	3	4	5	6	
1er final 2013-1 (mat.)	3	3	4	5	6	
1er final 2013-1 (ves.)	1	3	4	5	6	
2º final 2013-1	2	3	3	6	5	
1er final 2013-2 (mat.)	3	3	4	5	6	
1er final 2013-2 (ves.)	2	3	4	5	6	
2º final 2013-2	3	3	4	5	6	
1er final 2014-1 (mat./ves.)	2	3	4	5	6	
2º final 2014-1	1	2	3	5	6	
1er final 2014-2 (mat./ves.)	2	3	4+5	4	6	
2º final 2014-2	2	3	4	5	6	
1er final 2015-1 (mat./ves.)	2	3	4	5	6	
1er final 2015-2 (mat.)	2	3	4	3+5	6	
1er final 2015-2 (ves.)	2	3	4	5	6	
2º final 2015-2	2	3	4+5	6		
1er final 2016-2 (mat.)	3	4	5	6		
1er final 2016-2 (ves.)	3+5	4	5	6		
2º final 2016-2	6	4	4+5	5		
1er final 2018-1 (mat./ves.)	2	3	4	5		
2º final 2018-1	2	5	4	6		
1er final 2018-2 (mat.)	2	2	4+5	6		
1er final 2018-2 (ves.)	2	3	4+5	6		
2º final 2018-2	2	2	5	6		

B.2 Tres exámenes completos para simulacro

Cada simulacro es un examen real completo cuyos problemas están todos en este cuaderno. Resuélvelo de corrido, con cronómetro y sin consultar; después compara con la resolución del ejercicio correspondiente (en la unidad o, si es propuesto, en el Apéndice E).

Simulacro 1 · 1er final 2014-1 (matutino): 5 problemas en 2 horas.

1. Tensiones en dos cuerdas amarradas en un punto: propuesto 2.6.2.
2. Momento de una fuerza respecto a un punto y a un eje: ejercicio 3.5.1.
3. Centroide de una placa con recortes: ejercicio 4.5.1.
4. Barra con rótula sostenida por dos cables: ejercicio 5.5.7.
5. Coeficiente de fricción con una fuerza inclinada: ejercicio 6.5.1.

Simulacro 2 · 1er final 2018-1 (matutino): 4 problemas en 2 horas.

1. Ángulos de tres cuerdas que jalan un mismo nudo: ejercicio 2.5.5.
2. Momento de una fuerza sobre una manija: propuesto 3.6.1.
3. Centroide de una figura compuesta: ejemplo de la sección 4.4.
4. Pescante con rótula y dos cables: propuesto 5.6.7.

Simulacro 3 · Segundo final 2018-2: 4 problemas en 2 horas.

1. Resultante de dos fuerzas en el espacio: propuesto 2.6.3.
2. Equilibrio de dos cuerdas con pesos colgados: propuesto 2.6.4.
3. Reacción en un empotramiento: propuesto 5.6.1.
4. ¿Hay equilibrio en un plano inclinado con fricción?: ejercicio 6.5.5.

B.3 Dónde está cada problema de examen usado en este cuaderno

Por examen, número de problema y lugar del cuaderno donde está resuelto o propuesto.

- **1er final 2006-2:** 1 → ejercicio 1.5.3.
- **1er final 2011-1 (versión A):** 1 → propuesto 1.6.2.
- **1er final 2011-1 (versión B):** 4 → propuesto 4.6.6.
- **1er final 2011-2 (versión A):** 2 → ejercicio 3.5.7.
- **2º final 2011-2:** 3 → ejercicio 4.5.6; 4 → propuesto 5.6.5.
- **1er final 2012-1 (matutino):** 1 → propuesto 2.6.1.
- **2º final 2012-1:** 1 → ejercicio 1.5.1.
- **1er final 2012-2 (matutino):** 1 → ejemplo 1.4; 4 → ejercicio 5.5.8; 5 → ejercicio 6.5.6.
- **1er final 2012-2 (vespertino):** 1 → ejercicio 1.5.2; 2 → propuesto 3.6.6; 4 → propuesto 5.6.6; 5 → propuesto 6.6.6.
- **2º final 2012-2:** 3 → ejercicio 4.5.3; 4 → ejercicio 5.5.3; 5 → ejercicio 6.5.4.
- **1er final 2013-1 (matutino):** 1 → ejercicio 3.5.2; 2 → ejercicio 3.5.5; 3 → ejercicio 4.5.2; 5 → propuesto 6.6.2.
- **1er final 2013-1 (vespertino):** 1 → propuesto 1.6.3; 2 → ejercicio 3.5.3; 3 → propuesto 4.6.2.
- **2º final 2013-1:** 2 → propuesto 3.6.4; 3 → ejercicio 3.5.6; 4 → propuesto 6.6.3.
- **1er final 2013-2 (matutino):** 3 → ejercicio 4.5.5; 4 → ejercicio 5.5.2.
- **1er final 2013-2 (vespertino):** 3 → propuesto 4.6.4.
- **2º final 2013-2:** 2 → propuesto 3.6.5; 3 → propuesto 4.6.3; 4 → propuesto 5.6.4.
- **1er final 2014-1 (matutino):** 1 → propuesto 2.6.2; 2 → ejercicio 3.5.1; 3 → ejercicio 4.5.1; 4 → ejercicio 5.5.7; 5 → ejercicio 6.5.1.

- **1er final 2014-1 (vespertino):** 2 → ejercicio 3.5.4; 3 → propuesto 4.6.1; 5 → propuesto 6.6.1.
- **2º final 2014-1:** 1 → propuesto 1.6.1; 3 → propuesto 3.6.3; 4 → ejercicio 5.5.6.
- **1er final 2014-2 (matutino):** 1 → ejercicio 2.5.7; 4 → ejercicio 4.5.4.
- **1er final 2014-2 (vespertino):** 1 → propuesto 2.6.6.
- **1er final 2015-1 (matutino):** 2 → propuesto 3.6.2; 4 → ejercicio 5.5.5; 5 → propuesto 6.6.4.
- **1er final 2015-1 (vespertino):** 1 → ejercicio 2.5.6; 4 → propuesto 5.6.2.
- **1er final 2015-2 (matutino):** 1 → ejercicio 2.5.3; 2 → ejercicio 3.5.8.
- **1er final 2015-2 (vespertino):** 1 → propuesto 2.6.5; 4 → ejemplo 5.4 (misma palanca); 5 → ejercicio 6.5.2.
- **2º final 2015-2:** 4 → ejercicio 6.5.8.
- **1er final 2016-2 (matutino):** 3 → ejercicio 5.5.4; 4 → ejercicio 6.5.1 (mismo problema).
- **1er final 2016-2 (vespertino):** 2 → propuesto 4.6.5; 3 → ejemplo 5.4; 4 → propuesto 6.6.7.
- **2º final 2016-2:** 1 → ejercicio 6.5.3; 4 → ejercicio 5.5.1.
- **1er final 2018-1 (matutino):** 1 → ejercicio 2.5.5; 2 → propuesto 3.6.1; 3 → ejemplo 4.4; 4 → propuesto 5.6.7.
- **1er final 2018-1 (vespertino):** 1 → ejercicio 2.5.4; 2 → ejemplo 3.4; 4 → ejemplo 5.4.
- **2º final 2018-1:** 2 → propuesto 5.6.3; 4 → ejemplo 6.4.
- **1er final 2018-2 (matutino):** 1 → ejercicio 2.5.1; 2 → ejemplo 2.4; 4 → ejercicio 6.5.7.
- **1er final 2018-2 (vespertino):** 1 → ejercicio 2.5.2; 4 → propuesto 6.6.5.
- **2º final 2018-2:** 1 → propuesto 2.6.3; 2 → propuesto 2.6.4; 3 → propuesto 5.6.1; 4 → ejercicio 6.5.5.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Diferencias entre las resoluciones publicadas de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno. Cada entrada indica el examen, el problema, lo que aparece en la resolución publicada y el valor verificado.

