Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1 · Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial

Ejercicio 1.6.1 · Tren que frena

← volver

Datos. $v_0 = 60\,\text{mi/h} = 88\,\text{ft/s}$; $v = 0$; $\Delta x = 250\,\text{ft}$.

Planteamiento. Aceleración constante; sin t: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$.

Resolución. a) $0 = 88^2 + 2a(250) \Rightarrow a = -7744/500 = -15.49\,\text{ft/s}^2$. b) $0 = 88 - 15.49\,t \Rightarrow t = 5.68\,\text{s}$.

Resultado. a) $15.49\,\text{ft/s}^2$ en sentido contrario al movimiento; b) $5.68\,\text{s}$.

Ejercicio 1.6.2 · Aceleración proporcional al cuadrado del tiempo

← volver

Datos. $a = kt^2$; $x(0) = 36\,\text{ft}$; $x(9) = 144\,\text{ft}$; $v(9) = 27\,\text{ft/s}$.

Planteamiento. Aceleración función del tiempo con constante desconocida: se integra con constantes y se usan las tres condiciones.

Resolución. $v = \frac{1}{3}kt^3 + C$; $x = \frac{1}{12}kt^4 + Ct + 36$. Condiciones en $t = 9$:

$$243k + C = 27, \qquad 546.75k + 9C = 108.$$

Sustituyendo $C = 27 - 243k$: $546.75k + 243 - 2187k = 108$, de donde $k = 20/243 = 0.082\,30\,\text{ft/s}^4$ y $C = 7\,\text{ft/s}$. Comprobación: $x(9) = 0.006859(6561) + 63 + 36 = 144$.

Resultado. $v = 0.02743\,t^3 + 7$ [ft/s]; $x = 0.006859\,t^4 + 7t + 36$ [ft].

Ejercicio 1.6.3 · Patrulla que arranca dos segundos después

← volver

Datos. Retraso $2\,\text{s}$; $a_P = 5\,\text{m/s}^2$; $v_P = 180\,\text{km/h} = 50\,\text{m/s}$; tramo uniforme de $12\,\text{s}$.

Planteamiento. Persecución con reloj en el instante en que el auto pasa junto a la patrulla.

Resolución. Tramo acelerado: $t = 50/5 = 10\,\text{s}$, $x = \frac{1}{2}(5)(10)^2 = 250\,\text{m}$. Tramo uniforme: $50(12) = 600\,\text{m}$. Total $850\,\text{m}$. El auto recorre esos $850\,\text{m}$ en $2+10+12 = 24\,\text{s}$: $v = 850/24 = 35.42\,\text{m/s} = 127.5\,\text{km/h}$.

Resultado. $850\,\text{m}$; $127.5\,\text{km/h}$.

Ejercicio 1.6.4 · Ascensor con gráfica velocidad-tiempo

← volver

Datos. Gráfica v-t trapecial: $(0,0)$, $(5,1.2)$, $(10,1.2)$, $(15,0)$.

Planteamiento. El desplazamiento es el área bajo la v-t; la aceleración es la pendiente.

Resolución. Área $= \frac{1}{2}(5)(1.2) + 5(1.2) + \frac{1}{2}(5)(1.2) = 3 + 6 + 3 = 12\,\text{m}$. Pendientes: $1.2/5 = 0.24\,\text{m/s}^2$, 0 y $-0.24\,\text{m/s}^2$.

Resultado. Distancia $12\,\text{m}$; aceleración máxima $0.24\,\text{m/s}^2$ (en magnitud, al arrancar y al frenar).

$R_A = \sqrt{991.9^2 + 1356^2} = 1680\,\text{N}$.

Resultado. $\alpha = 2.65\,\text{rad/s}^2$ en sentido horario; $R_A = 1680\,\text{N}$ (992 N hacia la izquierda y 1356 N hacia arriba).

Ejercicio 5.6.5 · Esfera que rueda por una pendiente ← volver

Datos. $m = 5\,\text{kg}$, $r = 0.2\,\text{m}$, pendiente $7/24$ ($\sin\theta = 7/25 = 0.28$), $t = 2\,\text{s}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Rueda sin deslizar: para una rueda homogénea que rueda sin deslizar, la ecuación de momentos puede tomarse respecto al punto de contacto C, con

$$I_C = \bar{I} + mr^2 = \tfrac{7}{5}mr^2 = \tfrac{7}{5}(5)(0.2)^2 = 0.28\,\text{kg m}^2.$$

Resolución. $\sum M_C = I_C\alpha$: $5(9.81)(0.28)(0.2) = 0.28\,\alpha$, $\alpha = 9.81\,\text{rad/s}^2$; $\bar{a} = \alpha r = 1.962\,\text{m/s}^2$ (es decir, $\frac{5}{7}g\sin\theta$).

$$x = \tfrac{1}{2}\bar{a}t^2 = \tfrac{1}{2}(1.962)(2)^2 = 3.92\,\text{m}.$$

Resultado. $x = 3.92\,\text{m}$.

