Ejercicio 2B.6.7 ← volver

1. En esféricas, $f = \rho^5$, que solo depende de ρ.
2. $\nabla^2 f = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \cdot 5\rho^4\right) = \dfrac{30\rho^5}{\rho^2} = 30\rho^3$.
3. En $B(1,1,0)$: $\rho = \sqrt{2}$ y $\rho^3 = 2\sqrt{2}$, así que $\nabla^2 f = 60\sqrt{2}$.

Ejercicio 2B.6.8 ← volver

1. $\vec{r}_u = (2,-4)$ y $\vec{r}_v = (6,3)$; $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 12 - 12 = 0$: ortogonal.
2. $h_u = \sqrt{20}$ y $h_v = \sqrt{45}$.
3. $f_u = 2$ y $f_v = 2v$. Como $\frac{1}{h_u}\hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u^2}$: $\nabla f = \dfrac{2}{20}(2,-4) + \dfrac{2v}{45}(6,3) = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{4v}{15},\ -\dfrac{2}{5} + \dfrac{2v}{15}\right)$.
4. En $v = 2$: $\nabla f = \left(\frac{3}{15} + \frac{8}{15},\ -\frac{6}{15} + \frac{4}{15}\right) = \frac{11}{15}\hat{\imath} - \frac{2}{15}\hat{\jmath}$.

E.3 · Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. $R_y - Q_z = 0 - 0 = 0$.
2. $R_x = -2z$ y $P_z = -2z$, así que $-(R_x - P_z) = 0$.
3. $Q_x = -\operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x$ y $P_y = -\operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x$, así que $Q_x - P_y = 0$.
4. El rotacional es nulo en todo $\mathbb{R}^3$ y la curva es cerrada: $W = 0$. No hace falta parametrizar la hipocicloide.
5. Comprobación: $\varphi = x\cos y + y^2 \cos x - xz^2 - 2y + z$ cumple $\nabla\varphi = \vec{F}$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. En cilíndricas: $\vec{F}\cdot d\vec{r} = rz^2 \operatorname{sen}^2\theta\, dr + r\left(rz^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) d\theta + r^2 z \operatorname{sen}^2\theta\, dz$.
2. $\varphi = \int rz^2 \operatorname{sen}^2\theta\, dr = \frac{1}{2}r^2z^2 \operatorname{sen}^2\theta + g(\theta, z)$.
3. $\varphi_\theta = r^2z^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + g_\theta$, que coincide con rF_θ si $g_\theta = 0$; $\varphi_z = r^2 z \operatorname{sen}^2\theta + g_z$, que coincide con F_z si $g_z = 0$. Entonces $\varphi = \frac{1}{2}r^2z^2 \operatorname{sen}^2\theta$.
4. $\varphi(A) = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ y $\varphi(B) = 0$, porque $\operatorname{sen} 0 = 0$.
5. $W = 0 - 1 = -1$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\, dr + F_\theta\, r\, d\theta = \theta\, dr - r\, d\theta$.
2. No es diferencial exacta: de $\varphi_r = \theta$ sale $\varphi = r\theta + g(\theta)$, y entonces $\varphi_\theta = r + g'(\theta)$, que nunca es igual a $-r$. Hay que integrar sobre el arco.
3. Sobre el arco $r = 2$: $dr = 0$ y θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$.
4. $W = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (-2)\, d\theta = -\pi$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

Ejercicio 4B.6.7 ← volver

1. Forma canónica: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, un elipsoide cerrado. Para cada $r\le 2$, $-\frac{3}{2}\sqrt{4-r^2}\le z\le \frac{3}{2}\sqrt{4-r^2}$.
2. $P_x=-y^2$, $Q_y=-x^2$, $R_z=4$: $\nabla\cdot\vec F=4-r^2$.
3. En z: $(4-r^2)\cdot 3\sqrt{4-r^2}=3(4-r^2)^{3/2}$.
4. Flujo $=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 3(4-r^2)^{3/2}\,r\,dr\,d\theta = 6\pi\left[-\frac{1}{5}(4-r^2)^{5/2}\right]_0^2 = 6\pi\cdot\frac{32}{5}$.
5. $\frac{192\pi}{5}$.