C.1 · Unidad 1 · Fundamentos de la mecánica clásica newtoniana: gravitación universal y unidades

1er final 2012-2 (vespertino), problema 1: En la resolución publicada aparece $\Delta W = 2.5 \times 10^{-4}\,[\mathrm{N}]$; el valor verificado es $\Delta W = -2.51 \times 10^{-4}\,W$, una fracción del peso (que no es dato) y no una fuerza en newtons. En el inciso b) aparece $H = 31.93\,[\mathrm{km}]$, que corresponde a $R(1-\sqrt{0.99})$; de la propia ecuación publicada, $R = \sqrt{0.99}\,(R+H)$, el valor verificado es $H = R(1/\sqrt{0.99} - 1) = 32.09\,[\mathrm{km}]$.

1er final 2006-2, problema 1: En la resolución publicada se asigna al coeficiente la unidad ft^2/s, como si $D^2\sqrt{H}$ tuviera unidades de pie, y aparece $Q = 0.4974\,D^2\sqrt{H}$. Por homogeneidad el coeficiente tiene unidades de $\mathrm{ft}^{1/2}/\mathrm{s}$; el valor verificado es $Q = 2.956\,D^2\sqrt{H}$.

1er final 2013-1 (vespertino), problema 1: En la resolución publicada el inciso b) aparece como verdadero; el centro de gravedad, el centro de masa y el centroide coinciden solo en un cuerpo homogéneo dentro de un campo gravitatorio uniforme, así que la respuesta verificada es falso.

C.2 · Unidad 2 · Conceptos básicos de la estática: resultante de fuerzas concurrentes y equilibrio de la partícula

1er final 2018-2 (matutino), problema 2: En la resolución publicada aparece la componente vertical de $\vec{T}_{AD}$ como 360 [N] y el peso $P = 1215\,[\mathrm{N}]$; como $\frac{12}{15}(400) = 320\,[\mathrm{N}]$, el valor verificado es $W = 1175\,[\mathrm{N}]$. Las tensiones $T_{BD} = 225\,[\mathrm{N}]$ y $T_{CD} = 780\,[\mathrm{N}]$ coinciden.

1er final 2015-1 (vespertino), problema 1: En la resolución publicada aparece $x = 2 - 0.85 = 1.55\,[\mathrm{m}]$ como respuesta; la resta da 1.15 [m], que además es la proyección horizontal del cable. El valor verificado de la longitud es $L_{AC} = 1.15/\cos 30^\circ = 1.32\,[\mathrm{m}]$.

C.3 · Unidad 3 · Sistemas equivalentes de fuerzas: momentos, pares y reducción

1er final 2018-1 (vespertino), problema 2: En la resolución publicada aparece $\vec{M}_A = -1282\,\hat{\imath} + 482\,\hat{k}\,[\mathrm{lb}\cdot\mathrm{ft}]$; la componente verificada es $(20)(21.38) = 427.6$, es decir, $\vec{M}_A = -1282.9\,\hat{\imath} + 427.6\,\hat{k}\,[\mathrm{lb}\cdot\mathrm{ft}]$. La magnitud del momento respecto al eje AC, 809 [lb · ft], no depende de esa componente y coincide.

1er final 2018-1 (matutino), problema 2: En la resolución publicada aparece $\theta = 36.9^\circ$ para el inciso a); con ese ángulo, $1000\cos\theta - 250\sin\theta = 650\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}]$. El valor verificado es $\theta = 25.1^\circ$. El inciso b) (166° y $1031\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}]$) coincide.

2º final 2014-1, problema 3: En la resolución publicada aparece $\vec{M}_{par} = 54.64\,\hat{k}\,[\mathrm{N}]$; la unidad verificada es $[\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}]$: $\vec{M} = 54.64\,\hat{k}\,[\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}]$. La distancia, $6.83\,[\mathrm{m}]$, coincide.

C.4 · Unidad 4 · Primeros momentos, centros de gravedad, centros de masa y centroides

1er final 2018-1 (matutino), problema 3: La resolución publicada mide x desde el extremo izquierdo del semicírculo y, en su tabla, el producto $\bar{x}_i A_i$ del triángulo aparece como $36\,750\,[\mathrm{cm}^3]$, que es su $\bar{y}_i A_i$; con su origen, el valor correcto es $165\,375\,[\mathrm{cm}^3]$. Por eso publica $\bar{x} = 31.5\,[\mathrm{cm}]$; el valor verificado es $54.43\,[\mathrm{cm}]$ desde ese extremo, es decir, $\bar{x} = 19.43\,[\mathrm{cm}]$ respecto al eje y de la figura. La coordenada $\bar{y} = 37.2\,[\mathrm{cm}]$ coincide.

1er final 2016-2 (vespertino), problema 2: La resolución publicada usa un ancho de $120\,[\mathrm{cm}]$ y una altura del triángulo de $30\,[\mathrm{cm}]$, en lugar de los $225\,[\mathrm{cm}]$ y $85\,[\mathrm{cm}]$ acotados en el enunciado, y obtiene $\bar{x} = 43.2\,[\mathrm{cm}]$, $\bar{y} = 30.8\,[\mathrm{cm}]$. Con las cotas del enunciado, el valor verificado es $\bar{x} = 84.84\,[\mathrm{cm}]$, $\bar{y} = 46.93\,[\mathrm{cm}]$.

C.5 · Unidad 5 · Estudio del equilibrio de los cuerpos: reacciones en el plano y en el espacio

1er final 2016-2 (matutino), problema 3: La resolución publicada plantea $\sum M_D = 0$ sin el par de empotramiento y obtiene $T = 96\,[\mathrm{lb}]$ y $R_D = 16\,[\mathrm{lb}]$ hacia abajo, valores que contradicen el dato $w = 100\,[\mathrm{lb}]$ (corresponden a un apoyo D sin momento). Con el empotramiento y $w = 100\,[\mathrm{lb}]$, los valores verificados son $T = 100\,[\mathrm{lb}]$, $D_y = 20\,[\mathrm{lb}]$ hacia abajo y $M_D = 20\,[\mathrm{lb}\cdot\mathrm{ft}]$ antihorario.

