

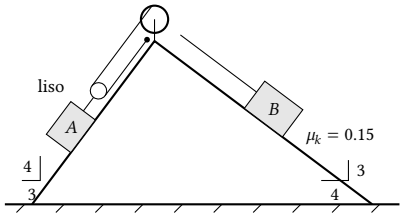
Resultado: $v = 56.7\,\text{ft/s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.3 · Dos cuerpos en planos opuestos con polea móvil

Adaptado de: 1er final 2018-1, turno vespertino, problema 2

Los cuerpos A (20 kg) y B (40 kg) están sobre los dos lados de una cuña fija. A está en el lado izquierdo, liso y de pendiente 4:3 (4 vertical por 3 horizontal), y lleva una polea; una cuerda fija cerca de la cima baja paralela al plano, rodea la polea de A, sube a una polea en la cima y baja paralela al lado derecho hasta B. El lado derecho tiene pendiente 3:4 y coeficiente de fricción cinética 0.15 con B. Si el sistema parte del reposo, determine las rapideces de los cuerpos cuando B ha recorrido 2 m.



Resultado: $v_B = 3.13\,\text{m/s}$ (baja); $v_A = 1.56\,\text{m/s}$ (sube).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3.6.4 · Fuerza en rampa que vence la fricción

Adaptado de: 2º final 2010-1, versión B, problema 3

A un cuerpo de 20 kg, en reposo sobre un plano horizontal, se le aplica una fuerza horizontal F que crece linealmente de cero a 200 N en 5 s y luego se mantiene en 200 N. El coeficiente de fricción es $\mu = 0.6$ (el mismo para el caso estático y el cinético). Determine la velocidad del cuerpo en $t = 10$ s.

4. Resuelve el sistema: las incógnitas son T y una aceleración (la otra sale de la relación del paso 1).
5. Si se pide una velocidad tras una distancia, usa $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$ con la aceleración del cuerpo correspondiente.
6. **Cuerpos en contacto o enganchados** (auto con remolque): la aceleración común sale del sistema completo; la fuerza entre ellos, del DCL de uno solo.

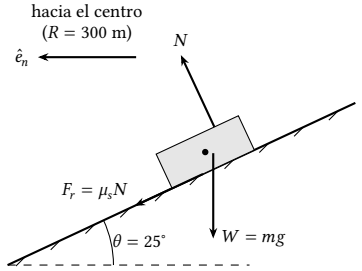
2.3.4 Cinética curvilínea en componentes normal y tangencial

1. Dibuja el DCL en la posición pedida, con $\hat{e}_n$ hacia el centro de curvatura y $\hat{e}_t$ en la dirección de la velocidad.
2. Escribe $\sum F_n = mv^2/\rho$ y $\sum F_t = ma_t$ (si la rapidez es constante, $a_t = 0$).
3. Si falta la rapidez en esa posición, obtenla con energía (Unidad 3) o integrando $a_t = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ con $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$.
4. **Curva peraltada:** usa ejes horizontal ($\hat{e}_n$) y vertical ($\sum F_y = 0$); a punto de deslizar hacia afuera, $F_r = \mu_s N$ hacia abajo del peralte.
5. **Juego giratorio:** radio de giro $r = b + L\sin\theta$; $\sum F_y = 0$ da la tensión y $\sum F_n$ da ω.
6. **Despegue:** impón $N = 0$ y combina con la rapidez obtenida por energía.
7. La aceleración total es $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

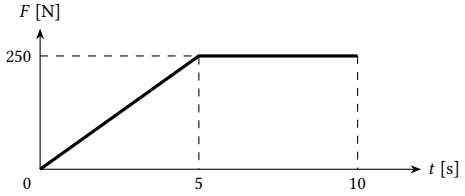
2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Curva peraltada con fricción

Adaptado del 1er final 2018-2, turno matutino, problema 2.
Un automóvil de 2000 kg toma una curva de 300 m de radio con un peralte de 25°. Se sabe que está a punto de deslizarse hacia afuera de la curva. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento es 0.4, ¿con qué rapidez, en km/h, toma la curva?



Datos. $m = 2000\,\text{kg}$ (no hará falta), $R = 300\,\text{m}$, $\theta = 25°$, $\mu_s = 0.4$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.
Planteamiento. El automóvil describe una circunferencia horizontal de radio R con rapidez constante: $a_t = 0$ y $a_n = v^2/R$ hacia el centro. Como tiende a salirse hacia afuera (hacia arriba del peralte), la fricción es máxima y apunta hacia abajo del peralte: $F_r = \mu_s N$. Ejes: $\hat{e}_n$ horizontal hacia el centro y y vertical.



Datos. $W = 100\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $m = 10.19\,\text{kg}$; fricción estática máxima $0.25(100) = 25\,\text{N}$; fricción cinética $0.2(100) = 20\,\text{N}$; $F = 50t$ $(0 \le t \le 5)$, $F = 250$ $(5 < t \le 10)$, $F = 0$ después.

Planteamiento. El cuerpo arranca cuando F alcanza la fricción estática máxima; desde ese instante actúa la fricción cinética. Impulso y cantidad de movimiento del arranque al paro: $0 + \int F\,dt - 20\,\Delta t_{\text{total}} = 0$.

Resolución.

1. Arranque: $50\,t_0 = 25$, de donde $t_0 = 0.5\,\text{s}$. En ese instante la fuerza neta salta de 0 a $25 - 20 = 5\,\text{N}$.
2. Impulso de F de 0.5 s a 10 s: $25(5^2 - 0.5^2) + 250(5) = 618.8 + 1250 = 1868.8\,\text{N s}$.
3. Impulso de la fricción en ese lapso: $-20(9.5) = -190\,\text{N s}$; así, $mv_{10} = 1678.8\,\text{N s}$.
4. Después de 10 s solo actúa la fricción: $1678.8 - 20\,\Delta t = 0$, de donde $\Delta t = 83.9\,\text{s}$.

Resultado. Se detiene en $t = 10 + 83.9 = 93.9\,\text{s}$.

Ejercicio 3.5.8 · Choque de dos carros de tren con pérdida de energía

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno vespertino, problema 3

En una vía horizontal recta hay dos carros de tren iguales. El carro A, que se mueve a 1.5 m/s, alcanza al carro B, que está en reposo y sin frenos. Si en el impacto se pierde el 15 % de la energía cinética original, calcule la velocidad de cada carro después del impacto.

Datos. $m_A = m_B = m$; $v_A = 1.5\,\text{m/s}$, $v_B = 0$; $T_{\text{después}} = 0.85\,T_{\text{antes}}$.

Planteamiento. Eje x en el sentido de A. Cantidad de movimiento del sistema durante el choque y la condición de energía.

Resolución.

1. Cantidad de movimiento: $m(1.5) = mv'_A + mv'_B$, así que $v'_A = 1.5 - v'_B$.
2. Energía: $\tfrac{1}{2}m(v'^2_A + v'^2_B) = 0.85 \cdot \tfrac{1}{2}m(1.5^2)$, es decir, $v'^2_A + v'^2_B = 1.9125$.
3. Sustituyendo: $2v'^2_B - 3v'_B + 0.3375 = 0$, de donde $v'_B = 1.377$ o 0.1225.
4. B va adelante y no puede quedar más lento que A: $v'_B = 1.377\,\text{m/s}$ y $v'_A = 0.123\,\text{m/s}$.
5. Coeficiente de restitución: $e = (1.377 - 0.123)/1.5 = 0.837$.

Resultado. $v'_A = 0.123\,\text{m/s}$ y $v'_B = 1.377\,\text{m/s}$, ambos en el sentido original ($e = 0.837$).

