Resolución. Fuerzas verticales (positivo hacia arriba):

$$2000 + 1400 - 3000 = \frac{3000}{9.81}\,\bar{a} \;\Rightarrow\; \bar{a} = \frac{400(9.81)}{3000} = 1.308\,\text{m/s}^2.$$

Momentos respecto a G (las dos fuerzas de las cuerdas tienen brazo; el peso no):

$$-2000\,d + 1400\,(4 - d) = 0 \;\Rightarrow\; 3400\,d = 5600 \;\Rightarrow\; d = 1.647\,\text{m}.$$

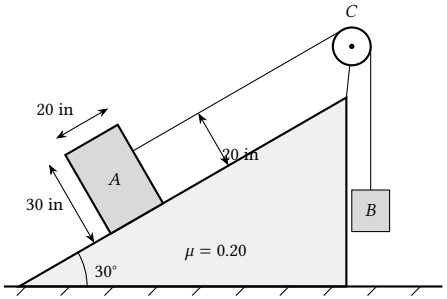
La cuerda con más tensión está más cerca de G: tiene menor brazo para que los dos momentos se equilibren.

Resultado. $\bar{a} = 1.31\,\text{m/s}^2$ hacia arriba; G está a 1.65 m del extremo A ($b = 2.35\,\text{m}$ de B).

Ejercicio 5.5.2 · Bloque que sube por un plano sin volcar

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión C, problema 4

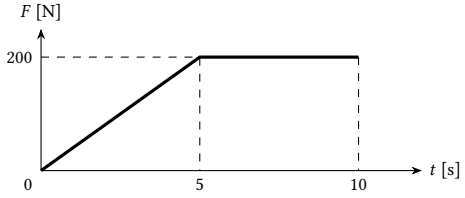
Un bloque homogéneo A de 180 lb mide 20 in a lo largo de un plano inclinado a 30° y 30 in de altura (perpendicular al plano). Una cuerda paralela al plano, atada a la cara de A que mira hacia arriba del plano a 20 in de la superficie, pasa por una polea lisa C y sostiene un cuerpo colgante B. El coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es $\mu = 0.20$. Calcule el peso máximo de B para que A deslice hacia arriba del plano sin volcar, y la aceleración con la que sube.



Datos. $W_A = 180\,\text{lb}$, base 20 in, altura 30 in, cuerda a 20 in del plano, $\theta = 30°$, $\mu = 0.20$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. A está en **traslación rectilínea**. Ejes: x paralelo al plano, hacia arriba; y perpendicular. G está en el centro del bloque, a 15 in del plano. Respecto a G, la cuerda está 5 in arriba y la base 15 in abajo. Al aumentar B, la tensión crece y el bloque tiende a volcar hacia adelante, girando sobre la arista inferior delantera (la que mira hacia la polea). En el límite, toda la normal actúa en esa arista, a 10 in de G medidos a lo largo del plano. Como el bloque desliza, $F = \mu N$ hacia abajo del plano. Positivo antihorario para los momentos.

Resolución. Perpendicular al plano, $N = 180\cos 30° = 155.9\,\text{lb}$, y la fricción vale $F = 0.2(155.9) = 31.18\,\text{lb}$.



Resultado: $v_{10} = 24.8\,\text{m/s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.5 · Fuerza promedio a partir del cambio de cantidad de movimiento

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión B, problema 3

Un objeto de 10 kg, inicialmente en reposo, recibe un incremento de cantidad de movimiento $\Delta(m\vec{v}) = 30\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$ [kg·m/s] por la acción de una fuerza impulsiva $\vec{F}$ que actúa durante 5 s. Estime la magnitud promedio de $\vec{F}$ y la velocidad del objeto al final de los 5 s.

Resultado: $|\vec{F}_{\text{prom}}| = 6.46\,\text{N}$; $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 1.2\hat{\jmath}$ [m/s] ($|\vec{v}| = 3.23\,\text{m/s}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.6 · Bala que atraviesa un bloque sobre piso rugoso

Adaptado de: 1er final 2014-2, versión D, problema 3

Una bala de 20 g viaja horizontalmente a 400 m/s y choca contra un cuerpo A de 1 kg en reposo sobre una superficie rugosa ($\mu = 0.1$). Después de atravesar el cuerpo, la bala sigue a 150 m/s. Determine la distancia que recorre el cuerpo después del choque hasta detenerse.

Resultado: $d = 12.7\,\text{m}$ ($v'_A = 5\,\text{m/s}$ justo después del choque).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

3.7 Errores frecuentes

- Usar la longitud del resorte en lugar de su deformación en $V_e = \frac{1}{2}kx^2$.
- Restar la energía del resorte cuando este la devuelve: si el resorte pasa de comprimido a libre, ΔV_e es negativo y esa energía se **suma** a la cinética.
- Tomar el desplazamiento en lugar de la distancia recorrida en el trabajo de la fricción (la ida y la vuelta sobre el resorte cuentan las dos).
- Usar la misma normal en tramos con distinta pendiente, o el mismo μ en tramos distintos.
- Contar el impulso de la fuerza desde $t = 0$ aunque el cuerpo no se mueva: el impulso neto empieza en el instante en que $F = \mu_s N$.
- Seguir aplicando la fricción cinética después de que el cuerpo se detiene: hay que revisar si la fuerza vence de nuevo a la fricción estática.
- En cuerpos conectados, olvidar la relación de rapideces de la polea móvil ($v_B = 2v_A$) o la energía cinética de uno de los cuerpos.

$\bar{a} = r_{\text{cubo}}\,\alpha$, y otro punto a una distancia horizontal d de esa cuerda tiene $a = d\,\alpha$.

4. Ecuaciones: polea con eje fijo, $\sum M_O = \bar{I}\alpha$; carrete libre, $\sum F_y = m\bar{a}$ y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$; cada cuerpo, $\sum F_y = ma$.
5. Sustituye las relaciones cinemáticas y resuelve el sistema (suele quedar una ecuación en α).

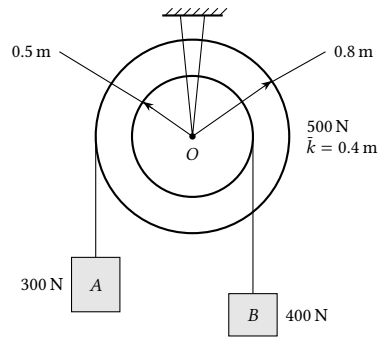
5.3.6 Energía del cuerpo rígido: rapidez angular tras un giro

1. Elige los dos estados: el inicial (rapidez conocida) y el final (después del giro pedido).
2. Escribe la energía cinética de cada estado: $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$ si gira alrededor de un eje fijo; $T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$ en general (con $\bar{v} = \omega r$ si rueda sin deslizar).
3. Calcula los trabajos: pares, $M\Delta\theta$; fuerzas perpendiculares a una barra, $Fd\Delta\theta$; peso, por la altura de G (ΔV_g). Las reacciones de un pasador fijo y la fricción de una rueda que no desliza no trabajan.
4. Aplica $U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ y despeja ω. Si además se pide α o una reacción en esa posición, usa después las ecuaciones de la sección 5.3.3.

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Polea doble con dos cuerpos colgantes

Adaptado del 1er final 2018-1, turno matutino, problema 4.
Una polea doble pesa 500 N y el radio de giro de su masa respecto a su eje de rotación, que es fijo, es de 0.4 m. El radio menor es de 0.5 m y el mayor de 0.8 m. Del lado izquierdo del tambor mayor cuelga el cuerpo A, de 300 N, y del lado derecho del tambor menor cuelga el cuerpo B, de 400 N, mediante cuerdas inextensibles de peso despreciable. Determine las tensiones T_A y T_B de las cuerdas.



Datos. $W = 500\,\text{N}$, $\bar{k} = 0.4\,\text{m}$, $r_A = 0.8\,\text{m}$, $r_B = 0.5\,\text{m}$, $W_A = 300\,\text{N}$, $W_B = 400\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.
Planteamiento. La polea gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa O. Momentos de los pesos respecto a O: $300(0.8) = 240\,\text{N m}$ en sentido antihorario y $400(0.5) = 200\,\text{N m}$ en sentido horario; la polea gira en sentido **antihorario**, A baja

Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno analizará y resolverá ejercicios de movimiento plano de cuerpos rígidos, y de algunos mecanismos donde no intervengan las causas que modifican dicho movimiento.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 18 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno). Los exámenes de tres problemas (2007-2 a 2009-1) no la incluían; desde 2009-2 aparece en 18 de 20, y en los 8 exámenes desde 2014. Suele ser el problema 3.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 y la tabla de la 4.2 (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro (20 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

4.1.1 Tipos de movimiento plano

Un cuerpo rígido se mueve en un plano de tres maneras:

- **Traslación:** toda recta del cuerpo conserva su dirección; todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración ($\omega = 0$).
- **Rotación alrededor de un eje fijo:** un punto O del cuerpo no se mueve y los demás describen circunferencias con centro en O (poleas, engranes, manivelas).
- **Movimiento plano general:** traslación más rotación (bielas, barras con extremos guiados, ruedas que ruedan).

