Planteamiento. Se buscan t_0, las tres derivadas evaluadas y el producto cruz $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$; con eso se arman todas las fórmulas de 2A.1.

Resolución.

1. $z = 4t = 4\pi \Rightarrow t_0 = \pi$. Comprobación: $3\cos\pi = -3$ y $3\operatorname{sen}\pi = 0$.
2. Derivadas: $\vec{r}\,' = (-3\operatorname{sen} t,\ 3\cos t,\ 4)$, $\vec{r}\,'' = (-3\cos t,\ -3\operatorname{sen} t,\ 0)$ y $\vec{r}\,''' = (3\operatorname{sen} t,\ -3\cos t,\ 0)$.
3. En $t = \pi$: $\vec{r}\,' = (0, -3, 4)$, $\vec{r}\,'' = (3, 0, 0)$ y $\vec{r}\,''' = (0, 3, 0)$.
4. Rapidez: $|\vec{r}\,'| = \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5$ para todo t.
5. a) $s = \displaystyle\int_0^t 5\,du = 5t \Rightarrow t = \frac{s}{5}$, de donde $\vec{r}(s) = \left(3\cos\frac{s}{5},\ 3\operatorname{sen}\frac{s}{5},\ \frac{4s}{5}\right)$.
6. Producto cruz $(0, -3, 4) \times (3, 0, 0)$:
   - $\hat{\imath}$: $(-3)(0) - (4)(0) = 0$;
   - $\hat{\jmath}$: $-[(0)(0) - (4)(3)] = 12$;
   - $\hat{k}$: $(0)(0) - (-3)(3) = 9$. Queda $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (0, 12, 9)$, con norma $\sqrt{144 + 81} = 15$.
7. b) $\hat{T} = \frac{1}{5}(0, -3, 4) = \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $\hat{B} = \frac{1}{15}(0, 12, 9) = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.
8. $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right),\ 0,\ 0\right) = (1, 0, 0)$: apunta hacia el eje z, como debe ser en una hélice.
9. $\kappa = \dfrac{15}{5^3} = \dfrac{3}{25}$ y $\tau = \dfrac{(0, 12, 9)\cdot(0, 3, 0)}{15^2} = \dfrac{36}{225} = \dfrac{4}{25}$.
10. $a_T = \dfrac{(0, -3, 4)\cdot(3, 0, 0)}{5} = 0$ y $a_N = \dfrac{15}{5} = 3$; comprobación: $\kappa|\vec{v}|^2 = \frac{3}{25}\cdot 25 = 3$.
11. Planos en $(-3, 0, 4\pi)$: osculador $12y + 9(z - 4\pi) = 0$, o sea $4y + 3z = 12\pi$; normal $-3y + 4(z - 4\pi) = 0$, o sea $3y - 4z = -16\pi$; rectificante $x = -3$.

Resultado: $\vec{r}(s) = \left(3\cos\frac{s}{5},\ 3\operatorname{sen}\frac{s}{5},\ \frac{4s}{5}\right)$; $\hat{T} = \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\hat{N} = (1, 0, 0)$, $\hat{B} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$; además $\kappa = \frac{3}{25}$ y $\tau = \frac{4}{25}$.

En una hélice la rapidez es constante, así que $a_T = 0$: toda la aceleración es normal y apunta al eje. Por eso $\hat{N}$ es horizontal y dirigido hacia el eje z.

2A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2A.5.1 · Aceleración tangencial y normal

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 2.

Una partícula viaja a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t) = (t-1)\,\hat{\imath} + (t-1)^2\,\hat{\jmath} + \frac{2}{3}(t-1)^3\,\hat{k}$. Determine, en el instante $t = 1$:

- a) los vectores aceleración tangencial y aceleración normal;
- b) la curvatura.

Resolución.

1. $\vec{r}\,' = \left(1,\ 2(t-1),\ 2(t-1)^2\right) \Rightarrow \vec{v} = (1, 0, 0)$, $|\vec{v}| = 1$.
2. $\vec{r}\,'' = \left(0,\ 2,\ 4(t-1)\right) \Rightarrow \vec{a} = (0, 2, 0)$.
3. a) $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \Rightarrow a_T = 0$, así que $\vec{a}_T = \vec{0}$ y $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = (0, 2, 0)$.
4. $\vec{v}\times\vec{a} = (1, 0, 0)\times(0, 2, 0) = (0, 0, 2)$, con norma 2.
5. b) $\kappa = \dfrac{2}{1^3} = 2$.

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cálculo Vectorial

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.3.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados 8

Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie 19

Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano 32

Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial 46

Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green 58

Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss 69

Apéndice A · Formulario 84

Apéndice B · Qué vino en cada examen (2016–2026) 86

Apéndice C · Fe de erratas 90

Apéndice D · Fuentes y bibliografía 91

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 92

2A.3.4 Planos del triedro y circunferencia de curvatura

1. Elige el vector normal del plano con la tabla de 2A.1 (se puede usar cualquier múltiplo: $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ en lugar de $\hat{B}$).
2. Escribe $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$ con el punto de la curva y simplifica.
3. Circunferencia de curvatura: radio $\rho = \frac{1}{\kappa}$ y centro $C = P + \rho\,\hat{N}$.

2A.3.5 Longitud de arco

1. Calcula $|\vec{r}\,'(u)|$ y simplifica (en una hélice sale constante).
2. $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(u)|\,du$, desde el punto donde empieza a medirse.
3. Para reparametrizar, despeja $t(s)$ y sustituye en $\vec{r}$.
4. Para «la posición después de recorrer L unidades», resuelve $s(t) = L$ y evalúa $\vec{r}(t)$.

2A.3.6 Curva y superficie

1. Vector normal de la superficie en el punto: $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m$ o $\vec{N} = \nabla F$.
2. **Tangencia:** comprueba que el punto está en la curva y en la superficie, y que $\vec{r}\,'(t_0)\cdot\vec{N} = 0$.
3. **Ángulo:** $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{|\vec{r}\,' \cdot \vec{N}|}{|\vec{r}\,'|\,|\vec{N}|}$. Si el producto punto vale cero, el ángulo es 0: la curva es tangente.
4. **Plano tangente y recta normal:** con $\vec{N}$ y el punto (2A.1).
5. **Recta tangente a una intersección:** $\vec{N}_1 = \nabla F_1(P)$, $\vec{N}_2 = \nabla F_2(P)$, dirección $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$; simplifica la dirección dividiendo entre un factor común.

2A.3.7 Producto cruz

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \big(a_2b_3 - a_3b_2,\ -(a_1b_3 - a_3b_1),\ a_1b_2 - a_2b_1\big)$$

1. Componente $\hat{\imath}$: tapa la primera columna y calcula $a_2b_3 - a_3b_2$.
2. Componente $\hat{\jmath}$: tapa la segunda columna, calcula $a_1b_3 - a_3b_1$ y **cámbiale el signo**.
3. Componente $\hat{k}$: tapa la tercera columna y calcula $a_1b_2 - a_2b_1$.
4. Comprueba: el resultado multiplicado (punto) por $\vec{a}$ y por $\vec{b}$ da cero.
5. $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$; en orden contrario cambia el signo.

2A.4 Ejemplo resuelto

> *Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 2.*
> Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\hat{\imath} + 3\operatorname{sen} t\,\hat{\jmath} + 4t\,\hat{k}$.
> - a) Obtenga la ecuación vectorial de C en términos de su longitud de arco s.
> - b) Determine los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$ en el punto $(-3, 0, 4\pi)$.
>
> Como práctica se calculan también κ, τ, a_T, a_N y los tres planos.
> **Datos:** hélice de radio 3 y paso 8π; punto $P(-3, 0, 4\pi)$.

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«en términos de la longitud de arco», «ha recorrido 40 unidades»	longitud de arco	2A.3.5
la curva está dada como intersección ($x = z$, $x^2 + y^2 = 4$)	parametrizar primero	2A.3.1
«demostrar que la curva es tangente a la superficie», «ángulo entre S y C»	curva y superficie	2A.3.6
«plano tangente y recta normal» a $\vec{R}(s,t)$ o a $F = 0$	normal a una superficie	2A.3.6
«recta tangente a la curva de intersección de dos superficies»	$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$	2A.3.6

2A.3 Procedimientos

2A.3.1 Punto, parámetro y derivadas

1. Si la curva viene como intersección de dos superficies, **parametrízala**. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 4$ y $x = z$ dan $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$.
2. Encuentra t_0: iguala la componente más sencilla de $\vec{r}(t)$ a la coordenada del punto y **comprueba las otras dos**.
3. Deriva **en general**, con t: $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{r}\,''(t)$ y, solo si piden torsión, $\vec{r}\,'''(t)$.
4. **Después** evalúa en t_0. Desde aquí se trabaja con números.

2A.3.2 Triedro, curvatura y torsión

1. Rapidez: $|\vec{r}\,'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.
2. Producto cruz $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ (2A.3.7) y su norma.
3. $\kappa = \dfrac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}$, con el denominador **al cubo**.
4. $\hat{T} = \dfrac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$ y $\hat{B} = \dfrac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}$.
5. $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$, en **ese orden**. Comprueba que $|\hat{N}| = 1$ y $\hat{N} \cdot \hat{T} = 0$.
6. $\tau = \dfrac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2}$, con el denominador **al cuadrado** y **sin valor absoluto** en el numerador.

2A.3.3 Aceleración tangencial y normal

1. $\vec{v} = \vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{a} = \vec{r}\,''(t_0)$ y $|\vec{v}|$.
2. $a_T = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|}$ (es solo un producto punto).
3. $\vec{a}_T = a_T\,\hat{T} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$.
4. $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$. Comprueba: $|\vec{a}_N| = \dfrac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|}$ y $\vec{a}_N \cdot \vec{v} = 0$.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Vectorial** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o tras varias semanas sin estudiar la materia.

Sigue el orden de los temas del programa de la asignatura:

1. Extremos de funciones de dos o más variables.
2. Funciones vectoriales. Por su tamaño se divide en dos partes: A (curvas y triedro móvil) y B (coordenadas curvilíneas y operadores).
3. Integrales de línea.
4. Integrales múltiples. También en dos partes: A (integrales dobles y teorema de Green) y B (integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa). El alumno conocerá los criterios para optimizar funciones de dos o más variables, analizará funciones vectoriales y calculará integrales de línea e integrales múltiples para resolver problemas físicos y geométricos.

De dónde salen los ejercicios.

- Se resolvieron y verificaron los problemas de **11 exámenes extraordinarios (2018-1 a 2026-1)** y de **24 exámenes finales (2016-1 a 2025-2)**.
- Algunos ejercicios propuestos provienen de la *Guía de estudio para presentar examen extraordinario de Cálculo Vectorial* (1986); la referencia completa está en el Apéndice D.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó.
- Las resoluciones son propias. Cuando el valor obtenido no coincide con el de una resolución publicada, la diferencia se anota en el Apéndice C (Fe de erratas).

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos.**
7. **Ejercicios propuestos**, solo con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Ruta de 5 semanas (unas 12 horas por semana).

- **Cada día:** 2 bloques de 90 minutos, de dos unidades distintas, y 30 minutos de cierre. En el cierre se anotan los errores del día y se elige el primer ejercicio del día siguiente.
- **Cada sábado:** un examen completo de 2 horas, cronometrado, sin consultar y sin calculadora, y la revisión con las resoluciones.

Semana	Unidades
1	1 (extremos) y 2 Parte B (coordenadas curvilíneas)
2	3 (integrales de línea) y 4 Parte B (flujo y teorema de Gauss)
3	2 Parte A (curvas) y 4 Parte A (integrales dobles y Green)
4	4 Parte B (Stokes e integrales de superficie) y repaso de errores
5	Exámenes completos y Apéndice A de memoria

El orden va de lo que más puntos da por hora de estudio a lo que menos (véase la Unidad 0).

Ruta de 2 semanas.

- Unidades 1, 2 Parte B, 3 y el flujo con el teorema de Gauss de la 4 Parte B, con sus ejercicios de examen.
- Un examen completo cada 3 días.
- Formulario del Apéndice A todos los días, de memoria: en el examen no se permite formulario.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

- a_T cambia la **rapidez**: si es negativa, la partícula frena.
- $a_N \geq 0$ cambia la **dirección**: es la parte que hace girar.
- Como vectores: $\vec{a}_T = a_T\,\hat{T}$ y $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$.

Vector normal a una superficie.

- Superficie dada por su ecuación vectorial $\vec{R}(p, m)$: $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m$.
- Superficie dada por $F(x, y, z) = 0$: $\vec{N} = \nabla F$.
- **Plano tangente** en P: $\vec{N} \cdot (X - P) = 0$. **Recta normal:** $\dfrac{x - x_0}{N_1} = \dfrac{y - y_0}{N_2} = \dfrac{z - z_0}{N_3}$.
- Una curva que pasa por P es **tangente** a la superficie en P si $\vec{r}\,'(t_0) \cdot \vec{N} = 0$.
- **Ángulo entre una curva y una superficie:** es el complemento del ángulo entre $\vec{r}\,'$ y la normal, así que se usa el seno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{r}\,' \cdot \vec{N}|}{|\vec{r}\,'|\,|\vec{N}|}$$

- **Curva de intersección de dos superficies:** su dirección tangente en P es $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

Derivadas que se usan.

Función	Derivada
$\operatorname{sen}(at)$	$a\cos(at)$
$\cos(at)$	$-a\operatorname{sen}(at)$, con signo menos
$\cosh t$	$\operatorname{senh} t$, sin signo menos
$\operatorname{senh} t$	$\cosh t$
e^{at}	$a\,e^{at}$
$\ln(t^2)$	$\dfrac{2}{t}$
$\dfrac{1}{2t} = \dfrac{1}{2}t^{-1}$	$-\dfrac{1}{2t^2}$

Valores: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$; $\cosh 0 = 1$, $\operatorname{senh} 0 = 0$.