Ejercicio 2.5.2 · Automóvil que frena con un remolque

Adaptado de: 1er final 2012-2, versión A, problema 2

Un automóvil de 2000 kg arrastra un remolque de 1000 kg a 90 km/h. Se aplican los frenos del automóvil y sus ruedas deslizan sin girar; el remolque no tiene frenos. Si el coeficiente de fricción entre las llantas del automóvil y el pavimento es $\mu = 0.5$, calcule la fuerza F entre el automóvil y el remolque durante los primeros 1.5 s.

Datos. $m_a = 2000\,\text{kg}$, $m_r = 1000\,\text{kg}$, $v_0 = 25\,\text{m/s}$, $\mu = 0.5$, $t = 1.5\,\text{s}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Solo las ruedas del automóvil frenan: la única fuerza horizontal externa sobre el conjunto es $F_r = \mu N_a = \mu m_a g$. La aceleración común sale del conjunto; la fuerza del enganche, del DCL del remolque (sobre él solo actúa F, hacia atrás). Eje x en la dirección del movimiento.

Resolución.

$$\text{Conjunto:}\quad -\mu m_a g = (m_a + m_r)\,a \;\Rightarrow\; a = -\frac{0.5(2000)(9.81)}{3000} = -3.27\,\text{m/s}^2$$

$$\text{Remolque:}\quad -F = m_r a \;\Rightarrow\; F = 1000(3.27) = 3270\,\text{N}$$

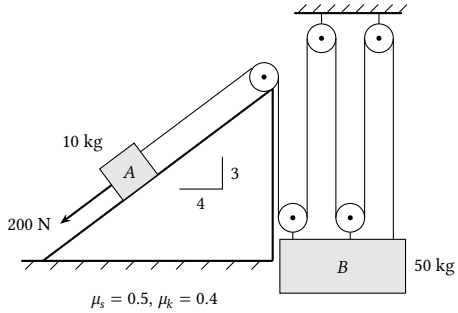
La fuerza es constante mientras las ruedas deslizan; al cabo de 1.5 s, $v = 25 - 3.27(1.5) = 20.1\,\text{m/s}$.

Resultado. $F = 3270$ **N**, un tercio de la fricción: el automóvil frena al remolque empujándolo hacia atrás.

Ejercicio 2.5.3 · Bloque con fuerza aplicada y aparejo de cinco tramos

Adaptado de: 2º final 2010-1, versión B, problema 1

El sistema de la figura está en reposo. El cuerpo A ($m_A = 10\,\text{kg}$) está sobre un plano de pendiente 3:4 y el cuerpo B ($m_B = 50\,\text{kg}$) cuelga de un aparejo: la cuerda que sale de A pasa por una polea en lo alto del plano y forma cinco tramos verticales que sostienen a B. Los coeficientes de fricción entre A y el plano son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.4$. Se aplica a A una fuerza de 200 N paralela al plano y hacia abajo. Determine la velocidad de B 4 s después. Las poleas y cuerdas son ideales.



Datos. $m_A = 10\,\text{kg}$, $m_B = 50\,\text{kg}$, $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$, $P = 200\,\text{N}$, $\mu_s = 0.5$, $\mu_k = 0.4$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Datos. $R = 2\,\text{m}$; caída de B al piso 2 m; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$; superficie lisa y sin resistencia del aire.

Planteamiento. Energía de A a B y de A a C (solo trabaja el peso). En el aire la componente horizontal de la velocidad no cambia. El radio de curvatura sale de $a_n = v^2/\rho$, donde a_n es la componente de g perpendicular a la velocidad.

Resolución.

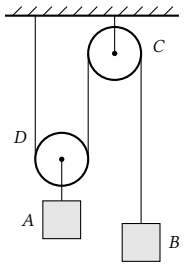
1. En B (bajó R): $v_B = \sqrt{2gR} = \sqrt{2(9.81)(2)} = 6.26\,\text{m/s}$, horizontal.
2. En C (bajó 4 m desde A): $v_C = \sqrt{2(9.81)(4)} = 8.86\,\text{m/s}$.
3. Dirección: $\cos\theta = v_x/v_C = 6.26/8.86 = 0.707$, así que $\theta = 45^\circ$ bajo la horizontal.
4. $a_n = g\cos\theta = 9.81(0.707) = 6.94\,\text{m/s}^2$; $\rho = v_C^2/a_n = 78.5/6.94 = 11.3\,\text{m}$.

Resultado. a) $v_C = 8.86\,\text{m/s}$, a 45° bajo la horizontal; b) $\rho = 11.3\,\text{m}$. No dependen del peso P.

Ejercicio 3.5.5 · Dos cuerpos unidos por una polea móvil

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 1

Dos cuerpos pequeños A y B, de 5 N cada uno, están en reposo. A cuelga de una polea móvil D; la cuerda va del techo, rodea a D, sube a la polea fija C y baja hasta B. Con poleas y cuerdas ideales, determine la distancia que debe descender B para alcanzar una rapidez de 2 m/s, y la tensión de la cuerda.



Datos. $W_A = W_B = 5\,\text{N}$, $m = 5/9.81 = 0.510\,\text{kg}$; $v_B = 2\,\text{m/s}$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Longitud de cuerda: $2s_A + s_B = \text{constante}$ (posiciones medidas hacia abajo), así que $v_A = v_B/2 = 1\,\text{m/s}$ y, si B baja s, A sube $s/2$. Sistema completo, sin fricción: $0 = \Delta T + \Delta V_g$. Para la tensión, teorema del trabajo y la energía aplicado solo a B.

Resolución.

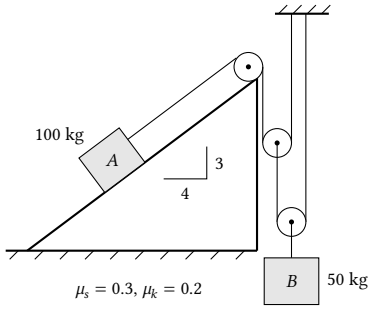
1. $\Delta T = \frac{1}{2}(0.510)(2^2) + \frac{1}{2}(0.510)(1^2) = 1.274\,\text{J}$.
2. $\Delta V_g = -5s + 5(s/2) = -2.5\,s$.
3. $0 = 1.274 - 2.5\,s$, de donde $s = 0.510\,\text{m}$.
4. Cuerpo B: $(5 - T)s = \frac{1}{2}mv_B^2$, es decir, $5 - T = 1.019/0.510 = 2.00$, de donde $T = 3.00\,\text{N}$.

Resultado. B desciende $s = 0.510\,\text{m}$; tensión $T = 3.00\,\text{N}$ (la aceleración de B es $v_B^2/2s = 3.92\,\text{m/s}^2$).

Ejercicio 2.5.5 · Plano inclinado y dos poleas móviles

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión A, problema 1

Los cuerpos A y B, de 100 y 50 kg, inicialmente en reposo, están conectados como se muestra. A está sobre un plano de pendiente 3:4; su cuerda pasa por una polea fija en lo alto del plano, baja a una polea móvil y sube al techo; del eje de esa polea baja otra cuerda que rodea a una segunda polea móvil, de la que cuelga B, y sube al techo. Los coeficientes de fricción entre el plano y A son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$. Determine la velocidad de A cuando B haya recorrido 0.5 m. Las poleas y las cuerdas tienen masa despreciable.



Datos. $m_A = 100\,\text{kg}$, $m_B = 50\,\text{kg}$, $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$, $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.2$, $\Delta s_B = 0.5\,\text{m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Relación de aceleraciones: la primera cuerda da $s_A = 2s_1$ (polea móvil 1) y la segunda, $s_1 = 2s_B$; por tanto $a_A = 4a_B$, y sobre B actúa $4T$. A tiende a bajar por el plano y B a subir.