Ejercicio 4B.6.8 ← volver

1. Cilindro de radio 4 entre $z=-5$ y $z=4$ (altura 9). Integrando r; $dV=r\,dr\,d\theta\,dz$.
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_{-5}^{4} r^2\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 9\cdot\frac{4^3}{3}=2\pi\cdot 9\cdot\frac{64}{3}$.
3. 384π.

Ejercicio 4B.6.9 ← volver

1. Esfera de radio 4: $dS=16\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$.
2. Primer octante: $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$. Entre los planos $y=x$ y $x=0$: $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
3. $A=\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} 16\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = 16\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}=4\pi$ **u²**.

Ejercicio 4B.6.10 ← volver

1. Parametrización $\vec r(x,z)=(x,\ x^2,\ z)$ con $0\le x\le 1$, $0\le z\le x$.
2. $\vec r_x=(1,2x,0)$, $\vec r_z=(0,0,1)$; $\vec r_x\times\vec r_z=(2x,-1,0)$, de norma $\sqrt{1+4x^2}$.
3. $A=\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{1+4x^2}\,dz\,dx=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left[\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{12}\right]_0^1$.
4. $A=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$ **u²**.

Ejercicio 4B.6.11 ← volver

1. Cilindro de radio 2: $x=2\cos\theta$, $y=2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z=z$; $dS=2\,d\theta\,dz$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le z\le 2$.
2. $xy^2\,dS=(2\cos\theta)(4\,\mathrm{sen}^2\theta)(2)\,d\theta\,dz=16\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta\,dz$.
3. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\pi/2} 16\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta\,dz=16\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{32}{3}$.

Ejercicio 4B.6.12 ← volver

1. $\nabla\times\vec F=(1,-1,2)$, como en el ejercicio 4B.5.6.
2. Superficie: $z=-\frac{x}{2}-y$; $\vec N=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$, hacia arriba.
3. $(\nabla\times\vec F)\cdot\vec N=\frac{1}{2}-1+2=\frac{3}{2}$, constante.

6. $\nabla\cdot\vec F=\frac{1}{x}+4\sec^2(x+y)\tan(x+y)\neq 0$: **no es solenoidal**.

Ejercicio 3.6.9 ← volver

1. En cilíndricas: $\vec F\cdot d\vec r=-\frac{z}{r^2}\sec^2\theta\,dr+\frac{2z}{r}\sec^2\theta\tan\theta\,d\theta+\frac{\sec^2\theta}{r}\,dz$, porque $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$.
2. $\varphi=\int -\frac{z}{r^2}\sec^2\theta\,dr=\frac{z}{r}\sec^2\theta+g(\theta,z)$.
3. $\varphi_\theta=\frac{z}{r}\cdot 2\sec^2\theta\tan\theta+g_\theta$, que coincide si $g_\theta=0$; $\varphi_z=\frac{\sec^2\theta}{r}+g_z$, que coincide si $g_z=0$. Es conservativo, con $\varphi=\frac{z}{r}\sec^2\theta$.
4. $\varphi(B)=\frac{2}{2}\sec^2 0=1$ y $\varphi(A)=\frac{1}{1}\sec^2\frac{\pi}{4}=2$.
5. $W=1-2=-1$.

E.4A · Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

Ejercicio 4A.6.1 ← volver

1. Región: $1\le r\le 2$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; el integrando es $\cos\frac{\pi r^2}{2}$.
2. $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) r\,dr\,d\theta$.
3. En r: con $w=\frac{\pi r^2}{2}$, $dw=\pi r\,dr$: $\displaystyle\int_1^2\cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)r\,dr=\frac{1}{\pi}\Big[\mathrm{sen}\,w\Big]_{\pi/2}^{2\pi}=\frac{1}{\pi}(0-1)=-\frac{1}{\pi}$.
4. En θ: $-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4A.6.2 ← volver

1. Intersecciones: $x(8-x)=7\Rightarrow x^2-8x+7=0\Rightarrow(x-1)(x-7)=0$, así que $x=1$ y $x=7$.
2. Entre ellas, el techo es la recta $y=8-x$ y el piso, la hipérbola $y=\frac{7}{x}$ (en $x=2$: $6>3.5$).
3. $A=\displaystyle\int_1^7\left(8-x-\frac{7}{x}\right)dx=\left[8x-\frac{x^2}{2}-7\ln x\right]_1^7$.
4. $=\left(56-\frac{49}{2}-7\ln 7\right)-\left(8-\frac{1}{2}\right)=24-7\ln 7$. $A=24-7\ln 7$ **u²**.