2A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«vectores $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$», «triedro móvil» en un punto	triedro	2A.3.1 y 2A.3.2
«curvatura», «radio de curvatura», «torsión»	κ, ρ, τ	2A.3.2
«partícula», «aceleración tangencial y normal»	componentes de la aceleración	2A.3.3
«plano osculador», «normal», «rectificante», «centro de la circunferencia de curvatura»	planos del triedro	2A.3.4

Longitud de arco. La longitud recorrida desde t_0 es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(u)|\,du$$

Si se despeja $t(s)$ y se sustituye en $\vec{r}$, la curva queda **parametrizada por longitud de arco**. Con ese parámetro, $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ y el vector tangente unitario es simplemente $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$.

Triedro móvil. En cada punto de la curva hay tres vectores unitarios, perpendiculares entre sí:

Vector	Expresión	Significado
Tangente $\hat{T}$	$\dfrac{\vec{r}\,'}{\lvert\vec{r}\,'\rvert}$	hacia dónde va la curva
Binormal $\hat{B}$	$\dfrac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert}$	perpendicular al plano en el que la curva se dobla
Normal principal $\hat{N}$	$\hat{B}\times\hat{T}$	hacia dónde se dobla la curva

Curvatura y torsión.

$$\kappa = \frac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}, \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}, \qquad \tau = \frac{(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')\cdot\vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|^2}$$

- La **curvatura** $\kappa \geq 0$ mide cuánto se dobla la curva. Una recta tiene $\kappa = 0$.
- ρ es el **radio de curvatura**. La **circunferencia de curvatura** (círculo osculador) tiene radio ρ y centro $C = \vec{r}(t_0) + \rho\,\hat{N}$, y está en el plano osculador.
- La **torsión** τ mide cuánto se sale la curva de su plano. **Lleva signo**: puede ser negativa. Una curva plana tiene $\tau = 0$.

Fórmulas de Frenet-Serret (derivadas respecto a la longitud de arco):

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\,\hat{N}, \qquad \frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\,\hat{T} + \tau\,\hat{B}, \qquad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\,\hat{N}$$

Planos del triedro en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$: $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$, con

Plano	Vector normal $\vec{n}$	Contiene a
Osculador	$\hat{B}$ o $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''$	$\hat{T}$ y $\hat{N}$
Normal	$\hat{T}$ o $\vec{r}\,'$	$\hat{N}$ y $\hat{B}$
Rectificante	$\hat{N}$	$\hat{T}$ y $\hat{B}$

Componentes tangencial y normal de la aceleración. La aceleración se descompone en el plano osculador como $\vec{a} = a_T\,\hat{T} + a_N\,\hat{N}$, con

$$a_T = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|}, \qquad a_N = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|} = \kappa\,|\vec{v}|^2$$

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

> **Instrucciones de emergencia**
>
> - **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
> - **Para qué:** decidir dónde invertir el tiempo. No todos los temas valen lo mismo.

0.1 Cómo es el examen

Según los extraordinarios de 2018 a 2026 y los finales de 2016 a 2025:

- **Duración:** 2 horas.
- **Problemas:** 6 (algunos exámenes traen 5), de 15 a 20 puntos cada uno, 100 en total.
- **Material:** ninguno. Las instrucciones dicen: «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno, ni formulario». Sin calculadora, los resultados se dejan **exactos**: $\sqrt[3]{15/\pi}$, $\frac{8\sqrt{14}}{147}$, 72π. No hace falta sacar decimales.
- **Orden casi fijo:** el problema 1 es de extremos; el 2 y el 3, de curvas y de coordenadas curvilíneas; el 4, de integrales de línea; el 5 y el 6, de integrales múltiples, flujo o Stokes.
- **Resoluciones publicadas:** escriben los vectores con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ o como ternas (a, b, c), plantean la fórmula general antes de sustituir y recuadran el resultado. Conviene escribir igual.

0.2 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en 35 exámenes distintos: 11 extraordinarios (2018-1 a 2026-1) y 24 finales (2016-1 a 2025-2). Los exámenes repetidos se cuentan una sola vez.

Unidad	Tema	Extraordinarios	Finales	Total
1	Extremos: Hessiano, Lagrange, problemas aplicados	**11 de 11**	24 de 24	**35 de 35**
3	Integrales de línea: trabajo, $\int_C f\,ds$, campo conservativo y función potencial	**11 de 11**	24 de 24	**35 de 35**
2, Parte B	Coordenadas curvilíneas (h, $\hat{e}$, jacobiano) y operadores (gradiente, divergencia, rotacional)	**11 de 11**	22 de 24	**33 de 35**
4, Parte B	Flujo y teorema de Gauss, teorema de Stokes, integrales de superficie y triples	**11 de 11** (flujo en 9, Stokes en 3)	22 de 24	**33 de 35**
2, Parte A	Curvas: $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, curvatura, torsión, a_T y a_N, tangencia	9 de 11	23 de 24	**32 de 35**

Unidad	Tema	Extraordinarios	Finales	Total
4, Parte A	Integrales dobles: áreas, volúmenes, cambio de variable, teorema de Green	5 de 11	14 de 24	**19 de 35**

Observaciones:

- Casi todo examen tiene **un problema de cada unidad** y dos de la Unidad 4. Ningún tema se puede dar por perdido, pero sí se puede elegir por dónde empezar.
- Los extraordinarios cargan más en **flujo con el teorema de Gauss** y en trabajo en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas. Los finales, en integrales dobles y en curvas.
- **Los problemas se reciclan.** El 1er extraordinario 2024-2 y el 1er extraordinario 2025-1 son idénticos. El 3er extraordinario 2024-1 y el 2º final 2024-1 se aplicaron el mismo día y comparten cuatro de sus seis problemas. El 2º extraordinario 2018-2 es el 2º final 2018-2. Las versiones A y B del 1er final 2018-1 traen los mismos problemas en otro orden. Resolver exámenes anteriores es la mejor preparación.

0.3 Orden de estudio por puntos

1. **Unidad 1** (extremos) y **Unidad 3** (integrales de línea): salen siempre y son mecánicas.
2. **Unidad 2, Parte B** (coordenadas curvilíneas): en los exámenes recientes las transformaciones son lineales y todo se reduce a aritmética.
3. **Unidad 4, Parte B**, solo el flujo con el teorema de Gauss: casi siempre la divergencia es una constante y el flujo es esa constante por un volumen conocido.
4. **Unidad 2, Parte A** (curvas): siempre la misma receta de tres derivadas y un producto cruz.
5. **Unidad 4, Parte A** (integrales dobles y Green) y el resto de la **Parte B** (Stokes, integrales de superficie).

Si el tiempo no alcanza, se recorta en este orden:

1. Las integrales de superficie directas y el área de una superficie.
2. El teorema de Stokes.
3. El teorema de Green y el cambio de variable en integrales dobles.

No conviene recortar:

- el Hessiano, Lagrange y los problemas aplicados;
- los factores de escala, los vectores base y el jacobiano;
- el trabajo y la función potencial;
- el flujo con el teorema de Gauss;
- la curvatura y el triedro $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$.

0.4 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 min) y **reparte el tiempo según la puntuación**: unos 18 minutos por problema.

Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie

↑ Volver al índice

> **Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno utilizará e interpretará las variaciones de una función vectorial de variable vectorial y las aplicará para resolver problemas físicos y geométricos en el sistema de referencia más conveniente.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 32 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 2 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2A.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 2A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2A.5 con cronómetro (15 min cada uno).

2A.1 Conceptos y expresiones

Funciones vectoriales. Una **función vectorial de variable escalar** asigna a cada valor del parámetro t un vector:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k} = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$$

Cuando $\vec{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula, su extremo describe una **curva** y t suele ser el tiempo. Una **función vectorial de variable vectorial**, como $\vec{R}(p, m)$, depende de dos o más parámetros: con dos parámetros describe una **superficie**. Un **campo vectorial** asigna un vector a cada punto del espacio, por ejemplo $\vec{F}(x, y, z)$.

Derivada. Se deriva **componente por componente**:

$$\vec{r}\,'(t) = \big(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\big)$$

- $\vec{r}\,'(t)$ es tangente a la curva y apunta en el sentido en que crece t.
- En mecánica: velocidad $\vec{v} = \vec{r}\,'$, rapidez $|\vec{v}|$, aceleración $\vec{a} = \vec{r}\,''$.
- Para $\vec{R}(p, m)$ se usan las derivadas parciales $\vec{R}_p$ y $\vec{R}_m$, que son tangentes a la superficie.

Propiedades de la derivada.

- $(\vec{u} + \vec{v})' = \vec{u}\,' + \vec{v}\,'$ y $(f\,\vec{u})' = f'\,\vec{u} + f\,\vec{u}\,'$.
- $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}\,' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$.
- $(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}\,' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}\,'$, sin cambiar el orden de los factores.
- Si $|\vec{r}(t)|$ es constante, entonces $\vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 0$: el vector y su derivada son perpendiculares.

Diferencial. $d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,dt$ es un vector tangente a la curva; su norma $|d\vec{r}| = ds$ es el elemento de longitud de arco. Para una superficie, $d\vec{R} = \vec{R}_p\,dp + \vec{R}_m\,dm$: los vectores $\vec{R}_p$ y $\vec{R}_m$ generan el plano tangente.

1.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe qué tipo de problema es: libre (2 o 3 variables), Lagrange, aplicado o región cerrada.
2. Para un aplicado: dibujo, variables, función objetivo y restricción, **antes** de derivar.
3. Las derivadas en general, luego igualadas a cero.
4. Factoriza y anota todos los puntos.
5. D (o $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$) en general y luego en cada punto.
6. La tabla final: punto · criterio · tipo · valor de f, con el resultado exacto recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe la función objetivo y la restricción, el sistema $\nabla f = \vec{0}$ (o $\nabla f = \lambda \nabla g$) y el criterio de clasificación. El planteamiento correcto también cuenta.

2. Empieza por el problema que reconozcas mejor, normalmente el de extremos o el de coordenadas curvilíneas.
3. Escribe la fórmula general **antes** de sustituir: $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$, $\kappa = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$, $\oiint \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV$.
4. Cada inciso se califica por separado. Plantea y sustituye aunque el inciso anterior no haya salido.
5. Deja los resultados exactos y recuadrados.
6. Reserva 10 minutos al final para revisar signos, $(-n)^2$ y raíces.

0.5 Formulario de emergencia

El formulario completo de todas las unidades está en el **Apéndice A**. Como en el examen no se permite formulario, conviene escribirlo de memoria, desde cero, unos minutos cada día.

Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno determinará los valores extremos de funciones de dos o más variables y resolverá problemas de optimación relacionados con ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 1 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 1.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1.5 con cronómetro (18 min cada uno).

1.1 Conceptos y expresiones

Extremos relativos y absolutos. Sea f una función de dos o más variables.

- f tiene un **máximo relativo** en P_0 si $f(P) \leq f(P_0)$ para todo P cercano a P_0, y un **mínimo relativo** si $f(P) \geq f(P_0)$.
- El extremo es **absoluto** si la desigualdad se cumple en todo el dominio o en toda la región que indica el problema.
- El **punto** es (x_0, y_0); el **valor** extremo es $f(x_0, y_0)$. Los exámenes suelen pedir los dos.

Puntos críticos. Si f tiene un extremo relativo en un punto interior donde existen sus derivadas parciales, entonces todas se anulan:

$$\nabla f = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad f_x = 0,\ f_y = 0\ (,\ f_z = 0)$$

Esta es una condición **necesaria**, no suficiente. Un punto crítico que no es máximo ni mínimo es un **punto silla**: en una dirección la función sube y en otra baja, como $f = x^2 - y^2$ en el origen.

Criterio de la segunda derivada (dos variables). En un punto crítico se calcula el **determinante hessiano**

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Condición en el punto crítico	Conclusión
$D > 0$ y $f_{xx} > 0$	mínimo relativo
$D > 0$ y $f_{xx} < 0$	máximo relativo
$D < 0$	punto silla

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 1.6.8

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.

Use multiplicadores de Lagrange para determinar el punto del paraboloide hiperbólico $z - 4x^2 + 4y^2 - 5 = 0$ más cercano al origen.

Resultado: $\left(0, \pm\frac{\sqrt{78}}{8}, \frac{1}{8}\right)$, a una distancia $\frac{\sqrt{79}}{8}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

1.7 Errores frecuentes

1. **Cuadrado de un negativo:** $(-3)^2 = +9$ y $(-8)^2 = +64$. En $D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ el signo menos de afuera se conserva: $-(-8)^2 = -64$.
2. **Perder la raíz $x = 0$:** en $2x(3x - 4) = 0$ hay dos factores y dos soluciones. Cuenta los factores antes de seguir.
3. **Dividir en lugar de factorizar:** dividir entre x, z o $(y - x)$ elimina el caso en que ese factor vale cero, y con él puede perderse el máximo.
4. **Clasificar con f_{yy}:** con $D > 0$, el tipo lo decide f_{xx}. Si $D < 0$, es silla sin mirar nada más.
5. **Aritmética incompleta:** $6x \cdot 6y = 36xy$, no $6xy$. Al evaluar f se sustituyen **todos** los términos.
6. **Coordenada intrusa:** la segunda coordenada se obtiene con la ecuación ya despejada. Si se usa otra (por ejemplo $y^2 = x$ en lugar de $y = x^2$) pueden aparecer puntos que no son críticos.
7. **Raíz olvidada:** $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$. Se escriben los dos puntos.
8. **Base y tapa:** un tanque cerrado tiene $2\pi r^2$ de base y tapa; uno abierto, πr^2. Se responden el radio **y** la altura.
9. **Caja inscrita:** con simetría, los lados son $2x$ y $2y$, y el volumen es $4xyz$, no xyz.
10. $D = 0$ no significa «no hay extremo», sino que el criterio no decide.