En los tres casos, **todas las rectas del cuerpo giran el mismo ángulo**: ω y α son del cuerpo, no de un punto. En el plano, $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ y $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$, con $\hat{k}$ saliendo del papel: positivo es antihorario.

4.1.2 Rotación alrededor de un eje fijo

Las relaciones angulares son las del movimiento rectilíneo de la Unidad 1, con θ en radianes:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}.$$

Con α constante: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$. Una revolución son 2π rad.

Un punto P a la distancia r del eje tiene

$$v = \omega r, \qquad a_t = \alpha r, \qquad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}, \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

versión A, problema 4, y 2° final 2008-2, versión A, problema 3). La energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano es

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2,$$

y en rotación alrededor de un eje fijo O, $T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2$. El principio es el mismo de la Unidad 3:

$$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e,$$

donde $U_{1\to 2}$ es el trabajo de las fuerzas que no tienen energía potencial. Un par constante M que gira un ángulo $\Delta\theta$ (en radianes) hace el trabajo $U = M\,\Delta\theta$; una fuerza de magnitud constante, siempre perpendicular a una barra y aplicada a una distancia d del eje, hace $U = Fd\,\Delta\theta$. El peso solo cuenta por el cambio de altura de G: $\Delta V_g = mg\,\Delta y_G$.

5.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«radio de giro», «momento de inercia de la masa», cuerpo compuesto	cálculo de $\bar{I}$ o I_O	5.3.1
«no gira», «se levanta sin girar», vehículo que frena o acelera, reacciones en cada rueda	traslación rectilínea	5.3.2
«sin volcar», «sin que vuelque», caja sobre plataforma	traslación con condición de volcamiento	5.3.2
placa colgada de dos barras o cuerdas paralelas iguales	traslación curvilínea	5.3.2
barra o placa articulada en un punto que no es G, «se rompe el pasador», «se suelta»	rotación no centroidal	5.3.3
«rueda sin deslizar», cilindro, esfera o carrete sobre un plano	movimiento plano general	5.3.4
«determine si rueda o desliza», se dan μ_s y μ_k	suponer y comprobar	5.3.4
polea doble, volante o carrete con cuerpos colgados	poleas y cuerpos colgantes	5.3.5
«velocidad angular cuando haya girado…», «cuando $\theta = \ldots$»	energía del cuerpo rígido	5.3.6

5.3 Procedimientos

5.3.1 Momento de inercia y radio de giro

1. Identifica el eje: el centroidal (por G) o el de giro (O).
2. Si se da el peso, calcula $m = W/g$ con el g del examen.
3. Si se da $\bar{k}$: $\bar{I} = m\bar{k}^2$. Si no, toma $\bar{I}$ de la tabla de la sección 5.1.2.
4. Para un eje por O a una distancia d de G: $I_O = \bar{I} + md^2$.
5. Para un cuerpo compuesto (barra con esfera, rueda con cubo), traslada cada parte a O por separado y suma.

4.1.7 Mecanismos

- **Manivela-biela-corredera:** la manivela OA gira alrededor de O; la biela AB tiene movimiento plano general; la corredera (o collarín) B se traslada sobre su guía, así que $\vec{v}_B$ y $\vec{a}_B$ tienen la dirección de la guía.
- **Cuatro articulaciones:** barras AB y CD que giran alrededor de los apoyos fijos A y D, unidas por la barra BC. Se cumple $\vec{v}_C = \vec{\omega}_{CD}\times\vec{r}_{C/D}$ y también $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC}\times\vec{r}_{C/B}$.
- **Barra con extremos guiados:** cada extremo se mueve sobre su guía (ranura recta o circular, piso, pared); la dirección de su velocidad es la de la guía.

4.1.8 Movimiento relativo respecto a un sistema que gira

El programa llama a este tema **movimiento relativo** (el caso de dos partículas en traslación, como dos automóviles, está en la Unidad 1). Si un collarín P se desliza con $\vec{v}_{\text{rel}}$ y $\vec{a}_{\text{rel}}$ a lo largo de una barra que gira alrededor de un punto fijo O con ω y α:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\vec{r}_{P/O} + \vec{v}_{\text{rel}},$$
$$\vec{a}_P = \vec{\alpha}\times\vec{r}_{P/O} - \omega^2\vec{r}_{P/O} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}.$$

El término $2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}}$ es la aceleración de Coriolis. En los finales de 2007-2 a 2018-2 no apareció un collarín sobre una barra que gira; los collarines de esos exámenes se deslizan sobre guías fijas y se resuelven con 4.3.4 y 4.3.5.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Proced.
$\alpha = f(t)$, «un motor proporciona una aceleración angular»	rotación con $\alpha(t)$: integrar en t	4.3.1
$\alpha = f(\theta)$, «cuando ha girado n revoluciones»	$\alpha = \omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\theta$	4.3.1
$\alpha = f(\omega)$	separar $\mathrm{d}\omega/f(\omega)$	4.3.1
«banda», «engrane», «polea doble», «cremallera», «no deslizan entre sí»	misma rapidez en el contacto	4.3.2
«rueda sin deslizar», bicicleta, cilindro que rueda	CIR en el contacto, $v_G = \omega r$	4.3.3
«manivela», «biela», «deslizador», «collarín», «guía»	manivela-biela-corredera	4.3.4 y 4.3.6
«mecanismo de cuatro articulaciones», «barras AB, BC, CD»	cuatro articulaciones	4.3.4 a 4.3.6
«los extremos se mueven en ranuras», «se apoya en el piso y en la pared»	barra con extremos guiados	4.3.4 y 4.3.5
piden solo velocidades y la geometría es sencilla	CIR	4.3.4
piden aceleraciones angulares o de un punto	aceleraciones relativas	4.3.5
«collarín que se desliza a lo largo de una barra que gira»	movimiento relativo, sistema que gira	4.3.7

Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará ecuaciones que relacionen al sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido, homogéneo y simétrico, con la aceleración angular que adquiere éste y con la aceleración lineal de su centro de masa, en la resolución de ejercicios de su movimiento plano.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 25 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno) y en los 8 exámenes desde 2014; son 46 problemas contando todas las versiones. Casi siempre es el último problema: es el problema 4 en 35 de los 41 exámenes de cuatro problemas.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 con la tabla de momentos de inercia a la vista (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (25 min cada uno).

5.1 Conceptos y expresiones

5.1.1 Ecuaciones del movimiento plano

Un cuerpo rígido en movimiento plano tiene tres ecuaciones de movimiento: dos de fuerzas, que gobiernan la aceleración $\bar{a}$ del centro de masa G, y una de momentos, que gobierna la aceleración angular α:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x, \qquad \sum F_y = m\bar{a}_y, \qquad \sum M_G = \bar{I}\alpha.$$

El momento se toma **respecto al centro de masa** G. Se elige un sentido positivo de giro y se usa el mismo para $\sum M_G$ y para α.

Si el cuerpo gira alrededor de un **eje fijo** que pasa por O, la ecuación de momentos puede tomarse respecto a O, y entonces no aparecen las reacciones del apoyo:

$$\sum M_O = I_O\alpha, \qquad I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2},$$

donde $\bar{r}$ es la distancia de O a G. Solo vale para O fijo (o para $O = G$).

5.1.2 Momento de inercia, radio de giro y ejes paralelos

El momento de inercia mide la resistencia del cuerpo a cambiar su rotación; es el equivalente de la masa en la ecuación de momentos:

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m, \qquad \bar{k} = \sqrt{\bar{I}/m} \;\Rightarrow\; \bar{I} = m\bar{k}^2.$$

si se desliza.