2º final 2014-1, problema 4: En la resolución publicada, el caso a) da $R_B = 0.498F$; el valor verificado es $R_B = 0.503F$ ($B_x = 0.406F$, $B_y = 0.297F$). Además, el caso d) del enunciado aparece rotulado como c).

2º final 2018-1, problema 2: En la resolución publicada, el recuadro final dice «$R_B = 3.12\,[\mathrm{kg}]$ hacia abajo»; su propio diagrama y su comprobación usan R_B hacia arriba, que es el sentido verificado ($30.6\,[\mathrm{N}]$, es decir, $3.12\,[\mathrm{kgf}]$).

1er final 2012-2 (vespertino), problema 4: En la resolución publicada, la fuerza aplicada se escribe $\vec{F} = -300\,\hat{k}$; como es paralela al eje y, el vector verificado es $\vec{F} = -300\,\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$. Las ecuaciones de equilibrio de esa resolución sí la usan en la dirección y, y sus resultados coinciden.

C.6 · Unidad 6 · Fricción: deslizamiento, volcamiento y cuerpos conectados

2º final 2016-2, problema 1: En la resolución publicada el intervalo final aparece como $6 \le m \le 64.2\,[\mathrm{kg}]$; el valor verificado del extremo superior es $62.4\,[\mathrm{kg}]$, el mismo que se obtiene unas líneas antes en esa resolución.

2º final 2012-2, problema 5: En la resolución publicada la suma de fuerzas del bloque A aparece como $T - f_{rA} + \frac{1}{\sqrt{2}} W_A = 0$; el signo verificado del peso es negativo ($T - f_{rA} - \frac{1}{\sqrt{2}} W_A = 0$). El resultado publicado, $\mu = 0.13$, sí corresponde al signo correcto.

1er final 2018-2 (vespertino), problema 4: En la resolución publicada la fricción de 46 [N] aparece hacia arriba del plano y resulta $W_B = 82.3$ [N], que corresponde a un bloque a punto de bajar; para A a punto de deslizar hacia arriba la fricción apunta hacia abajo del plano y el valor verificado es $W_B = 174.4$ [N]. El ángulo publicado, 39.9°, es correcto.

1er final 2012-2 (vespertino), problema 5: En la resolución publicada la fuerza de fricción aparece como $f_r = 100$ [N]; el problema está en libras y el valor verificado es 100 [lb]. El coeficiente, 0.8, no cambia.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programa de la asignatura

Programa de estudio de la asignatura Estática (segundo semestre, 9 créditos), aprobado en 2008. De él se toman el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo de cada unidad, que se citan literalmente al inicio de cada una.

Exámenes

Exámenes finales colegiados de la asignatura, con sus resoluciones publicadas. Se citan en cada ejercicio como «Adaptado de» con el número de final, el semestre, el turno o la versión y el número de problema. Los enunciados se redactaron de nuevo, con los datos originales, y las figuras se redibujaron.

Semestre	Exámenes
2006-2	1er final
2011-1	1er final, versiones A, B y C
2011-2	1er final, versiones A y B; 2º final
2012-1	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2012-2	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2013-1	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2013-2	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2014-1	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2014-2	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2015-1	1er final, turnos matutino y vespertino
2015-2	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2016-2	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2018-1	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final
2018-2	1er final, turnos matutino y vespertino; 2º final

En total, 39 versiones de 25 exámenes. Las resoluciones publicadas de 2006-2 y de 2012-2 están mecanografiadas; las de 2011-1 a 2015-2 (salvo 2012-2) son manuscritas, y las de 2016-2 a 2018-2 vienen al final de cada examen. Las diferencias encontradas al verificarlas están en el Apéndice C.

Bibliografía del programa

Básica.

- Beer, F. P. y Johnston, E. R. *Vector Mechanics for Engineers: Statics*, 8.ª ed. McGraw-Hill, 2007. (En español: *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*.)
- Meriam, J. L. y Kraige, L. G. *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*, 3.ª ed. Reverté, 2000.
- Hibbeler, R. C. *Mecánica para ingenieros: Estática*, 10.ª ed. Pearson Prentice Hall, 2004.

Complementaria.

- Bedford, A. y Fowler, W. L. *Engineering Mechanics: Statics*, 5.ª ed. Prentice Hall, 2008.
- Riley, W. F. *Ingeniería mecánica: Estática*. Reverté, 2002.
- Soutas-Little, R. W. et al. *Engineering Mechanics: Statics*, edición computacional. Thomson, 2008.

Los libros se recomiendan para ampliar la teoría y para practicar con más problemas. Ningún ejercicio de este cuaderno se tomó de ellos.

Resoluciones y figuras

Las resoluciones, las figuras y la redacción de los enunciados son propias de este cuaderno. Toda la aritmética de los ejercicios resueltos y propuestos se verificó numéricamente.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1 · Unidad 1 · Fundamentos de la mecánica clásica newtoniana: gravitación universal y unidades

Ejercicio 1.6.1 · peso de un astronauta sobre otro planeta

← volver

Planteamiento. $g = GM/R^2$; con $M_p = 2M_T$ y $R_p = 3R_T$, $g_p = \dfrac{2}{9}\, g_T$. A la altura h: $W = mg_p \left(\dfrac{R_p}{R_p + h} \right)^2$.

Resolución.

1. a) $g_p = \dfrac{2}{9}(9.81) = 2.18\,[\mathrm{m/s^2}]$.

2. b) $R_p = 3(6370) = 19\,110\,[\mathrm{km}]$; $W = 80(2.18)\left(\dfrac{19\,110}{19\,260}\right)^2 = 174.4(0.98447) = 171.7\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. a) $2.18\,[\mathrm{m/s^2}]$; b) $171.7\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 1.6.2 · atracción entre la Tierra y Júpiter

← volver

Planteamiento. $F = Gm_T m_J / r^2$, con r en metros: $r = 6.287 \times 10^{11}\,[\mathrm{m}]$.

Resolución. $F = \dfrac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})(1.9 \times 10^{27})}{(6.287 \times 10^{11})^2} = (6.67 \times 10^{-11})(2.874 \times 10^{28})$.

Resultado. $F = 1.92 \times 10^{18}\,[\mathrm{N}]$. (La resolución publicada deja el resultado como $2.874 \times 10^{28}\,G$, que es lo mismo.)

Ejercicio 1.6.3 · verdadero o falso

← volver

a) **V.** $W = GM_T m / r^2$; la masa de la Tierra es un dato conocido.

b) **F.** El centro de masa coincide con el centroide solo si el cuerpo es homogéneo, y con el centro de gravedad solo si el campo gravitatorio es uniforme (Unidad 4).

c) **F.** El teorema de Varignon dice que el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto al mismo punto (Unidad 3).

d) **F.** La reducción a una fuerza y un par colineales (el «motor» o llave de torsión) existe solo si la resultante no es nula; un sistema con resultante nula se reduce a un par (Unidad 3).

e) **F.** El momento de un par es perpendicular al plano del par, es decir, perpendicular a las dos fuerzas (Unidad 3).

