Planteamiento. Se buscan t_0, las tres derivadas evaluadas y el producto cruz $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$; con eso se arman todas las fórmulas de 2A.1.

Resolución.

1. $z = 4t = 4\pi \Rightarrow t_0 = \pi$. Comprobación: $3\cos\pi = -3$ y $3\operatorname{sen}\pi = 0$.
2. Derivadas: $\vec{r}\,' = (-3\operatorname{sen} t,\ 3\cos t,\ 4)$, $\vec{r}\,'' = (-3\cos t,\ -3\operatorname{sen} t,\ 0)$ y $\vec{r}\,''' = (3\operatorname{sen} t,\ -3\cos t,\ 0)$.
3. En $t = \pi$: $\vec{r}\,' = (0, -3, 4)$, $\vec{r}\,'' = (3, 0, 0)$ y $\vec{r}\,''' = (0, 3, 0)$.
4. Rapidez: $|\vec{r}\,'| = \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5$ para todo t.
5. a) $s = \displaystyle\int_0^t 5\,du = 5t \Rightarrow t = \frac{s}{5}$, de donde $\vec{r}(s) = \left(3\cos\frac{s}{5},\ 3\operatorname{sen}\frac{s}{5},\ \frac{4s}{5}\right)$.
6. Producto cruz $(0, -3, 4) \times (3, 0, 0)$:
   - $\hat{\imath}$: $(-3)(0) - (4)(0) = 0$;
   - $\hat{\jmath}$: $-[(0)(0) - (4)(3)] = 12$;
   - $\hat{k}$: $(0)(0) - (-3)(3) = 9$. Queda $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (0, 12, 9)$, con norma $\sqrt{144 + 81} = 15$.
7. b) $\hat{T} = \frac{1}{5}(0, -3, 4) = \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $\hat{B} = \frac{1}{15}(0, 12, 9) = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.
8. $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right),\ 0,\ 0\right) = (1, 0, 0)$: apunta hacia el eje z, como debe ser en una hélice.
9. $\kappa = \dfrac{15}{5^3} = \dfrac{3}{25}$ y $\tau = \dfrac{(0, 12, 9)\cdot(0, 3, 0)}{15^2} = \dfrac{36}{225} = \dfrac{4}{25}$.
10. $a_T = \dfrac{(0, -3, 4)\cdot(3, 0, 0)}{5} = 0$ y $a_N = \dfrac{15}{5} = 3$; comprobación: $\kappa|\vec{v}|^2 = \frac{3}{25}\cdot 25 = 3$.
11. Planos en $(-3, 0, 4\pi)$: osculador $12y + 9(z - 4\pi) = 0$, o sea $4y + 3z = 12\pi$; normal $-3y + 4(z - 4\pi) = 0$, o sea $3y - 4z = -16\pi$; rectificante $x = -3$.

Resultado: $\vec{r}(s) = \left(3\cos\frac{s}{5},\ 3\operatorname{sen}\frac{s}{5},\ \frac{4s}{5}\right)$; $\hat{T} = \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\hat{N} = (1, 0, 0)$, $\hat{B} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$; además $\kappa = \frac{3}{25}$ y $\tau = \frac{4}{25}$.

En una hélice la rapidez es constante, así que $a_T = 0$: toda la aceleración es normal y apunta al eje. Por eso $\hat{N}$ es horizontal y dirigido hacia el eje z.

2A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2A.5.1 · Aceleración tangencial y normal

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 2.

Una partícula viaja a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t) = (t-1)\,\hat{\imath} + (t-1)^2\,\hat{\jmath} + \frac{2}{3}(t-1)^3\,\hat{k}$. Determine, en el instante $t = 1$:

- a) los vectores aceleración tangencial y aceleración normal;
- b) la curvatura.

Resolución.

1. $\vec{r}\,' = \left(1,\ 2(t-1),\ 2(t-1)^2\right) \Rightarrow \vec{v} = (1, 0, 0)$, $|\vec{v}| = 1$.
2. $\vec{r}\,'' = \left(0,\ 2,\ 4(t-1)\right) \Rightarrow \vec{a} = (0, 2, 0)$.
3. a) $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \Rightarrow a_T = 0$, así que $\vec{a}_T = \vec{0}$ y $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = (0, 2, 0)$.
4. $\vec{v}\times\vec{a} = (1, 0, 0)\times(0, 2, 0) = (0, 0, 2)$, con norma 2.
5. b) $\kappa = \dfrac{2}{1^3} = 2$.

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cálculo Vectorial

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.3.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«en términos de la longitud de arco», «ha recorrido 40 unidades»	longitud de arco	2A.3.5
la curva está dada como intersección ($x = z$, $x^2 + y^2 = 4$)	parametrizar primero	2A.3.1
«demostrar que la curva es tangente a la superficie», «ángulo entre S y C»	curva y superficie	2A.3.6
«plano tangente y recta normal» a $\vec{R}(s,t)$ o a $F = 0$	normal a una superficie	2A.3.6
«recta tangente a la curva de intersección de dos superficies»	$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$	2A.3.6

2A.3 Procedimientos

2A.3.1 Punto, parámetro y derivadas

1. Si la curva viene como intersección de dos superficies, **parametrízala**. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 4$ y $x = z$ dan $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$.
2. Encuentra t_0: iguala la componente más sencilla de $\vec{r}(t)$ a la coordenada del punto y **comprueba las otras dos**.
3. Deriva **en general**, con t: $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{r}\,''(t)$ y, solo si piden torsión, $\vec{r}\,'''(t)$.
4. **Después** evalúa en t_0. Desde aquí se trabaja con números.

2A.3.2 Triedro, curvatura y torsión

1. Rapidez: $|\vec{r}\,'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.
2. Producto cruz $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ (2A.3.7) y su norma.
3. $\kappa = \dfrac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}$, con el denominador **al cubo**.
4. $\hat{T} = \dfrac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$ y $\hat{B} = \dfrac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}$.
5. $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$, en **ese orden**. Comprueba que $|\hat{N}| = 1$ y $\hat{N} \cdot \hat{T} = 0$.
6. $\tau = \dfrac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2}$, con el denominador **al cuadrado** y **sin valor absoluto** en el numerador.