Ejercicio 5.6.6 · Barra que cae girando alrededor de su base ← volver

Datos. $L = 1\,\text{ft}$, $\theta_{\text{ini}} = 45^\circ$, $\theta_{\text{fin}} = 90^\circ$, $\omega_{\text{ini}} = 0$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. Rotación alrededor de un eje fijo; energía del cuerpo rígido con $T = \frac{1}{2}I_A\omega^2$, $I_A = \frac{1}{3}mL^2$. La reacción en A no trabaja; solo el peso, por la bajada de G: $\Delta y_G = -\frac{L}{2}\cos 45^\circ = -0.3536\,\text{ft}$.

$$0 = \Delta T + \Delta V_g = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 + mg\,\Delta y_G.$$

Resolución. La masa se cancela:

$$\tfrac{1}{6}\omega^2 = 32.2(0.3536) = 11.38 \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{68.3} = 8.26\,\text{rad/s}.$$

(Con la segunda ley: $\alpha = 1.5g\sin\theta$ e $\int \omega\,\mathrm{d}\omega = \int \alpha\,\mathrm{d}\theta$ dan $\omega^2 = 3g\cos 45^\circ$, el mismo valor.)

Resultado. $\omega = 8.26\,\text{rad/s}$.

Planteamiento. Tres tramos sostienen a B: sobre él actúa $3T$ y $a_B = a_A/3$. A ya se mueve, así que $F_r = \mu_k N = 0.2(196.2) = 39.24\,\text{N}$, hacia la izquierda. x hacia la derecha para A; y hacia abajo para B.

Resolución.

$$A: \quad T - 39.24 = 20\,a_A$$
$$B: \quad 392.4 - 3T = 40\,a_B = \tfrac{40}{3}\,a_A$$

Al sustituir T: $392.4 - 3(39.24 + 20a_A) = 13.33\,a_A$, es decir, $274.68 = 73.33\,a_A$, de donde $a_A = 3.746\,\text{m/s}^2$ y $T = 114.2\,\text{N}$.

$$v^2 = v_0^2 + 2a_A\,\Delta x = 9 + 2(3.746)(6) = 53.95 \;\Rightarrow\; v = 7.34\,\text{m/s}.$$

Resultado. $v_A = 7.34$ **m/s hacia la derecha**.

Ejercicio 2.6.3 · Auto que frena en una recta y en una curva ← volver

Datos. $m = 500\,\text{kg}$, $v_A = 80\,\text{km/h} = 22.22\,\text{m/s}$, $AB = 50\,\text{m}$, $\rho = 100\,\text{m}$, arco de 45°, $v_C = 0$.

Planteamiento. La fricción es la única fuerza horizontal: produce la aceleración tangencial (constante) y, en la curva, la normal. Distancia total: $s = 50 + 100(\pi/4) = 128.5\,\text{m}$.

Resolución.

$$a_t = -\frac{v_A^2}{2s} = -\frac{493.8}{2(128.5)} = -1.921\,\text{m/s}^2.$$

En A (recta): $F_A = m|a_t| = 500(1.921) = 960\,\text{N}$.

En B: $v_B^2 = 493.8 - 2(1.921)(50) = 301.7\,\text{m}^2/\text{s}^2$ ($v_B = 17.37\,\text{m/s}$); $F_n = mv_B^2/\rho = 500(301.7)/100 = 1509\,\text{N}$ y $F_t = 960\,\text{N}$, así que $F_B = \sqrt{960^2 + 1509^2} = 1788\,\text{N}$.

En C: $v_C = 0$, así que $F_n = 0$ y $F_C = 960\,\text{N}$.

Resultado. $F_A = 960$ **N**, $F_B = 1788$ **N**, $F_C = 960$ **N**.

Ejercicio 2.6.4 · La normal se duplica al entrar en la curva ← volver

Datos. $\sin\theta = 0.8$, $\cos\theta = 0.6$, $R = 1\,\text{m}$, $\mu = 0.5$, $v_0 = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. En el plano, $N = mg\cos\theta = 0.6\,mg$. Justo al entrar en la curva, el centro C queda del lado de la normal y $N = 1.2\,mg$; la dirección normal sigue siendo la perpendicular al plano.