E.2 · Unidad 2 · Conceptos básicos de la estática: resultante de fuerzas concurrentes y equilibrio de la partícula

Ejercicio 2.6.1 · tres niños y un carrito

← volver

Planteamiento. Eje x al este y eje y al norte; equilibrio de la partícula: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} = \vec{0}$.

Resolución.

1. $\vec{F}_1 = -20\hat{\imath}$; $\vec{F}_2 = 15\sin 30^\circ\hat{\imath} + 15\cos 30^\circ\hat{\jmath} = 7.5\hat{\imath} + 12.99\hat{\jmath}$ [N].
2. $\vec{F} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = 12.5\hat{\imath} - 12.99\hat{\jmath}$ [N].
3. $F = \sqrt{12.5^2 + 12.99^2} = 18.03$ [N]; $\tan\theta = 12.99/12.5 \Rightarrow \theta = 46.1^\circ$ por debajo del este.

Resultado. 18.03 [N] a 46.1° al sur del este.

Ejercicio 2.6.2 · dos cuerdas atadas a un muro

← volver

Planteamiento. Tres fuerzas sobre C: teorema de Lami. Ángulos entre fuerzas: CB–CA, $180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ$; CA–500 [N], $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$; CB–500 [N], $90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$.

Resolución.

$$\frac{500}{\sin 100^\circ} = \frac{T_{CB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{CA}}{\sin 140^\circ} = 507.71\ [\text{N}].$$

$T_{CB} = 507.71(0.8660) = 439.7$ [N]; $T_{CA} = 507.71(0.6428) = 326.4$ [N].

Resultado. $T_{CA} = 326.4$ [N], $T_{CB} = 439.7$ [N]. (La resolución publicada da 326.21 y 440.05, diferencias de redondeo.)

Ejercicio 2.6.3 · resultante de dos fuerzas en el espacio

← volver

Planteamiento. Vector representativo de cada fuerza y suma por componentes.

Resolución.

1. $|OA| = \sqrt{150^2 + 80^2} = 170$ [mm]: $\vec{F}_1 = \dfrac{3400}{170}(0, 150, 80) = 3000\hat{\jmath} + 1600\hat{k}$ [N].
2. $|OB| = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ [mm]: $\vec{F}_2 = \dfrac{3500}{100}(60, 0, 80) = 2100\hat{\imath} + 2800\hat{k}$ [N].
3. $\vec{R} = 2100\hat{\imath} + 3000\hat{\jmath} + 4400\hat{k}$ [N]; $R = \sqrt{2100^2 + 3000^2 + 4400^2} = 5724.5$ [N].

Resultado. $\vec{R} = 2.1\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4.4\hat{k}$ [kN].

Ejercicio 2.6.4 · cuerpos colgados de poleas

← volver

Planteamiento. Polea sin fricción: la cuerda de la izquierda tiene tensión $2g = 19.62$ [N] y la de la derecha, W_C. Equilibrio del anillo con tres fuerzas: 19.62 [N] a 150°, W_C con dirección $(3/5, 4/5)$ y W_B hacia abajo.

Resolución.

1. $\sum F_x = 0$: $\frac{3}{5}W_C - 19.62\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow W_C = 28.32$ [N].
2. $\sum F_y = 0$: $19.62\sin 30^\circ + \frac{4}{5}(28.32) - W_B = 0 \Rightarrow W_B = 9.81 + 22.65 = 32.47$ [N].

Resultado. $W_B = 32.5$ [N], $W_C = 28.3$ [N].

Ejercicio 2.6.5 · ancla en un muro

← volver

Planteamiento. $\overrightarrow{AB} = (3, -6, -2)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -3, -6)$, ambos de módulo 7.

Resolución.

1. $\cos\theta = \dfrac{(3)(2) + (-6)(-3) + (-2)(-6)}{49} = \dfrac{36}{49} \Rightarrow \theta = 42.72^\circ$.
2. $\vec{T}_{AB} = 30(3, -6, -2) = 90\hat{\imath} - 180\hat{\jmath} - 60\hat{k}$ [N]; $\vec{T}_{AC} = 35(2, -3, -6) = 70\hat{\imath} - 105\hat{\jmath} - 210\hat{k}$ [N].
3. $\vec{R} = 160\hat{\imath} - 285\hat{\jmath} - 270\hat{k}$ [N]; $R = 423.9$ [N].

Resultado. $\theta = 42.72^\circ$; $\vec{R} = 160\hat{\imath} - 285\hat{\jmath} - 270\hat{k}$ [N].

Ejercicio 2.6.6 · globo amarrado con tres cables ← volver

Planteamiento. Partícula D con cinco fuerzas: tres tensiones dirigidas hacia el suelo, el empuje $6\hat{k}$ y el peso $-W\hat{k}$ [kN]. Vectores: $\overrightarrow{DA} = (2, 3, -6)$, módulo 7; $\overrightarrow{DB} = (1.5, -2, -6)$, módulo 6.5; $\overrightarrow{DC} = (-6, -3, -6)$, módulo 9.

Resolución.

1. $\vec{T}_{BD} = \dfrac{1.5}{6.5}(1.5, -2, -6) = (0.3462, -0.4615, -1.3846)$ [kN].
2. $\sum F_x = 0$: $\frac{2}{7}T_{AD} - \frac{2}{3}T_{CD} + 0.3462 = 0$.
3. $\sum F_y = 0$: $\frac{3}{7}T_{AD} - \frac{1}{3}T_{CD} - 0.4615 = 0$.
4. Al resolver: $T_{AD} = 2.221$ [kN] y $T_{CD} = 1.471$ [kN].
5. $\sum F_z = 0$: $-\frac{6}{7}(2.221) - \frac{2}{3}(1.471) - 1.3846 + 6 - W = 0 \Rightarrow W = 1.731$ [kN].

Resultado. $T_{AD} = 2.22$ [kN], $T_{CD} = 1.47$ [kN], $W = 1.73$ [kN].

E.3 · Unidad 3 · Sistemas equivalentes de fuerzas: momentos, pares y reducción

Ejercicio 3.6.1 · fuerza en la manija de una puerta ← volver

Planteamiento. $\vec{r}_{A/O} = -20\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$ [cm] y $\vec{F} = -50\sin\theta\,\hat{\imath} - 50\cos\theta\,\hat{\jmath}$ [N].

Resolución. a) $M_O = xF_y - yF_x = (-20)(-50\cos\theta) - (-5)(-50\sin\theta) = 1000\cos\theta - 250\sin\theta$. Con $1000\cos\theta - 250\sin\theta = 800$: se escribe $1030.78\cos(\theta + 14.04^\circ) = 800$, de donde $\theta + 14.04^\circ = 39.10^\circ$ y $\theta = 25.06^\circ$. (La otra raíz, $\theta = -53.1^\circ$, queda fuera del intervalo.) Comprobación: $1000(0.9059) - 250(0.4235) = 800$.

b) $M_O = 1030.78\cos(\theta + 14.04^\circ)$ tiene magnitud máxima cuando $\vec{F}$ es perpendicular a $\overrightarrow{OA}$: $\theta + 14.04^\circ = 180^\circ$, $\theta = 165.96^\circ$, y $|M_O| = 50\sqrt{20^2 + 5^2} = 1030.8$ [N · cm].