2A.3.3 Aceleración tangencial y normal

1. $\vec{v} = \vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{a} = \vec{r}\,''(t_0)$ y $|\vec{v}|$.
2. $a_T = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|}$ (es solo un producto punto).
3. $\vec{a}_T = a_T\,\hat{T} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$.
4. $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$. Comprueba: $|\vec{a}_N| = \dfrac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|}$ y $\vec{a}_N \cdot \vec{v} = 0$.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Vectorial** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o tras varias semanas sin estudiar la materia.

Sigue el orden de los temas del programa de la asignatura:

1. Extremos de funciones de dos o más variables.
2. Funciones vectoriales. Por su tamaño se divide en dos partes: A (curvas y triedro móvil) y B (coordenadas curvilíneas y operadores).
3. Integrales de línea.
4. Integrales múltiples. También en dos partes: A (integrales dobles y teorema de Green) y B (integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa). El alumno conocerá los criterios para optimizar funciones de dos o más variables, analizará funciones vectoriales y calculará integrales de línea e integrales múltiples para resolver problemas físicos y geométricos.

De dónde salen los ejercicios.

- Se resolvieron y verificaron los problemas de **11 exámenes extraordinarios (2018-1 a 2026-1)** y de **24 exámenes finales (2016-1 a 2025-2)**.
- Algunos ejercicios propuestos provienen de la *Guía de estudio para presentar examen extraordinario de Cálculo Vectorial* (1986); la referencia completa está en el Apéndice D.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó.
- Las resoluciones son propias. Cuando el valor obtenido no coincide con el de una resolución publicada, la diferencia se anota en el Apéndice C (Fe de erratas).

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos.**
7. **Ejercicios propuestos**, solo con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Ruta de 5 semanas (unas 12 horas por semana).

Longitud de arco. La longitud recorrida desde t_0 es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(u)|\,du$$

Si se despeja $t(s)$ y se sustituye en $\vec{r}$, la curva queda **parametrizada por longitud de arco**. Con ese parámetro, $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ y el vector tangente unitario es simplemente $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$.

Triedro móvil. En cada punto de la curva hay tres vectores unitarios, perpendiculares entre sí:

Vector	Expresión	Significado
Tangente $\hat{T}$	$\dfrac{\vec{r}\,'}{\lvert\vec{r}\,'\rvert}$	hacia dónde va la curva
Binormal $\hat{B}$	$\dfrac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert}$	perpendicular al plano en el que la curva se dobla
Normal principal $\hat{N}$	$\hat{B}\times\hat{T}$	hacia dónde se dobla la curva

Curvatura y torsión.

$$\kappa = \frac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}, \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}, \qquad \tau = \frac{(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')\cdot\vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|^2}$$

- La **curvatura** $\kappa \geq 0$ mide cuánto se dobla la curva. Una recta tiene $\kappa = 0$.
- ρ es el **radio de curvatura**. La **circunferencia de curvatura** (círculo osculador) tiene radio ρ y centro $C = \vec{r}(t_0) + \rho\,\hat{N}$, y está en el plano osculador.
- La **torsión** τ mide cuánto se sale la curva de su plano. **Lleva signo**: puede ser negativa. Una curva plana tiene $\tau = 0$.

Fórmulas de Frenet-Serret (derivadas respecto a la longitud de arco):

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\,\hat{N}, \qquad \frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\,\hat{T} + \tau\,\hat{B}, \qquad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\,\hat{N}$$

Planos del triedro en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$: $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$, con

Plano	Vector normal $\vec{n}$	Contiene a
Osculador	$\hat{B}$ o $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''$	$\hat{T}$ y $\hat{N}$
Normal	$\hat{T}$ o $\vec{r}\,'$	$\hat{N}$ y $\hat{B}$
Rectificante	$\hat{N}$	$\hat{T}$ y $\hat{B}$

Componentes tangencial y normal de la aceleración. La aceleración se descompone en el plano osculador como $\vec{a} = a_T\,\hat{T} + a_N\,\hat{N}$, con

$$a_T = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|}, \qquad a_N = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|} = \kappa\,|\vec{v}|^2$$

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

> **Instrucciones de emergencia**
>
> - **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
> - **Para qué:** decidir dónde invertir el tiempo. No todos los temas valen lo mismo.

0.1 Cómo es el examen

Según los extraordinarios de 2018 a 2026 y los finales de 2016 a 2025:

- **Duración:** 2 horas.
- **Problemas:** 6 (algunos exámenes traen 5), de 15 a 20 puntos cada uno, 100 en total.
- **Material:** ninguno. Las instrucciones dicen: «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno, ni formulario». Sin calculadora, los resultados se dejan **exactos**: $\sqrt[3]{15/\pi}$, $\frac{8\sqrt{14}}{147}$, 72π. No hace falta sacar decimales.
- **Orden casi fijo:** el problema 1 es de extremos; el 2 y el 3, de curvas y de coordenadas curvilíneas; el 4, de integrales de línea; el 5 y el 6, de integrales múltiples, flujo o Stokes.
- **Resoluciones publicadas:** escriben los vectores con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ o como ternas (a, b, c), plantean la fórmula general antes de sustituir y recuadran el resultado. Conviene escribir igual.

0.2 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en 35 exámenes distintos: 11 extraordinarios (2018-1 a 2026-1) y 24 finales (2016-1 a 2025-2). Los exámenes repetidos se cuentan una sola vez.