4. Separa componentes; las incógnitas son las α (o una α y la magnitud de a_C).

4.3.6 Mecanismos: corredera, cuatro articulaciones y extremos guiados

1. Clasifica cada cuerpo: gira alrededor de un punto fijo, se traslada sobre una guía o tiene movimiento plano general.
2. Dibuja el mecanismo con cotas exactas; si falta un dato geométrico, sácalo del triángulo (por ejemplo, el ángulo de una biela con $\sin\beta = h/L$).
3. Velocidades con 4.3.4 y aceleraciones con 4.3.5, barra por barra desde la que tiene el dato.
4. Revisa con el CIR: la velocidad de cada punto debe ser perpendicular a la recta que lo une con el CIR de su barra.

4.3.7 Collarín sobre una barra que gira

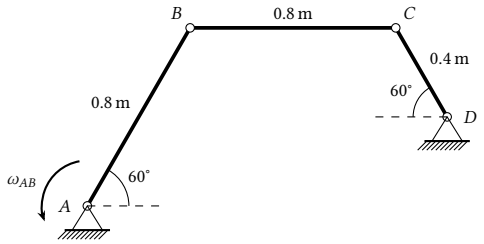
1. Toma ejes que giran con la barra: $\hat{e}_r$ a lo largo de la barra y $\hat{e}_\theta$ perpendicular.
2. El movimiento del collarín respecto a la barra da $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{r}\,\hat{e}_r$ y $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{r}\,\hat{e}_r$.
3. Suma los términos de 4.1.8: arrastre ($\vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{\alpha}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r}$), relativo y Coriolis $2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}}$.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Cuatro articulaciones con manivela a velocidad constante

Adaptado del 1er final 2018-1, turno matutino, problema 3.

En el mecanismo de cuatro articulaciones de la figura, la barra AB (0.8 m, a 60° sobre la horizontal) gira con velocidad angular constante de 10 rad/s en sentido antihorario. La barra BC (0.8 m) está horizontal y la barra CD (0.4 m) forma 60° con la horizontal, con C arriba y a la izquierda del apoyo D. Para la posición mostrada, determine la magnitud y el sentido de: a) las velocidades angulares de BC y CD; b) las aceleraciones angulares de BC y CD.



Datos. $\omega_{AB} = 10\,\text{rad/s}$ (antihorario), $\alpha_{AB} = 0$. Con origen en A:

$$\vec{r}_{B/A} = 0.4\hat{\imath} + 0.6928\hat{\jmath}, \quad \vec{r}_{C/B} = 0.8\hat{\imath}, \quad \vec{r}_{C/D} = -0.2\hat{\imath} + 0.3464\hat{\jmath}\ \ [\text{m}].$$

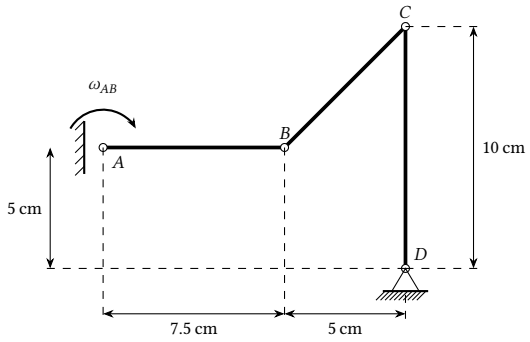
Planteamiento. AB y CD giran alrededor de apoyos fijos; BC tiene movimiento plano general. Se iguala la velocidad (y luego la aceleración) de C calculada por B y por D.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.4 · Cuatro articulaciones con una barra vertical

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3

En el mecanismo de cuatro articulaciones de la figura, con origen en el apoyo D: $A = (-12.5,\ 5)$, $B = (-5,\ 5)$ y $C = (0,\ 10)$ [cm]; AB es horizontal, BC sube a 45° y CD es vertical. La manivela AB gira con velocidad angular constante de 4 rad/s en sentido horario. Determine: a) la velocidad angular de BC; b) la aceleración angular de CD.



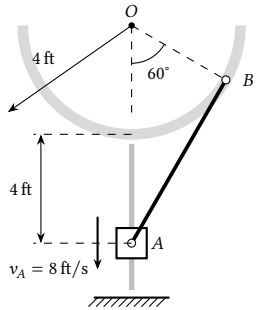
Resultado: a) $\omega_{BC} = 6$ rad/s antihorario ($\omega_{CD} = 3$ rad/s antihorario); b) $\alpha_{CD} = 39\ \text{rad/s}^2$ antihorario ($\alpha_{BC} = 18\ \text{rad/s}^2$ antihorario).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.5 · Barra entre un collarín y una ranura semicircular

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3

La barra AB une el collarín A, que baja a 8 ft/s por un vástago vertical, con el perno B, que se desliza en una ranura semicircular de 4 ft de radio y centro O. El vástago pasa por O; B está en la ranura a 60° de la vertical que pasa por O, del lado derecho, y A está 4 ft abajo del punto más bajo de la ranura. Para la posición mostrada, determine: a) la magnitud y el sentido de la velocidad angular de AB; b) la magnitud y la dirección de la velocidad de B.



En $t = 0.5$ s, $\pi t/T = \pi/3$:

$$\omega = \frac{10(1.5)}{\pi}\sin 60^\circ = 4.135\ \text{rad/s}, \qquad \alpha = 10\cos 60^\circ = 5\ \text{rad/s}^2,$$

$$a_t = \alpha r = 5(0.25) = 1.25\ \text{m/s}^2,$$

$$a_n = \omega^2 r = (4.135)^2(0.25) = 4.274\ \text{m/s}^2,$$

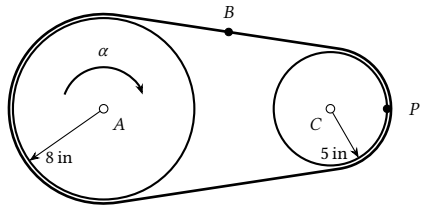
$$a = \sqrt{1.25^2 + 4.274^2}.$$

Resultado. $a_A = 4.45\ \text{m/s}^2$.

Ejercicio 4.5.2 · Banda con aceleración angular que depende de ω

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 3

Una banda se mueve sin deslizar sobre dos poleas: A, de 8 in de radio, y C, de 5 in. La polea A parte del reposo y gira en sentido horario con aceleración angular $\alpha = 120 - 0.002\,\omega^2$ (α en rad/s^2, ω en rad/s). Después de media revolución de A, determine la magnitud de la aceleración: a) del punto B, sobre el tramo recto superior de la banda; b) del punto P, sobre el borde de la polea C.



Datos. $r_A = 8$ in, $r_C = 5$ in, $\omega_0 = 0$, $\theta = \pi$ rad.

Planteamiento. $\alpha(\omega)$ y se pide un ángulo: $\alpha = \omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\theta$. La banda transmite v y a_t: $\omega_A r_A = \omega_C r_C$ y $\alpha_A r_A = \alpha_C r_C$.

Resolución.

$$\int_0^{\omega} \frac{\omega\,\mathrm{d}\omega}{120 - 0.002\,\omega^2} = \int_0^{\theta} \mathrm{d}\theta \ \Rightarrow\ -\frac{1}{0.004}\ln\frac{120 - 0.002\,\omega^2}{120} = \theta.$$

Despejando, $\omega^2 = 60\,000\,(1 - e^{-0.004\theta})$. Con $\theta = \pi$:

$$\omega_A = 27.37\ \text{rad/s}, \qquad \alpha_A = 120 - 0.002(27.37)^2 = 118.5\ \text{rad/s}^2.$$

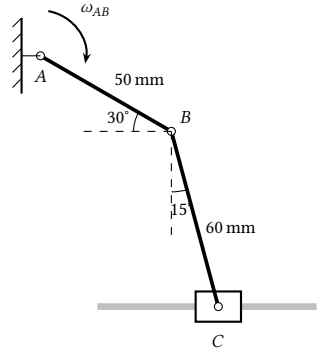
a) El tramo recto se traslada: no tiene componente normal, $a_B = \alpha_A r_A = 118.5(8) = 948\ \text{in/s}^2$.

b) En la polea C:

$$\omega_C = \frac{27.37(8)}{5} = 43.80\ \text{rad/s}, \qquad \alpha_C = \frac{118.5(8)}{5} = 189.6\ \text{rad/s}^2,$$

$$a_t = \alpha_C r_C = 948\ \text{in/s}^2, \qquad a_n = \omega_C^2 r_C = (43.80)^2(5) = 9591\ \text{in/s}^2,$$

$$a_P = \sqrt{948^2 + 9591^2}.$$



Datos. $\omega_{AB} = 2\,\text{rad/s}$ horario, $AB = 50\,\text{mm}$, $BC = 60\,\text{mm}$.

Planteamiento. $\vec{v}_B \perp AB$ y $\vec{v}_C$ es horizontal. El CIR I de BC está en la recta AB prolongada más allá de B y en la vertical por C.