Resultado. a) $\theta = 25.1^\circ$; b) $\theta = 166.0^\circ$ y $M_{\text{máx}} = 1030.8$ [N · cm].

Ejercicio 3.6.2 · fuerza a partir de su momento ← volver

Planteamiento. $\vec{r} = 2.5(\cos 30^\circ\hat{\imath} + \sin 30^\circ\hat{\jmath})$ [m] y $\vec{F} = F\left(-\frac{12}{13}\hat{\imath} + \frac{5}{13}\hat{\jmath}\right)$.

Resolución.

$$M_A = xF_y - yF_x = 2.5F\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{13} + \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}\right] = \frac{2.5F\,(5\sqrt{3}+12)}{26} = 1.9866\,F = 77.5,$$

de donde $F = 39.01$ [N].

Resultado. $\vec{F} = 39.01\left(-\frac{12}{13}\hat{\imath} + \frac{5}{13}\hat{\jmath}\right) = -36.01\,\hat{\imath} + 15.00\,\hat{\jmath}$ [N].

Ejercicio 3.6.3 · momento de un par en el plano ← volver

Planteamiento. $\vec{F} = 8(\sin 30^\circ\hat{\imath} + \cos 30^\circ\hat{\jmath}) = 4\hat{\imath} + 6.928\hat{\jmath}$ [kN]; $\vec{r}$ de $(-2, 6)$ a $(3, 1)$: $5\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$ [m].

Resolución. a) $M = xF_y - yF_x = (5)(6.928) - (-5)(4) = 54.64$ [kN · m] (antihorario).

b) La distancia entre dos rectas paralelas de dirección $\hat{u} = (0.5,\ 0.866)$ es la componente de $\vec{r}$ perpendicular a $\hat{u}$: $d = |(5)(0.866) - (-5)(0.5)| = 4.330 + 2.5 = 6.83$ [m].

c) $M = Fd = (8)(6.83) = 54.64\,[\mathrm{kN\cdot m}]$.
Resultado. $\vec{M} = 54.64\,\hat{k}\,[\mathrm{kN\cdot m}]$ y $d = 6.83\,[\mathrm{m}]$.

Ejercicio 3.6.4 · sistemas equivalentes en el plano ← volver

Planteamiento. $\vec{R} = R\left(-\frac{3}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{5}\hat{\jmath}\right)$; M_O de $\vec{R}$ fija R, y la igualdad de resultantes da $\vec{F}_3 = \vec{R} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2$.
Resolución. $M_O = xR_y - yR_x = (10)\left(-\frac{4}{5}R\right) - (-5)\left(-\frac{3}{5}R\right) = -8R - 3R = -11R = -220$, así que $R = 20\,[\mathrm{N}]$ y $\vec{R} = -12\hat{\imath} - 16\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$. Con $\vec{F}_1 = -20\hat{\imath}$ y $\vec{F}_2 = -10\hat{\jmath}$: $\vec{F}_3 = (-12+20)\hat{\imath} + (-16+10)\hat{\jmath} = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$.
Resultado. $\vec{R} = -12\hat{\imath} - 16\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$ y $\vec{F}_3 = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}\,[\mathrm{N}]$ $(10\,[\mathrm{N}])$.

Ejercicio 3.6.5 · losa con cuatro fuerzas ← volver

Planteamiento. $\overrightarrow{DC} = 0.24\hat{\imath} - 0.12\hat{\jmath} - 0.57\hat{k}$, de longitud $0.63\,[\mathrm{m}]$; se igualan $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$ con los de la fuerza única.
Resolución. $\vec{F}_4 = \frac{315}{0.63}(0.24\hat{\imath} - 0.12\hat{\jmath} - 0.57\hat{k}) = 120\hat{\imath} - 60\hat{\jmath} - 285\hat{k}\,[\mathrm{N}]$.

$$\vec{R} = (120 - F_1)\hat{\imath} + (F_2 - 60)\hat{\jmath} - (285 + F_3)\hat{k} = -570\hat{k},$$

de donde $F_1 = 120\,[\mathrm{N}]$, $F_2 = 60\,[\mathrm{N}]$ y $F_3 = 285\,[\mathrm{N}]$. Momentos respecto a O: $\vec{F}_1$ pasa por O; $(\hat{\imath} + 0.5\hat{\jmath}) \times 60\hat{\jmath} = 60\hat{k}$; $\hat{\imath} \times (-285\hat{k}) = 285\hat{\jmath}$; $0.5\hat{\jmath} \times (120\hat{\imath} - 60\hat{\jmath} - 285\hat{k}) = -142.5\hat{\imath} - 60\hat{k}$. Suma: $\vec{M}_O = -142.5\hat{\imath} + 285\hat{\jmath}\,[\mathrm{N\cdot m}]$. Con la resultante en $(x, y, 0)$: $(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \times (-570\hat{k}) = -570y\,\hat{\imath} + 570x\,\hat{\jmath}$, de donde $y = 0.25\,[\mathrm{m}]$ y $x = 0.5\,[\mathrm{m}]$.
Resultado. $F_1 = 120\,[\mathrm{N}]$, $F_2 = 60\,[\mathrm{N}]$, $F_3 = 285\,[\mathrm{N}]$; punto $(0.5,\ 0.25,\ 0)\,[\mathrm{m}]$.

Ejercicio 3.6.6 · seis fuerzas sobre una esfera ← volver

Planteamiento. Una sola fuerza exige $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ con $\vec{R} \neq \vec{0}$.
Resolución. $\vec{R} = 4\hat{\imath} + (b-4)\hat{\jmath} + 5\hat{k}\,[\mathrm{N}]$. Momentos respecto al origen: $\vec{r}_A \times \vec{F}_A = 20\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$; $\vec{r}_B \times \vec{F}_B = -20\hat{\imath} + 10\hat{k}$; $\vec{r}_C \times \vec{F}_C = -30\hat{\jmath} + 5b\,\hat{k}$; $\vec{r}_D \times \vec{F}_D = 20\hat{\jmath}$; $\vec{r}_E \times \vec{F}_E = 12.5\hat{\jmath}$; $\vec{r}_G \times \vec{F}_G = 12.5\hat{\jmath}$. Suma: $\vec{M}_O = 25\hat{\jmath} + (5b+10)\hat{k}\,[\mathrm{N\cdot m}]$.

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 25(b-4) + 5(5b+10) = 50b - 50 = 0 \;\Rightarrow\; b = 1.$$

Con $b = 1$: $\vec{R} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ y $\vec{M}_O = 25\hat{\jmath} + 15\hat{k}$. Para $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r} \times \vec{R} = (5y + 3z)\hat{\imath} + (4z - 5x)\hat{\jmath} + (-3x - 4y)\hat{k} = 25\hat{\jmath} + 15\hat{k}$; en $z = 0$ resulta $x = -5$, $y = 0$.
Resultado. $b = 1$; la resultante $\vec{R} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}\,[\mathrm{N}]$ pasa por $(-5, 0, 0)$: $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{5}$.