Unidad	Tema	Extraordinarios	Finales	Total
1	Extremos: Hessiano, Lagrange, problemas aplicados	**11 de 11**	24 de 24	**35 de 35**
3	Integrales de línea: trabajo, $\int_C f\,ds$, campo conservativo y función potencial	**11 de 11**	24 de 24	**35 de 35**
2, Parte B	Coordenadas curvilíneas (h, $\hat{e}$, jacobiano) y operadores (gradiente, divergencia, rotacional)	**11 de 11**	22 de 24	**33 de 35**
4, Parte B	Flujo y teorema de Gauss, teorema de Stokes, integrales de superficie y triples	**11 de 11** (flujo en 9, Stokes en 3)	22 de 24	**33 de 35**
2, Parte A	Curvas: $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, curvatura, torsión, a_T y a_N, tangencia	9 de 11	23 de 24	**32 de 35**

1.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe qué tipo de problema es: libre (2 o 3 variables), Lagrange, aplicado o región cerrada.
2. Para un aplicado: dibujo, variables, función objetivo y restricción, **antes** de derivar.
3. Las derivadas en general, luego igualadas a cero.
4. Factoriza y anota todos los puntos.
5. D (o $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$) en general y luego en cada punto.
6. La tabla final: punto · criterio · tipo · valor de f, con el resultado exacto recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe la función objetivo y la restricción, el sistema $\nabla f = \vec{0}$ (o $\nabla f = \lambda \nabla g$) y el criterio de clasificación. El planteamiento correcto también cuenta.

2. Empieza por el problema que reconozcas mejor, normalmente el de extremos o el de coordenadas curvilíneas.
3. Escribe la fórmula general **antes** de sustituir: $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$, $\kappa = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$, $\oiint \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV$.
4. Cada inciso se califica por separado. Plantea y sustituye aunque el inciso anterior no haya salido.
5. Deja los resultados exactos y recuadrados.
6. Reserva 10 minutos al final para revisar signos, $(-n)^2$ y raíces.

0.5 Formulario de emergencia

El formulario completo de todas las unidades está en el **Apéndice A**. Como en el examen no se permite formulario, conviene escribirlo de memoria, desde cero, unos minutos cada día.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 1.

Para $f(x,y) = \frac{2}{3}y^3 - x^2 - 8y + x$, determine los puntos críticos y su naturaleza.

Resultado: máximo relativo en $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, con $f = \frac{131}{12}$; punto silla en $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y) = x^4 - y^2 - x^2 + 5y - 2$.

Resultado: máximo relativo en $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, con $f = \frac{17}{4}$; puntos silla en $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-2, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y) = (x^2 + y^2)\,e^{-x}$.

Resultado: mínimo relativo en $(0,0)$, con $f = 0$; punto silla en $(2,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.5

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y,z) = \frac{3}{2}x^3 + 2y^2 - z^2 + \frac{9}{2}x^2 - 4y + 2z + 9$.

Resultado: $(0,1,1)$ y $(-2,1,1)$ son **ambos puntos silla**, con $f = 8$ y $f = 14$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.6

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 1.

Para $f(x,y,z) = (y+1)^2 - (x^2-4)^2 + z^2$, determine los puntos críticos y su naturaleza.

Resultado: mínimo relativo en $(0,-1,0)$, con $f = -16$; puntos silla en $(\pm 2,-1,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.7

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 1.

Una caja en forma de paralelepípedo rectangular está inscrita en la región limitada por el elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ (con $z \geq 0$) y el plano XY. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo.

Resultado: base de $\frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3}$, altura $\sqrt{3}$; $V_{max} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Condición en el punto crítico	Conclusión
$D = 0$	el criterio no decide

Criterio de la segunda derivada (tres variables). Se arma la **matriz hessiana** y se calculan sus menores principales:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = f_{xx}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \det H$$

Signos de $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$	Conclusión
$(+,+,+)$	mínimo relativo
$(-,+,-)$	máximo relativo
cualquier otro patrón, con $\Delta_3 \neq 0$	punto silla

Si la tercera fila y la tercera columna de H solo tienen ceros fuera de la diagonal, entonces $\Delta_3 = f_{zz}\,\Delta_2$.

Extremos con restricción: multiplicadores de Lagrange. Para hallar los extremos de f sujetos a una restricción $g = c$, en el punto buscado los gradientes son paralelos:

$$\nabla f = \lambda\,\nabla g, \qquad g = c$$

Son $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas (las variables y λ). Es equivalente a buscar los puntos críticos de la función de Lagrange $L = f - \lambda\,(g - c)$. El método da **candidatos**; el máximo y el mínimo se deciden evaluando f en todos ellos.

Extremos absolutos en una región cerrada. Si la región es cerrada y acotada (por ejemplo, $x^2 + 2y^2 \leq 1$), f continua alcanza su máximo y su mínimo absolutos. Los candidatos son:

1. los puntos críticos **interiores** ($\nabla f = \vec{0}$);
2. los extremos sobre la **frontera** (con Lagrange o sustituyendo la ecuación de la frontera).

Problemas aplicados. Se traducen a una **función objetivo** (costo, área, volumen, distancia) y una o varias **restricciones** (el dato fijo). Para minimizar una distancia conviene usar d^2: el punto que minimiza d^2 también minimiza d, y se evita la raíz.

Geometría que se usa.

Cuerpo	Volumen	Superficie
Cilindro	$\pi r^2 h$	pared $2\pi rh$; base y tapa $2\pi r^2$ (abierto: πr^2)
Esfera	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
Cono	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	—
Caja de lados x, y, z	xyz	con tapa $2(xy + xz + yz)$; sin tapa $xy + 2xz + 2yz$

2. Sistema: $y+2=2\lambda x$, $x+2=2\lambda y$, $x^2+y^2=2$.
3. Resta la segunda de la primera: $y-x=-2\lambda(y-x)$, así que $(y-x)(1+2\lambda)=0$.
4. **Caso $y=x$:** $2x^2=2\Rightarrow x=\pm1$. Candidatos $(1,1)$ y $(-1,-1)$.
5. **Caso $\lambda=-\frac{1}{2}$:** $y+2=-x$, o sea $y=-x-2$. En la restricción: $x^2+(x+2)^2=2\Rightarrow 2(x+1)^2=0$, que da otra vez $(-1,-1)$.
6. $f(1,1)=9$ y $f(-1,-1)=1$.

Resultado: máximo **9** en $(1,1)$; mínimo **1** en $(-1,-1)$.

Ejercicio 1.5.6 · Caja con tapa de material mínimo

Adaptado de: 2º final 2018-1, tipo A, problema 1.

Se desea construir una caja de base rectangular con tapa y volumen de 8 m³. Calcule las dimensiones que emplean la menor cantidad de material.

Planteamiento. Lados x, y, z [m]. Objetivo: $A=2(xy+xz+yz)$. Restricción: $xyz=8$, de donde $z=\frac{8}{xy}$.