Resolución. $N = 100(9.81)(0.8) = 784.8\,\text{N}$; la componente del peso de A a lo largo del plano es $100(9.81)(0.6) = 588.6\,\text{N}$.

¿Se mueve? En equilibrio, $T_0 = 50(9.81)/4 = 122.6\,\text{N}$; la fricción necesaria sería $588.6 - 122.6 = 466.0\,\text{N} > \mu_s N = 235.4\,\text{N}$: se mueve, con $F_r = 0.2(784.8) = 156.96\,\text{N}$.

$$A:\quad 588.6 - 156.96 - T = 100\,a_A = 400\,a_B \;\Rightarrow\; T = 431.64 - 400\,a_B$$
$$B:\quad 4T - 490.5 = 50\,a_B \;\Rightarrow\; T = 122.63 + 12.5\,a_B$$

Al igualar: $412.5\,a_B = 309.0$, $a_B = 0.749\,\text{m/s}^2$. Desde el reposo:

$$v_B = \sqrt{2a_B\,\Delta s_B} = \sqrt{2(0.749)(0.5)} = 0.866\,\text{m/s}, \qquad v_A = 4v_B = 3.46\,\text{m/s}.$$

Resultado. $v_A = 3.46$ **m/s hacia abajo del plano** ($v_B = 0.866\,\text{m/s}$ hacia arriba).

Ejercicio 2.5.6 · Tensión de un péndulo

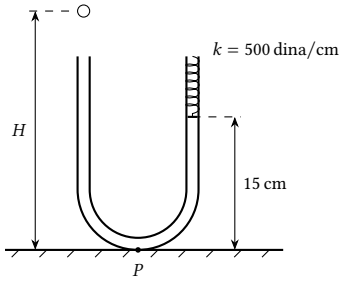
Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 1

Una esfera de 30 kg cuelga de una cuerda de 4 m y lleva una velocidad de 4 m/s hacia la derecha cuando pasa por el punto más bajo ($\theta = 0^\circ$). Determine, para $\theta = 20^\circ$: a) la

Ejercicio 3.5.2 · Esfera que entra a un tubo en U y comprime un resorte

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 2

Una esfera de 1 g se deja caer desde una altura H sobre el piso y entra por la rama izquierda de un tubo liso en forma de U, cuyo punto más bajo P toca el piso. En la rama derecha cuelga un resorte de constante $k = 500$ dina/cm, sin deformar, cuyo extremo libre está a 15 cm sobre el piso. La esfera comprime el resorte 5 cm. Determine: a) la altura H; b) la velocidad de la esfera en el punto P.



Datos. Sistema cegesimal: $m = 1$ g, $g = 981\,\text{cm/s}^2$, $k = 500$ dina/cm; compresión $x = 5$ cm; en la compresión máxima la esfera está a $15 + 5 = 20$ cm del piso.

Planteamiento. Tubo liso: se conserva la energía. Nivel de referencia en el piso (punto P). Estado inicial: reposo a la altura H. Estado final: compresión máxima, $v = 0$, $y = 20$ cm.

Resolución.

a) $0 = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0 + mg(20 - H) + \frac{1}{2}kx^2$:

$$H = 20 + \frac{\frac{1}{2}(500)(5^2)}{(1)(981)} = 20 + \frac{6250}{981} = 26.4\,\text{cm}.$$

b) Del estado inicial a P ($y = 0$, resorte sin tocar): $\frac{1}{2}mv_P^2 = mgH$, así que

$$v_P = \sqrt{2gH} = \sqrt{2(981)(26.37)} = 227\,\text{cm/s}.$$

Resultado. a) $H = 26.4$ cm; b) $v_P = 227$ cm/s $= 2.27$ m/s, horizontal (hacia la rama derecha).

Ejercicio 3.5.3 · Carro impulsado por resortes que recorre dos bucles

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 2

Un carro de 2 kg está en reposo en A, comprimiendo 2 m dos resortes idénticos de $k = 100$ N/m. Al soltarse recorre primero un bucle de 2 m de radio y luego otro de 3 m, colocado encima del primero. Sin fricción, determine la componente normal de la aceleración del carro en la cima B del bucle de 3 m.

Resolución.

$$\sum F_y = 0: \quad T\cos 30^\circ = 500 \;\Rightarrow\; T = 577\,\text{N}$$

$$\sum F_n = ma_n: \quad T\sin 30^\circ = \frac{500}{9.81}\,\omega^2(0.7) \;\Rightarrow\; 288.7 = 35.68\,\omega^2$$

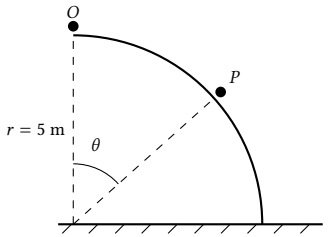
$$\omega = \sqrt{8.09} = 2.84\,\text{rad/s}$$

Resultado. a) $\omega = 2.84$ **rad/s** (≈ 27 rpm); b) $T = 577$ **N**.

Ejercicio 2.5.8 · Punto en que una pelota abandona una superficie circular

Adaptado de: 1er final 2014-2, versión A, problema 2

Una pelota se suelta desde el reposo en el punto más alto O de una resbaladilla lisa en forma de cuarto de circunferencia de 5 m de radio. La pelota no recorre toda la resbaladilla: en un punto P sale volando. Determine la longitud del arco OP que recorre antes de abandonarla. Desprecie las dimensiones de la pelota.



Datos. $r = 5$ m, $v_O = 0$, superficie lisa.

Planteamiento. Sea θ el ángulo de la vertical a la posición de la pelota, medido desde el centro. Componentes: $\hat{e}_t$ a lo largo de la superficie y $\hat{e}_n$ hacia el centro. La pelota se despega cuando $N = 0$.

Resolución. *Tangencial:* $mg\sin\theta = mv\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$, con $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v = gr\int_0^\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow\; v^2 = 2gr(1 - \cos\theta)$$

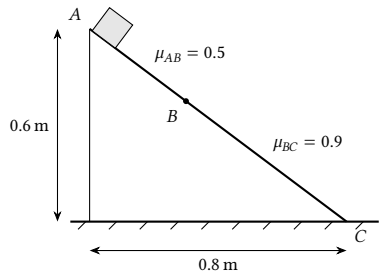
(lo mismo que da la conservación de la energía). *Normal:*

$$\sum F_n = ma_n: \quad mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{r}.$$

Con $N = 0$: $gr\cos\theta = 2gr(1 - \cos\theta)$, es decir, $3\cos\theta = 2$:

$$\theta = \arccos\tfrac{2}{3} = 48.19^\circ = 0.841\,\text{rad}, \qquad s = r\theta = 5(0.841) = 4.21\,\text{m}.$$

Resultado. $s_{OP} = 4.21$ **m** (el ángulo de despegue no depende del peso ni del radio).



Datos. Longitud del plano $L = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0\,\text{m}$; $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$; $\mu_{AB} = 0.5$, $\mu_{BC} = 0.9$; $v_A = v_C = 0$. Sea $d = AB$; entonces $BC = 1 - d$.
Planteamiento. Eje a lo largo del plano. En los dos tramos el DCL tiene peso, normal y fricción hacia arriba del plano; $\sum F_n = 0$ da $N = mg\cos\theta = 0.8\,mg$. Del estado A al estado C:

$$U_{A\to C} = \Delta T + \Delta V_g, \qquad \Delta T = 0, \quad \Delta V_g = -mg(0.6).$$

Resolución. El trabajo de la fricción es la suma de los dos tramos:

$$\begin{aligned} U_{A\to C} &= -0.5(0.8\,mg)\,d - 0.9(0.8\,mg)(1-d) \\ &= mg\,(-0.72 + 0.32\,d). \end{aligned}$$

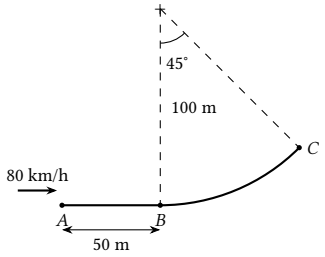
Igualando con ΔV_g y cancelando mg:

$$-0.72 + 0.32\,d = -0.6 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{0.12}{0.32} = 0.375\,\text{m}.$$

Comprobación: en AB, $\tan\theta = 0.75 > 0.5$, así que el paquete arranca solo; en BC, $0.75 < 0.9$, así que frena. En B lleva $v_B = \sqrt{2g\,d\,(0.6 - 0.5\cdot 0.8)} = 1.21\,\text{m/s}$.
Resultado. $AB = 0.375\,\text{m}$ (y $BC = 0.625\,\text{m}$). La masa y g no influyen.