1.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Puntos críticos: $\nabla f = \vec{0}$. Factoriza; no dividas.
- 2 variables: $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ · $D > 0, f_{xx} > 0$ mínimo · $D > 0, f_{xx} < 0$ máximo · $D < 0$ silla · $D = 0$ no decide.
- 3 variables: $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = (+, +, +)$ mínimo · $(-, +, -)$ máximo · otro patrón con $\Delta_3 \neq 0$ silla.
- Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = c$ → casos → evalúa f en todos.
- Región cerrada: puntos críticos interiores + frontera con Lagrange → compara valores.
- Distancia: minimiza d^2.
- Cilindro $V = \pi r^2 h$, pared $2\pi rh$ · esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ · caja con tapa $2(xy + xz + yz)$, sin tapa $xy + 2xz + 2yz$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 1.

Para $f(x,y) = \frac{2}{3}y^3 - x^2 - 8y + x$, determine los puntos críticos y su naturaleza.

Resultado: máximo relativo en $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, con $f = \frac{131}{12}$; punto silla en $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y) = x^4 - y^2 - x^2 + 5y - 2$.

Resultado: máximo relativo en $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, con $f = \frac{17}{4}$; puntos silla en $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-2, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y) = (x^2 + y^2)\,e^{-x}$.

Resultado: mínimo relativo en $(0,0)$, con $f = 0$; punto silla en $(2,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.5

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y,z) = \frac{3}{2}x^3 + 2y^2 - z^2 + \frac{9}{2}x^2 - 4y + 2z + 9$.

Resultado: $(0,1,1)$ y $(-2,1,1)$ son **ambos puntos silla**, con $f = 8$ y $f = 14$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.6

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 1.

Para $f(x,y,z) = (y+1)^2 - (x^2-4)^2 + z^2$, determine los puntos críticos y su naturaleza.

Resultado: mínimo relativo en $(0,-1,0)$, con $f = -16$; puntos silla en $(\pm 2,-1,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1.6.7

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 1.

Una caja en forma de paralelepípedo rectangular está inscrita en la región limitada por el elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ (con $z \geq 0$) y el plano XY. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo.

Resultado: base de $\frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3}$, altura $\sqrt{3}$; $V_{max} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Condición en el punto crítico	Conclusión
$D = 0$	el criterio no decide

Criterio de la segunda derivada (tres variables). Se arma la **matriz hessiana** y se calculan sus menores principales:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = f_{xx}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \det H$$

Signos de $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$	Conclusión
$(+,+,+)$	mínimo relativo
$(-,+,-)$	máximo relativo
cualquier otro patrón, con $\Delta_3 \neq 0$	punto silla

Si la tercera fila y la tercera columna de H solo tienen ceros fuera de la diagonal, entonces $\Delta_3 = f_{zz}\,\Delta_2$.

Extremos con restricción: multiplicadores de Lagrange. Para hallar los extremos de f sujetos a una restricción $g = c$, en el punto buscado los gradientes son paralelos:

$$\nabla f = \lambda\,\nabla g, \qquad g = c$$

Son $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas (las variables y λ). Es equivalente a buscar los puntos críticos de la función de Lagrange $L = f - \lambda\,(g - c)$. El método da **candidatos**; el máximo y el mínimo se deciden evaluando f en todos ellos.

Extremos absolutos en una región cerrada. Si la región es cerrada y acotada (por ejemplo, $x^2 + 2y^2 \leq 1$), f continua alcanza su máximo y su mínimo absolutos. Los candidatos son:

1. los puntos críticos **interiores** ($\nabla f = \vec{0}$);
2. los extremos sobre la **frontera** (con Lagrange o sustituyendo la ecuación de la frontera).

Problemas aplicados. Se traducen a una **función objetivo** (costo, área, volumen, distancia) y una o varias **restricciones** (el dato fijo). Para minimizar una distancia conviene usar d^2: el punto que minimiza d^2 también minimiza d, y se evita la raíz.

Geometría que se usa.

Cuerpo	Volumen	Superficie
Cilindro	$\pi r^2 h$	pared $2\pi rh$; base y tapa $2\pi r^2$ (abierto: πr^2)
Esfera	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
Cono	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	—
Caja de lados x, y, z	xyz	con tapa $2(xy + xz + yz)$; sin tapa $xy + 2xz + 2yz$

Cuerpo	Volumen	Superficie

1.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«naturaleza de los puntos críticos», «extremos relativos» de $f(x,y)$	puntos críticos y hessiano en 2 variables	1.3.1
lo mismo, con $f(x,y,z)$	hessiano en 3 variables	1.3.2
«valores de k que hacen a E mínimo o silla»	hessiano con un parámetro	1.3.1
«sujeta a la restricción», «sobre la circunferencia», «mediante multiplicadores de Lagrange»	Lagrange	1.3.3
«costo $C(x,y)$ = …; minimice» (la función ya está dada)	hessiano en 2 variables	1.3.1
tanque, caja, lata, «menor cantidad de material», «volumen máximo»	problema aplicado	1.3.4
caja «inscrita» en un cono, paraboloide o elipsoide	aplicado con el vértice sobre la superficie	1.3.4
«valores extremos en la región $x^2+2y^2\le 1$»	extremos absolutos en región cerrada	1.3.5
«punto más cercano al origen», «distancia mínima»	Lagrange con d^2	1.3.6

1.3 Procedimientos

1.3.1 Puntos críticos y hessiano en dos variables

1. Calcula f_x y f_y. En la derivada parcial respecto a x, la y se trata como constante: si multiplica a la x se conserva; si va sola, su término se anula.
2. Iguala a cero: $f_x=0$ y $f_y=0$.
3. Despeja la ecuación más sencilla (casi siempre queda $y=\ldots$) y sustitúyela en la otra.
4. Pasa todo a un lado y **factoriza**: $2x(3x-4)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=\frac{4}{3}$. **Cada factor da un punto.**
5. Obtén la otra coordenada con la ecuación ya despejada en el paso 3.
6. Calcula f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} y $D=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$ **en general**.
7. Evalúa D en cada punto y clasifica con la tabla de 1.1. Con $D>0$, el tipo lo decide f_{xx}.
8. Calcula f en cada punto. Resume en una tabla: punto · D · f_{xx} · tipo · valor.

1.3.2 Hessiano en tres variables

1. Resuelve $f_x=0$, $f_y=0$, $f_z=0$, factorizando igual que en 1.3.1.

Ejercicio 1.5.8 · Caja inscrita en un cono

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 1 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Calcule las dimensiones de la caja de mayor volumen que está arriba del plano XY e inscrita en el cono $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 4$.

Planteamiento. Por simetría, el vértice superior de la caja es (x,y,z) con $x,y>0$, sobre el cono; los lados son $2x$, $2y$ y z. Con $s=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$V(x,y)=4xy\,(4-s)$$

Resolución.

1. $V_x=4y\left[(4-s)-\dfrac{x^2}{s}\right]=0$ y $V_y=4x\left[(4-s)-\dfrac{y^2}{s}\right]=0$.
2. Como $x,y>0$: $4-s=\dfrac{x^2}{s}=\dfrac{y^2}{s}$, así que $x=y$ y $s=\sqrt{2}\,x$.
3. $4-\sqrt{2}\,x=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}\,x}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\Rightarrow 4=\dfrac{3x}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
4. $s=\frac{8}{3}$ y $z=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$.
5. En el borde de la región ($x=0$, $y=0$ o $s=4$) el volumen es cero, así que este único punto crítico es el **máximo**.

Resultado: base de $\frac{8\sqrt{2}}{3}\times\frac{8\sqrt{2}}{3}$, altura $\frac{4}{3}$ y $V_{max}=4x^2z=\frac{512}{27}$ u³.

Ejercicio 1.5.9 · Extremos en una región cerrada

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores extremos de $f(x,y)=2x^2+y^2$ en la región $R=\{(x,y)\mid x^2+2y^2\le 1\}$.

Resolución.

1. **Interior:** $f_x=4x=0$ y $f_y=2y=0$ dan $(0,0)$, con $f=0$.
2. **Frontera** $g=x^2+2y^2=1$: $4x=2\lambda x\Rightarrow 2x(2-\lambda)=0$ y $2y=4\lambda y\Rightarrow 2y(1-2\lambda)=0$.
3. Caso $x=0$: $2y^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, con $f=\frac{1}{2}$.
4. Caso $\lambda=2$: $2y(1-4)=0\Rightarrow y=0$ y $x=\pm1$, con $f=2$.
5. Comparación: $0<\frac{1}{2}<2$.

Resultado: mínimo absoluto **0** en $(0,0)$; máximo absoluto **2** en $(\pm1,0)$.

1.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1**.

Ejercicio propuesto 1.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+y^2+2x+4y$.

Resultado: mínimo relativo en $(-1,-2)$, con $f=-\frac{29}{6}$; punto silla en $(-2,-2)$.

2. Sistema: $y+2=2\lambda x$, $x+2=2\lambda y$, $x^2+y^2=2$.
3. Resta la segunda de la primera: $y-x=-2\lambda(y-x)$, así que $(y-x)(1+2\lambda)=0$.
4. **Caso $y=x$:** $2x^2=2\Rightarrow x=\pm1$. Candidatos $(1,1)$ y $(-1,-1)$.
5. **Caso $\lambda=-\frac{1}{2}$:** $y+2=-x$, o sea $y=-x-2$. En la restricción: $x^2+(x+2)^2=2\Rightarrow 2(x+1)^2=0$, que da otra vez $(-1,-1)$.
6. $f(1,1)=9$ y $f(-1,-1)=1$.

Resultado: máximo **9** en $(1,1)$; mínimo **1** en $(-1,-1)$.

Ejercicio 1.5.6 · Caja con tapa de material mínimo

Adaptado de: 2º final 2018-1, tipo A, problema 1.

Se desea construir una caja de base rectangular con tapa y volumen de 8 m³. Calcule las dimensiones que emplean la menor cantidad de material.

Planteamiento. Lados x, y, z [m]. Objetivo: $A=2(xy+xz+yz)$. Restricción: $xyz=8$, de donde $z=\frac{8}{xy}$.

Resolución.

1. $A(x,y)=2xy+\dfrac{16}{y}+\dfrac{16}{x}$.
2. $A_x=2y-\dfrac{16}{x^2}=0\Rightarrow x^2y=8$; $A_y=2x-\dfrac{16}{y^2}=0\Rightarrow xy^2=8$.
3. Restando: $xy(x-y)=0$ y, como $x,y>0$, $x=y$. Entonces $x^3=8$, $x=y=2$ y $z=2$.
4. $A_{xx}=\frac{32}{x^3}=4$, $A_{yy}=4$, $A_{xy}=2$: $D=16-4=12>0$ y $A_{xx}>0$, **mínimo**.

Resultado: un cubo de **2 m × 2 m × 2 m**, con 24 m² de material.

Ejercicio 1.5.7 · Tanque con extremos semiesféricos

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 1.

Un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos debe contener 8000 m³ de gas, con la menor cantidad posible de material. ¿Qué radio y qué altura se recomiendan para la parte cilíndrica?

Planteamiento. Radio r y altura h de la parte cilíndrica. Las dos semiesferas forman una esfera completa.

- Restricción: $\pi r^2h+\frac{4}{3}\pi r^3=8000$, de donde $h=\dfrac{8000}{\pi r^2}-\dfrac{4r}{3}$.
- Objetivo: $A=2\pi rh+4\pi r^2$.

Resolución.

1. Sustituye: $A=\dfrac{16\,000}{r}-\dfrac{8}{3}\pi r^2+4\pi r^2=\dfrac{16\,000}{r}+\dfrac{4}{3}\pi r^2$.
2. $A'=-\dfrac{16\,000}{r^2}+\dfrac{8}{3}\pi r=0\Rightarrow r^3=\dfrac{6000}{\pi}$. Como $A''>0$, es mínimo.
3. $h=\dfrac{8000-\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}=\dfrac{8000-8000}{\pi r^2}=0$.

Resultado: $r=\sqrt[3]{6000/\pi}=10\sqrt[3]{6/\pi}\approx 12.4$ m y $h=0$: el tanque de menor material es una **esfera**. El resultado es correcto y así debe escribirse.

2. Arma H en general.
3. Calcula Δ_1, Δ_2 y Δ_3 en cada punto.
4. Clasifica con la tabla de signos de 1.1 y calcula f en cada punto.

1.3.3 Multiplicadores de Lagrange

1. Escribe la restricción como $g=c$ y calcula ∇f y ∇g.
2. Plantea $\nabla f=\lambda\nabla g$ **componente por componente** y agrega $g=c$.
3. Pasa todo a un lado y factoriza: $2z=2\lambda z\Rightarrow 2z(1-\lambda)=0$.
4. **Cada factor nulo es un caso.** No dividas entre una variable: al dividir entre z se pierde el caso $z=0$.
5. Sustituye cada caso en la restricción. Si sale una contradicción ($0=4$), el caso se descarta. Al sacar raíz, usa $\pm$.
6. Evalúa f en todos los candidatos: el mayor valor es el máximo y el menor, el mínimo.