Resolución. $v_B = \omega_{AB}(AB) = 2(50) = 100\,\text{mm/s}$, perpendicular a AB, hacia abajo y a la izquierda. En el triángulo BCI: el ángulo en C (entre CB y la vertical) es 15°; en B (entre la prolongación de AB, a 30° bajo la horizontal, y BC, a 75° bajo la horizontal) es 45°; en I, 120°. Ley de senos:

$$\frac{60}{\sin 120^\circ} = \frac{r_{B/I}}{\sin 15^\circ} = \frac{r_{C/I}}{\sin 45^\circ} \;\Rightarrow\; r_{B/I} = 17.93\,\text{mm}, \quad r_{C/I} = 48.99\,\text{mm},$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/I}} = \frac{100}{17.93} = 5.577\,\text{rad/s}, \qquad v_C = \omega_{BC}\, r_{C/I} = 5.577(48.99).$$

B se mueve hacia abajo y a la izquierda alrededor de I, así que BC gira en sentido antihorario y C, que está debajo de I, se mueve hacia la derecha.

Comprobación vectorial: con $\vec{r}_{C/B} = 15.53\hat{\imath} - 57.96\hat{\jmath}$ y $\vec{v}_B = -50\hat{\imath} - 86.60\hat{\jmath}$, la condición $v_{Cy} = -86.60 + 15.53\,\omega_{BC} = 0$ da el mismo ω_{BC}, y $v_C = -50 + 57.96(5.577)$.

Resultado. $v_C = 273\,\text{mm/s}$ **hacia la derecha** ($\omega_{BC} = 5.58\,\text{rad/s}$ antihorario).

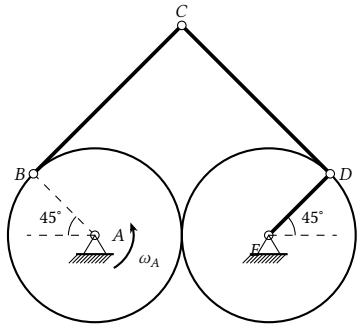
4.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 4.6.1 · Polea con aceleración angular que depende de θ

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión B, problema 3

Una banda une la polea A ($r_A = 5\,\text{cm}$) con el borde exterior de la polea C ($r_C = 15\,\text{cm}$). La polea C tiene un borde interno D ($r_D = 7.5\,\text{cm}$), fijo a ella, en el que se enrolla la cuerda de la que cuelga el bloque B. Inicialmente todo está en reposo y $s = 0$; entonces la polea A adquiere una aceleración angular $\alpha_A = 6\theta$ (θ en radianes, α en rad/s^2). Determine la rapidez del bloque B cuando se ha elevado 2 m.

a la derecha de E. Las dos barras forman 45° con la horizontal y se unen en C, sobre la vertical del punto de contacto. Determine: a) la velocidad de C; b) la aceleración de C; c) la velocidad y la aceleración de D respecto a B.



Datos. Con origen en A: $B = (-0.707,\ 0.707)$, $E = (2,\ 0)$, $D = (2.707,\ 0.707)$, $C = (1,\ 2.414)$ [m]. $\omega_A = 3\,\text{rad/s}$ antihorario, $\alpha_A = 0$; por el contacto exterior con radios iguales, $\omega_E = 3\,\text{rad/s}$ horario, $\alpha_E = 0$.

Planteamiento. $\vec{r}_{C/B} = 1.707\hat{\imath} + 1.707\hat{\jmath}$, $\vec{r}_{C/D} = -1.707\hat{\imath} + 1.707\hat{\jmath}$. Se iguala $\vec{v}_C$ (y luego $\vec{a}_C$) calculada por B y por D.

Resolución. a) $\vec{v}_B = 3\hat{k} \times (-0.707\hat{\imath} + 0.707\hat{\jmath}) = -2.121\hat{\imath} - 2.121\hat{\jmath}$ y $\vec{v}_D = -3\hat{k} \times (0.707\hat{\imath} + 0.707\hat{\jmath}) = 2.121\hat{\imath} - 2.121\hat{\jmath}$.

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= (-2.121 - 1.707\,\omega_{BC})\hat{\imath} + (-2.121 + 1.707\,\omega_{BC})\hat{\jmath} \\ &= (2.121 - 1.707\,\omega_{CD})\hat{\imath} + (-2.121 - 1.707\,\omega_{CD})\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

De $\hat{\jmath}$: $\omega_{CD} = -\omega_{BC}$. De $\hat{\imath}$: $-2.121 - 1.707\,\omega_{BC} = 2.121 + 1.707\,\omega_{BC}$, así que $\omega_{BC} = -1.243\,\text{rad/s}$ y $\omega_{CD} = 1.243\,\text{rad/s}$. Entonces $\vec{v}_C = -4.243\hat{\jmath}$.

b) $\vec{a}_B = -9\vec{r}_{B/A} = 6.364\hat{\imath} - 6.364\hat{\jmath}$, $\vec{a}_D = -9\vec{r}_{D/E} = -6.364\hat{\imath} - 6.364\hat{\jmath}$ y $\omega^2(1.707) = (1.243)^2(1.707) = 2.636$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= (3.728 - 1.707\,\alpha_{BC})\hat{\imath} + (-9.000 + 1.707\,\alpha_{BC})\hat{\jmath} \\ &= (-3.728 - 1.707\,\alpha_{CD})\hat{\imath} + (-9.000 - 1.707\,\alpha_{CD})\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

De $\hat{\jmath}$: $\alpha_{CD} = -\alpha_{BC}$. De $\hat{\imath}$: $\alpha_{BC} = 7.456/3.414 = 2.184\,\text{rad/s}^2$ (antihorario). Así, $a_{Cx} = 0$ y

$$a_{Cy} = -9.000 + 1.707(2.184) = -5.272\,\text{m/s}^2.$$

c) $\vec{v}_{D/B} = \vec{v}_D - \vec{v}_B = 4.243\hat{\imath}$ y $\vec{a}_{D/B} = \vec{a}_D - \vec{a}_B = -12.73\hat{\imath}$.

Resultado.

- a) $v_C = 4.24\,\text{m/s}$ **hacia abajo**;
- b) $a_C = 5.27\,\text{m/s}^2$ **hacia abajo**;
- c) $v_{D/B} = 4.24\,\text{m/s}$ **hacia la derecha** y $a_{D/B} = 12.73\,\text{m/s}^2$ **hacia la izquierda**.

- En un choque, elegir la raíz que deja al cuerpo de atrás más rápido que el de adelante.
- Mezclar unidades: en el sistema cegesimal, dina, g y cm/s² ($g = 981\,\text{cm/s}^2$); en el inglés, slug = lb/32.2.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

Concepto	Expresión
Trabajo	$U = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$; fuerza constante: $Fd\cos\theta$
Fricción	$U = -\mu_k N d$
Energías	$T = \frac{1}{2}mv^2$, $V_g = mgh$, $V_e = \frac{1}{2}kx^2$
Trabajo y energía	$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$
Conservación	$T_A + V_A = T_B + V_B$ si $U_{1\to 2} = 0$
Rizo	$a_n = v^2/\rho$; en la cima, $v^2 \geq g\rho$
Potencia	$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$; 1 hp = 550 ft·lb/s = 746 W
Impulso	$m\vec{v}_1 + \int \sum \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2$; área bajo F-t
Arranque	$F(t_0) = \mu_s N$; después, fricción $\mu_k N$
Fuerza promedio	$\vec{F}_{\text{prom}} = \Delta(m\vec{v})/\Delta t$
Choque	$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$
Restitución	$e = (v'_B - v'_A)/(v_A - v_B)$

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Decide el método: distancias, energía; tiempos o gráfica F-t, impulso; choque, cantidad de movimiento.
2. Dibuja la figura con los estados numerados (o los instantes clave) y el DCL de cada tramo.
3. Escribe la ecuación general ($U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ o $mv_1 + \int F\,\mathrm{d}t = mv_2$) antes de sustituir.
4. Con fricción, revisa arranque y paro: ¿vence F a $\mu_s N$? ¿regresa el cuerpo?
5. Comprueba signos y unidades, y escribe el resultado con su sentido.

y B sube. Se toma positivo el sentido antihorario. Relaciones cinemáticas:

$$a_A = 0.8\alpha\ (\downarrow), \qquad a_B = 0.5\alpha\ (\uparrow).$$

Masas: $m = 500/9.81 = 50.97\,\text{kg}$, $m_A = 30.58\,\text{kg}$, $m_B = 40.77\,\text{kg}$. Momento de inercia: $\bar{I} = m\bar{k}^2 = 50.97(0.4)^2 = 8.155\,\text{kg m}^2$.