Resolución. a) $\sum F_n = ma_n$ en P:

$$1.2\,mg - 0.6\,mg = m\frac{v_P^2}{R} \;\Rightarrow\; v_P^2 = 0.6(9.81)(1) = 5.886, \qquad v_P = 2.43\,\text{m/s}.$$

b) En el plano: $mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$, así que $a = 9.81(0.8 - 0.3) = 4.905\,\text{m/s}^2$ y

$$L = \frac{v_P^2}{2a} = \frac{5.886}{2(4.905)} = 0.60\,\text{m}.$$

Ejercicio 4.6.5 · Barra entre un collarín y una ranura semicircular

← volver

Datos. Con origen en O: $B = (4\sin 60^\circ, -4\cos 60^\circ) = (3.464, -2)$ y $A = (0, -8)$ [ft]; $\vec{v}_A = -8\hat{j}$.

Planteamiento. $\vec{v}_B$ es tangente a la ranura (perpendicular a OB). CIR de AB: cruce de la horizontal por A (perpendicular a $\vec{v}_A$) con la recta OB (perpendicular a $\vec{v}_B$).

Resolución. La recta OB baja 0.5 por cada 0.866 que avanza; llega a $y = -8$ en $x = 8(0.866)/0.5 = 13.86$ ft. Así $I = (13.86, -8)$, con $r_{A/I} = 13.86$ ft y $r_{B/I} = \sqrt{10.39^2 + 6^2} = 12.00$ ft.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{r_{A/I}} = \frac{8}{13.86} = 0.577 \text{ rad/s},$$

$$v_B = \omega_{AB}\, r_{B/I} = 0.577(12.00) = 6.93 \text{ ft/s}.$$

A está a la izquierda de I y baja: la barra gira en sentido antihorario. $\vec{v}_B$ es perpendicular a IB: hacia abajo y a la izquierda, a 60° bajo la horizontal. Comprobación vectorial: $\vec{v}_B = -8\hat{j} + \omega\hat{k}\times(3.464\hat{i} + 6\hat{j}) = -6\omega\hat{i} + (-8 + 3.464\,\omega)\hat{j}$, paralela a $(0.5,\ 0.866)$: $-8 + 3.464\,\omega = -10.39\,\omega$, $\omega = 0.577$.

Resultado. a) $\omega_{AB} = 0.577$ rad/s antihorario; b) $v_B = 6.93$ ft/s a 60° bajo la horizontal, hacia la izquierda.

E.5 · Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general

Ejercicio 5.6.1 · Volante con un cuerpo colgado

← volver

Datos. $W = 250$ lb, $r = 20/12 = 1.667$ ft, $\bar{k} = 15/12 = 1.25$ ft, $W_A = 30$ lb, $g = 32.2$ ft/s^2.

Planteamiento. Volante en rotación centroidal: $\sum M_O = \bar{I}\alpha$ con $Tr = \bar{I}\alpha$. Cuerpo A: $W_A - T = m_A a_A$. Cinemática: $a_A = r\alpha$. $\bar{I} = \frac{250}{32.2}(1.25)^2 = 12.13$ slug ft^2; $m_A = 0.9317$ slug.

Resolución. De la ecuación del volante, $T = \bar{I}a_A/r^2 = 12.13\,a_A/2.778 = 4.367\,a_A$. En la del cuerpo:

$$30 - 4.367\,a_A = 0.9317\,a_A \;\Rightarrow\; a_A = \frac{30}{5.299} = 5.66 \text{ ft/s}^2.$$

$T = 4.367(5.66) = 24.7$ lb (comprobación: $30 - 0.9317(5.66) = 24.7$).

Resultado. a) $a_A = 5.66$ ft/s^2 hacia abajo; b) $T = 24.7$ lb.

Ejercicio 5.6.2 · Carrete que se desenrolla al caer

← volver

Datos. $m = 20$ kg, $\bar{k} = 0.25$ m, $r = 0.1$ m (cubo), $t = 3$ s, $v_0 = 0$, $g = 9.81$ m/s^2.

Planteamiento. Movimiento plano general. El punto del cubo tangente a la cuerda fija no se acelera verticalmente: $\bar{a} = r\alpha = 0.1\alpha$. La longitud desenrollada es igual a lo que baja G. Ecuaciones (positivo hacia abajo y en el sentido de giro):

$$mg - T = m\bar{a}, \qquad Tr = m\bar{k}^2\alpha.$$

Resultado. a) $v_0 = 3.12$ m/s; b) $v = 4.80$ m/s.

Ejercicio 3.6.2 · Pelotita lanzada por una cuerda elástica

← volver

Datos. $AB = 16$ in, tensión con la cuerda recta 10 lb; $CC' = 6$ in; fuerza en C' 60 lb; $W = 0.2$ lb, $g = 32.2$ ft/s^2. Plano horizontal: el peso no trabaja.

Planteamiento. Con las dos posiciones de equilibrio se obtienen k y la longitud natural de la cuerda; luego, conservación de la energía entre C' y C.

Resolución.