Ejemplo resuelto · Impulso de la llanta motriz de una motocicleta

Adaptado del 1er final 2011-2, versión C, problema 2.
Una motocicleta acelera a tasa constante durante 5 s, a punto de derrapar. La llanta trasera (motriz) soporta el 55 % del peso durante ese lapso, y el conjunto de motocicleta y piloto pesa 450 lb. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la llanta y el pavimento son 0.7 y 0.3. Determine: a) el impulso que recibe la motocicleta por la acción de la llanta; b) su velocidad al final del intervalo, si parte del reposo; c) la velocidad que alcanzaría en el mismo lapso si la llanta trasera derrapara.
Datos. $W = 450\,\text{lb}$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$, $m = 450/32.2 = 13.98\,\text{slug}$; normal en la llanta trasera $N_T = 0.55(450) = 247.5\,\text{lb}$; $\mu_s = 0.7$, $\mu_k = 0.3$; $\Delta t = 5\,\text{s}$; $v_1 = 0$.
Planteamiento. Eje x en el sentido del movimiento. La única fuerza horizontal es la fricción del pavimento sobre la llanta motriz, hacia adelante (la llanta empuja el piso hacia atrás). Mientras no derrapa es fricción estática, y «a punto de derrapar»

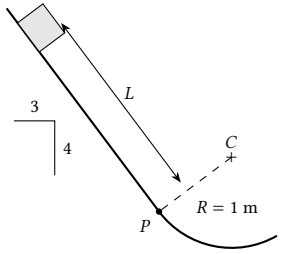


Resultado: $F_A = 960\,\text{N}$, $F_B = 1788\,\text{N}$, $F_C = 960\,\text{N}$.
→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 2.6.4 · La normal se duplica al entrar en la curva

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno vespertino, problema 2

Un cuerpo parte del reposo sobre un plano de pendiente 4:3 (4 vertical por 3 horizontal) que se une en el punto P con una trayectoria circular de 1 m de radio. Al llegar el cuerpo a P, la fuerza normal que ejerce la superficie sobre él aumenta al doble del valor que tenía en el plano. Si el coeficiente de fricción es 0.5, determine: a) la rapidez del cuerpo al llegar a P; b) la longitud L que recorre sobre el plano.



Resultado: a) $v_P = 2.43\,\text{m/s}$; b) $L = 0.60\,\text{m}$.
→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 2.6.5 · Rapidez angular de un volantín

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión A, problema 2

Determine la rapidez angular, en rpm, de un volantín de un parque de diversiones para que los brazos de los columpios formen un ángulo $\theta = 60°$ con la vertical. Los brazos, de longitud $L = 9.2\,\text{m}$, cuelgan de puntos situados a $b = 4.6\,\text{m}$ del eje vertical de giro (la geometría es la de la figura del ejercicio 2.5.7).
Resultado: $\omega = 1.16\,\text{rad/s} = 11.1\,\text{rpm}$.
→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Proc.
«se suelta», «se detiene exactamente en», fricción distinta en dos tramos	trabajo y energía por tramos	3.3.1
resorte con fricción, «máxima compresión», «distancia hasta detenerse»	trabajo y energía por tramos	3.3.1
superficie lisa, resorte, collarín en guía, cuerda elástica	conservación de la energía	3.3.2
rizo, bucle, «en la cima», tubo, tobogán y luego cae	conservación de la energía y $a_n = v^2/\rho$	3.3.2
cuerpos unidos por cuerdas y poleas, «distancia para alcanzar una rapidez»	energía de cuerpos conectados	3.3.3
gráfica F-t, «velocidad en $t = \ldots$», «instante en que se detiene»	impulso con fuerza variable	3.3.4
«a punto de derrapar», fuerza constante durante Δt, «incremento de la cantidad de movimiento»	impulso con fuerza constante o promedio	3.3.5
«choca», «alcanza», «se pierde el … % de la energía», bala que atraviesa	choque: cantidad de movimiento y e	3.3.6

Energía o impulso. Si el enunciado habla de **distancias o posiciones**, se usa energía; si habla de **tiempos** o da una gráfica F-t, se usa impulso; si hay un choque, impulso durante el choque y energía antes y después.

3.3 Procedimientos

3.3.1 Trabajo y energía con fricción por tramos

1. Numera los estados donde cambia algo: inicio, cambio de μ o de pendiente, contacto con el resorte, compresión máxima, punto final.
2. Dibuja el DCL en cada tramo y calcula N con $\sum F_n = 0$ (en un plano, $N = mg\cos\theta$).
3. En cada tramo escribe $U_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$, con $U_{1\to2} = -\mu_k N d$.
4. Si un dato intermedio no se pide, escribe una sola ecuación del estado inicial al final sumando los trabajos de fricción de todos los tramos.
5. En la compresión máxima $v = 0$: queda una cuadrática en x; toma la raíz positiva.
6. Para saber si el cuerpo regresa después de comprimir el resorte, compara kx con $\mu_s N$ (o con μN si solo hay un coeficiente).

3.3.2 Conservación de la energía mecánica

1. Verifica que no haya fricción ni fuerzas aplicadas; elige el nivel de referencia ($y = 0$) en el punto más bajo.
2. Para cada estado anota v, y y la deformación x del resorte (no su longitud).
3. Escribe $T_A + V_A = T_B + V_B$ y despeja la incógnita.
4. Rizo o punto de una curva: con v calcula $a_n = v^2/\rho$ y, si piden fuerza, $\sum F_n = ma_n$. En la cima de un rizo, para no despegarse se necesita $v^2 \geq g\rho$.
5. Tiro parabólico después de la rampa: la energía da la magnitud de la velocidad; la componente horizontal no cambia, y con ella sale la dirección.
6. Cuerda elástica: con los datos de tensión obtén k y la longitud natural; luego usa

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja el DCL de cada cuerpo y elige ejes (a lo largo del plano, o n y t si la trayectoria es curva).
2. Si hay fricción estática y el cuerpo parte del reposo, comprueba primero si se mueve.
3. Con poleas, escribe la relación de aceleraciones antes de las ecuaciones de movimiento.
4. Escribe $\sum F = ma$ por componentes y resuelve; si falta una rapidez, obtenla con energía en una línea.
5. Revisa unidades y sentidos, y escribe el resultado con su dirección.

Resolución. En la vertical no hay aceleración:

$$\sum F_y = 0 : \quad N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta - mg = 0 \;\Rightarrow\; N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}.$$

Hacia el centro:

$$\sum F_n = ma_n : \quad N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = m\frac{v^2}{R}.$$

Al dividir una ecuación entre la otra se cancelan N y m:

$$v^2 = gR\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = gR\tan(\theta+\phi), \qquad \phi = \arctan 0.4 = 21.80^\circ$$
$$v^2 = (9.81)(300)\tan 46.80^\circ = (2943)(1.0649) = 3134\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v = 55.98\ \text{m/s} = (55.98)(3.6) = 201.5\ \text{km/h}.$$

Resultado. $v \approx 56.0$ **m/s** $\approx$ **202 km/h**. Sin fricción, la rapidez de diseño sería $v = \sqrt{gR\tan\theta} = 37.0\ \text{m/s} = 133\ \text{km/h}$; la fricción permite tomar la curva más rápido.