Resolución. Cuerpo A (positivo hacia abajo), cuerpo B (positivo hacia arriba) y polea:

$$\begin{aligned} 300 - T_A &= 30.58(0.8\alpha) = 24.46\alpha, \\ T_B - 400 &= 40.77(0.5\alpha) = 20.39\alpha, \\ 0.8T_A - 0.5T_B &= 8.155\alpha. \end{aligned}$$

Se sustituyen $T_A = 300 - 24.46\alpha$ y $T_B = 400 + 20.39\alpha$ en la ecuación de momentos:

$$240 - 19.57\alpha - 200 - 10.19\alpha = 8.155\alpha \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{40}{37.92} = 1.055\,\text{rad/s}^2.$$

$$T_A = 300 - 24.46(1.055) = 274.2\,\text{N}, \qquad T_B = 400 + 20.39(1.055) = 421.5\,\text{N}.$$

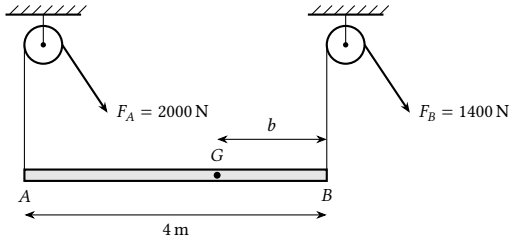
Resultado. $T_A = 274\,\text{N}$ y $T_B = 422\,\text{N}$ (con $\alpha = 1.05\,\text{rad/s}^2$ en sentido antihorario).

5.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 5.5.1 · Viga levantada sin girar

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 4

En una obra se levanta una viga no homogénea de 4 m de longitud y 3000 N de peso con dos cuerdas verticales sujetas a sus extremos A y B. Cada cuerda pasa por una polea fija en lo alto y de su otro extremo se tira con una fuerza constante: $F_A = 2000\,\text{N}$ en la cuerda de A y $F_B = 1400\,\text{N}$ en la de B. La viga parte del reposo y sube sin girar. Determine la aceleración con la que se eleva y la distancia del extremo A a la que se encuentra su centro de gravedad G.



Datos. $L = 4\,\text{m}$, $W = 3000\,\text{N}$, $F_A = 2000\,\text{N}$, $F_B = 1400\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Las poleas son ideales: la tensión de cada cuerda en la viga es igual a la fuerza con la que se tira, y actúa vertical hacia arriba. La viga no gira: **traslación rectilínea** vertical, con $\sum F_y = m\bar{a}$ y $\sum M_G = 0$. Sea d la distancia de A a G.

con a_t tangente a la circunferencia y a_n dirigida hacia el eje. En forma vectorial, con $\vec{r}$ del eje a P:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}.$$

Regla de cálculo: $\omega\hat{k} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = \omega(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath})$.

4.1.3 Transmisión: poleas, engranes, bandas y cremallera

Dos cuerpos que se transmiten el movimiento sin deslizar tienen **la misma rapidez en el punto de contacto** y la misma aceleración tangencial:

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B, \qquad \alpha_A r_A = \alpha_B r_B, \qquad \theta_A r_A = \theta_B r_B.$$

- Engranes o ruedas en contacto exterior: giran en sentidos opuestos. Unidos por una banda abierta: mismo sentido.
- Un tramo recto de banda o de cuerda se traslada con $v = \omega r$ y $a = \alpha r$ (sin componente normal); el punto de la banda que va sobre la polea sí tiene $a_n = v^2/r$.
- Una polea con dos radios (borde interno fijo al externo) tiene una sola ω; cada cuerda se mueve con su propio radio.
- Cremallera: es un cuerpo rígido; su punto de contacto tiene la velocidad del diente del engrane.

4.1.4 Velocidades en movimiento plano general

Para dos puntos A y B del mismo cuerpo:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}, \qquad |\vec{v}_{B/A}| = \omega\, r_{B/A}, \;\; \vec{v}_{B/A} \perp \vec{r}_{B/A}.$$

Centro instantáneo de rotación (CIR). Es el punto I, del cuerpo o de su extensión, con velocidad nula en ese instante. Se halla trazando las perpendiculares a las velocidades de dos puntos; donde se cortan está I. Entonces

$$v_P = \omega\, r_{P/I} \quad \text{para todo punto } P,$$

y la velocidad de P es perpendicular a IP. Si las perpendiculares son paralelas (velocidades paralelas y del mismo tamaño), el cuerpo se traslada en ese instante y $\omega = 0$. El CIR **no** sirve para aceleraciones: su aceleración no es cero.

4.1.5 Rodadura sin deslizar

Una rueda de radio r que rueda sin deslizar sobre una superficie fija tiene su CIR en el punto de contacto:

$$v_G = \omega r, \qquad a_G = \alpha r.$$

El punto de contacto tiene $v = 0$; el punto más alto, $v = 2v_G$. La aceleración del punto de contacto no es cero: vale $\omega^2 r$ hacia el centro.

4.1.6 Aceleraciones relativas

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}.$$

El término $\vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A}$ es la componente tangencial de $\vec{a}_{B/A}$ (perpendicular a la barra) y $-\omega^2 \vec{r}_{B/A}$, la normal (de B hacia A). Las ω se calculan primero, con velocidades.

5.3.2 Traslación rectilínea y curvilínea

1. Dibuja el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas en su **punto de aplicación real**: el momento depende de dónde actúan.
2. Escribe $\sum F_x = m\bar{a}_x$ y $\sum F_y = m\bar{a}_y$. En traslación curvilínea usa ejes normal y tangencial a la trayectoria de G; si el cuerpo parte del reposo, $\bar{a}_n = 0$.
3. Escribe $\sum M_G = 0$ (el cuerpo no gira).
4. **Volcamiento contra deslizamiento:** en el límite de volcar, la normal se concentra en la arista sobre la que el cuerpo giraría. Pon ahí la normal, plantea $\sum M_G = 0$ y despeja la fuerza máxima. Si la condición es «sin deslizar», usa $F \le \mu_s N$.
5. **Vehículo que frena o acelera:** si patinan las cuatro ruedas, $F = \mu_k N$ en cada una. Con $\sum M_G = 0$ se reparte la normal entre ejes: al frenar carga más el eje delantero.

5.3.3 Rotación alrededor de un eje fijo no centroidal

1. Calcula $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2}$.
2. Escribe $\sum M_O = I_O\alpha$: las reacciones del pasador no hacen momento y α sale directamente.
3. Si el cuerpo **se libera del reposo** o **se rompe un apoyo**, $\omega = 0$ en ese instante: $\bar{a}_n = 0$ y $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$, perpendicular a OG.
4. Si hay rapidez angular ω, $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$ dirigida de G hacia O.
5. Con $\sum F = m\bar{a}$ en las direcciones normal y tangencial (o x e y) despeja las componentes de la reacción en O y su magnitud $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$.

5.3.4 Movimiento plano general: rueda sin deslizar o desliza

1. Diagrama de cuerpo libre: peso en G, normal y fricción F en el contacto; la fricción se dibuja en un sentido supuesto.
2. Escribe $\sum F_x = m\bar{a}$, $\sum F_y = 0$ (para obtener N) y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$.
3. **Supón que rueda sin deslizar:** $\bar{a} = \alpha r$. Resuelve y obtén la fricción necesaria F.
4. **Comprueba:** si $|F| \le \mu_s N$, la suposición es correcta. Si $|F| > \mu_s N$, el cuerpo **desliza**: repite con $F = \mu_k N$ (en sentido opuesto al deslizamiento del punto de contacto) y con $\bar{a}$ y α independientes.
5. Para un cuerpo que baja rodando por un plano de ángulo θ sin otras fuerzas: $\bar{a} = \dfrac{g\sin\theta}{1 + \bar{k}^2/r^2}$ (esfera: $\frac{5}{7}g\sin\theta$; cilindro macizo: $\frac{2}{3}g\sin\theta$; aro: $\frac{1}{2}g\sin\theta$). Rueda sin deslizar si $\mu_s \ge \dfrac{\tan\theta}{1 + r^2/\bar{k}^2}$ (esfera: $\frac{2}{7}\tan\theta$).