Ejercicio 4A.6.3 ← volver

1. Intersecciones: la recta $x+y=3$ corta a la circunferencia en $(3,0)$ y $(0,3)$.
2. El segmento pequeño está entre la recta (piso) y el arco $y=\sqrt{9-x^2}$ (techo), para $0\le x\le 3$.
3. $A=\displaystyle\int_0^3\left[\sqrt{9-x^2}-(3-x)\right]dx$.
4. $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ es un cuarto del círculo de radio 3: $\frac{9\pi}{4}$. Además $\int_0^3(3-x)\,dx=\frac{9}{2}$ (un triángulo).
5. $A=\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}=\frac{9}{4}(\pi-2)$ **u²**.

1. Cada componente depende solo de su variable, así que el rotacional es nulo: $\varphi = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$.
2. $\varphi(P) = \frac{1}{3}\left(8 + (\sqrt{2})^3 + 0\right) = \frac{8+2\sqrt{2}}{3}$ y $\varphi(O) = 0$.
3. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \dfrac{8 + 2\sqrt{2}}{3}$.
4. Comprobación directa con $\vec{r}(t) = (t^2, t, 0)$, $0 \le t \le \sqrt{2}$: $\vec{F} \cdot \vec{r}\,' = 2t^5 + t^2$ e $\int_0^{\sqrt{2}} (2t^5 + t^2)\, dt = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. $R_y - Q_z = 1 - 1 = 0$; $-(R_x - P_z) = -(8z^3 - 8z^3) = 0$; $Q_x - P_y = (-2 - 3y^2) - (-3y^2 - 2) = 0$. Es conservativo.
2. $\varphi = \int (-y^3 - 2y + 2z^4)\, dx = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + g(y, z)$.
3. $\varphi_y = -3xy^2 - 2x + g_y = -2x - 3xy^2 + z \Rightarrow g_y = z \Rightarrow g = yz + h(z)$.
4. $\varphi_z = 8xz^3 + y + h'(z) = y + 8xz^3 + 6 \Rightarrow h = 6z$. Entonces $\varphi = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + yz + 6z$.
5. $\varphi(B) = \varphi(1, 0, 1) = 2 + 6 = 8$ y $\varphi(A) = \varphi(-1, 2, 1) = 8 + 4 - 2 + 2 + 6 = 18$.
6. $W = 8 - 18 = -10$.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 4r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr + r \cdot r^3 \cos\theta\, d\theta = 4r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr + r^4 \cos\theta\, d\theta$.
2. $\varphi = \int 4r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr = r^4 \operatorname{sen}\theta + g(\theta)$; $\varphi_\theta = r^4 \cos\theta + g' = r^4 \cos\theta \Rightarrow g' = 0$.
3. $\varphi(B) = 1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ y $\varphi(A) = 0$.
4. $W = 1$.

Ejercicio 3.6.7 ← volver

1. $Q_x - P_y = -1 - 1 = -2 \neq 0$: no es conservativo. Se suma por tramos, con $\vec{F} \cdot d\vec{r} = y\, dx - x\, dy$.
2. De A a B: $y = 0$, $dy = 0$, así que la integral vale 0.
3. De B a C: $\vec{r}(t) = (1 - t,\ t)$, $0 \le t \le 1$; $y\, dx - x\, dy = t(-dt) - (1 - t)\, dt = -dt$, que integra -1.
4. De C a A: $x = 0$, $dx = 0$, así que la integral vale 0.
5. $W = 0 - 1 + 0 = -1$. Con el teorema de Green: $\iint_R (Q_x - P_y)\, dA = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Ejercicio 3.6.8 ← volver