1.3.4 Problema aplicado (tanque, caja, lata)

1. **Dibuja** la figura y nombra las variables (r, h o x, y, z). En una caja inscrita con simetría, el vértice es (x,y,z) y los lados son $2x$, $2y$ y z.
2. Escribe la **función objetivo** y la **restricción**.
3. **Despeja** una variable de la restricción y **sustituye** en la función objetivo.
4. Deriva, iguala a cero y resuelve. Si quedan dos variables, sigue 1.3.1; también se puede aplicar Lagrange (1.3.3) sin despejar.
5. Comprueba que el punto es el extremo pedido: segunda derivada, hessiano o un argumento físico (en la frontera el volumen vale cero).
6. Responde **todas** las dimensiones, con unidades, y el valor óptimo si se pide. Déjalas exactas.

1.3.5 Extremos absolutos en una región cerrada

1. Busca los puntos críticos de f en el **interior** de la región.
2. Busca los extremos de f sobre la **frontera** con Lagrange (1.3.3).
3. Evalúa f en todos los candidatos y compara: el mayor valor es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto.

1.3.6 Distancia mínima

1. Función objetivo: $d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$; restricción: la superficie.
2. Aplica Lagrange (1.3.3).
3. Compara d^2 entre los candidatos y da el punto y la distancia $d=\sqrt{d^2}$.

1.4 Ejemplo resuelto

> *Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 1.*
> Se desea construir un tanque cilíndrico con un volumen de 50 m³. El material de la base y la tapa cuesta \$5 por m² y el de la superficie lateral, \$3 por m². Determine las dimensiones que minimizan el costo.
> **Datos:** $V=50$ [m³]; base y tapa: 5 [\$/m²]; pared: 3 [\$/m²].

Planteamiento. Radio r y altura h, en metros.

- Función objetivo: $C = 5\,(2\pi r^2) + 3\,(2\pi r h) = 10\pi r^2 + 6\pi r h$.
- Restricción: $\pi r^2 h = 50$, de donde $h = \dfrac{50}{\pi r^2}$.

Resolución.

1. Sustituye: $6\pi r \cdot \dfrac{50}{\pi r^2} = \dfrac{300}{r}$, así que $C(r) = 10\pi r^2 + \dfrac{300}{r}$.
2. $C'(r) = 20\pi r - \dfrac{300}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{300}{20\pi} = \dfrac{15}{\pi}$.
3. $C''(r) = 20\pi + \dfrac{600}{r^3} > 0$: es un **mínimo**.
4. $h = \dfrac{50}{\pi r^2} = \dfrac{50\,r}{\pi r^3} = \dfrac{50\,r}{15} = \dfrac{10}{3}\,r$.
5. Costo: como $10\pi r^2 = \dfrac{10\pi r^3}{r} = \dfrac{150}{r}$, queda $C = \dfrac{450}{r}$.

Resultado: $r = \sqrt[3]{15/\pi} \approx 1.68$ m, $h = \frac{10}{3}\sqrt[3]{15/\pi} \approx 5.61$ m y $C_{min} = 450\sqrt[3]{\pi/15} \approx \$267$.

> Como la pared es más barata que la base y la tapa, el tanque óptimo es alto: su altura es $\frac{10}{3}$ de su radio. Con el mismo precio en todo el material saldría $h = 2r$.

1.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1.5.1 · Puntos críticos con una raíz en cero

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 1.

Determine la naturaleza de los puntos críticos de $f(x, y) = 2x^3 + 4y^2 - 8xy + 2$.

Resolución.

1. $f_x = 6x^2 - 8y$ y $f_y = 8y - 8x$.
2. $f_y = 0 \Rightarrow y = x$. En $f_x = 0$: $6x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(3x - 4) = 0$, así que $x = 0$ o $x = \frac{4}{3}$.
3. Puntos críticos: $(0, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
4. $f_{xx} = 12x$, $f_{yy} = 8$, $f_{xy} = -8$, de donde $D = 96x - (-8)^2 = 96x - 64$.
5. $(0, 0)$: $D = -64 < 0$, **punto silla**, con $f = 2$.
6. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$: $D = 128 - 64 = 64 > 0$ y $f_{xx} = 16 > 0$, **mínimo relativo**.
7. $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{128}{27} + \frac{192}{27} - \frac{384}{27} + \frac{54}{27} = -\frac{10}{27}$.

Ejercicio 1.5.2 · Costo de producción

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 1.

Los costos de producción de un artículo son $C(x, y) = 2x^3 + y^2 - 6xy + 4y + 100$, donde x son las horas-hombre y y las horas-máquina. Determine las horas que minimizan el costo y el costo mínimo.

Resolución.

1. $C_x = 6x^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = x^2$.
2. $C_y = 2y - 6x + 4 = 0$. Con $y = x^2$: $2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$.
3. Puntos críticos: $(1, 1)$ y $(2, 4)$.

4. $C_{xx} = 12x$, $C_{yy} = 2$, $C_{xy} = -6$, de donde $D = 24x - 36$.
5. $(1, 1)$: $D = -12 < 0$, **punto silla**.
6. $(2, 4)$: $D = 12 > 0$ y $C_{xx} = 24 > 0$, **mínimo**.
7. $C(2, 4) = 16 + 16 - 48 + 16 + 100 = 100$.

Resultado: 2 horas-hombre y 4 horas-máquina, con un costo mínimo de **100**.

Ejercicio 1.5.3 · Función con un parámetro

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 1.

Sea $f(x, y) = kx^2 - 4xy + y^2$. Determine:

- a) las coordenadas de su único punto crítico E;
- b) los valores de k que hacen a E un mínimo;
- c) los valores de k que hacen a E un punto silla.

Resolución.

1. $f_y = -4x + 2y = 0 \Rightarrow y = 2x$. En $f_x = 2kx - 4y = 0$: $2kx - 8x = 2x(k - 4) = 0$.
2. a) Si $k \neq 4$, la única solución es $x = 0$, $y = 0$: **E(0, 0)**.
3. $f_{xx} = 2k$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -4$, de donde $D = 4k - 16$.
4. b) Mínimo: $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, es decir, $k > 4$ (y entonces $2k > 0$). $k > 4$.
5. c) Silla: $D < 0$, es decir, $k < 4$.
6. Con $k = 4$, $D = 0$ y $f = (2x - y)^2$: toda la recta $y = 2x$ es de puntos críticos y E deja de ser único. Ningún valor de k da máximo, porque $D > 0$ obliga a $f_{xx} > 0$.

Ejercicio 1.5.4 · Tres variables

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 1.

Establezca la naturaleza de los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}z^3 - x + y + xy + z - 4$.

Resolución.

1. $f_x = 2x - 1 + y = 0$, $f_y = y + 1 + x = 0$ y $f_z = -z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1$.
2. De $2x + y = 1$ y $x + y = -1$, restando: $x = 2$ y $y = -3$.
3. Puntos críticos: $P_1(2, -3, 1)$ y $P_2(2, -3, -1)$.
4. $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2z \end{pmatrix}$: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2 - 1 = 1$, $\Delta_3 = -2z \cdot \Delta_2 = -2z$.
5. P_1: $\Delta_3 = -2$, signos $(+, +, -)$, **punto silla**; $f(P_1) = 4 + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - 2 - 3 - 6 + 1 - 4 = -\frac{35}{6}$.
6. P_2: $\Delta_3 = 2$, signos $(+, +, +)$, **mínimo relativo**; $f(P_2) = 4 + \frac{9}{2} + \frac{1}{3} - 2 - 3 - 6 - 1 - 4 = -\frac{43}{6}$.

Ejercicio 1.5.5 · Lagrange sobre una circunferencia

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 1.

Obtenga los valores extremos de $f(x, y) = (x + 2)(y + 2)$ sujeta a $x^2 + y^2 = 2$.

Resolución.

1. $\nabla f = (y + 2,\ x + 2)$ y $\nabla g = (2x,\ 2y)$.

En estos sistemas el campo es conservativo si la expresión de la última columna es una diferencial exacta: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_i} = h_i F_i$.

Parametrizaciones que se usan.

Curva	$\vec{r}(t)$	Intervalo
Segmento de A a B	$A + t\,(B - A)$	$0 \le t \le 1$
Circunferencia de radio R y centro (x_0, y_0), sentido antihorario	$(x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\,\mathrm{sen}\,t)$	$0 \le t \le 2\pi$
Elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$(a\cos t,\ b\,\mathrm{sen}\,t)$	según el tramo
Hélice	$(R\cos t,\ R\,\mathrm{sen}\,t,\ ct)$	el que se indique
Gráfica $y = g(x)$	$(t,\ g(t))$	de x_A a x_B
Gráfica $x = g(y)$	$(g(t),\ t)$	de y_A a y_B

Trabajo contra la gravedad. Para subir un cuerpo de peso w hay que aplicar $\vec{F} = w\,\hat{k}$, que es conservativo con $\varphi = wz$. Por eso $W = w\,\Delta z$, sin importar la forma del camino.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
$\int_C f\,ds$, «campo escalar», «masa de un alambre»	integral de línea de un campo escalar	3.3.1
«trabajo», $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\int_C P\,dx + Q\,dy$, «circulación»	integral de un campo vectorial: primero el rotacional	3.3.3
«independiente de la trayectoria», «función potencial», «diferencial exacta»	campo conservativo	3.3.3 y 3.3.4
«determine a, b, c para que sea conservativo (o irrotacional) y solenoidal»	constantes de un campo	3.3.5
campo con $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ o $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$	trabajo en coordenadas curvilíneas	3.3.6
«trayectoria cerrada», «una vuelta», $\oint_C$	curva cerrada	3.3.7
«peso», «sube», «contra la gravedad»	trabajo contra la gravedad	$W = w\,\Delta z$
campo no conservativo sobre segmentos, elipses o gráficas	parametrización directa	3.3.2

Resultado: $\vec{a}_T = \vec{0}$, $\vec{a}_N = 2\,\hat{\jmath}$ y $\kappa = 2$. En $t = 1$ la partícula no acelera ni frena: solo gira, como en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2A.5.2 · Funciones hiperbólicas

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 2.

La posición de una partícula está dada por $\vec{r}(t) = \cosh t\,\hat{\imath} + \mathrm{senh}\,t\,\hat{\jmath} + \hat{k}$, donde t es el tiempo. Obtenga en el instante $t = 0$:

- a) unas ecuaciones cartesianas de la curva;
- b) los vectores aceleración normal y aceleración tangencial;
- c) la curvatura y la torsión.

Resolución.

1. a) Como $\cosh^2 t - \mathrm{senh}^2 t = 1$: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$, en la rama $x > 0$ porque $\cosh t \ge 1$.
2. $\vec{r}\,' = (\mathrm{senh}\,t,\ \cosh t,\ 0) \Rightarrow (0,1,0)$; $\vec{r}\,'' = (\cosh t,\ \mathrm{senh}\,t,\ 0) \Rightarrow (1,0,0)$; $\vec{r}\,''' \Rightarrow (0,1,0)$.
3. b) $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$, así que $\vec{a}_T = \vec{0}$ y $\vec{a}_N = \vec{a} = \hat{\imath}$.
4. $\vec{v}\times\vec{a} = (0,1,0)\times(1,0,0) = (0,0,-1)$, con norma 1.
5. c) $\kappa = \dfrac{1}{1^3} = 1$ y $\tau = \dfrac{(0,0,-1)\cdot(0,1,0)}{1^2} = 0$.

Resultado: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$ $(x > 0)$; $\vec{a}_N = \hat{\imath}$, $\vec{a}_T = \vec{0}$; $\kappa = 1$ y $\tau = 0$. La torsión nula confirma que la curva es plana: está en el plano $z = 1$.

Ejercicio 2A.5.3 · Triedro, curvatura, torsión y plano osculador

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 3.

Sea la curva $C:\ \vec{r}(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t\,\hat{\imath} + 3\cos t\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$. Determine, para el punto $P(0,-3,6)$:

- a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$;
- b) la curvatura y la torsión;
- c) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resolución.

1. $3\cos t = -3 \Rightarrow t_0 = \pi$. Comprobación: $2\,\mathrm{sen}\,\pi = 0$.
2. $\vec{r}\,' = (2\cos t,\ -3\,\mathrm{sen}\,t,\ 0) \Rightarrow (-2,0,0)$; $\vec{r}\,'' = (-2\,\mathrm{sen}\,t,\ -3\cos t,\ 0) \Rightarrow (0,3,0)$; $\vec{r}\,''' = (-2\cos t,\ 3\,\mathrm{sen}\,t,\ 0) \Rightarrow (2,0,0)$.
3. $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = (-2,0,0)\times(0,3,0) = (0,0,-6)$, con norma 6; $|\vec{r}\,'| = 2$.
4. a) $\hat{T} = (-1,0,0)$, $\hat{B} = (0,0,-1)$ y $\hat{N} = \hat{B}\times\hat{T} = (0,1,0)$.
5. b) $\kappa = \dfrac{6}{2^3} = \dfrac{3}{4}$ y $\tau = \dfrac{(0,0,-6)\cdot(2,0,0)}{36} = 0$.
6. c) Normal $(0,0,-6)$ por P: $-6(z-6) = 0$.

Resultado: $\hat{T} = -\hat{\imath}$, $\hat{N} = \hat{\jmath}$, $\hat{B} = -\hat{k}$; $\kappa = \frac{3}{4}$, $\tau = 0$; plano osculador $z = 6$ (la elipse está en ese plano).

Ejercicio 2A.5.4 · Torsión negativa

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 2.

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = 2e^t\,\hat{\imath} + \cos t\,\hat{\jmath} + (t^3+3)\,\hat{k}$, donde t es el tiempo. Calcule, para el punto $P(2,1,3)$:

- a) la curvatura y la torsión de la curva;
- b) los vectores aceleración tangencial y aceleración normal.

Resolución.