1. En C' cada mitad mide $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ in (longitud total 20 in). Equilibrio de C': $2T(6/10) = 60$, de donde $T = 50$ lb.
2. Al pasar de 16 a 20 in, la tensión sube de 10 a 50 lb: $k = 40/4 = 10$ lb/in. Longitud natural: $16 - 10/10 = 15$ in.
3. Alargamientos: 5 in en C' y 1 in en C. Energía liberada: $\frac{1}{2}(10)(5^2 - 1^2) = 120$ lb in $= 10$ ft lb.
4. $\frac{1}{2}\frac{0.2}{32.2}v^2 = 10$, de donde $v = 56.7$ ft/s.

Resultado. $v = 56.7$ ft/s.

Ejercicio 3.6.3 · Dos cuerpos en planos opuestos con polea móvil

← volver

Datos. $m_A = 20$ kg, $m_B = 40$ kg; lado de A: seno del ángulo 0.8, liso; lado de B: seno 0.6, coseno 0.8, $\mu_k = 0.15$; $g = 9.81$ m/s^2; $s_B = 2$ m.

Planteamiento. Por la polea móvil, $s_B = 2s_A$ y $v_A = v_B/2$. B baja: la cuerda le transmite a lo más $40g(0.6) - 0.15(40g)(0.8) = 19.2g$, que en los dos tramos de la polea de A equivalen a $38.4g$, mayor que $20g(0.8) = 16g$. Sistema completo: $U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g$.

Resolución.

1. Fricción: $U_{1\to 2} = -0.15(40)(9.81)(0.8)(2) = -94.2$ J.
2. $\Delta V_g = -40(9.81)(0.6)(2) + 20(9.81)(0.8)(1) = -470.9 + 157.0 = -313.9$ J.
3. $\Delta T = \frac{1}{2}(40)v_B^2 + \frac{1}{2}(20)(v_B/2)^2 = 22.5\,v_B^2$.
4. $-94.2 = 22.5\,v_B^2 - 313.9$, de donde $v_B^2 = 9.77$ y $v_B = 3.13$ m/s; $v_A = 1.56$ m/s.

Resultado. $v_B = 3.13$ m/s hacia abajo del plano; $v_A = 1.56$ m/s hacia arriba del plano.

Ejercicio 3.6.4 · Fuerza en rampa que vence la fricción

← volver

Datos. $m = 20$ kg, $g = 9.81$ m/s^2, $\mu = 0.6$; fricción $0.6(20)(9.81) = 117.7$ N; $F = 40t$ hasta 5 s y $F = 200$ después.

Planteamiento. El cuerpo arranca cuando F iguala a la fricción; desde ese instante, $mv_{10} = \int_{t_0}^{10} F\,\mathrm{d}t - 117.7(10 - t_0)$.

Resolución.

1. Arranque: $40\,t_0 = 117.7$, de donde $t_0 = 2.94$ s.
2. Impulso de F: $20(5^2 - 2.943^2) + 200(5) = 326.8 + 1000 = 1326.8$ N s.
3. Impulso de la fricción: $-117.7(7.057) = -830.8$ N s.
4. $20\,v_{10} = 496.0$, de donde $v_{10} = 24.8$ m/s.

Resultado. $v_{10} = 24.8$ m/s en el sentido de F.

Ejercicio 1.6.5 · Pelota lanzada contra una pared ← volver

Datos. $y_A = 1.2\,\text{m}$; $x_B = 4\,\text{m}$; $y_B = 0.93\,\text{m}$; $t = 1.23\,\text{s}$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Tiro parabólico con origen en el suelo bajo A: $x = v_{x0}t$, $y = 1.2 + v_{y0}t - 4.905t^2$.

Resolución. $v_{x0} = 4/1.23 = 3.252\,\text{m/s}$. $0.93 = 1.2 + 1.23\,v_{y0} - 4.905(1.23)^2 \Rightarrow v_{y0} = (0.93 - 1.2 + 7.421)/1.23 = 5.814\,\text{m/s}$. $v_0 = \sqrt{3.252^2 + 5.814^2} = 6.66\,\text{m/s}$; $\theta = \tan^{-1}(5.814/3.252) = 60.8^\circ$.

Resultado. $v_0 = 6.66\,\text{m/s}$ a 60.8° sobre la horizontal.

Ejercicio 1.6.6 · Velocidad y aceleración relativas de dos autos ← volver

Datos. $v_B = 65\,\text{km/h}$, $a_B = 1200\,\text{km/h}^2$ (a la derecha); $v_A = 20\,\text{km/h}$ constante; $\rho = 100\,\text{m} = 0.1\,\text{km}$.

Planteamiento. Movimiento relativo con ejes que se trasladan con B: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$. Como A no cambia de rapidez, solo tiene $a_n = v_A^2/\rho$ hacia C.