2.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 2.5.1 · Distancia de frenado en una rampa

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión B, problema 1

La distancia mínima de frenado de un automóvil que viaja a 90 km/h sobre una superficie horizontal es de 50 m. Determine la distancia mínima de frenado del mismo automóvil si viaja con la misma rapidez hacia abajo de una rampa inclinada 5°.

Datos. $v_0 = 90\ \text{km/h} = 25\ \text{m/s}$, $d_h = 50\ \text{m}$, $\theta = 5^\circ$, $g = 9.81\ \text{m/s}^2$.

Planteamiento. La distancia es mínima cuando la fricción es máxima, $F_r = \mu N$. Con el caso horizontal se obtiene μ; con él se resuelve la rampa. Eje x en la dirección del movimiento.

Resolución. *Horizontal:* $N = mg$ y $-\mu mg = ma$, así que $a = -\mu g$. Con $0 = v_0^2 + 2ad_h$:

$$\mu = \frac{v_0^2}{2gd_h} = \frac{625}{2(9.81)(50)} = 0.637.$$

Rampa hacia abajo: $N = mg\cos 5^\circ$ y

$$\sum F_x = ma : \quad mg\sin 5^\circ - \mu mg\cos 5^\circ = ma$$
$$a = -9.81(0.6346 - 0.0872) = -5.37\ \text{m/s}^2$$
$$d = \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{625}{2(5.37)} = 58.2\ \text{m}$$

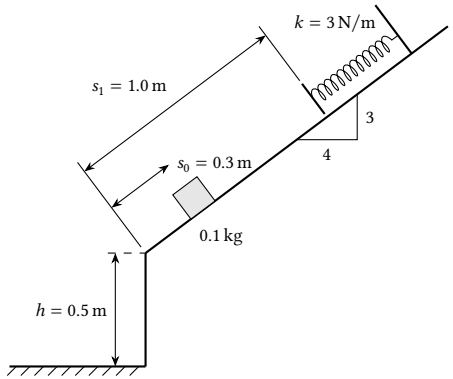
Resultado. $d = 58.2$ **m** (la componente del peso a lo largo de la rampa reduce la desaceleración).

3.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 3.6.1 · Cuerpo que sube por un plano, comprime un resorte y cae al suelo

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno matutino, problema 3

Un cuerpo de 0.1 kg sube por un plano inclinado liso de pendiente 3:4 (3 vertical por 4 horizontal) con rapidez v_0, partiendo de la posición $s_0 = 0.3$ m, medida a lo largo del plano desde su borde inferior. En $s_1 = 1.0$ m choca con un resorte de constante $k = 3$ N/m y lo comprime como máximo 0.1 m. El borde inferior del plano está a $h = 0.5$ m sobre el suelo. Determine: a) la rapidez inicial v_0; b) la rapidez con la que el cuerpo llega al suelo después de regresar.



Resultado: a) $v_0 = 3.12$ m/s; b) $v = 4.80$ m/s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 3.6.2 · Pelotita lanzada por una cuerda elástica

Adaptado de: 2º final 2009-2, versión A, problema 3

Una cuerda elástica está estirada entre los puntos A y B, separados 16 in en un mismo plano horizontal; así, su tensión es de 10 lb. Se tira del punto medio de la cuerda hasta llevarlo a C', a 6 in de su posición original C, perpendicularmente a AB; para mantenerlo ahí se requiere una fuerza de 60 lb. Se coloca en C' una pelotita de 0.2 lb y se suelta la cuerda. Determine la rapidez de la pelotita al pasar por C.

Planteamiento. Cinco tramos sostienen a B: sobre él actúa $5T$ y $a_A = 5a_B$. A tiende a bajar por el plano y B a subir. x hacia abajo del plano para A; y hacia arriba para B.

Resolución. *¿Se mueve?* En equilibrio, $T_0 = m_B g/5 = 98.1\,\text{N}$. La fricción necesaria en A sería $200 + 10(9.81)(0.6) - 98.1 = 160.8\,\text{N}$, mayor que $\mu_s N = 0.5(10)(9.81)(0.8) = 39.2\,\text{N}$: se mueve, y $F_r = \mu_k N = 31.39\,\text{N}$.

$$A: \quad 200 + 58.86 - 31.39 - T = 10\,a_A = 50\,a_B \;\Rightarrow\; T = 227.47 - 50\,a_B$$
$$B: \quad 5T - 490.5 = 50\,a_B \;\Rightarrow\; T = 98.1 + 10\,a_B$$

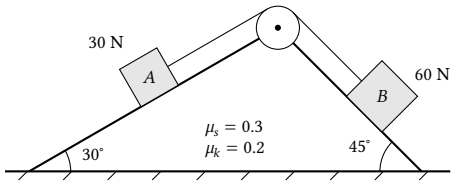
Al igualar: $60\,a_B = 129.37$, $a_B = 2.156\,\text{m/s}^2$ y $T = 119.7\,\text{N}$. Desde el reposo, $v_B = a_B t = 2.156(4) = 8.62\,\text{m/s}$.

Resultado. $v_B = 8.62$ **m/s hacia arriba** (y $a_A = 10.78\,\text{m/s}^2$).

Ejercicio 2.5.4 · Dos cuerpos sobre una cuña

Adaptado de: 1er final 2018-1, turno matutino, problema 2

El cuerpo A, de 30 N, está sobre la cara de una cuña inclinada 30°, y el cuerpo B, de 60 N, sobre la cara opuesta, inclinada 45°. Una cuerda paralela a cada cara los une pasando por una polea en la cumbre. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre los cuerpos y las superficies son 0.3 y 0.2. Las cuerdas y las poleas tienen masa despreciable. Determine: a) la aceleración de cada cuerpo; b) la tensión de la cuerda.



Datos. $W_A = 30\,\text{N}$, $W_B = 60\,\text{N}$, $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.2$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. La cuerda es inextensible: $a_A = a_B = a$. La componente del peso de B a lo largo de su cara ($60\sin 45^\circ = 42.43\,\text{N}$) supera a la de A ($30\sin 30^\circ = 15\,\text{N}$): B tiende a bajar y A a subir. Para cada cuerpo, x a lo largo de su cara en el sentido del movimiento.

Resolución. Normales: $N_A = 30\cos 30^\circ = 25.98\,\text{N}$ y $N_B = 60\cos 45^\circ = 42.43\,\text{N}$.

¿Se mueve? La fuerza que impulsa al sistema es $42.43 - 15 = 27.43\,\text{N}$ y la fricción estática máxima total es $0.3(25.98 + 42.43) = 20.52\,\text{N}$: se mueve.

$$A: \quad T - 15 - 0.2(25.98) = \frac{30}{9.81}\,a \;\Rightarrow\; T = 20.20 + 3.058\,a$$
$$B: \quad 42.43 - 0.2(42.43) - T = \frac{60}{9.81}\,a \;\Rightarrow\; T = 33.94 - 6.116\,a$$

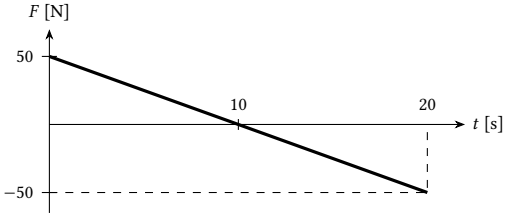
Al igualar: $9.174\,a = 13.75$, de donde $a = 1.498\,\text{m/s}^2$ y $T = 20.20 + 3.058(1.498) = 24.8\,\text{N}$.