1. $2e^t = 2 \Rightarrow t_0 = 0$. Comprobación: $\cos 0 = 1$ y $0 + 3 = 3$.
2. $\vec{r}\,' = (2e^t,\ -\operatorname{sen} t,\ 3t^2) \Rightarrow (2, 0, 0)$; $\vec{r}\,'' = (2e^t,\ -\cos t,\ 6t) \Rightarrow (2, -1, 0)$; $\vec{r}\,''' = (2e^t,\ \operatorname{sen} t,\ 6) \Rightarrow (2, 0, 6)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (2,0,0) \times (2,-1,0) = \big(0,\ 0,\ (2)(-1) - (0)(2)\big) = (0, 0, -2)$, con norma 2; $|\vec{r}\,'| = 2$.
4. a) $\kappa = \dfrac{2}{2^3} = \dfrac{1}{4}$ y $\tau = \dfrac{(0,0,-2)\cdot(2,0,6)}{2^2} = \dfrac{-12}{4} = -3$.
5. b) $a_T = \dfrac{(2,0,0)\cdot(2,-1,0)}{2} = 2$, así que $\vec{a}_T = 2\,\hat{T} = (2, 0, 0)$.
6. $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = (2,-1,0) - (2,0,0) = (0,-1,0)$. Comprobación: $|\vec{a}_N| = \frac{2}{2} = 1$.

Resultado: $\kappa = \frac{1}{4}$, $\tau = -3$; $\vec{a}_T = 2\,\hat{\imath}$ y $\vec{a}_N = -\hat{\jmath}$. La torsión es negativa y así se escribe.

Ejercicio 2A.5.5 · Curvatura y plano osculador

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + \ln(t^2)\,\hat{\jmath} + \dfrac{1}{2t}\,\hat{k}$. Determine en el punto $P\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$:

- a) la curvatura;
- b) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resolución.

1. $x = t = 1 \Rightarrow t_0 = 1$. Comprobación: $\ln 1 = 0$ y $\frac{1}{2}$.
2. $\vec{r}\,' = \left(1,\ \dfrac{2}{t},\ -\dfrac{1}{2t^2}\right) \Rightarrow \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{r}\,'' = \left(0,\ -\dfrac{2}{t^2},\ \dfrac{1}{t^3}\right) \Rightarrow (0, -2, 1)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \left(2\cdot 1 - (-\frac{1}{2})(-2),\ -[1\cdot 1 - 0],\ 1\cdot(-2) - 0\right) = (1, -1, -2)$, con norma $\sqrt{6}$.
4. $|\vec{r}\,'| = \sqrt{1 + 4 + \frac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$, así que $|\vec{r}\,'|^3 = \dfrac{21\sqrt{21}}{8}$.
5. a) $\kappa = \dfrac{8\sqrt{6}}{21\sqrt{21}} = \dfrac{8}{21}\sqrt{\dfrac{2}{7}} = \dfrac{8\sqrt{14}}{147} \approx 0.204$.
6. b) Normal $(1, -1, -2)$ por P: $(x-1) - (y-0) - 2\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Resultado: $\kappa = \dfrac{8\sqrt{14}}{147}$; plano osculador $x - y - 2z = 0$.

Ejercicio 2A.5.6 · Triedro y planos en el origen

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 2.

Sea la curva $\vec{c}(\theta) = \theta\cos\theta\,\hat{\imath} + \theta\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}$. Determine, en el origen de coordenadas, los vectores del triedro móvil $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ y las ecuaciones cartesianas de los planos osculador, normal y rectificante.

Resolución.

1. En el origen, $\theta_0 = 0$.
2. $\vec{c}\,' = (\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta,\ \cos\theta) \Rightarrow (1, 0, 1)$.
3. $\vec{c}\,'' = (-2\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta,\ 2\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta,\ -\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow (0, 2, 0)$.

- El valor no depende de la parametrización elegida, siempre que se respete el sentido.

Rotacional y divergencia. Para $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \big(R_y - Q_z,\ -(R_x - P_z),\ Q_x - P_y\big), \qquad \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$$

- $\vec{F}$ es **irrotacional** si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.
- $\vec{F}$ es **solenoidal** si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
- En el plano, con $\vec{F} = (P, Q)$, solo queda la componente $\hat{k}$: $Q_x - P_y$.

Campo conservativo y función potencial. $\vec{F}$ es **conservativo** si existe una función escalar φ, llamada **función potencial**, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$, es decir, $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, $\varphi_z = R$. En una región simplemente conexa (sin «agujeros», como todo $\mathbb{R}^3$) son equivalentes:

Afirmación	Significado
$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$	el campo es irrotacional
$\vec{F} = \nabla\varphi$	existe función potencial
$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = d\varphi$	la expresión diferencial es una **diferencial exacta**
$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ solo depende de A y B	la integral es **independiente de la trayectoria**
$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva cerrada	el trabajo en un circuito es nulo

Teorema fundamental de las integrales de línea. Si $\vec{F} = \nabla\varphi$, entonces

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

para **cualquier** curva de A a B: no hace falta parametrizar. El físico llama energía potencial a $-\varphi$; la cuenta es la misma.

Integrales de línea en coordenadas curvilíneas ortogonales. Con factores de escala h_1, h_2, h_3:

$$d\vec{r} = h_1\,dq_1\,\hat{e}_1 + h_2\,dq_2\,\hat{e}_2 + h_3\,dq_3\,\hat{e}_3, \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_1 h_1\,dq_1 + F_2 h_2\,dq_2 + F_3 h_3\,dq_3$$

Sistema	Coordenadas	Factores de escala	$\vec{F}\cdot d\vec{r}$
Polares	(r, θ)	$(1,\ r)$	$F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta$
Cilíndricas	(r, θ, z)	$(1,\ r,\ 1)$	$F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta + F_z\,dz$
Esféricas	(ρ, θ, ϕ), ϕ medido desde el eje z	$(1,\ \rho\operatorname{sen}\phi,\ \rho)$	$F_\rho\,d\rho + F_\theta\,\rho\operatorname{sen}\phi\,d\theta + F_\phi\,\rho\,d\phi$

Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno calculará integrales de línea de funciones vectoriales y las aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 4 y vale de 15 a 20 puntos; en varios extraordinarios sale además un problema aparte de «conservativo y solenoidal».
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3.1 Conceptos y expresiones

Curva parametrizada. Una curva C se describe con una función vectorial $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$, $a \le t \le b$. El **sentido** de recorrido es el de t creciente: de $A = \vec{r}(a)$ a $B = \vec{r}(b)$. La curva es **cerrada** si $A = B$, y la integral se escribe $\oint_C$.

Integral de línea de un campo escalar. Suma los valores de f a lo largo de la curva, con el elemento de longitud $ds = |\vec{r}\,'(t)|\,dt$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

No depende del sentido de recorrido. Con $f = 1$ da la longitud de la curva.

Integral de línea de un campo vectorial: el trabajo. Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ es una fuerza, el trabajo que realiza sobre una partícula que recorre C es

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Son las representaciones **vectorial**, **paramétrica** y **diferencial** del mismo número. Aquí **no** aparece $|\vec{r}\,'|$. Si $\vec{F}$ es un campo de velocidades y C es cerrada, la misma integral se llama **circulación**.

Propiedades.

- Si se invierte el sentido de recorrido, la integral de un campo vectorial cambia de signo: $\int_{-C}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.
- Si C está formada por tramos $C_1, C_2, \ldots$, la integral es la suma de las integrales sobre cada tramo.

4. $\vec{c}\,'\times\vec{c}\,'' = (1,0,1)\times(0,2,0) = (0\cdot 0 - 1\cdot 2,\ -[1\cdot 0 - 1\cdot 0],\ 1\cdot 2 - 0) = (-2,0,2)$.
5. $\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ y $\hat{N} = \hat{B}\times\hat{T} = (0,1,0)$.
6. Planos por $(0,0,0)$: osculador ($\perp \hat{B}$) $-x + z = 0$; normal ($\perp \hat{T}$) $x + z = 0$; rectificante ($\perp \hat{N}$) $y = 0$.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \hat{\jmath}$, $\hat{B} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$; osculador $z = x$, normal $x + z = 0$, rectificante $y = 0$. El enunciado original llama «tangente» al plano normal.

Ejercicio 2A.5.7 · Recta parametrizada por longitud de arco

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 2.

Dada la curva $\vec{r}(t) = (1 + 2t,\ 5 - 3t,\ 2 + 4t)$:

- a) parametrice la curva con respecto a la longitud de arco, $\vec{r}(s)$;
- b) calcule el vector tangente unitario utilizando $\vec{r}(s)$;
- c) obtenga el valor de la curvatura.

Resolución.

1. $\vec{r}\,' = (2,-3,4)$ y $|\vec{r}\,'| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$, constante.
2. $s = \displaystyle\int_0^t \sqrt{29}\,du = \sqrt{29}\,t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{29}}$.
3. a) $\vec{r}(s) = \left(1 + \frac{2s}{\sqrt{29}},\ 5 - \frac{3s}{\sqrt{29}},\ 2 + \frac{4s}{\sqrt{29}}\right)$.
4. b) Con s como parámetro, $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,-3,4)$, que ya es unitario.
5. c) $\frac{d\hat{T}}{ds} = \vec{0}$, así que $\kappa = 0$.

Resultado: $\vec{r}(s)$ como arriba, $\hat{T} = \frac{(2,-3,4)}{\sqrt{29}}$ y $\kappa = 0$: la curva es una recta.

Ejercicio 2A.5.8 · Curva dada como intersección

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 3 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Sea la curva $C:\ x = z,\ x^2 + y^2 = 4$. Determine la curvatura en un punto P de C en el que el vector tangente unitario sea paralelo al vector $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{k}$.

Resolución.

1. Parametriza: $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$.
2. $\vec{r}\,' = (-2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t,\ -2\operatorname{sen} t)$. Para que sea paralelo a $(1,0,1)$, la componente y debe anularse: $\cos t = 0$, así que $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$, es decir, $P = (0, \pm 2, 0)$.
3. En $t = \frac{\pi}{2}$: $\vec{r}\,' = (-2,0,-2)$ y $\vec{r}\,'' = (-2\cos t,\ -2\operatorname{sen} t,\ -2\cos t) = (0,-2,0)$.
4. $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = \big((0)(0) - (-2)(-2),\ -[(-2)(0) - (-2)(0)],\ (-2)(-2) - 0\big) = (-4,0,4)$, con norma $4\sqrt{2}$.
5. $|\vec{r}\,'| = 2\sqrt{2}$, así que $|\vec{r}\,'|^3 = 16\sqrt{2}$ y $\kappa = \dfrac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}$.
6. En $t = \frac{3\pi}{2}$ se obtiene el mismo valor.

Resultado: en $P(0,2,0)$ y en $P(0,-2,0)$, $\kappa = \frac{1}{4}$. La curva es una elipse en el plano $x = z$.

Ejercicio 2A.5.9 · Curva tangente a una superficie

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 2 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Demuestre que la curva $C:\ \vec{r}(t)=\left(\dfrac{t^3}{4}-2,\ \dfrac{4}{t}-3,\ \cos(t-2)\right)$ es tangente a la superficie $S:\ x^3+y^3+z^3-xyz=0$ en el punto $Q(0,-1,1)$.

Resolución.

1. $\cos(t-2)=1$ y $\frac{t^3}{4}-2=0$ dan $t_0=2$. Comprobación: $\frac{4}{2}-3=-1$. El punto está en la curva.
2. $F(Q)=0+(-1)+1-0=0$: el punto está en la superficie.
3. $\vec{r}\,'=\left(\dfrac{3t^2}{4},\ -\dfrac{4}{t^2},\ -\operatorname{sen}(t-2)\right)\Rightarrow \vec{r}\,'(2)=(3,-1,0)$.
4. $\nabla F=(3x^2-yz,\ 3y^2-xz,\ 3z^2-xy)\Rightarrow \nabla F(Q)=(1,3,3)$.
5. $\vec{r}\,'(2)\cdot\nabla F(Q)=3-3+0=0$.

Resultado: la tangente a la curva es perpendicular a la normal de la superficie en un punto común: **la curva es tangente a S en Q.**

Ejercicio 2A.5.10 · Ángulo entre una curva y una superficie

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 2.

Sean la superficie $S:\ \vec{R}(p,m)=(m+p)\hat{\imath}+(m-p)\hat{\jmath}+4mp\hat{k}$ y la recta $C:\ x=t-2,\ y=-t-2,\ z=-8t$. Calcule el ángulo de intersección entre S y C en el punto P que corresponde a $p=1$.

Resolución.

1. Con $p=1$: $m+1=t-2$ y $m-1=-t-2$. Sumando, $2m=-4$, así que $m=-2$ y $t=1$. Comprobación en z: $4(-2)(1)=-8=-8(1)$. El punto es $P(-1,-3,-8)$.
2. $\vec{R}_p=(1,-1,4m)=(1,-1,-8)$ y $\vec{R}_m=(1,1,4p)=(1,1,4)$.
3. $\vec{N}=\vec{R}_p\times\vec{R}_m=\big((-1)(4)-(-8)(1),\ -[(1)(4)-(-8)(1)],\ (1)(1)-(-1)(1)\big)=(4,-12,2)$.
4. $\vec{r}\,'=(1,-1,-8)$ y $\vec{r}\,'\cdot\vec{N}=4+12-16=0$.
5. $\operatorname{sen}\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$.

Resultado: $\alpha=0$. La recta es tangente a S; de hecho está contenida en ella, porque S es $z=x^2-y^2$ y $(t-2)^2-(t+2)^2=-8t$.

2A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2A**.

Ejercicio propuesto 2A.6.1

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 2.

Una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria $C:\ x=t^2,\ y=-t,\ z=-t^2$, donde t es el tiempo. Calcule los vectores aceleración tangencial y aceleración normal en el punto $P(1,-1,-1)$.