Resolución.

1. $A(x,y)=2xy+\dfrac{16}{y}+\dfrac{16}{x}$.
2. $A_x=2y-\dfrac{16}{x^2}=0\Rightarrow x^2y=8$; $A_y=2x-\dfrac{16}{y^2}=0\Rightarrow xy^2=8$.
3. Restando: $xy(x-y)=0$ y, como $x,y>0$, $x=y$. Entonces $x^3=8$, $x=y=2$ y $z=2$.
4. $A_{xx}=\frac{32}{x^3}=4$, $A_{yy}=4$, $A_{xy}=2$: $D=16-4=12>0$ y $A_{xx}>0$, **mínimo**.

Resultado: un cubo de **2 m × 2 m × 2 m**, con 24 m² de material.

Ejercicio 1.5.7 · Tanque con extremos semiesféricos

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 1.

Un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos debe contener 8000 m³ de gas, con la menor cantidad posible de material. ¿Qué radio y qué altura se recomiendan para la parte cilíndrica?

Planteamiento. Radio r y altura h de la parte cilíndrica. Las dos semiesferas forman una esfera completa.

- Restricción: $\pi r^2h+\frac{4}{3}\pi r^3=8000$, de donde $h=\dfrac{8000}{\pi r^2}-\dfrac{4r}{3}$.
- Objetivo: $A=2\pi rh+4\pi r^2$.

Resolución.

1. Sustituye: $A=\dfrac{16\,000}{r}-\dfrac{8}{3}\pi r^2+4\pi r^2=\dfrac{16\,000}{r}+\dfrac{4}{3}\pi r^2$.
2. $A'=-\dfrac{16\,000}{r^2}+\dfrac{8}{3}\pi r=0\Rightarrow r^3=\dfrac{6000}{\pi}$. Como $A''>0$, es mínimo.
3. $h=\dfrac{8000-\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}=\dfrac{8000-8000}{\pi r^2}=0$.

Resultado: $r=\sqrt[3]{6000/\pi}=10\sqrt[3]{6/\pi}\approx 12.4$ m y $h=0$: el tanque de menor material es una **esfera**. El resultado es correcto y así debe escribirse.

2. Arma H en general.
3. Calcula Δ_1, Δ_2 y Δ_3 en cada punto.
4. Clasifica con la tabla de signos de 1.1 y calcula f en cada punto.

1.3.3 Multiplicadores de Lagrange

1. Escribe la restricción como $g=c$ y calcula ∇f y ∇g.
2. Plantea $\nabla f=\lambda\nabla g$ **componente por componente** y agrega $g=c$.
3. Pasa todo a un lado y factoriza: $2z=2\lambda z\Rightarrow 2z(1-\lambda)=0$.
4. **Cada factor nulo es un caso.** No dividas entre una variable: al dividir entre z se pierde el caso $z=0$.
5. Sustituye cada caso en la restricción. Si sale una contradicción ($0=4$), el caso se descarta. Al sacar raíz, usa $\pm$.
6. Evalúa f en todos los candidatos: el mayor valor es el máximo y el menor, el mínimo.

1.3.4 Problema aplicado (tanque, caja, lata)

1. **Dibuja** la figura y nombra las variables (r, h o x, y, z). En una caja inscrita con simetría, el vértice es (x,y,z) y los lados son $2x$, $2y$ y z.
2. Escribe la **función objetivo** y la **restricción**.
3. **Despeja** una variable de la restricción y **sustituye** en la función objetivo.
4. Deriva, iguala a cero y resuelve. Si quedan dos variables, sigue 1.3.1; también se puede aplicar Lagrange (1.3.3) sin despejar.
5. Comprueba que el punto es el extremo pedido: segunda derivada, hessiano o un argumento físico (en la frontera el volumen vale cero).
6. Responde **todas** las dimensiones, con unidades, y el valor óptimo si se pide. Déjalas exactas.

1.3.5 Extremos absolutos en una región cerrada

1. Busca los puntos críticos de f en el **interior** de la región.
2. Busca los extremos de f sobre la **frontera** con Lagrange (1.3.3).
3. Evalúa f en todos los candidatos y compara: el mayor valor es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto.

1.3.6 Distancia mínima

1. Función objetivo: $d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$; restricción: la superficie.
2. Aplica Lagrange (1.3.3).
3. Compara d^2 entre los candidatos y da el punto y la distancia $d=\sqrt{d^2}$.

1.4 Ejemplo resuelto

> *Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 1.*
> Se desea construir un tanque cilíndrico con un volumen de 50 m³. El material de la base y la tapa cuesta \$5 por m² y el de la superficie lateral, \$3 por m². Determine las dimensiones que minimizan el costo.
> **Datos:** $V=50$ [m³]; base y tapa: 5 [\$/m²]; pared: 3 [\$/m²].

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados 8

Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie 19

Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano 32

Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial 46

Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green 58

Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss 69

Apéndice A · Formulario 84

Apéndice B · Qué vino en cada examen (2016–2026) 86

Apéndice C · Fe de erratas 90

Apéndice D · Fuentes y bibliografía 91

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 92

2A.3.4 Planos del triedro y circunferencia de curvatura

1. Elige el vector normal del plano con la tabla de 2A.1 (se puede usar cualquier múltiplo: $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ en lugar de $\hat{B}$).
2. Escribe $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$ con el punto de la curva y simplifica.
3. Circunferencia de curvatura: radio $\rho = \frac{1}{\kappa}$ y centro $C = P + \rho\,\hat{N}$.

2A.3.5 Longitud de arco

1. Calcula $|\vec{r}\,'(u)|$ y simplifica (en una hélice sale constante).
2. $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(u)|\,du$, desde el punto donde empieza a medirse.
3. Para reparametrizar, despeja $t(s)$ y sustituye en $\vec{r}$.
4. Para «la posición después de recorrer L unidades», resuelve $s(t) = L$ y evalúa $\vec{r}(t)$.