5.3.5 Poleas, carretes y cuerpos colgantes

1. Separa el sistema: un diagrama para la polea o el carrete y uno para cada cuerpo colgado. Cada cuerda tiene su propia tensión (T_A, T_B).
2. Decide el sentido de giro comparando los momentos de los pesos colgados respecto al eje; si te equivocas, α sale negativa y basta cambiar el sentido.
3. **Relaciones cinemáticas:** un cuerpo colgado de una cuerda enrollada a un radio r de una polea con eje fijo tiene $a = r\alpha$. En un carrete que sube o baja enrollado en una cuerda fija, el punto de tangencia con esa cuerda no se acelera verticalmente:

4.3 Procedimientos

4.3.1 Rotación con $\alpha(t)$, $\alpha(\theta)$ o $\alpha(\omega)$

1. Identifica de qué depende α y escoge la relación:
   - $\alpha(t)$: $\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha\,\mathrm{d}t$ y $\theta = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t$.
   - $\alpha(\theta)$: $\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta} \alpha\,\mathrm{d}\theta$.
   - $\alpha(\omega)$: $\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\omega\,\mathrm{d}\omega}{\alpha(\omega)} = \theta$ (si piden un ángulo) o $\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\mathrm{d}\omega}{\alpha(\omega)} = t$ (si piden un tiempo).
2. Pasa revoluciones a radianes ($\frac{1}{2}$ rev $= \pi$ rad).
3. Evalúa ω y α en el instante pedido.
4. Para un punto a la distancia r: $a_t = \alpha r$, $a_n = \omega^2 r$, $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

4.3.2 Transmisión entre poleas, engranes, bandas y cremallera

1. Marca cada contacto (diente con diente, banda con polea, cuerda con tambor) y su radio.
2. En cada contacto: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ (y lo mismo con α y con θ).
3. Dentro de un mismo cuerpo (polea con dos radios), ω es la misma.
4. Un bloque colgado de una cuerda enrollada en un radio r: $s = r\theta$, $v = \omega r$, $a = \alpha r$.
5. Sentidos: contacto exterior invierte el sentido; banda abierta lo conserva.

4.3.3 Rodadura sin deslizar

1. Pon el CIR en el punto de contacto con la superficie fija.
2. $\omega = v_G / r$ (radio, no diámetro).
3. Velocidad de cualquier punto: $v_P = \omega\, r_{P/I}$, perpendicular a IP; o bien $\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/G}$.
4. Si hay aceleración: $a_G = \alpha r$ y $\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/G} - \omega^2 \vec{r}_{P/G}$.

4.3.4 Velocidades: método vectorial y CIR

1. Escribe las coordenadas de cada articulación con la figura (longitud por coseno y seno de su ángulo) y los vectores $\vec{r}_{B/A}$ de cada barra.
2. Empieza por el cuerpo cuyo movimiento se conoce (manivela: $\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$).
3. Para el siguiente punto, iguala dos expresiones de su velocidad: la que viene por la barra ($\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$) y la que impone su apoyo (dirección de la guía, o giro alrededor de un apoyo fijo).
4. Separa componentes $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$: dos ecuaciones, dos incógnitas.
5. **Con CIR:** traza las perpendiculares a dos velocidades conocidas en dirección; su cruce es I. Calcula las distancias (con triángulos rectángulos o ley de senos), $\omega = v_A / r_{A/I}$ y $v_B = \omega\, r_{B/I}$.
6. Signo de ω: positivo es antihorario. Da magnitud y sentido.

4.3.5 Aceleraciones relativas

1. Resuelve antes todas las velocidades angulares (4.3.4).
2. Aceleración del punto conocido: en la manivela con ω constante, $\vec{a}_B = -\omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$.
3. Para el siguiente punto: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_{BC}\hat{k} \times \vec{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \vec{r}_{C/B}$, igualada con lo que impone su apoyo: $\alpha_{CD}\hat{k} \times \vec{r}_{C/D} - \omega_{CD}^2 \vec{r}_{C/D}$ si gira alrededor de D, o a_C en la dirección de la guía

El radio de giro $\bar{k}$ es la distancia a la que habría que concentrar toda la masa para tener el mismo momento de inercia. En los exámenes de poleas y carretes suele darse $\bar{k}$ en lugar de $\bar{I}$; si el dato es el peso W, la masa es $m = W/g$.

Teorema de los ejes paralelos. Para un eje paralelo al centroidal, a una distancia d de G:

$$I = \bar{I} + md^2.$$

Siempre se parte del eje que pasa por G; nunca se pasa directamente de un eje no centroidal a otro.

Cuerpo homogéneo	Eje	Momento de inercia
Barra delgada de longitud L	perpendicular, por G	$\bar{I} = \frac{1}{12}mL^2$
Barra delgada de longitud L	perpendicular, por un extremo	$I = \frac{1}{3}mL^2$
Disco o cilindro macizo de radio r	su eje	$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$
Aro o cilindro de pared delgada	su eje	$\bar{I} = mr^2$
Esfera maciza de radio r	diámetro	$\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$
Cascarón esférico delgado	diámetro	$\bar{I} = \frac{2}{3}mr^2$
Placa rectangular $a \times b$	perpendicular, por G	$\bar{I} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

Unidades: kg m^2 en el SI; slug ft^2 (es decir, lb ft s^2) en el sistema inglés.

5.1.3 Los tres tipos de movimiento plano

- **Traslación** ($\omega = 0, \alpha = 0$): todos los puntos tienen la misma aceleración. Las ecuaciones quedan $\sum F_x = m\bar{a}_x$, $\sum F_y = m\bar{a}_y$ y $\sum M_G = 0$. Es *rectilínea* si G va en línea recta (vehículo que frena, caja que sube por un plano) y *curvilínea* si G describe una curva sin que el cuerpo gire (placa colgada de dos barras paralelas iguales); en la curvilínea, $\bar{a}$ se expresa en componentes normal y tangencial: $\bar{a}_n = v^2/\rho$, $\bar{a}_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.
- **Rotación alrededor de un eje fijo:** G describe una circunferencia de radio $\bar{r}$ alrededor de O, con

  $$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha, \qquad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2 \text{ (dirigida hacia } O).$$

  Si el eje pasa por G (polea, volante), $\bar{a} = 0$ y las fuerzas del apoyo equilibran el peso y las tensiones.
- **Movimiento plano general:** el cuerpo se traslada y gira a la vez. El caso típico es la rueda o el carrete que **rueda sin deslizar**: el punto de contacto es el centro instantáneo de rotación (Unidad 4) y

  $$\bar{v} = \omega r, \qquad \bar{a} = \alpha r.$$

  La fricción en el contacto es *estática*, de valor desconocido y con la condición $F \le \mu_s N$. Si la rueda **desliza**, $\bar{a}$ y α son independientes y $F = \mu_k N$.

5.1.4 Energía del cuerpo rígido

El programa de esta unidad no menciona la energía del cuerpo rígido, pero los exámenes la usan para hallar la rapidez angular después de un giro (por ejemplo, 1er final 2009-2,

Resolución. a) Velocidades:

$$\vec{v}_B = 10\hat{k} \times (0.4\hat{\imath} + 0.6928\hat{\jmath}) = -6.928\hat{\imath} + 4\hat{\jmath},$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \omega_{BC}\hat{k} \times 0.8\hat{\imath} = -6.928\hat{\imath} + (4 + 0.8\,\omega_{BC})\hat{\jmath},$$

$$\vec{v}_C = \omega_{CD}\hat{k} \times (-0.2\hat{\imath} + 0.3464\hat{\jmath}) = -0.3464\,\omega_{CD}\hat{\imath} - 0.2\,\omega_{CD}\hat{\jmath}.$$

Componente $\hat{\imath}$: $-6.928 = -0.3464\,\omega_{CD}$, de donde $\omega_{CD} = 20\,\text{rad/s}$. Componente $\hat{\jmath}$: $4 + 0.8\,\omega_{BC} = -0.2(20) = -4$, de donde $\omega_{BC} = -10\,\text{rad/s}$.
Comprobación con el CIR de BC: las rectas AB y DC se cortan a 0.8 m de B, y $\omega_{BC} = v_B/0.8 = 8/0.8 = 10\,\text{rad/s}$.
b) Aceleraciones. Como $\alpha_{AB} = 0$:

$$\vec{a}_B = -\omega_{AB}^2\vec{r}_{B/A} = -40\hat{\imath} - 69.28\hat{\jmath},$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_{BC}\hat{k} \times 0.8\hat{\imath} - (10)^2(0.8\hat{\imath})$$
$$= -120\hat{\imath} + (-69.28 + 0.8\,\alpha_{BC})\hat{\jmath},$$

$$\vec{a}_C = \alpha_{CD}\hat{k} \times \vec{r}_{C/D} - (20)^2\vec{r}_{C/D}$$
$$= (80 - 0.3464\,\alpha_{CD})\hat{\imath} + (-138.56 - 0.2\,\alpha_{CD})\hat{\jmath}.$$

Componente $\hat{\imath}$: $-120 = 80 - 0.3464\,\alpha_{CD}$, así que $\alpha_{CD} = 577.4\,\text{rad/s}^2$. Componente $\hat{\jmath}$: $-69.28 + 0.8\,\alpha_{BC} = -138.56 - 0.2(577.4)$, así que $\alpha_{BC} = -230.9\,\text{rad/s}^2$.
Resultado. a) $\omega_{BC} = 10\,\text{rad/s}$ **horario**; $\omega_{CD} = 20\,\text{rad/s}$ **antihorario**. b) $\alpha_{BC} = 230.9\,\text{rad/s}^2$ **horario**; $\alpha_{CD} = 577.4\,\text{rad/s}^2$ **antihorario**.