Resolución. $\vec{v}_A = 20(\cos 135^\circ\,\hat{\imath} + \sin 135^\circ\,\hat{\jmath}) = -14.14\,\hat{\imath} + 14.14\,\hat{\jmath}$; $\vec{v}_B = 65\,\hat{\imath}$:

$$\vec{v}_{A/B} = -79.14\,\hat{\imath} + 14.14\,\hat{\jmath}, \quad v_{A/B} = 80.4\,\text{km/h}, \quad \tan^{-1}\tfrac{14.14}{79.14} = 10.1^\circ.$$

$a_A = 20^2/0.1 = 4000\,\text{km/h}^2$ a 45° (hacia C): $\vec{a}_A = 2828\,\hat{\imath} + 2828\,\hat{\jmath}$.

$$\vec{a}_{A/B} = 1628\,\hat{\imath} + 2828\,\hat{\jmath}, \quad a_{A/B} = 3264\,\text{km/h}^2, \quad \tan^{-1}\tfrac{2828}{1628} = 60.1^\circ.$$

Resultado. $v_{A/B} = 80.4\,\text{km/h}$, a la izquierda y 10.1° hacia arriba; $a_{A/B} = 3264\,\text{km/h}^2$, a la derecha y 60.1° hacia arriba.

E.2 · Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo

Ejercicio 2.6.1 · Caja lanzada hacia arriba de un plano ← volver

Datos. $m = 40\,\text{kg}$, $\theta = 30^\circ$, $v_0 = 18\,\text{m/s}$, $\mu_k = 0.2$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Eje x hacia arriba del plano. Mientras sube, la fricción y la componente del peso apuntan hacia abajo del plano; $N = mg\cos 30^\circ$.

Resolución.

$$\sum F_x = ma: \quad -mg\sin 30^\circ - \mu_k mg\cos 30^\circ = ma$$
$$a = -9.81(0.5 + 0.1732) = -6.604\,\text{m/s}^2$$

Con $v = v_0 + at = 0$: $t = 18/6.604 = 2.73\,\text{s}$. (Recorre $d = v_0^2/(2|a|) = 24.5\,\text{m}$.)

Resultado. $t = 2.73$ **s**.

Ejercicio 2.6.2 · Cuerpo horizontal y cuerpo colgante con tres tramos ← volver

Datos. $W_A = 196.2\,\text{N}$ ($m_A = 20\,\text{kg}$), $W_B = 392.4\,\text{N}$ ($m_B = 40\,\text{kg}$), $\mu_k = 0.2$, $v_0 = 3\,\text{m/s}$, $\Delta x = 6\,\text{m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Resultado. a) $v_P = 2.43$ **m/s**; b) $L = 0.60$ **m**.

Ejercicio 2.6.5 · Rapidez angular de un volantín ← volver

Datos. $L = 9.2\,\text{m}$, $b = 4.6\,\text{m}$, $\theta = 60^\circ$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Cada columpio describe una circunferencia horizontal de radio $r = b + L\sin\theta = 4.6 + 9.2(0.866) = 12.57\,\text{m}$, con $a_n = \omega^2 r$. Sobre él actúan el peso y la tensión del brazo.

Resolución. $\sum F_y = 0$: $T\cos\theta = mg$; $\sum F_n = ma_n$: $T\sin\theta = m\omega^2 r$. Al dividir:

$$\omega^2 = \frac{g\tan\theta}{r} = \frac{9.81(1.732)}{12.57} = 1.352 \;\Rightarrow\; \omega = 1.163\,\text{rad/s} = 1.163\,\frac{60}{2\pi} = 11.1\,\text{rpm}.$$

Resultado. $\omega = 11.1$ **rpm**.

Ejercicio 2.6.6 · Péndulo que parte de la horizontal ← volver

Datos. $L = 1\,\text{m}$, $m = 0.2\,\text{kg}$, $\varphi = 45^\circ$ (desde la horizontal), $v_0 = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. La plomada ha bajado $h = L\sin\varphi = 0.707\,\text{m}$; la rapidez sale de la energía (Unidad 3). La componente del peso en la dirección de la cuerda es $mg\sin\varphi$, alejándose del punto de suspensión.

Resolución.

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81)(0.707)} = 3.72\,\text{m/s}$$

$$\sum F_n = ma_n: \quad T - mg\sin\varphi = m\frac{v^2}{L} \;\Rightarrow\; T = 0.2(9.81)(0.707) + 0.2(13.87) = 4.16\,\text{N}$$

(En general, $T = 3mg\sin\varphi$.)

Resultado. $v = 3.72$ **m/s**, $T = 4.16$ **N**.

E.3 · Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula

Ejercicio 3.6.1 · Cuerpo que sube por un plano, comprime un resorte y cae al suelo ← volver

Datos. $m = 0.1\,\text{kg}$, $k = 3\,\text{N/m}$, $\sin\theta = 0.6$, $s_0 = 0.3\,\text{m}$, $s_1 = 1.0\,\text{m}$, compresión $x = 0.1\,\text{m}$, $h = 0.5\,\text{m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Plano liso y caída libre: se conserva la energía. La compresión máxima ocurre en $s = 1.1\,\text{m}$ con $v = 0$.