E.4 · Unidad 4 · Primeros momentos, centros de gravedad, centros de masa y centroides

Ejercicio 4.6.1 · placa con agujero circular ← volver

Planteamiento. Cinco partes: cuadrado del segundo cuadrante, cuarto de círculo del primero, cuadrado del cuarto cuadrante, triángulo del tercero y el agujero (negativo). La figura es simétrica respecto a la recta $y = x$, así que $\bar{x} = \bar{y}$.

Resolución.

Parte	$A_i\,[\mathrm{cm}^2]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i\bar{x}_i$
Cuadrado (2.º cuadrante)	36	-3	3	-108
Cuarto de círculo $r=6$	28.27	2.55	2.55	72.00
Cuadrado (4.º cuadrante)	36	3	-3	108
Triángulo	18	-2	-2	-36
Agujero $r=3$	-28.27	0	0	0
$\sum$	90			36.00

El cuarto de círculo y el agujero tienen la misma área, 9π, y se cancelan en $\sum A_i$. $\bar{x} = \frac{36}{90} = 0.40\,[\mathrm{cm}]$ y, por simetría, $\bar{y} = 0.40\,[\mathrm{cm}]$.

Resultado. $C(0.40,\ 0.40)\,[\mathrm{cm}]$.

Ejercicio 4.6.2 · placa trapecial con hueco rectangular

← volver

Planteamiento. Rectángulo: $A=48$, $(\bar{x},\bar{y})=(-2,6)$. Triángulo: $A=36$, $(2,4)$. Hueco: $A=-a$, $(a/2,\ 1.5)$.

Resolución.

1. $\sum A_i = 84-a$; $\sum A_i\bar{x}_i = -96+72-\frac{a^2}{2} = -24-\frac{a^2}{2}$.
2. $\dfrac{-24-a^2/2}{84-a} = -\dfrac{26}{82} \;\Rightarrow\; 1968+41a^2 = 2184-26a \;\Rightarrow\; 41a^2+26a-216=0$.
3. $a = \dfrac{-26+\sqrt{26^2+4(41)(216)}}{82} = \dfrac{-26+190}{82} = 2\,[\mathrm{ft}]$ (la otra raíz es negativa).
4. $\sum A_i\bar{y}_i = 48(6)+36(4)-2(1.5) = 429$; $\sum A_i = 82$; $\bar{y} = \frac{429}{82} = 5.23\,[\mathrm{ft}]$.

Resultado. $a = 2\,[\mathrm{ft}]$, $\bar{y} = 5.23\,[\mathrm{ft}]$.

Ejercicio 4.6.3 · intervalo de un parámetro

← volver

Planteamiento. OAB: $A=9$, centroide $(-1,\ 2)$. OCD: $A=a^2/2$, centroide $(a/3,\ -a/3)$. Estar dentro de OAB exige $\bar{x}\le 0$, $\bar{y}\ge 0$ y quedar debajo de la recta AB, $y=2x+6$.

Resolución.

$$\bar{x} = \frac{-9+a^3/6}{9+a^2/2}, \qquad \bar{y} = \frac{18-a^3/6}{9+a^2/2}.$$

1. $\bar{x}<0 \Rightarrow a^3<54 \Rightarrow a<3.78\,[\mathrm{m}]$.
2. $\bar{y}>0 \Rightarrow a^3<108 \Rightarrow a<4.76\,[\mathrm{m}]$: ya se cumple si se cumple la anterior.
3. Recta AB: $\bar{y}\le 2\bar{x}+6$ equivale a $0\le \frac{a^3}{2}+3a^2+18$, que vale para todo $a>0$.

Resultado. $0<a<3.78\,[\mathrm{m}]$; con $a=3.78\,[\mathrm{m}]$ el centroide queda justo sobre el lado OA.

Ejercicio 4.6.4 · lámina doblada con recorte semicircular

← volver

Planteamiento. $\gamma t = \frac{540}{1728}(0.2) = 0.0625\,[\mathrm{lb/in}^2]$ y $W_i = 0.0625\,A_i$. El semicírculo tiene su centroide a $\frac{4(6)}{3\pi} = 2.55\,[\mathrm{in}]$ del borde OD.

Resolución.

Parte	A_i	$W_i\,[\mathrm{lb}]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$
OAB	90	5.625	0	4	5
$ODEA$	192	12.000	8	6	0
$OBCD$	240	15.000	8	0	7.5
Semicírculo	−56.55	−3.534	8	0	2.55

$\sum W_i = 29.09\,[\mathrm{lb}]$; $\sum W_i\bar{x}_i = 96 + 120 - 28.27 = 187.73$; $\sum W_i\bar{y}_i = 22.5 + 72 = 94.5$; $\sum W_i\bar{z}_i = 28.13 + 112.5 - 9.00 = 131.63\,[\mathrm{lb}\cdot\mathrm{in}]$.

Resultado. $\bar{x} = 6.45$, $\bar{y} = 3.25$, $\bar{z} = 4.52\,[\mathrm{in}]$.

Ejercicio 4.6.5 · placa con recorte de cuarto de círculo ← volver

Planteamiento. Triángulo BCD (base 225, altura 85) más rectángulo 225×40 menos el cuarto de círculo de radio 40 con centro en $(225, 0)$, cuyo centroide está en $(225 - 16.98,\ 16.98)$.

Resolución.

Parte	$A_i\,[\mathrm{cm}^2]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i\bar{x}_i$	$A_i\bar{y}_i$
Triángulo	9562.5	75	68.33	717 188	653 438
Rectángulo	9000	112.5	20	1 012 500	180 000
Cuarto de círculo	−1256.6	208.02	16.98	−261 410	−21 333
$\sum$	17 305.9			1 468 278	812 104

$\bar{x} = \frac{1\,468\,278}{17\,305.9} = 84.84\,[\mathrm{cm}]$, $\bar{y} = \frac{812\,104}{17\,305.9} = 46.93\,[\mathrm{cm}]$.

Resultado. $C(84.84,\ 46.93)\,[\mathrm{cm}]$.

Ejercicio 4.6.6 · fuerza equivalente de una carga parabólica ← volver

Planteamiento. La fuerza es el área bajo la curva de carga y su abscisa es la del centroide de esa área (sección 4.1). Es una enjuta parabólica de $b = 20$ y $h = 400$.

Resolución.

$$F = \int_0^{20} x^2\,dx = \frac{20^3}{3} = 2666.7\,[\mathrm{N}], \qquad \int_0^{20} x^3\,dx = \frac{20^4}{4} = 40\,000\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}],$$

$$\bar{x} = \frac{40\,000}{2666.7} = 15\,[\mathrm{m}].$$

Con la tabla de la sección 4.1: área $bh/3 = 20(400)/3$ y $\bar{x} = 3b/4 = 15$. Coincide.

Resultado. $F = 2666.7\,[\mathrm{N}]$ hacia abajo, aplicada en $x = 15\,[\mathrm{m}]$.