2A.3.6 Curva y superficie

1. Vector normal de la superficie en el punto: $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m$ o $\vec{N} = \nabla F$.
2. **Tangencia:** comprueba que el punto está en la curva y en la superficie, y que $\vec{r}\,'(t_0)\cdot\vec{N} = 0$.
3. **Ángulo:** $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{|\vec{r}\,' \cdot \vec{N}|}{|\vec{r}\,'|\,|\vec{N}|}$. Si el producto punto vale cero, el ángulo es 0: la curva es tangente.
4. **Plano tangente y recta normal:** con $\vec{N}$ y el punto (2A.1).
5. **Recta tangente a una intersección:** $\vec{N}_1 = \nabla F_1(P)$, $\vec{N}_2 = \nabla F_2(P)$, dirección $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$; simplifica la dirección dividiendo entre un factor común.

2A.3.7 Producto cruz

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \big(a_2b_3 - a_3b_2,\ -(a_1b_3 - a_3b_1),\ a_1b_2 - a_2b_1\big)$$

1. Componente $\hat{\imath}$: tapa la primera columna y calcula $a_2b_3 - a_3b_2$.
2. Componente $\hat{\jmath}$: tapa la segunda columna, calcula $a_1b_3 - a_3b_1$ y **cámbiale el signo**.
3. Componente $\hat{k}$: tapa la tercera columna y calcula $a_1b_2 - a_2b_1$.
4. Comprueba: el resultado multiplicado (punto) por $\vec{a}$ y por $\vec{b}$ da cero.
5. $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$; en orden contrario cambia el signo.

2A.4 Ejemplo resuelto

> *Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 2.*
> Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\hat{\imath} + 3\operatorname{sen} t\,\hat{\jmath} + 4t\,\hat{k}$.
> - a) Obtenga la ecuación vectorial de C en términos de su longitud de arco s.
> - b) Determine los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$ en el punto $(-3, 0, 4\pi)$.
>
> Como práctica se calculan también κ, τ, a_T, a_N y los tres planos.
> **Datos:** hélice de radio 3 y paso 8π; punto $P(-3, 0, 4\pi)$.

- **Cada día:** 2 bloques de 90 minutos, de dos unidades distintas, y 30 minutos de cierre. En el cierre se anotan los errores del día y se elige el primer ejercicio del día siguiente.
- **Cada sábado:** un examen completo de 2 horas, cronometrado, sin consultar y sin calculadora, y la revisión con las resoluciones.

Semana	Unidades
1	1 (extremos) y 2 Parte B (coordenadas curvilíneas)
2	3 (integrales de línea) y 4 Parte B (flujo y teorema de Gauss)
3	2 Parte A (curvas) y 4 Parte A (integrales dobles y Green)
4	4 Parte B (Stokes e integrales de superficie) y repaso de errores
5	Exámenes completos y Apéndice A de memoria

El orden va de lo que más puntos da por hora de estudio a lo que menos (véase la Unidad 0).

Ruta de 2 semanas.

- Unidades 1, 2 Parte B, 3 y el flujo con el teorema de Gauss de la 4 Parte B, con sus ejercicios de examen.
- Un examen completo cada 3 días.
- Formulario del Apéndice A todos los días, de memoria: en el examen no se permite formulario.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

- a_T cambia la **rapidez**: si es negativa, la partícula frena.
- $a_N \geq 0$ cambia la **dirección**: es la parte que hace girar.
- Como vectores: $\vec{a}_T = a_T\,\hat{T}$ y $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$.

Vector normal a una superficie.

- Superficie dada por su ecuación vectorial $\vec{R}(p, m)$: $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m$.
- Superficie dada por $F(x, y, z) = 0$: $\vec{N} = \nabla F$.
- **Plano tangente** en P: $\vec{N} \cdot (X - P) = 0$. **Recta normal:** $\dfrac{x - x_0}{N_1} = \dfrac{y - y_0}{N_2} = \dfrac{z - z_0}{N_3}$.
- Una curva que pasa por P es **tangente** a la superficie en P si $\vec{r}\,'(t_0) \cdot \vec{N} = 0$.
- **Ángulo entre una curva y una superficie:** es el complemento del ángulo entre $\vec{r}\,'$ y la normal, así que se usa el seno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{r}\,' \cdot \vec{N}|}{|\vec{r}\,'|\,|\vec{N}|}$$

- **Curva de intersección de dos superficies:** su dirección tangente en P es $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

Derivadas que se usan.

Función	Derivada
$\operatorname{sen}(at)$	$a\cos(at)$
$\cos(at)$	$-a\operatorname{sen}(at)$, con signo menos
$\cosh t$	$\operatorname{senh} t$, sin signo menos
$\operatorname{senh} t$	$\cosh t$
e^{at}	$a\,e^{at}$
$\ln(t^2)$	$\dfrac{2}{t}$
$\dfrac{1}{2t} = \dfrac{1}{2}t^{-1}$	$-\dfrac{1}{2t^2}$

Valores: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$; $\cosh 0 = 1$, $\operatorname{senh} 0 = 0$.

2A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«vectores $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$», «triedro móvil» en un punto	triedro	2A.3.1 y 2A.3.2
«curvatura», «radio de curvatura», «torsión»	κ, ρ, τ	2A.3.2
«partícula», «aceleración tangencial y normal»	componentes de la aceleración	2A.3.3
«plano osculador», «normal», «rectificante», «centro de la circunferencia de curvatura»	planos del triedro	2A.3.4

Unidad	Tema	Extraordinarios	Finales	Total
4, Parte A	Integrales dobles: áreas, volúmenes, cambio de variable, teorema de Green	5 de 11	14 de 24	**19 de 35**

Observaciones:

- Casi todo examen tiene **un problema de cada unidad** y dos de la Unidad 4. Ningún tema se puede dar por perdido, pero sí se puede elegir por dónde empezar.
- Los extraordinarios cargan más en **flujo con el teorema de Gauss** y en trabajo en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas. Los finales, en integrales dobles y en curvas.
- **Los problemas se reciclan.** El 1er extraordinario 2024-2 y el 1er extraordinario 2025-1 son idénticos. El 3er extraordinario 2024-1 y el 2º final 2024-1 se aplicaron el mismo día y comparten cuatro de sus seis problemas. El 2º extraordinario 2018-2 es el 2º final 2018-2. Las versiones A y B del 1er final 2018-1 traen los mismos problemas en otro orden. Resolver exámenes anteriores es la mejor preparación.