4.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 4.5.1 · Placa con aceleración angular senoidal

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 3

Una placa circular de 250 mm de radio gira alrededor de un eje fijo por su centro. Parte del reposo y su aceleración angular es $\alpha = \alpha_0\cos(\pi t/T)$, con $\alpha_0 = 10\,\text{rad/s}^2$ y $T = 1.5\,\text{s}$. Determine la magnitud de la aceleración de un punto A del perímetro cuando $t = 0.5\,\text{s}$.

Datos. $r = 0.25\,\text{m}$, $\omega_0 = 0$, $\alpha_0 = 10\,\text{rad/s}^2$, $T = 1.5\,\text{s}$, $t = 0.5\,\text{s}$.

Planteamiento. Rotación con $\alpha(t)$: se integra para obtener $\omega(t)$; después $a_t = \alpha r$ y $a_n = \omega^2 r$.

Resolución.

$$\omega = \int_0^t \alpha_0 \cos\frac{\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha_0 T}{\pi}\sin\frac{\pi t}{T}.$$

Resultado: a) $\omega_{AB} = 0.577\,\text{rad/s}$ antihorario; b) $v_B = 6.93\,\text{ft/s}$, tangente a la ranura, hacia abajo y a la izquierda a 60° bajo la horizontal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

4.7 Errores frecuentes

- Usar el diámetro como radio en $v = \omega r$ (ruedas «de 500 mm»).
- Olvidar que la velocidad angular es **del cuerpo**: todos los puntos de una barra tienen la misma ω, pero cada barra tiene la suya.
- Escribir $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{C/B}$ con la ω de otra barra.
- Usar el CIR para aceleraciones: $\vec{a} \neq \alpha\,\vec{r}_{P/I}$, porque el CIR tiene aceleración.
- Olvidar el término $-\omega^2\vec{r}_{B/A}$ o ponerlo con el signo cambiado (va de B hacia A).
- Calcular aceleraciones sin haber calculado antes todas las ω.
- Dar $a = \alpha r$ para un punto del borde de una polea: falta $a_n = \omega^2 r$. En cambio, un tramo recto de banda o un bloque colgado solo tiene $a = \alpha r$.
- Con $\alpha(\theta)$ o $\alpha(\omega)$, integrar como si α fuera constante, o dejar el ángulo en revoluciones.
- Invertir el sentido en engranes: en contacto exterior giran en sentidos opuestos.
- Leer mal la geometría: el ángulo de una barra se obtiene del triángulo con las cotas ($\sin\beta = h/L$), no a simple vista. Escribe las coordenadas de cada articulación antes de empezar.
- Dar solo la magnitud de ω o de α: el examen pide magnitud **y** sentido.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

Tema	Expresiones
Rotación	$\omega = \dot{\theta}$, $\alpha = \dot{\omega} = \omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\theta$; con α constante, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$
Punto a distancia r	$v = \omega r$, $a_t = \alpha r$, $a_n = \omega^2 r$; $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r}$
Producto cruz	$\omega\hat{k} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = \omega(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath})$
Transmisión	$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, $\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$, $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$
Rodadura	CIR en el contacto: $v_G = \omega r$, $a_G = \alpha r$; el punto más alto, $2v_G$
Velocidad relativa	$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$
CIR	cruce de perpendiculares a las $\vec{v}$; $v_P = \omega\, r_{P/I}$
Aceleración relativa	$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2\vec{r}_{B/A}$
Sistema que gira	$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}$

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

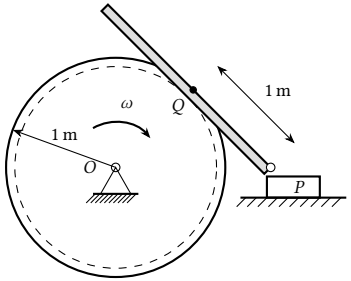
1. Redibuja el mecanismo con ejes x, y y escribe las coordenadas de cada articulación.
2. Clasifica cada cuerpo: eje fijo, traslación o movimiento plano general.
3. Si es una polea o un engrane con α variable, integra primero (4.3.1) y luego transmite (4.3.2).
4. Velocidades: barra por barra, con el método vectorial o el CIR; anota cada ω con su sentido.
5. Aceleraciones (si las piden): con todas las ω ya conocidas, iguala las dos expresiones de la aceleración del punto común y separa componentes.
6. Responde con magnitud, dirección y sentido; comprueba una velocidad con el CIR.

Resultado. a) $a_B = 948\,\text{in/s}^2$; b) $a_P = 9637\,\text{in/s}^2$ (casi toda normal).

Ejercicio 4.5.3 · Cremallera sobre un engrane

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión C, problema 3

Una cremallera recta descansa sobre un engrane de 1 m de radio que gira alrededor de su centro fijo O. La cremallera toca al engrane en Q, a 45° sobre la horizontal por O, y está articulada a un deslizador P que se mueve sobre un piso horizontal; P está a la altura de O y a 1 m de Q a lo largo de la cremallera. En el instante mostrado el engrane gira a 15 rad/s en sentido horario. Determine: a) la velocidad angular de la cremallera; b) la velocidad del deslizador.



Datos. $r = 1\,\text{m}$, $\omega_{\text{eng}} = 15\,\text{rad/s}$ (horario), $QP = 1\,\text{m}$ a 45° bajo la horizontal.

Planteamiento. En el contacto, el punto Q de la cremallera tiene la velocidad del diente: $v_Q = \omega r$, a lo largo de la cremallera. P se mueve horizontalmente. Se usa el CIR de la cremallera.

Resolución. $v_Q = 15(1) = 15\,\text{m/s}$, hacia abajo y a la derecha a lo largo de la cremallera. La perpendicular a $\vec{v}_Q$ por Q es la recta OQ; la perpendicular a $\vec{v}_P$ por P es la vertical por P. Con origen en O, $Q = (0.707,\ 0.707)$ y $P = (1.414,\ 0)$; las dos rectas se cortan en $I = (1.414,\ 1.414)$. Entonces

$$r_{Q/I} = 1\,\text{m}, \qquad r_{P/I} = 1.414\,\text{m},$$
$$\omega = \frac{v_Q}{r_{Q/I}} = \frac{15}{1}, \qquad v_P = \omega\, r_{P/I} = 15(1.414).$$

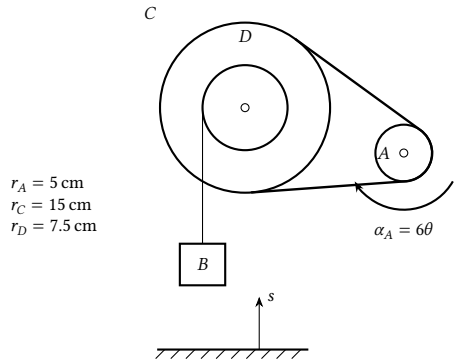
I está arriba de P y P se mueve hacia la derecha, así que la cremallera gira en sentido antihorario.

Resultado. a) $\omega = 15\,\text{rad/s}$ **antihorario**; b) $v_P = 21.2\,\text{m/s}$ **hacia la derecha**.