Resultado. a) $a_A = a_B = 1.50$ **m/s²** (A sube por su cara y B baja); b) $T = 24.8$ **N**.

Ejercicio 3.5.6 · Caja con fuerza que decrece y cambia de sentido

Adaptado de: 1er final 2013-2, versión A, problema 1

Sobre una caja de 5 kg en reposo actúa desde $t = 0$ una fuerza horizontal que decrece linealmente: vale 50 N en $t = 0$, cero en $t = 10$ s y -50 N en $t = 20$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética son ambos 0.4. Determine la distancia que recorre la caja de $t = 0$ a $t = 15$ s.



Datos. $m = 5\,\text{kg}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $\mu_s = \mu_k = 0.4$; $F = 50 - 5t$ [N]; fricción máxima $0.4(5)(9.81) = 19.62\,\text{N}$.

Planteamiento. Eje x positivo en el sentido inicial de F. Impulso y cantidad de movimiento desde que arranca, con la fricción opuesta a la velocidad; luego se integra $v(t)$ para la distancia.

Resolución.

1. En $t = 0$, $F = 50\,\text{N} > 19.62\,\text{N}$: arranca de inmediato.
2. $mv = \int_0^t (50 - 5u - 19.62)\,\mathrm{d}u = 30.38\,t - 2.5\,t^2$, así que $v = 6.076\,t - 0.5\,t^2$.
3. Se detiene cuando $v = 0$: $t_a = 12.15\,\text{s}$. Distancia: $x = 3.038\,t^2 - t^3/6$, que en t_a vale 149.5 m.
4. En t_a, $F = 50 - 5(12.15) = -10.8\,\text{N}$; como $|F| < 19.62$, la caja sigue en reposo hasta que $5t - 50 = 19.62$, en $t_b = 13.92\,\text{s}$.
5. Desde t_b se mueve hacia atrás: $mv = \int_{t_b}^t (5u - 50 - 19.62)\,\mathrm{d}u = 2.5(t - t_b)^2$, así que $v = 0.5\tau^2$ y $x = \tau^3/6$ con $\tau = t - t_b$. En $t = 15$, $\tau = 1.08\,\text{s}$ y $x = 0.21\,\text{m}$.

Resultado. Distancia recorrida $149.5 + 0.21 \approx 150\,\text{m}$ (avanza 149.5 m, queda en reposo 1.8 s y retrocede 0.21 m).

Ejercicio 3.5.7 · Arranque con fricción estática y tiempo de paro

Adaptado de: 1er final 2012-1, versión B, problema 3

Un cuerpo de 100 N reposa sobre una superficie horizontal con $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.2$. Se le aplica una fuerza horizontal F que crece linealmente de cero a 250 N en los primeros 5 s, se mantiene en 250 N hasta $t = 10$ s y luego deja de actuar. Obtenga el instante en que el cuerpo se detiene.

tensión de la cuerda; b) la magnitud de la aceleración de la esfera. Desprecie la fricción y el tamaño de la esfera.

Datos. $m = 30\,\text{kg}$, $L = 4\,\text{m}$, $v_0 = 4\,\text{m/s}$, $\theta = 20^\circ$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Componentes normal (hacia el punto de suspensión) y tangencial. La rapidez en 20° sale de la conservación de la energía (Unidad 3) en una línea: la esfera sube $h = L(1-\cos 20^\circ) = 0.241\,\text{m}$.

Resolución.

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = 16 - 2(9.81)(0.241) = 11.27\,\text{m}^2/\text{s}^2, \qquad a_n = \frac{v^2}{L} = 2.82\,\text{m/s}^2$$

$$\sum F_n = ma_n: \quad T - mg\cos 20^\circ = ma_n \;\Rightarrow\; T = 276.6 + 30(2.82) = 361\,\text{N}$$

$$\sum F_t = ma_t: \quad -mg\sin 20^\circ = ma_t \;\Rightarrow\; a_t = -3.36\,\text{m/s}^2$$

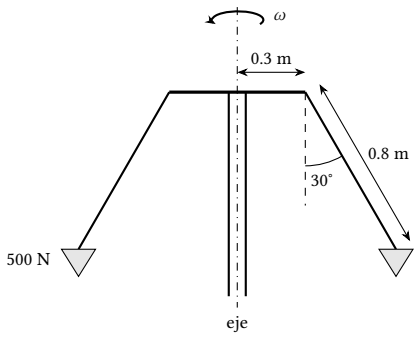
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{2.82^2 + 3.36^2} = 4.38\,\text{m/s}^2$$

Resultado. a) $T = 361$ **N**; b) $a = 4.38$ **m/s²**.

Ejercicio 2.5.7 · Canastillas de un juego giratorio

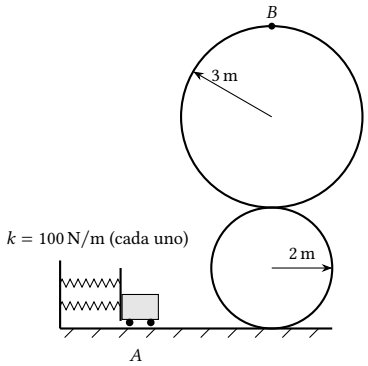
Adaptado de: 2º final 2009-2, versión B, problema 2

Las canastillas de un juego de feria cuelgan de barras de 0.8 m articuladas en los extremos de un brazo horizontal, a 0.3 m del eje vertical de giro. El juego gira con rapidez angular constante y las barras forman 30° con la vertical. Las canastillas pesan 500 N y las barras tienen peso despreciable. Calcule: a) la rapidez angular del juego; b) la tensión de las barras.



Datos. $W = 500\,\text{N}$, $b = 0.3\,\text{m}$, $L = 0.8\,\text{m}$, $\theta = 30^\circ$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Cada canastilla describe una circunferencia horizontal de radio $r = b + L\sin\theta = 0.3 + 0.8(0.5) = 0.7\,\text{m}$, con $a_t = 0$ y $a_n = \omega^2 r$ hacia el eje. Sobre ella actúan el peso y la tensión de la barra.



Datos. $m = 2\,\text{kg}$; dos resortes de $k = 100\,\text{N/m}$ con $x = 2\,\text{m}$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$. La cima B está a $2(2) + 2(3) = 10\,\text{m}$ sobre A.

Planteamiento. Sin fricción: $T_A + V_{g,A} + V_{e,A} = T_B + V_{g,B} + V_{e,B}$, con referencia en el nivel de A. En B, $a_n = v_B^2/\rho$ con $\rho = 3\,\text{m}$.

Resolución.

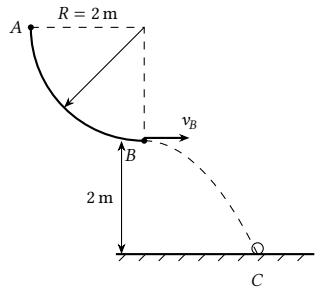
1. Energía de los dos resortes: $V_{e,A} = 2\cdot\frac{1}{2}(100)(2^2) = 400\,\text{J}$.
2. $400 = \frac{1}{2}(2)v_B^2 + 2(9.81)(10)$, de donde $v_B^2 = 203.8\,\text{m}^2/\text{s}^2$ y $v_B = 14.3\,\text{m/s}$.
3. $a_n = 203.8/3 = 67.9\,\text{m/s}^2$, hacia el centro del bucle (hacia abajo).
4. Comprobación: en la cima del bucle pequeño, $v^2 = 400 - 2(9.81)(4) = 321.5 > g\rho = 19.6$, y en B, $a_n > g$: el carro no se despega.