E.5 · Unidad 5 · Estudio del equilibrio de los cuerpos: reacciones en el plano y en el espacio

Ejercicio 5.6.1 · viga en voladizo con carga trapecial ← volver

Planteamiento. Se divide la carga en tres partes: rectángulo $2(3) = 6\,[\mathrm{t}]$ en $x = 2.5$; triángulo $\frac{1}{2}(6)(3) = 9\,[\mathrm{t}]$ en $x = 1 + \frac{2}{3}(3) = 3$; rectángulo $8(1) = 8\,[\mathrm{t}]$ en $x = 4.5\,[\mathrm{m}]$. Empotramiento: A_x, A_y, M_A.

Resolución. $\sum F_x$: $A_x = 0$. $\sum F_y$: $A_y = 6{+}9{+}8 = 23\,[\mathrm{t}]$. $\sum M_A$: $M_A{-}6(2.5){-}9(3){-}8(4.5) = 0 \Rightarrow M_A = 15 + 27 + 36 = 78\,[\mathrm{t\cdot m}]$.

Resultado. $R_A = 23\,[\mathrm{t}]$ hacia arriba y $M_A = 78\,[\mathrm{t\cdot m}]$ antihorario.

Ejercicio 5.6.2 · marco empotrado ← volver

Datos. Origen en A: esquina superior en $(1.5, 2.598)$, extremo libre en $(4.5, 2.598)\,[\mathrm{m}]$. Fuerza: $500(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = (400, 300)\,[\mathrm{N}]$.

Planteamiento. Carga trapecial: rectángulo $500(3) = 1500\,[\mathrm{N}]$ en $x = 3.0$ y triángulo $\frac{1}{2}(500)(3) = 750\,[\mathrm{N}]$ en $x = 1.5 + 2 = 3.5\,[\mathrm{m}]$.

Resolución. $\sum F_x$: $A_x + 400 = 0 \Rightarrow A_x = -400\,[\mathrm{N}]$. $\sum F_y$: $A_y - 1500 - 750 + 300 = 0 \Rightarrow A_y = 1950\,[\mathrm{N}]$.

$$\sum M_A = M_A - 3(1500) - 3.5(750) + \big[4.5(300) - 2.598(400)\big] + 400 = M_A - 6414.2 = 0.$$

Resultado. $A_x = 400\,[\mathrm{N}]$ hacia la izquierda, $A_y = 1950\,[\mathrm{N}]$, $R_A = \sqrt{400^2 + 1950^2} = 1990.6\,[\mathrm{N}]$ y $M_A = 6414\,[\mathrm{N\cdot m}]$ antihorario.

Ejercicio 5.6.3 · botella sobre dos clavijas lisas ← volver

Planteamiento. Las clavijas lisas empujan perpendicularmente al cuello: A hacia abajo, B hacia arriba. $W = 1.2(9.81) = 11.77\,[\mathrm{N}]$ en G.

Resolución. $\sum M_B$: $5\,R_A - 8\,W = 0 \Rightarrow R_A = \frac{8(11.77)}{5} = 18.8\,[\mathrm{N}]$. $\sum M_A$: $5\,R_B - 13\,W = 0 \Rightarrow R_B = \frac{13(11.77)}{5} = 30.6\,[\mathrm{N}]$. Comprobación: $R_B - R_A - W = 30.6 - 18.8 - 11.8 = 0$.

Resultado. $R_A = 18.8\,[\mathrm{N}]$ $(1.92\,[\mathrm{kgf}])$ hacia abajo y $R_B = 30.6\,[\mathrm{N}]$ $(3.12\,[\mathrm{kgf}])$ hacia arriba.

Ejercicio 5.6.4 · barra articulada, cuerda y bloque colgante ← volver

Datos. Origen en C: $B(0.6L, 0.8L)$, centro de la barra $(0.3L, 0.4L)$. La cuerda jala a B en la dirección $(-\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$.

Planteamiento. Bloque: $T = W_D$ (polea lisa). Barra: T, $100\,[\mathrm{N}]$, C_x, C_y.

Resolución.

$$\sum M_C = 0.6L\,\frac{T}{2} - 0.8L\big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}T\big) - 0.3L(100) = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{30}{0.3 + 0.4\sqrt{3}} = 30.2\,[\mathrm{N}].$$

$\sum F_x$: $C_x - \frac{\sqrt{3}}{2}(30.22) = 0 \Rightarrow C_x = 26.2\,[\mathrm{N}]$. $\sum F_y$: $C_y + \frac{1}{2}(30.22) - 100 = 0 \Rightarrow C_y = 84.9\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. $W_D = T = 30.2\,[\mathrm{N}]$ y $C = \sqrt{26.2^2 + 84.9^2} = 88.8\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 5.6.5 · armadura como cuerpo rígido ← volver

Datos. Coordenadas en metros: $B(3, 1.25)$, $C(6, 2.5)$, $D(9, 1.25)$ y $E(12, 0)$. Fuerzas: en B, $400(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = (320, -240)$; en D, $600(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-360, -480)\,[\mathrm{N}]$.

Planteamiento. La armadura completa es un solo cuerpo rígido: incógnitas A_x, A_y, E.

Resolución. $\sum F_x$: $A_x + 320 - 360 = 0 \Rightarrow A_x = 40\,[\mathrm{N}]$.

$$\sum M_A = \big[3(-240) - 1.25(320)\big] + 6(-600) + \big[9(-480) - 1.25(-360)\big] +$$

$$+\,12(-300)+12E=-12\,190+12E=0,$$

de donde $E=1015.8\,[\mathrm{N}]$. $\sum F_y$: $A_y+E=200+240+600+480+300=1820\Rightarrow A_y=804.2\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. $A=\sqrt{40^2+804.2^2}=805.2\,[\mathrm{N}]$ y $E=1015.8\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 5.6.6 · brazo con rótula y cables, segunda versión ← volver

Planteamiento. $\hat{e}_{EC}=\frac{(-1,2,2)}{3}$, $\hat{e}_{AD}=\frac{(-2,1,-2)}{3}$, $\vec{F}=-300\,\hat{\jmath}$. Momentos respecto a O.

Resolución. $\vec{r}_E\times\hat{e}_{EC}=\frac{1}{3}(0,-2,2)$, $\vec{r}_A\times\hat{e}_{AD}=\frac{1}{3}(0,4,2)$, $\vec{r}_A\times\vec{F}=(0,0,-600)$. $\sum M_y$: $-\frac{2}{3}T_{EC}+\frac{4}{3}T_{AD}=0\Rightarrow T_{EC}=2T_{AD}$. $\sum M_z$: $\frac{2}{3}T_{EC}+\frac{2}{3}T_{AD}=600\Rightarrow 2T_{AD}=600$.