Resultado: $\vec{a}_T=\frac{1}{9}(16,-8,-16)$ y $\vec{a}_N=\frac{1}{9}(2,8,-2)$.

7. Resultado exacto y recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe qué forma se dio, los vectores derivados, el producto punto planteado, h con números y la matriz del jacobiano, aunque el determinante quede sin terminar. El planteamiento correcto también cuenta.

2. h **y** $\frac{1}{h}$ **mezclados.** En la forma directa $h_u = |\vec{r}_u|$; en la inversa ortogonal $h_u = \frac{1}{|\nabla u|}$. Si en la forma inversa sale $h = \sqrt{10}$, faltó el «uno entre».
3. **Inversa no ortogonal.** Si $\nabla u \cdot \nabla v \neq 0$, la fórmula $h_u = \frac{1}{|\nabla u|}$ no vale (ejercicio 2B.6.1: da $\frac{1}{\sqrt{5}}$, pero el valor correcto es $\frac{\sqrt{5}}{4}$).
4. **Olvidar la raíz.** $|(-1,3)| = \sqrt{10}$, no 10.
5. **Signo del jacobiano.** $J = -\frac{1}{10}$ es válido: el signo depende del orden de las variables. En áreas, volúmenes e integrales se usa $|J|$.
6. $\hat{e}$ **sin normalizar.** $\hat{e}_u = \vec{r}_u / h_u$. Si piden el «vector base» sin sombrero, es $\vec{r}_u$ sin dividir.
7. **Proyectar sin demostrar ortogonalidad.** Antes de escribir $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$ se escribe el producto punto que vale cero.
8. **Signo de la segunda componente del rotacional.** $\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z)\,\hat{\imath} - (R_x - P_z)\,\hat{\jmath} + (Q_x - P_y)\,\hat{k}$. Por ejemplo, $\vec{v} = (y^2 + 5yz,\ x - 3z^2,\ x + y)$ tiene $\nabla \times \vec{v} = (1 + 6z)\,\hat{\imath} + (5y - 1)\,\hat{\jmath} + (1 - 2y - 5z)\,\hat{k}$.
9. **Factores de escala en el rotacional.** Arriba $h_i \hat{e}_i$, abajo $h_i F_i$ y todo entre $h_u h_v h_w$.
10. **Ángulo de las esféricas.** Confirma que ϕ se mide desde el eje z: entonces $h_\theta = \rho \operatorname{sen}\phi$ y $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Con el orden (ρ, θ, ϕ) el jacobiano sale $-\rho^2 \operatorname{sen}\phi$; con (ρ, ϕ, θ), $+\rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Para el rotacional usa (ρ, ϕ, θ): con el otro orden el resultado sale con el signo cambiado.

2B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Directa $x(u, v)$: $h_u = |\vec{r}_u|$, $\hat{e}_u = \vec{r}_u / h_u$, $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \det[\vec{r}_u\ \vec{r}_v]$.
- Inversa ortogonal $u(x, y)$: $h_u = 1/|\nabla u|$, $\hat{e}_u = \nabla u / |\nabla u|$, $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 1/J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- Ortogonal $\Leftrightarrow$ productos punto nulos · ortogonal $\Rightarrow |J| = h_u h_v h_w$.
- Cilíndricas $h = (1, r, 1)$, $|J| = r$ · esféricas $h = (1, \rho \operatorname{sen}\phi, \rho)$, $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$.
- $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$ · $F_r = F_x \cos\theta + F_y \operatorname{sen}\theta$, $F_\theta = -F_x \operatorname{sen}\theta + F_y \cos\theta$.
- $\nabla f = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_i$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum \partial_{q_i}\left(\frac{h_u h_v h_w}{h_i} F_i\right)$ · $\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum \partial_{q_i}\left(\frac{h_u h_v h_w}{h_i^2} \partial_{q_i} f\right)$.
- $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{e}_u & h_v \hat{e}_v & h_w \hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$, con (u, v, w) dextrógiro (esféricas: (ρ, ϕ, θ)).
- Solenoidal: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ · irrotacional: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ · armónica: $\nabla^2 f = 0$.
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

2B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe arriba «forma directa» o «forma inversa», según lo que se haya dado.
2. Deriva y arma los dos o tres vectores (o gradientes).
3. Productos punto: «el sistema **es** (o **no es**) ortogonal», con la frase completa.
4. h con raíz (y «uno entre» en la forma inversa ortogonal), luego $\hat{e}$.
5. Determinante, inversión si hace falta y comprobación $|J| = h_u h_v$.
6. Para un operador: los h, la fórmula general escrita y después la sustitución.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2A.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 2.

Sea la curva $C:\ \vec{r}(t) = e^{2t}\,\hat{\imath} + \cos 2t\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$. Determine la curvatura en el punto $P(e^{2\pi}, 1, 4)$.

Resultado: $\kappa = e^{-4\pi}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2A.6.3

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = \left(1 - \sqrt{8}\cos t\right)\hat{\imath} + \left(1 - \sqrt{8}\cos t\right)\hat{\jmath} + 4 \operatorname{sen} t\,\hat{k}$. Determine en el punto $P(1, 1, 4)$: a) el vector tangente unitario; b) la curvatura y el radio de curvatura; c) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$; $\kappa = \frac{1}{4}$, $\rho = 4$; plano osculador $x - y = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2A.6.4

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = \cos t\,\hat{\imath} + \operatorname{sen} t\,\hat{\jmath} + (\cos t + \operatorname{sen} t + 1)\,\hat{k}$. Determine, para el punto $P(1, 0, 2)$: a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$; b) una ecuación cartesiana del plano normal.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}$, $\hat{B} = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}$; plano normal $y + z = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2A.6.5

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(s) = 3 \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{10}}\,\hat{\imath} + \frac{s}{\sqrt{10}}\,\hat{\jmath} + 3\cos\frac{s}{\sqrt{10}}\,\hat{k}$, donde s es la longitud de arco. Determine para el punto $A(0, 0, 3)$: a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$; b) la curvatura y la torsión.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(3,1,0)}{\sqrt{10}}$, $\hat{N} = -\hat{k}$, $\hat{B} = \frac{(-1,3,0)}{\sqrt{10}}$; $\kappa = \frac{3}{10}$, $\tau = \frac{1}{10}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2A.6.6

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 2.

Al despegar, un avión se desplaza a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t) = (4 - 3t^2)\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} + 4t^2\,\hat{k}$. Determine la posición del avión en el instante en que ha recorrido 40 unidades de longitud desde el punto $A(1, 5, 4)$.

Resultado: $(-23,\ 5,\ 36)$, que corresponde a $t = 3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2A.6.7

Adaptado de: 2º final 2018-1, tipo A, problema 2.

Sea la curva $C:\ y = x,\ z = x^2 + y^2$. Determine en el origen: a) los vectores del triedro móvil; b) la curvatura; c) las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura; d) una ecuación general del plano osculador.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \hat{k}$, $\hat{B} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$; $\kappa = 2$; centro $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$; plano osculador $x - y = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 2A.6.8

Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, grupo 6, ejercicio 1.

Sea la superficie $\vec{r}(s,t) = (2s + 3t)\,\hat{\imath} + (-s + 2t)\,\hat{\jmath} + (2t^2 - 3s)\,\hat{k}$. Obtenga la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto donde $x = 1$, $y = -4$.

Resultado: $s = 2$, $t = -1$, punto $(1, -4, -4)$; plano tangente $10x - y + 7z + 14 = 0$; recta normal $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 2A.6.9

Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, grupo 7, ejercicio 2.

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ y $x^2 + y^2 = 13$ en el punto $P(3, 2, -6)$.

Resultado: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}$, $z = -6$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

2A.7 Errores frecuentes

1. **Torsión sin signo.** El numerador $(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''$ puede ser negativo, y entonces $\tau < 0$ (ejercicio 2A.5.4). No se le pone valor absoluto. Otro caso: $\vec{r} = (4\cos t,\ 3t,\ 4\operatorname{sen} t)$ en $t = 0$ da $\kappa = \frac{4}{25}$ y $\tau = -\frac{3}{25}$.
2. **Norma negativa.** $|\vec{v}|$, $|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|$ y κ nunca son negativos; si sale un signo menos, hay un error.
3. **Perder la notación vectorial.** «$T = -\operatorname{sen} t + \cos t$» es un número, no un vector. Se escribe siempre $\langle _, _, _ \rangle$ o con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$.
4. **Confundir $\vec{v}$ con $\hat{T}$.** $\hat{T} = \vec{v}/|\vec{v}|$; solo coinciden cuando la rapidez vale 1.
5. **Orden del producto cruz.** $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Se usa $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$: con $\hat{T} \times \hat{B}$ sale $-\hat{N}$.
6. **Evaluar demasiado pronto.** Si se sustituye t_0 en $\vec{r}$ y luego se deriva, se deriva una constante y todo da cero. Primero se deriva con t.
7. **Evaluar demasiado tarde.** Simplificar $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ con senos y cosenos antes de sustituir es lento y propenso a errores. Se deriva, se evalúa y se hace el producto cruz con números.
8. **Potencias de las fórmulas.** κ lleva $|\vec{r}\,'|^3$ (al cubo) y τ lleva $|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2$ (al cuadrado). En la hélice del ejemplo 2A.4, $\kappa = \frac{15}{125}$, no $\frac{15}{5}$ (eso es a_N).

Ejercicio propuesto 2B.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 3.

Calcule la divergencia del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) + z\,\hat{k}$ en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z).

Resultado: $F_\rho = \rho^3$, $F_\theta = 0$, $F_z = z$; $\nabla \cdot \vec{F} = 4\rho^2 + 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.5

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 3.

Sea la transformación $x = u\cos\theta$, $y = v\operatorname{sen}\theta$, $z = u^2 + v^2$. Determine: a) el vector base $\vec{e}_\theta$; b) el factor de escala h_v; c) el jacobiano $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,\theta}\right)$.

Resultado: $\vec{e}_\theta = (-u\operatorname{sen}\theta,\ v\cos\theta,\ 0)$; $h_v = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 4v^2}$; $J = 2u^2\operatorname{sen}^2\theta - 2v^2\cos^2\theta$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.6

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 3.

Determine si el campo, expresado en coordenadas cilíndricas, $\vec{F}(r, \theta, z) = \left(r^2 z + \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_r + (r\cos\theta)\,\hat{e}_\theta - \frac{3}{2}rz^2\,\hat{e}_z$ es solenoidal.

Resultado: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$: sí es solenoidal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.7

Adaptado de: 2º final 2018-1, tipo A, problema 3.

Obtenga el laplaciano de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}$ en el punto $B(1, 1, 0)$.

Resultado: $\nabla^2 f = 30\,(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$; en B, $60\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 2B.6.8

Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, ejemplo del tema III, inciso c.1.

Sean las ecuaciones de transformación $x = 2u + 6v$, $y = -4u + 3v$. Obtenga la expresión del gradiente de $f(u, v) = 2u + v^2$ referida al sistema x, y y evalúela en el punto $u = 1$, $v = 2$.

Resultado: $\nabla f = \frac{11}{15}\,\hat{\imath} - \frac{2}{15}\,\hat{\jmath}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

2B.7 Errores frecuentes

1. **Dirección del jacobiano.** Con $x(u, v)$ sale directo $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$; con $u(x, y)$ sale $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ y se invierte. No se despeja.

3. c) Las curvas frontera son $u = \frac{1}{4}$, $u = 4$, $v = 1$ y $v = -4$. Como $x^2 = \frac{4u+v}{5} \geq 0$ y $y^2 = \frac{u-v}{5} \geq 0$, la imagen además cumple $-4u \leq v \leq u$. R' es la parte del rectángulo $\frac{1}{4} \leq u \leq 4$, $-4 \leq v \leq 1$ que queda dentro de esa cuña.
4. d) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -8y \end{vmatrix} = -16xy - 4xy = -20xy$.
5. $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{20xy}$. En el primer cuadrante, $xy = \frac{1}{5}\sqrt{(4u+v)(u-v)}$.

Resultado: no ortogonal; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{20xy} = -\frac{1}{4\sqrt{(4u+v)(u-v)}}$ en el primer cuadrante.

2B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2B**.

Ejercicio propuesto 2B.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $u = x - 2y$, $v = x + 2y$. Determine: a) si el sistema (u, v) es ortogonal; b) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$; c) las ecuaciones de la transformación inversa; d) los factores de escala h_u, h_v; e) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$.

Resultado: no es ortogonal; $J = \frac{1}{4}$; $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{v-u}{4}$; $h_u = h_v = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $\hat{e}_u = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 2B.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 3.

Sea el sistema $u = x - 4y + z$, $v = x - z$, $w = 2x + y + 2z$. a) Determine si es ortogonal. b) Obtenga $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$. c) Transforme el vector $\vec{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ a la base $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w\}$.

Resultado: ortogonal; $\hat{e}_u = \frac{(1,-4,1)}{3\sqrt{2}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_w = \frac{(2,1,2)}{3}$; $\vec{u} = 3\,\hat{e}_w$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.3

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ y sea la función $f(u, v) = \sqrt{2}\,u^4 v^3$. Calcule el gradiente de f.

Resultado: $h_u = h_v = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\nabla f = 8u^3v^3\,\hat{e}_u + 6u^4v^2\,\hat{e}_v$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

9. **Derivadas hiperbólicas.** $(\cos t)' = -\operatorname{sen} t$, pero $(\cosh t)' = +\operatorname{senh} t$.
10. **Ángulo entre curva y superficie.** Se usa el seno. Si el producto punto es cero, el ángulo es 0 (curva tangente), no 90°.