Resultado. $a_n = 67.9\,\text{m/s}^2$, hacia abajo (con $v_B = 14.3\,\text{m/s}$).

Ejercicio 3.5.4 · Partícula que sale de un tobogán y cae al piso

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión B, problema 2

Una partícula de peso P se suelta desde el reposo en el punto A de un tobogán liso con forma de cuarto de circunferencia de 2 m de radio. Sale horizontalmente por el extremo inferior B y cae 2 m hasta el piso, en C. Determine, justo antes de tocar el piso: a) la magnitud de la velocidad; b) el radio de curvatura de la trayectoria.



2.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 2.6.1 · Caja lanzada hacia arriba de un plano

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 2

Una caja de 40 kg se lanza hacia arriba de un plano inclinado 30° con una rapidez inicial de 18 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es 0.2, calcule el tiempo que tarda en detenerse. Use $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

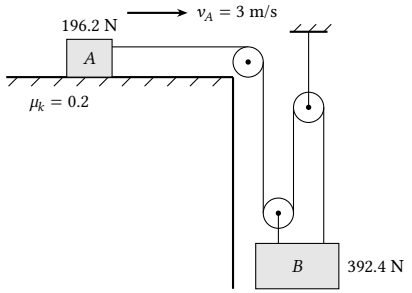
Resultado: $t = 2.73$ s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 2.6.2 · Cuerpo horizontal y cuerpo colgante con tres tramos

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 1

El cuerpo A, de 196.2 N, se mueve sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción cinética 0.2. Su cuerda pasa por una polea fija en la orilla y, con una polea móvil y otra polea fija, forma tres tramos verticales que sostienen al cuerpo B, de 392.4 N. Las poleas y las cuerdas son de peso despreciable. En cierto instante A se mueve hacia la derecha (hacia la orilla) a 3 m/s. Determine su velocidad cuando se haya desplazado 6 m.



Resultado: $v_A = 7.34\,\text{m/s}$ hacia la derecha ($a_A = 3.75\,\text{m/s}^2$, $T = 114.2$ N).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 2.6.3 · Auto que frena en una recta y en una curva

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 1

Un auto de 500 kg viaja a 80 km/h por un tramo recto de carretera horizontal. Al pasar por el punto A reduce su velocidad uniformemente hasta detenerse en C. El tramo AB es recto y mide 50 m; el tramo BC es un arco de 45° y 100 m de radio. Determine la magnitud de la fuerza de fricción entre el auto y la carretera en A, en B (ya en la curva) y en C.

significa que vale su máximo $\mu_s N_T$. Principio de impulso y cantidad de movimiento: $mv_1 + F\Delta t = mv_2$.

Resolución.

a) $F = \mu_s N_T = 0.7(247.5) = 173.3$ lb; impulso $F\Delta t = 173.3(5) = 866$ lb s.

b) $v_2 = \dfrac{F\Delta t}{m} = \dfrac{866(32.2)}{450} = 62.0$ ft/s.

c) Derrapando, la fricción es cinética: $F' = 0.3(247.5) = 74.3$ lb; impulso 371 lb s; $v_2' = 371(32.2)/450 = 26.6$ ft/s.

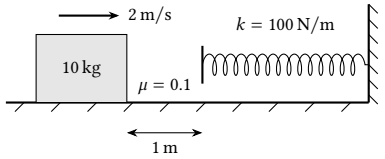
Resultado. a) 866 lb s hacia adelante; b) 62.0 ft/s; c) 26.6 ft/s. Derrapar reduce a menos de la mitad la velocidad que se gana.

3.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 3.5.1 · Cuerpo que comprime un resorte sobre un piso con fricción

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 2

Un cuerpo de 10 kg se mueve hacia la derecha a 2 m/s cuando está a 1 m de un resorte de constante $k = 100$ N/m, que tiene su longitud natural. El coeficiente de fricción cinética entre el cuerpo y el piso es 0.1. Determine: a) la compresión máxima del resorte; b) la distancia que recorre el cuerpo desde que toca el resorte hasta que se detiene en su camino de regreso.



Datos. $m = 10$ kg, $v_0 = 2$ m/s, $k = 100$ N/m, $\mu = 0.1$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$. Fricción en todo el recorrido: $F_r = \mu mg = 9.81$ N.

Planteamiento. Eje x horizontal. DCL: peso, normal $N = mg$, fricción opuesta al movimiento y, en contacto, fuerza del resorte. En cada tramo, $U_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_e$ con $U_{1\to2} = -F_r d$.

Resolución.

1. Hasta el resorte (1 m): $T = \frac{1}{2}(10)(2^2) - 9.81(1) = 10.19$ J ($v = 1.43$ m/s).
2. Compresión x hasta $v = 0$: $-9.81x = (0 - 10.19) + \frac{1}{2}(100)x^2$, es decir, $50x^2 + 9.81x - 10.19 = 0$, de donde $x = 0.364$ m.
3. ¿Regresa? $kx = 36.4\,\text{N} > 9.81\,\text{N}$: sí.
4. Regreso hasta que el resorte recupera su longitud: $-9.81(0.364) = T - \frac{1}{2}(100)(0.364^2)$, así que $T = 6.62 - 3.57 = 3.05$ J ($v = 0.78$ m/s).
5. Ya libre, la fricción lo detiene: $-9.81\,x_3 = 0 - 3.05$, de donde $x_3 = 0.311$ m.
6. Distancia desde el contacto: $2(0.364) + 0.311 = 1.04$ m.

Resultado. a) $x_{\text{máx}} = 0.364$ m; b) 1.04 m desde que toca el resorte (se detiene a 0.311 m del extremo libre; contando desde la posición inicial recorre 2.04 m).

Ejercicio propuesto 2.6.6 · Péndulo que parte de la horizontal

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 2

Un péndulo de 1 m de longitud, con una plomada de 0.2 kg, se suelta desde el reposo con la cuerda horizontal. Calcule la rapidez de la plomada y la tensión de la cuerda cuando la cuerda forma un ángulo $\varphi = 45°$ con la horizontal.

Resultado: $v = 3.72\,\text{m/s}$, $T = 4.16\,\text{N}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

2.7 Errores frecuentes

- Usar μ_k sin comprobar antes, con μ_s, si el cuerpo se mueve. Si la fricción necesaria es menor que $\mu_s N$, el cuerpo no se mueve y la fricción no vale μN.
- Poner la fricción en el sentido equivocado: siempre se opone al deslizamiento. En un cuerpo que sube por un plano apunta hacia abajo.
- Tomar $N = mg$ en un plano inclinado o cuando hay una fuerza aplicada con componente perpendicular a la superficie.
- Olvidar la relación de aceleraciones con poleas móviles ($a_A = n\,a_B$) o usar T en lugar de nT en el cuerpo que cuelga.
- Escribir «fuerza centrífuga» en el DCL. En el diagrama solo van fuerzas reales; su resultante hacia el centro es mv^2/ρ.
- Usar como radio la longitud de la cuerda en un juego giratorio: el radio es la distancia horizontal al eje, $r = b + L\sin\theta$.
- En la curva peraltada, descomponer el peso en lugar de la normal: con ejes horizontal y vertical, el peso queda entero en y y se descomponen la normal y la fricción.
- Olvidar convertir km/h a m/s (dividir entre 3.6) o confundir peso y masa ($m = W/g$).