0.3 Orden de estudio por puntos

1. **Unidad 1** (extremos) y **Unidad 3** (integrales de línea): salen siempre y son mecánicas.
2. **Unidad 2, Parte B** (coordenadas curvilíneas): en los exámenes recientes las transformaciones son lineales y todo se reduce a aritmética.
3. **Unidad 4, Parte B**, solo el flujo con el teorema de Gauss: casi siempre la divergencia es una constante y el flujo es esa constante por un volumen conocido.
4. **Unidad 2, Parte A** (curvas): siempre la misma receta de tres derivadas y un producto cruz.
5. **Unidad 4, Parte A** (integrales dobles y Green) y el resto de la **Parte B** (Stokes, integrales de superficie).

Si el tiempo no alcanza, se recorta en este orden:

1. Las integrales de superficie directas y el área de una superficie.
2. El teorema de Stokes.
3. El teorema de Green y el cambio de variable en integrales dobles.

No conviene recortar:

- el Hessiano, Lagrange y los problemas aplicados;
- los factores de escala, los vectores base y el jacobiano;
- el trabajo y la función potencial;
- el flujo con el teorema de Gauss;
- la curvatura y el triedro $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$.

0.4 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 min) y **reparte el tiempo según la puntuación**: unos 18 minutos por problema.

Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie

↑ Volver al índice

> **Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno utilizará e interpretará las variaciones de una función vectorial de variable vectorial y las aplicará para resolver problemas físicos y geométricos en el sistema de referencia más conveniente.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 32 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 2 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2A.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 2A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2A.5 con cronómetro (15 min cada uno).

2A.1 Conceptos y expresiones

Funciones vectoriales. Una **función vectorial de variable escalar** asigna a cada valor del parámetro t un vector:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k} = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$$

Cuando $\vec{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula, su extremo describe una **curva** y t suele ser el tiempo. Una **función vectorial de variable vectorial**, como $\vec{R}(p, m)$, depende de dos o más parámetros: con dos parámetros describe una **superficie**. Un **campo vectorial** asigna un vector a cada punto del espacio, por ejemplo $\vec{F}(x, y, z)$.

Derivada. Se deriva **componente por componente**:

$$\vec{r}\,'(t) = \big(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\big)$$

- $\vec{r}\,'(t)$ es tangente a la curva y apunta en el sentido en que crece t.
- En mecánica: velocidad $\vec{v} = \vec{r}\,'$, rapidez $|\vec{v}|$, aceleración $\vec{a} = \vec{r}\,''$.
- Para $\vec{R}(p, m)$ se usan las derivadas parciales $\vec{R}_p$ y $\vec{R}_m$, que son tangentes a la superficie.

Propiedades de la derivada.

- $(\vec{u} + \vec{v})' = \vec{u}\,' + \vec{v}\,'$ y $(f\,\vec{u})' = f'\,\vec{u} + f\,\vec{u}\,'$.
- $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}\,' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$.
- $(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}\,' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}\,'$, sin cambiar el orden de los factores.
- Si $|\vec{r}(t)|$ es constante, entonces $\vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 0$: el vector y su derivada son perpendiculares.

Diferencial. $d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,dt$ es un vector tangente a la curva; su norma $|d\vec{r}| = ds$ es el elemento de longitud de arco. Para una superficie, $d\vec{R} = \vec{R}_p\,dp + \vec{R}_m\,dm$: los vectores $\vec{R}_p$ y $\vec{R}_m$ generan el plano tangente.

Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno determinará los valores extremos de funciones de dos o más variables y resolverá problemas de optimación relacionados con ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 1 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 1.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1.5 con cronómetro (18 min cada uno).

1.1 Conceptos y expresiones

Extremos relativos y absolutos. Sea f una función de dos o más variables.

- f tiene un **máximo relativo** en P_0 si $f(P) \leq f(P_0)$ para todo P cercano a P_0, y un **mínimo relativo** si $f(P) \geq f(P_0)$.
- El extremo es **absoluto** si la desigualdad se cumple en todo el dominio o en toda la región que indica el problema.
- El **punto** es (x_0, y_0); el **valor** extremo es $f(x_0, y_0)$. Los exámenes suelen pedir los dos.

Puntos críticos. Si f tiene un extremo relativo en un punto interior donde existen sus derivadas parciales, entonces todas se anulan:

$$\nabla f = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad f_x = 0,\ f_y = 0\ (,\ f_z = 0)$$

Esta es una condición **necesaria**, no suficiente. Un punto crítico que no es máximo ni mínimo es un **punto silla**: en una dirección la función sube y en otra baja, como $f = x^2 - y^2$ en el origen.

Criterio de la segunda derivada (dos variables). En un punto crítico se calcula el **determinante hessiano**

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Condición en el punto crítico	Conclusión
$D > 0$ y $f_{xx} > 0$	mínimo relativo
$D > 0$ y $f_{xx} < 0$	máximo relativo
$D < 0$	punto silla

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 1.6.8

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.

Use multiplicadores de Lagrange para determinar el punto del paraboloide hiperbólico $z - 4x^2 + 4y^2 - 5 = 0$ más cercano al origen.

Resultado: $\left(0, \pm\frac{\sqrt{78}}{8}, \frac{1}{8}\right)$, a una distancia $\frac{\sqrt{79}}{8}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

1.7 Errores frecuentes

1. **Cuadrado de un negativo:** $(-3)^2 = +9$ y $(-8)^2 = +64$. En $D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ el signo menos de afuera se conserva: $-(-8)^2 = -64$.
2. **Perder la raíz $x = 0$:** en $2x(3x - 4) = 0$ hay dos factores y dos soluciones. Cuenta los factores antes de seguir.
3. **Dividir en lugar de factorizar:** dividir entre x, z o $(y - x)$ elimina el caso en que ese factor vale cero, y con él puede perderse el máximo.
4. **Clasificar con f_{yy}:** con $D > 0$, el tipo lo decide f_{xx}. Si $D < 0$, es silla sin mirar nada más.
5. **Aritmética incompleta:** $6x \cdot 6y = 36xy$, no $6xy$. Al evaluar f se sustituyen **todos** los términos.
6. **Coordenada intrusa:** la segunda coordenada se obtiene con la ecuación ya despejada. Si se usa otra (por ejemplo $y^2 = x$ en lugar de $y = x^2$) pueden aparecer puntos que no son críticos.
7. **Raíz olvidada:** $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$. Se escriben los dos puntos.
8. **Base y tapa:** un tanque cerrado tiene $2\pi r^2$ de base y tapa; uno abierto, πr^2. Se responden el radio **y** la altura.
9. **Caja inscrita:** con simetría, los lados son $2x$ y $2y$, y el volumen es $4xyz$, no xyz.
10. $D = 0$ no significa «no hay extremo», sino que el criterio no decide.