2A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\hat{T} = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|} \cdot \hat{B} = \frac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|} \cdot \hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$.
- $\kappa = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} \cdot \rho = \frac{1}{\kappa} \cdot$ centro de curvatura $P + \rho\hat{N} \cdot \tau = \frac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2}$, con signo.
- Frenet-Serret: $\hat{T}\,' = \kappa\hat{N}$, $\hat{N}\,' = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}$, $\hat{B}\,' = -\tau\hat{N}$ (derivadas respecto a s).
- $a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|} \cdot a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} = \kappa|\vec{v}|^2 \cdot \vec{a}_N = \vec{a} - a_T\hat{T}$.
- Planos: osculador $\perp \hat{B} \cdot$ normal $\perp \hat{T} \cdot$ rectificante $\perp \hat{N}$.
- $s = \int |\vec{r}\,'|\,dt$; con s como parámetro, $\hat{T} = d\vec{r}/ds$.
- Superficie: $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m$ o $\nabla F \cdot$ tangencia $\vec{r}\,' \cdot \vec{N} = 0 \cdot$ ángulo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{r}\,' \cdot \vec{N}|}{|\vec{r}\,'||\vec{N}|} \cdot$ intersección: dirección $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.
- Recta: $\kappa = 0 \cdot$ curva plana: $\tau = 0$.

2A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Encuentra t_0 y escribe la comprobación de las tres coordenadas.
2. Deriva con t y anota $\vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}\,''(t_0)$ y, si hay torsión, $\vec{r}\,'''(t_0)$.
3. Calcula $|\vec{r}\,'|$ y $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$; comprueba el producto cruz con dos productos punto iguales a cero.
4. Escribe cada fórmula antes de sustituir: κ (cubo), τ (cuadrado, con signo), a_T, a_N.
5. Da $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ como vectores unitarios, con $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$.
6. Para un plano, vector normal correcto y punto de la curva. Resultado exacto y recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe t_0 con su comprobación, $\vec{r}\,'(t_0)$ y $\vec{r}\,''(t_0)$, $\hat{T}$ con números, el determinante de $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ planteado y la fórmula de κ sustituida. El planteamiento correcto también cuenta.

Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno utilizará e interpretará las variaciones de una función vectorial de variable vectorial y las aplicará para resolver problemas físicos y geométricos en el sistema de referencia más conveniente.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 33 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 2 o el 3 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2B.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 2B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2B.5 con cronómetro (15 min cada uno).

2B.1 Conceptos y expresiones

Coordenadas curvilíneas. Un sistema de coordenadas (u, v, w) se define con **ecuaciones de transformación**. Pueden venir de dos formas:

- **Forma directa:** $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. El vector de posición es $\vec{r}(u, v, w) = (x, y, z)$.
- **Forma inversa:** $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.

Al fijar dos coordenadas y variar la tercera se obtiene una **curva coordenada**; al fijar una sola, una **superficie coordenada**.

Vectores base, factores de escala y vectores unitarios.

- **Vector base:** $\vec{r}_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, tangente a la curva coordenada u (igual para v y w).
- **Factor de escala:** $h_u = |\vec{r}_u|$. Mide cuánto se avanza en el espacio por cada unidad de u.
- **Vector unitario:** $\hat{e}_u = \dfrac{\vec{r}_u}{h_u}$.
- **Diferencial del vector de posición:** $d\vec{r} = \vec{r}_u\,du + \vec{r}_v\,dv + \vec{r}_w\,dw = h_u\,du\,\hat{e}_u + h_v\,dv\,\hat{e}_v + h_w\,dw\,\hat{e}_w$.

Sistema ortogonal. El sistema es **ortogonal** si sus vectores base son perpendiculares entre sí:

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \qquad \vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0, \qquad \vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$$

En la forma inversa, la condición equivalente es $\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u \cdot \nabla w = \nabla v \cdot \nabla w = 0$. En un sistema ortogonal, y **solo** en él:

$$h_u = \frac{1}{|\nabla u|}, \qquad \hat{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

1. Componentes cilíndricas: $F_r = xz\cos\theta + yz\,\mathrm{sen}\,\theta = rz$; $F_\theta = -xz\,\mathrm{sen}\,\theta + yz\cos\theta = 0$; $F_z = xy = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
2. Divergencia: $\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2 z)}{\partial r} + 0 + 0 = \frac{2rz}{r} = 2z$.
3. Rotacional, componente $\hat{e}_r$: $\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} = \frac{1}{r}r^2\cos 2\theta = r\cos 2\theta$.
4. Componente $\hat{e}_\theta$: $\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} = r - r\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
5. Componente $\hat{e}_z$: $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right] = 0$.
6. Comprobación en cartesianas: $\nabla\cdot\vec{F} = z + z + 0 = 2z$ y $\nabla\times\vec{F} = (x-y,\ x-y,\ 0)$, cuyas componentes cilíndricas son $(x-y)(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta) = r\cos 2\theta$ y $(x-y)(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = r(1 - \mathrm{sen}\,2\theta)$.

Resultado: $\nabla\cdot\vec{F} = 2z$ y $\nabla\times\vec{F} = r\cos 2\theta\,\hat{e}_r + r(1-\mathrm{sen}\,2\theta)\,\hat{e}_\theta$.

Ejercicio 2B.5.9 · Laplaciano en un sistema curvilíneo

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema coordenado curvilíneo ortogonal definido por $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$, $z = w$. Utilice este sistema para calcular el laplaciano de la función escalar $f(u, v) = u^4 + v^4$.

Resolución.

1. $\vec{r}_u = (2u, 2u, 0)$, $\vec{r}_v = (2v, -2v, 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 1)$; los productos punto son cero.
2. Con $u, v > 0$: $h_u = 2\sqrt{2}\,u$, $h_v = 2\sqrt{2}\,v$, $h_w = 1$, y $h_u h_v h_w = 8uv$.
3. $\dfrac{h_v h_w}{h_u}\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{v}{u}\cdot 4u^3 = 4u^2 v$ y $\dfrac{h_u h_w}{h_v}\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{u}{v}\cdot 4v^3 = 4uv^2$.
4. $\nabla^2 f = \dfrac{1}{8uv}\left[\dfrac{\partial(4u^2 v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(4uv^2)}{\partial v}\right] = \dfrac{8uv + 8uv}{8uv} = 2$.
5. Comprobación: $x + y = 2u^2$ y $x - y = 2v^2$, así que $f = \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{4} = \frac{x^2+y^2}{2}$, cuyo laplaciano es $1 + 1 = 2$.

Resultado: $\nabla^2 f = 2$.

Ejercicio 2B.5.10 · Sistema no ortogonal y región imagen

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 3.

Sean la transformación $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - 4y^2$ y la región R del plano xy limitada por $x^2 - 4y^2 = 1$, $4y^2 - x^2 = 4$, $4x^2 + 4y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

- a) Determine si el sistema uv es ortogonal.
- b) Dibuje la región R en el plano xy.
- c) Dibuje la región R' del plano uv, imagen de R.
- d) Calcule el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. a) $\nabla u = (2x, 2y)$ y $\nabla v = (2x, -8y)$; $\nabla u \cdot \nabla v = 4x^2 - 16y^2$, que no es cero en general: el sistema **no es ortogonal**.
2. b) R está entre las circunferencias de radios $\frac{1}{2}$ y 2 y entre las hipérbolas $x^2 - 4y^2 = 1$ (abre hacia el eje x) y $x^2 - 4y^2 = -4$ (abre hacia el eje y). Por simetría basta el primer cuadrante.

Ejercicio 2B.5.6 · Gradiente en un sistema UVW

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 2 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Sea el sistema UVW definido por $x = u - v$, $y = u + v$, $z = w$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$;
- c) el gradiente del campo $\varphi(u, v, w) = \sqrt{2}\,u^2 - \sqrt{2}\,v^2 + 2w^2$ expresado en el sistema UVW.

Resolución.

1. Forma directa: $\vec{r}_u = (1, 1, 0)$, $\vec{r}_v = (-1, 1, 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 1)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -1 + 1 = 0$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$: **ortogonal**.
3. $h_u = \sqrt{2}$, $h_v = \sqrt{2}$, $h_w = 1$.
4. b) $\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$, $\hat{e}_w = \hat{k}$.
5. c) $\varphi_u = 2\sqrt{2}\,u$, $\varphi_v = -2\sqrt{2}\,v$, $\varphi_w = 4w$. Cada una se divide entre su factor de escala.

Resultado: $\nabla\varphi = 2u\,\hat{e}_u - 2v\,\hat{e}_v + 4w\,\hat{e}_w$.

Ejercicio 2B.5.7 · Rotacional en un sistema lineal

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 3.

El sistema UVW está definido por $x = 2u + 2v + w$, $y = -2u + v + 2w$, $z = u - 2v + 2w$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los factores de escala h_u, h_v, h_w;
- c) el rotacional del campo $\vec{F} = w\,\hat{e}_u + u\,\hat{e}_v + v\,\hat{e}_w$ expresado en el sistema UVW.

Resolución.

1. Forma directa y lineal: los vectores base son las columnas de coeficientes, $\vec{r}_u = (2, -2, 1)$, $\vec{r}_v = (2, 1, -2)$, $\vec{r}_w = (1, 2, 2)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 4 - 2 - 2 = 0$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 2 - 4 + 2 = 0$, $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 2 + 2 - 4 = 0$: **ortogonal**.
3. b) $h_u = h_v = h_w = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Comprobación: $J = 27 = 3^3$.
4. c) $\nabla \times \vec{F} = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 3\hat{e}_u & 3\hat{e}_v & 3\hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ 3w & 3u & 3v \end{vmatrix}$.
5. Componente $\hat{e}_u$: $\frac{3}{27}\,[\partial_v(3v) - \partial_w(3u)] = \frac{3\cdot 3}{27} = \frac{1}{3}$.
6. Componente $\hat{e}_v$: $-\frac{3}{27}\,[\partial_u(3v) - \partial_w(3w)] = -\frac{3}{27}(0 - 3) = \frac{1}{3}$.
7. Componente $\hat{e}_w$: $\frac{3}{27}\,[\partial_u(3u) - \partial_v(3w)] = \frac{1}{3}$.

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = h_w = 3$; $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{3}\,(\hat{e}_u + \hat{e}_v + \hat{e}_w)$.

Ejercicio 2B.5.8 · Divergencia y rotacional en cilíndricas

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 3.

Sea $\vec{F}(x, y, z) = xz\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} + xy\,\hat{k}$. Obtenga su divergencia y su rotacional en coordenadas cilíndricas.

Resolución.

Si el sistema no es ortogonal, h_u y $\hat{e}_u$ se obtienen de la forma directa: se despejan x, y y se usa $\vec{r}_u$.

Jacobiano.

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \qquad J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \det\left[\vec{r}_u \;\; \vec{r}_v \;\; \vec{r}_w\right]$$

- **Recíproco:** $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \dfrac{1}{J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)}$. Por eso nunca hace falta despejar: se deriva lo que se tiene y, si se pide el otro, se invierte.
- **Existencia de la inversa:** donde $J \neq 0$ la transformación tiene inversa local. Los puntos donde $J = 0$ son **puntos singulares** (en polares, el origen $r = 0$).
- **Signo:** intercambiar el orden de dos variables cambia el signo de J. En áreas y volúmenes se usa $|J|$: $dA_{xy} = \left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$.
- **Comprobación:** en un sistema ortogonal, $|J| = h_u\,h_v\,h_w$.

Sistemas usuales.

Sistema	Transformación	Factores de escala	$\lvert J\rvert$
Polares (r, θ)	$x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$	$h_r = 1$, $h_\theta = r$	r
Cilíndricas (r, θ, z)	las de polares y $z = z$	$h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$	r
Esféricas (ρ, θ, ϕ)	$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho\cos\phi$	$h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$, $h_\phi = \rho$	$\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$

En esféricas, ϕ es el ángulo medido desde el eje z positivo. En cilíndricas, $\hat{e}_r = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$, $\hat{e}_\theta = (-\mathrm{sen}\,\theta,\ \cos\theta,\ 0)$, $\hat{e}_z = \hat{k}$, de donde

$$F_r = F_x\cos\theta + F_y\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad F_\theta = -F_x\,\mathrm{sen}\,\theta + F_y\cos\theta, \qquad F_z = F_z$$

Componentes de un vector en la base curvilínea. Si el sistema es ortogonal, $\vec{a} = a_u\,\hat{e}_u + a_v\,\hat{e}_v + a_w\,\hat{e}_w$ con $a_u = \vec{a}\cdot\hat{e}_u$, $a_v = \vec{a}\cdot\hat{e}_v$, $a_w = \vec{a}\cdot\hat{e}_w$. En particular, $\hat{\imath} = (\hat{\imath}\cdot\hat{e}_u)\,\hat{e}_u + (\hat{\imath}\cdot\hat{e}_v)\,\hat{e}_v + (\hat{\imath}\cdot\hat{e}_w)\,\hat{e}_w$: los coeficientes son las primeras componentes de cada $\hat{e}$.

Operadores en coordenadas curvilíneas ortogonales. Con $\vec{F} = F_u\,\hat{e}_u + F_v\,\hat{e}_v + F_w\,\hat{e}_w$:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\,\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\,\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\,\hat{e}_w$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial(h_v h_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_u h_w F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_u h_v F_w)}{\partial w}\right]$$

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{e}_u & h_v\hat{e}_v & h_w\hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

Orden de las coordenadas en el rotacional. La fórmula del determinante supone que el orden (u, v, w) es dextrógiro, es decir, que el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ es positivo. Si es negativo, el rotacional sale con el signo cambiado: divide entre el jacobiano con su signo o reordena las coordenadas. En esféricas usa el orden (ρ, ϕ, θ); con (ρ, θ, ϕ) el jacobiano vale $-\rho^2 \operatorname{sen}\phi$.