$O_x=\frac{1}{3}(600)+\frac{2}{3}(300)=400$; $O_y=300-\frac{2}{3}(600)-\frac{1}{3}(300)=-200$; $O_z=-\frac{2}{3}(600)+\frac{2}{3}(300)=-200\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. $T_{EC}=600\,[\mathrm{N}]$, $T_{AD}=300\,[\mathrm{N}]$, $|\vec{O}|=\sqrt{400^2+200^2+200^2}=489.9\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 5.6.7 · pescante con rótula, dos cables y fuerza dada ← volver

Planteamiento. Equilibrio del punto B (el pescante solo transmite la fuerza R_A a lo largo de AB): $R_A\,\hat{e}_{AB}+T_{BC}\,\hat{e}_{BC}+T_{BD}\,\hat{e}_{BD}+\vec{P}=\vec{0}$, con $\hat{e}_{AB}=\frac{(-2,6,3)}{7}$, $\hat{e}_{BC}=\frac{(1,-3,3)}{\sqrt{19}}$, $\hat{e}_{BD}=\frac{(-2,-3,1)}{\sqrt{14}}$.

Resolución.

$$-\frac{2}{7}R_A+\frac{1}{\sqrt{19}}T_{BC}-\frac{2}{\sqrt{14}}T_{BD}+12=0,$$

$$\frac{6}{7}R_A-\frac{3}{\sqrt{19}}T_{BC}-\frac{3}{\sqrt{14}}T_{BD}=0,$$

$$\frac{3}{7}R_A+\frac{3}{\sqrt{19}}T_{BC}+\frac{1}{\sqrt{14}}T_{BD}-16=0.$$

Resolviendo el sistema: $R_A=18.67$, $T_{BC}=5.81$, $T_{BD}=14.97\,[\mathrm{kN}]$.

Resultado. $R_A=18.67\,[\mathrm{kN}]$; sale positiva en la dirección de A hacia B: el pescante empuja a B (compresión). $T_{BC}=5.81\,[\mathrm{kN}]$ y $T_{BD}=14.97\,[\mathrm{kN}]$.

E.6 · Unidad 6 · Fricción: deslizamiento, volcamiento y cuerpos conectados

Ejercicio 6.6.1 · fuerza horizontal sobre un plano ← volver

Planteamiento. Ejes paralelo (hacia arriba) y perpendicular al plano; $\sin\theta=0.6$, $\cos\theta=0.8$.

Resolución.

1. Componentes de F: 48 [N] hacia arriba del plano y 36 [N] contra él. Del peso: 24 [N] hacia abajo del plano y 32 [N] contra él.
2. $48>24$: está a punto de subir y f apunta hacia abajo del plano.
3. $\sum F_y=0$: $N=32+36=68\,[\mathrm{N}]$. $\sum F_x=0$: $f=48-24=24\,[\mathrm{N}]$.
4. $\mu_s=\frac{24}{68}$.

Resultado. $\mu_s = 0.353$.

Ejercicio 6.6.2 · componentes de la fuerza en una rampa ← volver

Planteamiento. $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$, así que $\theta = 30^\circ$. A punto de bajar: $f = \mu_s N$ hacia arriba de la rampa.

Resolución.

1. $N = 100\cos 30^\circ = 86.60\,[\mathrm{N}]$; $f = 0.5(86.60) = 43.30\,[\mathrm{N}]$.
2. A lo largo de la rampa: $F + f - 100\sin 30^\circ = 0$, así que $F = 50 - 43.30 = 6.70\,[\mathrm{N}]$.
3. $F_h = F\cos 30^\circ = 5.80\,[\mathrm{N}]$; $F_v = F\sin 30^\circ = 3.35\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. $F_h = 5.80\,[\mathrm{N}]$ y $F_v = 3.35\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 6.6.3 · masa con polea móvil ← volver

Planteamiento. Polea móvil: $2T = W_B$. Bloque A a punto de subir: $f = \mu_s N$ hacia abajo del plano.

Resolución.

1. $N = 98.1\cos 30^\circ = 84.96\,[\mathrm{N}]$; $f = \frac{84.96}{\sqrt{3}} = 49.05\,[\mathrm{N}]$.
2. $T = 98.1\sin 30^\circ + 49.05 = 49.05 + 49.05 = 98.1\,[\mathrm{N}]$.
3. $W_B = 2T = 196.2\,[\mathrm{N}]$ y $m_B = \frac{196.2}{9.81}$.

Resultado. $m_B = 20\,[\mathrm{kg}]$.

Ejercicio 6.6.4 · fuerza para subir un cuerpo que cuelga ← volver

Planteamiento. Si B sube, A sube por el plano: $f = \mu_s N$ hacia abajo del plano. La cuerda de B tira de A hacia abajo del plano con W_B.

Resolución.

1. $N = 300\cos 45^\circ = 212.13\,[\mathrm{N}]$; $f = 0.3(212.13) = 63.64\,[\mathrm{N}]$.
2. A lo largo del plano: $P - 300\sin 45^\circ - 800 - 63.64 = 0$.
3. $P = 212.13 + 800 + 63.64$.

Resultado. $P = 1075.8\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 6.6.5 · peso que hace subir el bloque ← volver

Planteamiento. A punto de subir: $f = \mu_s N = 46\,[\mathrm{N}]$ hacia abajo del plano.

Resolución.

1. $46 = 0.3(200\cos\alpha)$, así que $\cos\alpha = 0.7667$ y $\alpha = 39.94^\circ$.
2. A lo largo del plano: $W_B - 200\sin\alpha - 46 = 0$, así que $W_B = 128.4 + 46 = 174.4\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. $\alpha = 39.9^\circ$ y $W_B = 174.4\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 6.6.6 · caja cuadrada con una fuerza inclinada ← volver

Planteamiento. Volcamiento alrededor de la arista inferior derecha E, que está justo debajo del punto de aplicación de T: la componente vertical de T no produce momento respecto a E.

Resolución.

1. $\sum M_E = 0$: $W\frac{l}{2} - (T\cos\alpha)\,l = 0$, así que $\cos\alpha = \frac{200}{2(125)} = 0.8$ y $\alpha = 36.87^\circ$.
2. $\sum F_x = 0$: $f = T\cos\alpha = 100\,[\text{lb}]$.
3. $\sum F_y = 0$: $N = 200 - 125\sin\alpha = 200 - 75 = 125\,[\text{lb}]$.
4. $\mu_s = \frac{100}{125}$.

Resultado. $\alpha = 36.87^\circ$ y $\mu_s = 0.8$.

Ejercicio 6.6.7 · empujar un mueble ← volver

Planteamiento. Mueble a punto de deslizar: $f = \mu_s N$. La persona recibe la reacción de F: hacia atrás y hacia arriba.

Resolución.

1. Mueble: $N = 90 + F\sin 30^\circ$; $F\cos 30^\circ = 0.25(90 + 0.5F)$, así que $F(0.866 - 0.125) = 22.5$ y $F = 30.36\,[\text{lb}]$.
2. Persona: la fricción en sus zapatos equilibra $F\cos 30^\circ = 26.30\,[\text{lb}]$; la normal es $150 - F\sin 30^\circ = 134.82\,[\text{lb}]$.
3. $\mu_{\text{mín}} = \frac{26.30}{134.82}$.

Resultado. $F = 30.4\,[\text{lb}]$ y $\mu_{\text{mín}} = 0.195$.