Resolución.

a) De s_0 a la compresión máxima sube $(1.1-0.3)(0.6) = 0.48\,\text{m}$: $\frac{1}{2}(0.1)v_0^2 = 0.1(9.81)(0.48) + \frac{1}{2}(3)(0.1^2) = 0.471 + 0.015$, de donde $v_0^2 = 9.72$ y $v_0 = 3.12\,\text{m/s}$.

b) De la compresión máxima ($v = 0$, resorte comprimido) al suelo baja $1.1(0.6) + 0.5 = 1.16\,\text{m}$ y el resorte devuelve su energía: $\frac{1}{2}(0.1)v^2 = 0.1(9.81)(1.16) + 0.015 = 1.153\,\text{J}$, de donde $v^2 = 23.06$ y $v = 4.80\,\text{m/s}$. Comprobación desde s_0: $v^2 = v_0^2 + 2(9.81)(0.18+0.5) = 23.06$.

Resolución. De la segunda, $T = m\bar{k}^2\bar{a}/r^2 = 6.25\,m\bar{a}$. En la primera:

$$g = \bar{a}(1 + 6.25) \;\Rightarrow\; \bar{a} = \frac{9.81}{7.25} = \frac{4g}{29} = 1.353\,\text{m/s}^2.$$

Con aceleración constante desde el reposo: $s = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 = \frac{1}{2}(1.353)(3)^2 = 6.09\,\text{m}$. (Además, $\alpha = 13.5\,\text{rad/s}^2$ y $T = 20(9.81 - 1.353) = 169\,\text{N}$.)

Resultado. $s = 6.09\,\text{m}$.

Ejercicio 5.6.3 · Camioneta que frena con las ruedas bloqueadas ← volver

Datos. $v_0 = 30\,\text{ft/s}$, $v = 0$, $s = 20\,\text{ft}$, $h = 4\,\text{ft}$, $d_{\text{del}} = 7\,\text{ft}$, $d_{\text{tras}} = 5\,\text{ft}$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. Traslación rectilínea. Cinemática: $v^2 = v_0^2 + 2as$. Las cuatro ruedas patinan: $F = \mu_k N$ en cada una. Por rueda, N_{del} y N_{tras}; la fricción actúa hacia atrás a nivel del suelo, 4 ft debajo de G. Ecuaciones: $\sum F_x = m\bar{a}$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_G = 0$.

Resolución. $a = -\dfrac{30^2}{2(20)} = -22.5\,\text{ft/s}^2$. Fuerza horizontal total: $-\mu_k P = \dfrac{P}{g}(-22.5)$, de donde $\mu_k = 22.5/32.2 = 0.699$.

Momentos respecto a G (las normales delanteras y la fricción tienden a girar el vehículo hacia adelante; las traseras, hacia atrás):

$$2N_{\text{del}}(7) - 2N_{\text{tras}}(5) - \mu_k P(4) = 0, \qquad 2N_{\text{del}} + 2N_{\text{tras}} = P.$$

Con $2N_{\text{tras}} = P - 2N_{\text{del}}$: $14N_{\text{del}} - 5P + 10N_{\text{del}} = 2.795P$, así que

$$N_{\text{del}} = \frac{7.795P}{24} = 0.325P, \qquad N_{\text{tras}} = 0.5P - 0.325P = 0.175P.$$

Fricciones: $F_{\text{del}} = 0.699(0.325P) = 0.227P$, $F_{\text{tras}} = 0.699(0.175P) = 0.122P$.

Resultado. En cada rueda delantera, $N = 0.325P$ y $F = 0.227P$; en cada rueda trasera, $N = 0.175P$ y $F = 0.122P$.

Ejercicio 5.6.4 · Placa que pierde un pasador ← volver

Datos. $m = 300\,\text{kg}$, $a = 4\,\text{m}$, $b = 2.5\,\text{m}$, $\omega = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Justo después de la ruptura, rotación no centroidal alrededor de A con $\omega = 0$: $\bar{a}_n = 0$ y $\bar{a} = \bar{r}\alpha$, perpendicular a AG. G está 2 m a la derecha y 1.25 m abajo de A: $\bar{r}^2 = 2^2 + 1.25^2 = 5.5625\,\text{m}^2$, $\bar{r} = 2.358\,\text{m}$.