1. $R_y = \dfrac{-2yz}{(y^2 + z^2)^2}$ y $Q_z = \dfrac{-2yz}{(y^2 + z^2)^2}$: componente $\hat{\imath}$ nula.
2. $R_x = 0$ y $P_z = 0$: componente $\hat{\jmath}$ nula.
3. $Q_x = 2\sec^2(x + y)\tan(x + y) = P_y$: componente $\hat{k}$ nula.
4. $\varphi = \int \left(\ln x + \sec^2(x + y)\right) dx = x \ln x - x + \tan(x + y) + g(y, z)$; $\varphi_y = \sec^2(x + y) + g_y \Rightarrow g_y = \frac{y}{y^2 + z^2} \Rightarrow g = \frac{1}{2}\ln(y^2 + z^2) + h(z)$; $\varphi_z = \frac{z}{y^2 + z^2} + h' \Rightarrow h' = 0$. El campo **es conservativo**, con $\varphi = x \ln x - x + \tan(x + y) + \frac{1}{2}\ln(y^2 + z^2)$.
5. $\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{1}{x} + 2\sec^2(x + y)\tan(x + y)\right) + \left(2\sec^2(x + y)\tan(x + y) + \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2}\right) + \frac{y^2 - z^2}{(y^2 + z^2)^2}$.

4. Sombra: disco de radio 1. Circulación $= \frac{3}{2}\pi = \frac{3\pi}{2}$ (sentido antihorario visto desde arriba; en sentido contrario, $-\frac{3\pi}{2}$).

Ejercicio 4B.6.13 ← volver

1. La curva es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $z = 1$.
2. $\nabla \times \vec{F} = \big(0 - 0,\ 0 - 0,\ 1 - 2y\big) = (0, 0, 1 - 2y)$.
3. Superficie: el disco en $z = 1$, con $\hat{n} = \hat{k}$. $\iint_{r \le 1} (1 - 2y)\, dA = \pi - 2\iint y\, dA = \pi - 0$.
4. π (sentido antihorario visto desde arriba).

Ejercicio 4B.6.14 ← volver

1. Con $z = 1$: $x^2 + y^2 = 4$, circunferencia de radio 2 en el plano $z = 1$.
2. $\nabla \times \vec{F} = \big(2xy - x^2,\ 2yz - y^2,\ 2xz - z^2\big)$.
3. Superficie: el disco en $z = 1$, con $\hat{n} = \hat{k}$. Ahí, $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = 2x - 1$.
4. $\iint_{r \le 2} (2x - 1)\, dA = 2 \cdot 0 - 4\pi$.
5. -4π (sentido antihorario visto desde arriba).

Ejercicio 4A.6.4 ← volver

1. $r = e$ es la circunferencia de radio e con centro en el origen; $r = 2e\,\operatorname{sen}\theta$ es la de radio e con centro en $(0, e)$.
2. Intersección: $e = 2e\,\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, así que $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
3. Por simetría respecto al eje Y se calcula la mitad derecha y se duplica. Para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ manda la curva $r = 2e\,\operatorname{sen}\theta$; para $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, la curva $r = e$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{(2e\,\operatorname{sen}\theta)^2}{2}\,d\theta = e^2\int_0^{\pi/6}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = e^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
5. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{e^2}{2}\,d\theta = \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi e^2}{6}$.
6. $A = 2\left[e^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\pi e^2}{6}\right] = e^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **u²**.