1.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Puntos críticos: $\nabla f = \vec{0}$. Factoriza; no dividas.
- 2 variables: $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ · $D > 0, f_{xx} > 0$ mínimo · $D > 0, f_{xx} < 0$ máximo · $D < 0$ silla · $D = 0$ no decide.
- 3 variables: $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = (+, +, +)$ mínimo · $(-, +, -)$ máximo · otro patrón con $\Delta_3 \neq 0$ silla.
- Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = c$ → casos → evalúa f en todos.
- Región cerrada: puntos críticos interiores + frontera con Lagrange → compara valores.
- Distancia: minimiza d^2.
- Cilindro $V = \pi r^2 h$, pared $2\pi rh$ · esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ · caja con tapa $2(xy + xz + yz)$, sin tapa $xy + 2xz + 2yz$.

Cuerpo	Volumen	Superficie

1.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«naturaleza de los puntos críticos», «extremos relativos» de $f(x,y)$	puntos críticos y hessiano en 2 variables	1.3.1
lo mismo, con $f(x,y,z)$	hessiano en 3 variables	1.3.2
«valores de k que hacen a E mínimo o silla»	hessiano con un parámetro	1.3.1
«sujeta a la restricción», «sobre la circunferencia», «mediante multiplicadores de Lagrange»	Lagrange	1.3.3
«costo $C(x,y)$ = …; minimice» (la función ya está dada)	hessiano en 2 variables	1.3.1
tanque, caja, lata, «menor cantidad de material», «volumen máximo»	problema aplicado	1.3.4
caja «inscrita» en un cono, paraboloide o elipsoide	aplicado con el vértice sobre la superficie	1.3.4
«valores extremos en la región $x^2+2y^2\le 1$»	extremos absolutos en región cerrada	1.3.5
«punto más cercano al origen», «distancia mínima»	Lagrange con d^2	1.3.6

1.3 Procedimientos

1.3.1 Puntos críticos y hessiano en dos variables

1. Calcula f_x y f_y. En la derivada parcial respecto a x, la y se trata como constante: si multiplica a la x se conserva; si va sola, su término se anula.
2. Iguala a cero: $f_x=0$ y $f_y=0$.
3. Despeja la ecuación más sencilla (casi siempre queda $y=\ldots$) y sustitúyela en la otra.
4. Pasa todo a un lado y **factoriza**: $2x(3x-4)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=\frac{4}{3}$. **Cada factor da un punto.**
5. Obtén la otra coordenada con la ecuación ya despejada en el paso 3.
6. Calcula f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} y $D=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$ **en general**.
7. Evalúa D en cada punto y clasifica con la tabla de 1.1. Con $D>0$, el tipo lo decide f_{xx}.
8. Calcula f en cada punto. Resume en una tabla: punto · D · f_{xx} · tipo · valor.

1.3.2 Hessiano en tres variables

1. Resuelve $f_x=0$, $f_y=0$, $f_z=0$, factorizando igual que en 1.3.1.

Ejercicio 1.5.8 · Caja inscrita en un cono

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 1 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Calcule las dimensiones de la caja de mayor volumen que está arriba del plano XY e inscrita en el cono $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 4$.

Planteamiento. Por simetría, el vértice superior de la caja es (x,y,z) con $x,y>0$, sobre el cono; los lados son $2x$, $2y$ y z. Con $s=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$V(x,y)=4xy\,(4-s)$$

Resolución.

1. $V_x=4y\left[(4-s)-\dfrac{x^2}{s}\right]=0$ y $V_y=4x\left[(4-s)-\dfrac{y^2}{s}\right]=0$.
2. Como $x,y>0$: $4-s=\dfrac{x^2}{s}=\dfrac{y^2}{s}$, así que $x=y$ y $s=\sqrt{2}\,x$.
3. $4-\sqrt{2}\,x=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}\,x}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\Rightarrow 4=\dfrac{3x}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
4. $s=\frac{8}{3}$ y $z=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$.
5. En el borde de la región ($x=0$, $y=0$ o $s=4$) el volumen es cero, así que este único punto crítico es el **máximo**.

Resultado: base de $\frac{8\sqrt{2}}{3}\times\frac{8\sqrt{2}}{3}$, altura $\frac{4}{3}$ y $V_{max}=4x^2z=\frac{512}{27}$ u³.

Ejercicio 1.5.9 · Extremos en una región cerrada

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores extremos de $f(x,y)=2x^2+y^2$ en la región $R=\{(x,y)\mid x^2+2y^2\le 1\}$.

Resolución.

1. **Interior:** $f_x=4x=0$ y $f_y=2y=0$ dan $(0,0)$, con $f=0$.
2. **Frontera** $g=x^2+2y^2=1$: $4x=2\lambda x\Rightarrow 2x(2-\lambda)=0$ y $2y=4\lambda y\Rightarrow 2y(1-2\lambda)=0$.
3. Caso $x=0$: $2y^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, con $f=\frac{1}{2}$.
4. Caso $\lambda=2$: $2y(1-4)=0\Rightarrow y=0$ y $x=\pm1$, con $f=2$.
5. Comparación: $0<\frac{1}{2}<2$.

Resultado: mínimo absoluto **0** en $(0,0)$; máximo absoluto **2** en $(\pm1,0)$.

1.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1**.

Ejercicio propuesto 1.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+y^2+2x+4y$.

Resultado: mínimo relativo en $(-1,-2)$, con $f=-\frac{29}{6}$; punto silla en $(-2,-2)$.