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}(300)(4^2 + 2.5^2) = 556.3\,\text{kg m}^2,$$
$$I_A = 556.3 + 300(5.5625) = 2225\,\text{kg m}^2.$$

Resolución. $\sum M_A = I_A\alpha$: $300(9.81)(2) = 2225\,\alpha$, $\alpha = 2.645\,\text{rad/s}^2$ (horario).
Con $\vec{\alpha} = -2.645\hat{k}$ y $\vec{r}_{G/A} = 2\hat{\imath} - 1.25\hat{\jmath}$: $\vec{\bar{a}} = \vec{\alpha}\times\vec{r}_{G/A} = (-3.306\hat{\imath} - 5.290\hat{\jmath})\,\text{m/s}^2$.

$$R_x = m\bar{a}_x = 300(-3.306) = -991.9\,\text{N},$$
$$R_y - 2943 = 300(-5.290) \;\Rightarrow\; R_y = 1356\,\text{N}.$$

Ejercicio 3.6.5 · Fuerza promedio a partir del cambio de cantidad de movimiento ← volver

Datos. $m = 10\,\text{kg}$, $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $\Delta(m\vec{v}) = 30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}\ \text{kg·m/s}$, $\Delta t = 5\,\text{s}$.

Planteamiento. $\vec{F}_{\text{prom}}\,\Delta t = \Delta(m\vec{v})$ y $m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + \Delta(m\vec{v})$.

Resolución.

1. $\vec{F}_{\text{prom}} = (30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})/5 = 6\hat{\imath} + 2.4\hat{\jmath}\ \text{N}$, con magnitud $\sqrt{6^2 + 2.4^2} = 6.46\,\text{N}$.
2. $\vec{v}_2 = (30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})/10 = 3\hat{\imath} + 1.2\hat{\jmath}\ \text{m/s}$, con magnitud $3.23\,\text{m/s}$ a 21.8° del eje x.

Resultado. $|\vec{F}_{\text{prom}}| = 6.46\,\text{N}$; $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 1.2\hat{\jmath}$ **m/s**.

Ejercicio 3.6.6 · Bala que atraviesa un bloque sobre piso rugoso ← volver

Datos. $m_b = 0.02\,\text{kg}$, $v_b = 400\,\text{m/s}$, $v_b' = 150\,\text{m/s}$; $m_A = 1\,\text{kg}$, $v_A = 0$; $\mu_k = 0.1$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Durante el choque (muy breve) el impulso de la fricción es despreciable frente a las fuerzas entre bala y bloque: se conserva la cantidad de movimiento horizontal. Después, trabajo y energía para el bloque: $-\mu_k m_A g\, d = 0 - \frac{1}{2} m_A v_A'^2$.

Resolución.

1. $0.02(400) + 0 = 0.02(150) + 1\,v_A'$, de donde $v_A' = 5\,\text{m/s}$.
2. Fricción: $0.1(1)(9.81) = 0.981\,\text{N}$; $0.981\,d = \frac{1}{2}(1)(5^2) = 12.5$, de donde $d = 12.7\,\text{m}$.
3. Energía perdida en el choque: $\frac{1}{2}(0.02)(400^2 - 150^2) - 12.5 = 1362.5\,\text{J}$ (se va en deformación y calor).

Resultado. $d = 12.7\,\text{m}$.

E.4 · Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos

Ejercicio 4.6.1 · Polea con aceleración angular que depende de θ ← volver

Datos. $r_A = 0.05\,\text{m}$, $r_C = 0.15\,\text{m}$, $r_D = 0.075\,\text{m}$, $\alpha_A = 6\theta_A$, $s_B = 2\,\text{m}$, reposo inicial.

Planteamiento. $\alpha(\theta)$: $\omega\,\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}\theta$. Transmisión: la cuerda sobre D da $s_B = r_D\theta_C$; la banda da $r_A\theta_A = r_C\theta_C$ y $r_A\omega_A = r_C\omega_C$.

Resolución.

$$\int_0^{\omega_A} \omega\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta_A} 6\theta\,\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow\; \omega_A^2 = 6\theta_A^2, \quad \omega_A = \sqrt{6}\,\theta_A.$$

$$\theta_C = \frac{2}{0.075} = 26.67\,\text{rad}, \qquad \theta_A = \frac{0.15(26.67)}{0.05} = 80\,\text{rad},$$

$$\omega_A = \sqrt{6}\,(80) = 196.0\,\text{rad/s}, \qquad \omega_C = \frac{196.0(0.05)}{0.15} = 65.32\,\text{rad/s},$$

$$v_B = \omega_C r_D = 65.32(0.075).$$

Resultado. $v_B = 4.90\,\text{m/s}$ hacia arriba.

Ejercicio 4.6.2 · Rueda de bicicleta ← volver

Datos. $v_B = 36/3.6 = 10\,\text{m/s}$ hacia la derecha, $r = 0.25\,\text{m}$ (radio, no diámetro).

Planteamiento. Rodadura sin deslizar: el CIR es O; $v_P = \omega\, r_{P/O}$.