Ejercicio 4.5.4 · Dos discos que no deslizan y dos barras

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 3

Dos discos de 1 m de radio, con centros fijos A y E a 2 m uno del otro, están en contacto y no deslizan entre sí. El disco A gira con velocidad angular constante de 3 rad/s en sentido antihorario. La barra BC está articulada al disco A en B, sobre su borde a 45° arriba y a la izquierda de A; la barra DC está articulada al disco E en D, sobre su borde a 45° arriba y



Resultado: $\omega_A = 196\,\text{rad/s}$, $\omega_C = 65.3\,\text{rad/s}$; $v_B = 4.90\,\text{m/s}$ hacia arriba.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 4.6.2 · Rueda de bicicleta

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión A, problema 3

Un ciclista se mueve hacia la derecha a 36 km/h. Las ruedas, de 500 mm de diámetro, ruedan sin deslizar. En la rueda trasera, A es el punto más alto, B el centro (el eje) y O el punto de contacto con el piso. Determine las velocidades de A, O y B.

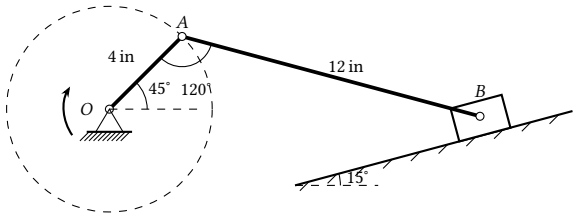
Resultado: $\omega = 40\,\text{rad/s}$ horario; $v_A = 20\,\text{m/s}$ y $v_B = 10\,\text{m/s}$, ambas hacia la derecha; $v_O = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.3 · Manivela-biela-corredera en un plano inclinado

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión C, problema 3

La manivela OA, de 4 in, gira en sentido horario a razón constante de 100 rad/s; en el instante mostrado forma 45° con la horizontal. La barra conectora AB, de 12 in, forma 120° con OA (baja 15° bajo la horizontal hacia la derecha) y su extremo B es un deslizador que se mueve sobre una guía inclinada 15° sobre la horizontal (sube hacia la derecha). Calcule: a) la velocidad angular de AB; b) la velocidad del deslizador B.

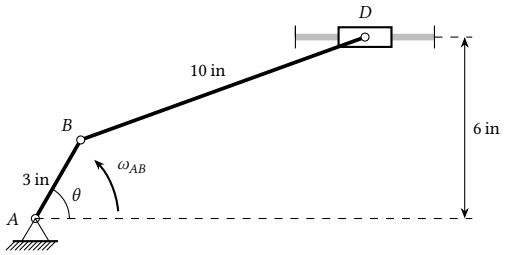


Resultado: a) $\omega_{AB} = 33.3\,\text{rad/s}$ antihorario; b) $v_B = 400\,\text{in/s}$ hacia arriba de la guía (15° sobre la horizontal).

Ejercicio 4.5.5 · Manivela, biela y collarín

Adaptado de: 1er final 2013-1, versión B, problema 4

El brazo AB, de 3 in, gira alrededor del apoyo fijo A con velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido antihorario. La barra BD, de 10 in, une B con un collarín D que se desliza sobre una varilla horizontal fija situada 6 in arriba de A. Para $\theta = 60^\circ$ (θ es el ángulo de AB con la horizontal), determine la aceleración del collarín D.



Datos. $\omega_{AB} = 16$ rad/s antihorario, $\alpha_{AB} = 0$. $\vec{r}_{B/A} = 1.5\hat{\imath} + 2.598\hat{\jmath}$; la altura de D sobre B es $6 - 2.598 = 3.402$ in, así que $\vec{r}_{D/B} = \sqrt{10^2 - 3.402^2}\,\hat{\imath} + 3.402\hat{\jmath} = 9.404\hat{\imath} + 3.402\hat{\jmath}$ [in].

Planteamiento. Manivela-biela-corredera: $\vec{v}_D$ y $\vec{a}_D$ son horizontales. Primero ω_{BD} con velocidades, luego α_{BD} y a_D con aceleraciones.

Resolución. Velocidades:

$$\vec{v}_B = 16\hat{k} \times (1.5\hat{\imath} + 2.598\hat{\jmath}) = -41.57\hat{\imath} + 24\hat{\jmath},$$
$$\vec{v}_D = (-41.57 - 3.402\,\omega_{BD})\hat{\imath} + (24 + 9.404\,\omega_{BD})\hat{\jmath}.$$

Como $v_{Dy} = 0$: $\omega_{BD} = -2.552$ rad/s (horario) y $v_D = -41.57 + 8.68 = -32.89$ in/s.

Aceleraciones: $\vec{a}_B = -16^2\vec{r}_{B/A} = -384\hat{\imath} - 665.1\hat{\jmath}$ y $\omega_{BD}^2\vec{r}_{D/B} = 6.514\,\vec{r}_{D/B} = 61.25\hat{\imath} + 22.16\hat{\jmath}$:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \alpha_{BD}\hat{k} \times \vec{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2\vec{r}_{D/B}$$
$$= (-445.25 - 3.402\,\alpha_{BD})\hat{\imath} + (-687.27 + 9.404\,\alpha_{BD})\hat{\jmath}.$$

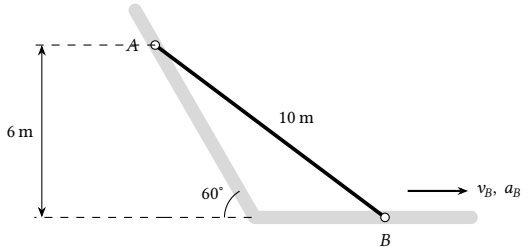
Como $a_{Dy} = 0$: $\alpha_{BD} = 73.08$ rad/s^2 (antihorario) y $a_D = -445.25 - 3.402(73.08) = -693.9$ in/s^2.

Resultado. $a_D = 694$ in/s^2 **hacia la izquierda** (con $v_D = 32.9$ in/s hacia la izquierda, $\omega_{BD} = 2.55$ rad/s horario y $\alpha_{BD} = 73.1$ rad/s^2 antihorario).

Ejercicio 4.5.6 · Barra con extremos en ranuras

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión B, problema 3

Los extremos de la barra AB, de 10 m, se mueven en dos ranuras: B en una ranura horizontal y A en una ranura inclinada 60° respecto a la horizontal, que sube hacia la izquierda desde la ranura horizontal. En la posición mostrada, A está 6 m arriba de la ranura horizontal, y B tiene una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s^2, ambas hacia la derecha. Determine la velocidad y la aceleración de A en ese instante.



Datos. $\vec{r}_{A/B} = -8\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$ [m] (el desplazamiento horizontal es $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ m); $\vec{v}_B = 3\hat{\imath}$, $\vec{a}_B = 2\hat{\imath}$. La ranura de A tiene dirección $\hat{u} = 0.5\hat{\imath} - 0.866\hat{\jmath}$ (hacia abajo y a la derecha).

Planteamiento. Barra con extremos guiados: $\vec{v}_A = v_A\hat{u}$ y $\vec{a}_A = a_A\hat{u}$, con $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}$ y $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{A/B} - \omega^2\vec{r}_{A/B}$.

Resolución. Velocidades:

$$0.5\,v_A\hat{\imath} - 0.866\,v_A\hat{\jmath} = (3 - 6\omega)\hat{\imath} - 8\omega\hat{\jmath}.$$

De $\hat{\jmath}$: $v_A = 9.238\,\omega$. De $\hat{\imath}$: $3 - 6\omega = 4.619\,\omega$, así que $\omega = 0.2825$ rad/s (antihorario) y $v_A = 2.610$ m/s.

Aceleraciones, con $\omega^2 = 0.07982$:

$$0.5\,a_A\hat{\imath} - 0.866\,a_A\hat{\jmath} = (2.6385 - 6\alpha)\hat{\imath} + (-0.4789 - 8\alpha)\hat{\jmath}.$$

De $\hat{\jmath}$: $a_A = 9.238\,\alpha + 0.553$. De $\hat{\imath}$: $2.6385 - 6\alpha = 4.619\,\alpha + 0.2765$, así que $\alpha = 0.2224$ rad/s^2 (antihorario) y $a_A = 2.608$ m/s^2.

Resultado. $v_A = 2.61$ m/s y $a_A = 2.61$ m/s^2, las dos **a lo largo de la ranura, hacia abajo** (60° bajo la horizontal, hacia la derecha). La coincidencia numérica entre v_A y a_A es casual.

Ejercicio 4.5.7 · Collarín: centro instantáneo con ley de senos

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3

La varilla AB, de 50 mm, gira alrededor del apoyo fijo A a 2 rad/s en sentido horario; en el instante mostrado forma 30° bajo la horizontal, con B a la derecha de A. La barra BC, de 60 mm, forma 15° con la vertical y baja hacia la derecha hasta el collarín C, que se desliza sobre una varilla horizontal fija. Determine la velocidad del collarín C.