Planteamiento. Radio r y altura h, en metros.

- Función objetivo: $C = 5\,(2\pi r^2) + 3\,(2\pi r h) = 10\pi r^2 + 6\pi r h$.
- Restricción: $\pi r^2 h = 50$, de donde $h = \dfrac{50}{\pi r^2}$.

Resolución.

1. Sustituye: $6\pi r \cdot \dfrac{50}{\pi r^2} = \dfrac{300}{r}$, así que $C(r) = 10\pi r^2 + \dfrac{300}{r}$.
2. $C'(r) = 20\pi r - \dfrac{300}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{300}{20\pi} = \dfrac{15}{\pi}$.
3. $C''(r) = 20\pi + \dfrac{600}{r^3} > 0$: es un **mínimo**.
4. $h = \dfrac{50}{\pi r^2} = \dfrac{50\,r}{\pi r^3} = \dfrac{50\,r}{15} = \dfrac{10}{3}\,r$.
5. Costo: como $10\pi r^2 = \dfrac{10\pi r^3}{r} = \dfrac{150}{r}$, queda $C = \dfrac{450}{r}$.

Resultado: $r = \sqrt[3]{15/\pi} \approx 1.68$ m, $h = \frac{10}{3}\sqrt[3]{15/\pi} \approx 5.61$ m y $C_{min} = 450\sqrt[3]{\pi/15} \approx \$267$.

> Como la pared es más barata que la base y la tapa, el tanque óptimo es alto: su altura es $\frac{10}{3}$ de su radio. Con el mismo precio en todo el material saldría $h = 2r$.

1.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1.5.1 · Puntos críticos con una raíz en cero

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x, y) = 2x^3 + 4y^2 - 8xy + 2$.

Resolución.

1. $f_x = 6x^2 - 8y$ y $f_y = 8y - 8x$.
2. $f_y = 0 \Rightarrow y = x$. En $f_x = 0$: $6x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(3x - 4) = 0$, así que $x = 0$ o $x = \frac{4}{3}$.
3. Puntos críticos: $(0, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
4. $f_{xx} = 12x$, $f_{yy} = 8$, $f_{xy} = -8$, de donde $D = 96x - (-8)^2 = 96x - 64$.
5. $(0, 0)$: $D = -64 < 0$, **punto silla**, con $f = 2$.
6. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$: $D = 128 - 64 = 64 > 0$ y $f_{xx} = 16 > 0$, **mínimo relativo**.
7. $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{128}{27} + \frac{192}{27} - \frac{384}{27} + \frac{54}{27} = -\frac{10}{27}$.

Ejercicio 1.5.2 · Costo de producción

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 1.

Los costos de producción de un artículo son $C(x, y) = 2x^3 + y^2 - 6xy + 4y + 100$, donde x son las horas-hombre y y las horas-máquina. Determine las horas que minimizan el costo y el costo mínimo.

Resolución.

1. $C_x = 6x^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = x^2$.
2. $C_y = 2y - 6x + 4 = 0$. Con $y = x^2$: $2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$.
3. Puntos críticos: $(1, 1)$ y $(2, 4)$.

4. $C_{xx} = 12x$, $C_{yy} = 2$, $C_{xy} = -6$, de donde $D = 24x - 36$.
5. $(1, 1)$: $D = -12 < 0$, **punto silla**.
6. $(2, 4)$: $D = 12 > 0$ y $C_{xx} = 24 > 0$, **mínimo**.
7. $C(2, 4) = 16 + 16 - 48 + 16 + 100 = 100$.

Resultado: 2 horas-hombre y 4 horas-máquina, con un costo mínimo de **100**.

Ejercicio 1.5.3 · Función con un parámetro

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 1.

Sea $f(x, y) = kx^2 - 4xy + y^2$. Determine:

- a) las coordenadas de su único punto crítico E;
- b) los valores de k que hacen a E un mínimo;
- c) los valores de k que hacen a E un punto silla.

Resolución.

1. $f_y = -4x + 2y = 0 \Rightarrow y = 2x$. En $f_x = 2kx - 4y = 0$: $2kx - 8x = 2x(k - 4) = 0$.
2. a) Si $k \neq 4$, la única solución es $x = 0$, $y = 0$: **E(0, 0)**.
3. $f_{xx} = 2k$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -4$, de donde $D = 4k - 16$.
4. b) Mínimo: $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, es decir, $k > 4$ (y entonces $2k > 0$). $k > 4$.
5. c) Silla: $D < 0$, es decir, $k < 4$.
6. Con $k = 4$, $D = 0$ y $f = (2x - y)^2$: toda la recta $y = 2x$ es de puntos críticos y E deja de ser único. Ningún valor de k da máximo, porque $D > 0$ obliga a $f_{xx} > 0$.

Ejercicio 1.5.4 · Tres variables

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 1.

Establezca la naturaleza de los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}z^3 - x + y + xy + z - 4$.

Resolución.

1. $f_x = 2x - 1 + y = 0$, $f_y = y + 1 + x = 0$ y $f_z = -z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1$.
2. De $2x + y = 1$ y $x + y = -1$, restando: $x = 2$ y $y = -3$.
3. Puntos críticos: $P_1(2, -3, 1)$ y $P_2(2, -3, -1)$.
4. $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2z \end{pmatrix}$: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2 - 1 = 1$, $\Delta_3 = -2z \cdot \Delta_2 = -2z$.
5. P_1: $\Delta_3 = -2$, signos $(+, +, -)$, **punto silla**; $f(P_1) = 4 + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - 2 - 3 - 6 + 1 - 4 = -\frac{35}{6}$.
6. P_2: $\Delta_3 = 2$, signos $(+, +, +)$, **mínimo relativo**; $f(P_2) = 4 + \frac{9}{2} + \frac{1}{3} - 2 - 3 - 6 - 1 - 4 = -\frac{43}{6}$.

Ejercicio 1.5.5 · Lagrange sobre una circunferencia

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 1.

Obtenga los valores extremos de $f(x, y) = (x + 2)(y + 2)$ sujeta a $x^2 + y^2 = 2$.

Resolución.

1. $\nabla f = (y + 2,\ x + 2)$ y $\nabla g = (2x,\ 2y)$.