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

$$\sum F_x = ma_x,\ \ \sum F_y = ma_y; \qquad \sum F_t = ma_t,\ \ \sum F_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

$F_r \le \mu_s N$ (reposo), $\qquad F_r = \mu_k N$ (deslizando)

Plano: $N = mg\cos\theta$; $\ a_{\text{sube}} = -g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$; $\ a_{\text{baja}} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

n tramos sobre B : $\quad F = nT, \quad a_{\text{libre}} = n\,a_B$

$$a_t = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 r, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Peralte sin fricción: $v^2 = gR\tan\theta$; $\ $ con fricción: $v^2 = gR\tan(\theta \pm \phi)$, $\ \tan\phi = \mu_s$ ($v_{\text{mín}} = 0$ si $\phi \ge \theta$)

Curva plana: $v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_s g R}$; $\qquad$ péndulo: $T = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{L}$

Juego giratorio: $\tan\theta = \dfrac{\omega^2 r}{g}$, $\ r = b + L\sin\theta$; $\qquad$ despegue: $N = 0$

$V_e = \frac{1}{2}kx^2$ con el alargamiento.

3.3.3 Cuerpos conectados por energía

1. Escribe la longitud de la cuerda y deriva: con una polea móvil, $s_B = 2s_A$ y $v_B = 2v_A$.
2. Toma el sistema completo: la tensión no hace trabajo neto.
3. $U_{1\to2}$ es solo la fricción; ΔT y ΔV_g incluyen a todos los cuerpos.
4. Despeja la distancia o la rapidez. Si piden la tensión, aplica el teorema a un solo cuerpo: ahí la tensión sí hace trabajo.

3.3.4 Impulso con fuerza variable dada por una gráfica

1. Escribe $F(t)$ por tramos a partir de la gráfica.
2. Calcula la fricción máxima $\mu_s N$ y el instante t_0 en que $F = \mu_s N$. Antes de t_0 el cuerpo no se mueve.
3. Desde t_0: $mv_2 = mv_1 + \int_{t_0}^{t}(F - \mu_k N)\,\mathrm{d}t$. El impulso de F es el área bajo la gráfica entre t_0 y t.
4. Si F baja o cambia de sentido, busca el instante en que $v = 0$; desde ahí repite el paso 2 con el sentido nuevo.
5. Si piden distancia, integra $v(t)$.

3.3.5 Impulso con fuerza constante e impulso promedio

1. Identifica la fuerza que impulsa: en un vehículo es la fricción en la llanta motriz; «a punto de derrapar» significa $F = \mu_s N$, y «derrapando», $F = \mu_k N$.
2. Impulso $= F\,\Delta t$; velocidad final $v_2 = v_1 + F\Delta t/m$.
3. Impulso promedio: $\vec{F}_{\text{prom}} = \Delta(m\vec{v})/\Delta t$, por componentes.

3.3.6 Choques

1. Escribe la conservación de la cantidad de movimiento del sistema en la dirección del choque, con signos.
2. Segunda ecuación: el coeficiente de restitución e, la fracción de energía que se pierde, o la velocidad final de uno de los cuerpos (una bala que atraviesa).
3. Si sale una cuadrática, elige la raíz con sentido físico: el cuerpo de adelante no puede quedar más lento que el de atrás.
4. Después del choque cada cuerpo sigue por su cuenta: usa trabajo y energía (3.3.1) para la distancia hasta detenerse.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Paquete que se detiene al pie de un plano con dos tramos de fricción

Adaptado del 2º final 2018-1, problema 2.

Un paquete se suelta desde el reposo en el punto A, en lo alto de un plano inclinado de 0.6 m de altura y 0.8 m de base. El coeficiente de fricción cinética es 0.5 en el tramo AB y 0.9 en el tramo BC. Determine la distancia AB si el paquete se detiene exactamente en C, al pie del plano.

Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el método energético y el de cantidad de movimiento, en la resolución de ejercicios de movimiento de la partícula donde intervienen las causas que lo modifican.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** es la unidad más frecuente: aparece en 26 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno) y en 7 de los 8 exámenes desde 2014. Son 52 problemas de tema principal contando todas las versiones, más 8 en que es tema secundario. Suele ser el problema 2 o el 3.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y la tabla de la 3.2 (30 min).
  2. Sigue los dos ejemplos 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro (20 min cada uno); empieza por el 3.5.1, el 3.5.5 y el 3.5.6.

3.1 Conceptos y expresiones

3.1.1 Trabajo y energía

Trabajo de una fuerza. Se define $U_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Si la fuerza es constante y forma un ángulo θ con el desplazamiento d, $U = Fd\cos\theta$. Los trabajos que aparecen en los exámenes son:

Fuerza	Trabajo de 1 a 2
Peso $W = mg$	$U = -W\,(y_2 - y_1) = -\Delta V_g$; positivo si el cuerpo baja
Resorte	$U = -\frac{1}{2}k\,(x_2^2 - x_1^2) = -\Delta V_e$, con x la deformación (alargamiento o compresión) medida desde la longitud natural
Fricción cinética	$U = -\mu_k N\,d$, siempre negativo; d es la distancia recorrida (no el desplazamiento) y N se calcula en cada tramo
Normal; cuerda entre dos cuerpos	no hacen trabajo neto

Energías. Energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$; energía potencial gravitacional $V_g = Wy = mgh$ (con y hacia arriba desde un nivel de referencia que se elige); energía potencial elástica $V_e = \frac{1}{2}kx^2$.

Teorema del trabajo y la energía. Entre dos estados de una partícula (o de un sistema de partículas unidas por cuerdas inextensibles) se cumple

$$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e,$$

donde $U_{1\to 2}$ es el trabajo de las fuerzas que **no** tienen energía potencial: fricción y fuerzas aplicadas. Si la fricción cambia por tramos (otro μ, otra pendiente), $U_{1\to 2}$ es la suma de los trabajos de cada tramo.

Conservación de la energía mecánica. Si $U_{1\to 2} = 0$ (superficies lisas, solo pesos y resortes):

$$T_A + V_{g,A} + V_{e,A} = T_B + V_{g,B} + V_{e,B}.$$

La rapidez en un punto depende solo de la altura y de la deformación del resorte, no de la forma de la trayectoria: vale para rizos, tubos, toboganes y para un proyectil en el aire.

Potencia. $P = \mathrm{d}U/\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\vec{v}$, en W (o ft·lb/s; 1 hp = 550 ft·lb/s). No apareció en los exámenes de 2007-2 a 2018-2; basta conocer la definición.

3.1.2 Impulso y cantidad de movimiento

Principio de impulso y cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento es $m\vec{v}$ y el impulso de una fuerza es $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$. Entre dos instantes:

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2,$$

que se aplica por componentes. Si la fuerza está dada por una gráfica F-t, su impulso es el **área bajo la gráfica**. El impulso de una fuerza constante es $F\,\Delta t$. La **fuerza promedio** durante Δt es $\vec{F}_{\text{prom}} = \Delta(m\vec{v})/\Delta t$.

Arranque y paro con fricción. Un cuerpo en reposo no se mueve mientras $F \le \mu_s N$: en ese lapso la fricción estática equilibra a F y el impulso neto es cero. El impulso empieza a contar en el instante t_0 en que $F = \mu_s N$; desde ahí la fricción vale $\mu_k N$ (si $\mu_s > \mu_k$, la fuerza neta salta de cero a $(\mu_s - \mu_k)N$). Si el cuerpo vuelve a detenerse, la fricción pasa otra vez a ser estática y hay que revisar si arranca de nuevo.

Choques. Durante un choque las fuerzas entre los cuerpos son internas y muy grandes frente a las demás, así que se conserva la cantidad de movimiento del sistema:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B.$$

El **coeficiente de restitución** relaciona las velocidades relativas de separación y de acercamiento:

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}, \qquad 0 \le e \le 1.$$

Con $e = 1$ el choque es elástico (no se pierde energía); con $e = 0$ es plástico (los cuerpos quedan juntos). La energía perdida es $T_{\text{antes}} - T_{\text{después}}$.