Resolución. El eje se mueve con la bicicleta: $v_B = 10\,\text{m/s}$. $\omega = v_B/r = 10/0.25 = 40\,\text{rad/s}$, horario (avanza hacia la derecha). O es el CIR: $v_O = 0$. A está a $2r = 0.5\,\text{m}$ de O: $v_A = 40(0.5) = 20\,\text{m/s}$, horizontal hacia la derecha. En forma vectorial: $\vec{v}_A = 10\hat{\imath} + (-40\hat{k}) \times 0.25\hat{\jmath} = 10\hat{\imath} + 10\hat{\imath}$.

Resultado. $v_A = 20\,\text{m/s}$ y $v_B = 10\,\text{m/s}$ hacia la derecha; $v_O = 0$.

Ejercicio 4.6.3 · Manivela-biela-corredera en un plano inclinado ← volver

Datos. $\vec{r}_{A/O} = 2.828\hat{\imath} + 2.828\hat{\jmath}$, $\vec{r}_{B/A} = 12(\cos 15^\circ\hat{\imath} - \sin 15^\circ\hat{\jmath}) = 11.59\hat{\imath} - 3.106\hat{\jmath}$ [in]; $\omega_{OA} = 100\,\text{rad/s}$ horario. Dirección de la guía: $\hat{u} = 0.9659\hat{\imath} + 0.2588\hat{\jmath}$.

Planteamiento. $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{AB}\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} = v_B\hat{u}$.

Resolución. $\vec{v}_A = -100\hat{k} \times (2.828\hat{\imath} + 2.828\hat{\jmath}) = 282.8\hat{\imath} - 282.8\hat{\jmath}$.

$$(282.8 + 3.106\,\omega_{AB})\hat{\imath} + (-282.8 + 11.59\,\omega_{AB})\hat{\jmath}$$
$$= 0.9659\,v_B\hat{\imath} + 0.2588\,v_B\hat{\jmath}.$$

Eliminando v_B: $0.2588(282.8 + 3.106\,\omega_{AB}) = 0.9659(-282.8 + 11.59\,\omega_{AB})$, de donde $346.4 = 10.39\,\omega_{AB}$ y $\omega_{AB} = 33.33\,\text{rad/s}$. Luego $v_B = (282.8 + 103.5)/0.9659 = 400\,\text{in/s}$.

Resultado. a) $\omega_{AB} = 33.3\,\text{rad/s}$ antihorario; b) $v_B = 400\,\text{in/s}$, a 15° sobre la horizontal, hacia arriba de la guía.

Ejercicio 4.6.4 · Cuatro articulaciones con una barra vertical ← volver

Datos. $\vec{r}_{B/A} = 7.5\hat{\imath}$, $\vec{r}_{C/B} = 5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$, $\vec{r}_{C/D} = 10\hat{\jmath}$ [cm]; $\omega_{AB} = -4\,\text{rad/s}$, $\alpha_{AB} = 0$.

Planteamiento. Velocidad y aceleración de C por B y por D (4.3.4 y 4.3.5). Con CIR: el de BC está en la recta AB y en la recta CD, es decir, en $I = (0,\ 5)$, a 5 cm de B y de C.

Resolución. a) $\vec{v}_B = -4\hat{k} \times 7.5\hat{\imath} = -30\hat{\jmath}$.

$$\vec{v}_C = -5\,\omega_{BC}\hat{\imath} + (-30 + 5\,\omega_{BC})\hat{\jmath}$$
$$= \omega_{CD}\hat{k} \times 10\hat{\jmath} = -10\,\omega_{CD}\hat{\imath}.$$

De $\hat{\jmath}$: $\omega_{BC} = 6\,\text{rad/s}$; de $\hat{\imath}$: $\omega_{CD} = 3\,\text{rad/s}$. (Con el CIR: $\omega_{BC} = 30/5 = 6$.)

b) $\vec{a}_B = -16(7.5\hat{\imath}) = -120\hat{\imath}$.

$$\vec{a}_C = -120\hat{\imath} + \alpha_{BC}\hat{k} \times (5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}) - 36(5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})$$
$$= (-300 - 5\,\alpha_{BC})\hat{\imath} + (-180 + 5\,\alpha_{BC})\hat{\jmath},$$
$$\vec{a}_C = \alpha_{CD}\hat{k} \times 10\hat{\jmath} - 9(10\hat{\jmath}) = -10\,\alpha_{CD}\hat{\imath} - 90\hat{\jmath}.$$

De $\hat{\jmath}$: $\alpha_{BC} = 18\,\text{rad/s}^2$; de $\hat{\imath}$: $-10\,\alpha_{CD} = -300 - 90$, $\alpha_{CD} = 39\,\text{rad/s}^2$.

Resultado. a) $\omega_{BC} = 6\,\text{rad/s}$ antihorario; b) $\alpha_{CD} = 39\,\text{rad/s}^2$ antihorario.