Ejercicio 4A.6.5 ← volver

1. Techo $z = 16 - y$, piso $z = 0$, sombra: disco $r \le 2$ (en el disco, $16 - y > 0$).
2. $V = \displaystyle\iint_R (16-y)\,dA = 16\cdot\text{Área} - \iint_R y\,dA$.
3. El disco es simétrico respecto al eje X, así que $\iint_R y\,dA = 0$.
4. $V = 16\cdot 4\pi = 64\pi$ **u³.**

Ejercicio 4A.6.6 ← volver

1. $P = xy \Rightarrow P_y = x$; $Q = x + y \Rightarrow Q_x = 1$. Entonces $Q_x - P_y = 1 - x$.
2. Región: medio anillo, $3 \le r \le 4$, $0 \le \theta \le \pi$.
3. $\displaystyle\iint_R (1-x)\,dA = \text{Área} - \iint_R x\,dA$.
4. Área: $\frac{1}{2}\pi(16-9) = \frac{7\pi}{2}$. El medio anillo es simétrico respecto al eje Y, así que $\iint_R x\,dA = 0$ (en polares, $\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$).
5. $\frac{7\pi}{2}$**.**

Ejercicio 4A.6.7 ← volver

1. $P = y - x \Rightarrow P_y = 1$; $Q = 2x - y \Rightarrow Q_x = 2$. Entonces $Q_x - P_y = 1$: la integral es el área de la región.
2. Intersecciones: $x = x^2 - x \Rightarrow x(x-2) = 0$, así que $x = 0$ y $x = 2$. Entre ellas, la recta $y = x$ está arriba.
3. $\displaystyle A = \int_0^2 \left[x - (x^2 - x)\right]dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = 4 - \frac{8}{3}$.
4. $\frac{4}{3}$**.**

Ejercicio 4A.6.8 ← volver

1. Límites: $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2$.
2. $\displaystyle J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; entonces $\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| = \frac{1}{2}$.

3. $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, de donde $x^2 + y^2 = \frac{(u+v)^2 + (u-v)^2}{4} = \frac{u^2+v^2}{2}$.
4. $\displaystyle\int_0^2\int_0^2 \frac{u^2+v^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_0^2\left(\frac{8}{3} + 2v^2\right)dv = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right)$.
5. $\frac{8}{3}$**.**

E.4B · Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

Ejercicio 4B.6.1 ← volver

1. Esfera, superficie cerrada. $\nabla\cdot\vec{F} = 3 + 2 + 4 = 9$.
2. Radio 5: $V = \frac{4}{3}\pi(125) = \frac{500\pi}{3}$.
3. Flujo $= 9\cdot\frac{500\pi}{3} = 1500\pi$.

Ejercicio 4B.6.2 ← volver

1. Cono más tapa, cerrada. $\nabla\cdot\vec{F} = 3$.
2. Altura 2; en $z = 2$ el radio es 2. $V = \frac{1}{3}\pi(4)(2) = \frac{8\pi}{3}$.
3. Flujo $= 3\cdot\frac{8\pi}{3} = 8\pi$.

Ejercicio 4B.6.3 ← volver

1. $P_x = 2xy^2 + 3$, $Q_y = -2xy^2 + 3$, $R_z = 3$. Entonces $\nabla\cdot\vec{F} = 9$.
2. $V = \pi(2)^2(8) = 32\pi$.
3. Flujo $= 9\cdot 32\pi = 288\pi$.

Ejercicio 4B.6.4 ← volver

1. $P_x = 0$, $Q_y = x^2$, $R_z = y^2$: $\nabla\cdot\vec{F} = x^2 + y^2 = r^2$.
2. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-1}^1 r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{2^4}{4}$.
3. 16π**.**

Ejercicio 4B.6.5 ← volver

1. $P_x = 3x^2$, $Q_y = -3x^2$, $R_z = 1$: $\nabla\cdot\vec{F} = 1$. El flujo es el volumen.
2. Techo $z = 16 - y$, piso $z = 0$, sombra: disco $r \le 2$.
3. $V = \iint_R (16-y)\,dA = 16\cdot 4\pi - \iint_R y\,dA$, y la segunda vale 0 por simetría.
4. Flujo $= 64\pi$.

Ejercicio 4B.6.6 ← volver

1. $P_x = 2x$, $Q_y = -2x$, $R_z = 2z$: $\nabla\cdot\vec{F} = 2z$.
2. Sólido: $r \le z \le 3$, $0 \le r \le 3$.
3. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^3 2z\,r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^3 \left(9 - r^2\right)r\,dr$.
4. $= 2\pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = 2\pi\cdot\frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}$.