En **cilíndricas**:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_z$$

En **esféricas**, para una función que solo depende de ρ: $\nabla^2 f = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \dfrac{df}{d\rho}\right)$.

En **cartesianas**, con $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z, \qquad \nabla\times\vec{F} = (R_y - Q_z)\,\hat{\imath} - (R_x - P_z)\,\hat{\jmath} + (Q_x - P_y)\,\hat{k}, \qquad \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

Interpretación física.

- La **divergencia** es el flujo neto que sale por unidad de volumen: positiva en una fuente, negativa en un sumidero. Si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, el campo es **solenoidal**.
- El **rotacional** mide la tendencia del campo a hacer girar; su componente en una dirección es la circulación por unidad de área. Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, el campo es **irrotacional**.
- El **laplaciano** es $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$. Una función con $\nabla^2 f = 0$ es **armónica**.

Propiedades del operador nabla. $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ · $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ · $\nabla \cdot (f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f\,\nabla \cdot \vec{F}$ · $\nabla \times (f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f\,\nabla \times \vec{F}$.

2B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«$x = \ldots,\ y = \ldots$ en función de u, v»: ortogonal, h, $\hat{e}$, jacobiano	forma directa	2B.3.1
«$u = \ldots,\ v = \ldots$ en función de x, y»: ortogonal, h, $\hat{e}$, jacobiano	forma inversa	2B.3.2
«determine si es ortogonal» y el producto punto no es cero	sistema no ortogonal	2B.3.3
«valor de a para que la transformación sea ortogonal»	ortogonalidad con un parámetro	2B.3.1
«área de la imagen de la región», «dibuje la región R'»	jacobiano y región	2B.3.2
«transformar el vector», «expresar $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en términos de $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$»	componentes en la base nueva	2B.3.4
«gradiente de $f(u, v)$ expresado en el sistema»	gradiente	2B.3.5

Ejercicio 2B.5.4 · Forma inversa no lineal

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 2.

Sea el sistema curvilíneo $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los factores de escala h_u, h_v;
- c) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$;
- d) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. Forma inversa: $\nabla u = (2x, -2y)$ y $\nabla v = (2y, 2x)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = 4xy - 4xy = 0$: **ortogonal**.
3. $|\nabla u| = |\nabla v| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
4. b) $h_u = h_v = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$.
5. c) $\hat{e}_u = \dfrac{(x, -y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\hat{e}_v = \dfrac{(y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
6. d) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{4(x^2 + y^2)}$.
7. En u, v: $u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, así que $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$.

   Comprobación: $h_u h_v = \frac{1}{4(x^2+y^2)}$.

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{4(x^2 + y^2)} = \dfrac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$. Es la inversa de la transformación del ejercicio 2B.5.3.

Ejercicio 2B.5.5 · Parámetro que hace ortogonal al sistema

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 2.

Sea la transformación $x = 2u^2 + v^2$, $y = u^2 + av^2$, $z = 3w$.

- a) Determine el valor de a para que la transformación sea ortogonal.
- b) Exprese los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en términos de los vectores base $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$.

Resolución.

1. Forma directa: $\vec{r}_u = (4u,\ 2u,\ 0)$, $\vec{r}_v = (2v,\ 2av,\ 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 3)$.
2. $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$ para todo a.
3. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 8uv + 4a\,uv = 4uv(2 + a) = 0 \Rightarrow a = -2$.
4. Con $a = -2$ y $u, v > 0$: $h_u = \sqrt{16u^2 + 4u^2} = 2\sqrt{5}\,u$, $h_v = \sqrt{4v^2 + 16v^2} = 2\sqrt{5}\,v$, $h_w = 3$.
5. $\hat{e}_u = \frac{(2,1,0)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_w = \hat{k}$.
6. b) Los coeficientes de $\hat{\imath}$ son las primeras componentes de cada $\hat{e}$, y así sucesivamente.

Resultado: $a = -2$; $\hat{\imath} = \dfrac{2\,\hat{e}_u + \hat{e}_v}{\sqrt{5}}$, $\hat{\jmath} = \dfrac{\hat{e}_u - 2\,\hat{e}_v}{\sqrt{5}}$, $\hat{k} = \hat{e}_w$ (para $u, v > 0$). Comprobación: $|J| = 60uv = h_u h_v h_w$.

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = \frac{1}{2}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 2B.5.2 · Área de la región imagen

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $u = 4x + 8y + 1$, $v = y - 2x$, y sea R_{xy} una región del plano XY de área 5 [u^2]. Determine:

- a) si el sistema (u, v) es ortogonal;
- b) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$ y los factores de escala h_u, h_v;
- c) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$;
- d) el área de la región R_{uv}, imagen de R_{xy} bajo la transformación.

Resolución.

1. $\nabla u = (4, 8)$ y $\nabla v = (-2, 1)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = -8 + 8 = 0$: **ortogonal**.
3. b) $|\nabla u| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ y $|\nabla v| = \sqrt{5}$. Entonces $\hat{e}_u = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(-2,1)}{\sqrt{5}}$, $h_u = \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$ y $h_v = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
4. c) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 16 = 20$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{20}$.
5. d) Cada elemento de área se multiplica por $\left|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right| = 20$: $A_{uv} = 20 \cdot 5 = 100$.

Resultado: ortogonal; $h_u = \frac{\sqrt{5}}{20}$, $h_v = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $J = \frac{1}{20}$; **área de R_{uv} = 100 u²**.

Ejercicio 2B.5.3 · Forma directa y transformación de un vector

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 3.

Sean las ecuaciones de transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

- a) Demuestre que el sistema es ortogonal.
- b) Calcule los jacobianos $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ y $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- c) Transforme el vector $\vec{a} = 2\hat{\jmath}$ a coordenadas curvilíneas (u, v), con $u > 0$ y $v > 0$.

Resolución.

1. Forma directa: $\vec{r}_u = (2u,\ 2v)$ y $\vec{r}_v = (-2v,\ 2u)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -4uv + 4uv = 0$: **ortogonal**.
3. $h_u = h_v = \sqrt{4u^2 + 4v^2} = 2\sqrt{u^2 + v^2}$.
4. b) $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2)$, que coincide con $h_u h_v$; $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}$.
5. c) $\hat{e}_u = \frac{(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ y $\hat{e}_v = \frac{(-v, u)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.
6. $a_u = (0, 2) \cdot \hat{e}_u = \frac{2v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ y $a_v = (0, 2) \cdot \hat{e}_v = \frac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Resultado: $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 4(u^2 + v^2)$, $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{4(u^2+v^2)}$ y $\vec{a} = \frac{2v\,\hat{e}_u + 2u\,\hat{e}_v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«divergencia», «rotacional» en cilíndricas o en el sistema UVW; «¿es solenoidal?»	divergencia y rotacional	2B.3.6
«laplaciano», «función armónica»	laplaciano	2B.3.7

2B.3 Procedimientos

2B.3.1 Forma directa: dan $x(u, v, w)$

1. Deriva cada componente: $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$. Si la transformación es lineal, los vectores son las **columnas** de coeficientes.
2. Ortogonalidad: los tres productos punto. Si hay un parámetro, iguala a cero y despeja.
3. $h_u = |\vec{r}_u|$, **con raíz**.
4. $\hat{e}_u = \dfrac{\vec{r}_u}{h_u}$.
5. $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \det[\vec{r}_u\ \vec{r}_v\ \vec{r}_w]$. Si piden el otro, inviértelo.
6. Comprueba: $|J| = h_u h_v h_w$ si es ortogonal.

2B.3.2 Forma inversa: dan $u(x, y)$

1. Gradientes: $\nabla u = (u_x, u_y)$ y $\nabla v = (v_x, v_y)$.
2. Ortogonalidad: $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
3. Si es ortogonal: $h_u = \dfrac{1}{|\nabla u|}$ (**uno entre**, con raíz) y $\hat{e}_u = \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$.
4. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$, y el que casi siempre se pide es $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$.
5. Si piden el resultado en u, v, busca una identidad: por ejemplo, $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$.
6. Área de la imagen: $A_{uv} = \left|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right| A_{xy}$ cuando el jacobiano es constante.

2B.3.3 Sistema no ortogonal

1. Escribe el producto punto distinto de cero y concluye «el sistema **no** es ortogonal».
2. El jacobiano se calcula igual.
3. Si piden h o $\hat{e}$: despeja la transformación inversa, arma $\vec{r}(u, v)$ y usa $h_u = |\vec{r}_u|$ y $\hat{e}_u = \vec{r}_u / h_u$. La fórmula $h_u = 1/|\nabla u|$ **no** vale aquí.
4. No se proyectan vectores con productos punto: la base no es ortogonal.

2B.3.4 Expresar un vector en la base curvilínea

1. Demuestra primero que el sistema es ortogonal.
2. Calcula $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$.
3. $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$, $a_v = \vec{a} \cdot \hat{e}_v$, $a_w = \vec{a} \cdot \hat{e}_w$, y escribe $\vec{a} = a_u\hat{e}_u + a_v\hat{e}_v + a_w\hat{e}_w$.
4. Para $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$: sus coeficientes son las componentes x, y y z de cada $\hat{e}$.

2B.3.5 Gradiente

1. Calcula h_u, h_v, h_w.
2. Deriva f respecto a cada coordenada curvilínea.

3. Divide cada derivada entre **su** factor de escala y multiplica por su $\hat{e}$.

2B.3.6 Divergencia y rotacional

1. Si el campo viene en cartesianas y lo piden en cilíndricas, obtén F_r, F_θ y F_z con las fórmulas de 2B.1 y sustituye $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.
2. Escribe la fórmula general con los h del sistema.
3. En el rotacional: comprueba que el orden (u, v, w) da jacobiano positivo (en esféricas, (ρ, ϕ, θ)); arriba $h_i\hat{e}_i$, abajo h_iF_i, todo dividido entre $h_uh_vh_w$. Desarrolla término a término, con el signo menos de la segunda componente.
4. Solenoidal: divergencia igual a cero. Irrotacional: rotacional igual al vector cero.

2B.3.7 Laplaciano

1. Identifica el sistema más cómodo: si f depende de $x^2+y^2+z^2$, usa esféricas; si depende de x^2+y^2, cilíndricas; si viene dada en (u, v, w), el sistema dado.
2. Calcula los h y escribe la fórmula general.
3. Deriva desde adentro hacia afuera y simplifica.
4. Si piden el valor en un punto, sustituye al final.

2B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas definido por $u = -x + 3y$, $v = 3x + y$. Determine:

- a) si el sistema (u, v) es ortogonal;
- b) los vectores unitarios $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$;
- c) los factores de escala h_u, h_v;
- d) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Datos: forma **inversa** (u y v en función de x y y).

Planteamiento. Se trabaja con los gradientes y, al final, se invierte el jacobiano. No se despeja nada.

Resolución.

1. $\nabla u = (-1,\ 3)$ y $\nabla v = (3,\ 1)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = (-1)(3) + (3)(1) = 0$: el sistema **sí es ortogonal**.
3. $|\nabla u| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ y $|\nabla v| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
4. b) $\hat{e}_u = \dfrac{-\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}}{\sqrt{10}}$ y $\hat{e}_v = \dfrac{3\hat{\imath} + \hat{\jmath}}{\sqrt{10}}$.
5. c) $h_u = h_v = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
6. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (3)(3) = -10$.
7. d) $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{-10} = -\dfrac{1}{10}$.
8. Comprobación: $h_uh_v = \frac{1}{10} = |J|$.

Resultado: ortogonal; $\hat{e}_u = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}$, $\hat{e}_v = \frac{(3,1)}{\sqrt{10}}$; $h_u = h_v = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{10}$.

> Las transformaciones lineales de los exámenes recientes se resuelven con pura aritmética: las derivadas son los coeficientes. Lo único que hay que decidir es si se dieron $x(u, v)$ o $u(x, y)$.

2B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2B.5.1 · Transformación lineal inversa

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema $u = x - \sqrt{3}\,y$, $v = \sqrt{3}\,x + y$. Determine si es ortogonal, los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$, los factores de escala h_u, h_v y el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. Forma inversa: $\nabla u = (1, -\sqrt{3})$, $\nabla v = (\sqrt{3}, 1)$.
2. $\nabla u \cdot \nabla v = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$: **ortogonal**.
3. $|\nabla u| = |\nabla v| = \sqrt{1+3} = 2$, así que $h_u = h_v = \frac{1}{2}$.
4. $\hat{e}_u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\hat{e}_v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$. Comprobación: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

4B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«área de la porción de la superficie $z = \ldots$ dentro del cilindro…»	área de superficie	4B.3.1
$\iint_S f\,dS$, «integral de superficie»	integral de superficie de una función	4B.3.2
«flujo a través de la superficie $z = \ldots$», sin tapa, «orientada hacia…»	flujo directo por una superficie abierta	4B.3.3
$\iiint_V f\,dV$, «sólido acotado por…»	integral triple	4B.3.4
«flujo neto», «superficie cerrada», esfera, cilindro con tapas, cono y plano, caja	teorema de Gauss	4B.3.5
lo mismo, con una divergencia que no es constante	Gauss con simetría o integrando	4B.3.6
«¿es más el fluido que entra del que sale en el punto A?»	signo de la divergencia	4B.3.7
$\vec{F} = \dfrac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ sobre una esfera	campo radial unitario	4B.3.8
«circulación», «mediante el teorema de Stokes», curva cerrada en el espacio	teorema de Stokes	4B.3.9

4B.3 Procedimientos

4B.3.1 Área de una superficie

1. Si la superficie es $z = g(x, y)$, calcula g_x, g_y y $\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$. Si es paramétrica, calcula $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ y su norma.
2. Identifica la sombra R (el cilindro que la corta suele darla).
3. Escribe $A = \iint_R \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dA$ y pasa a polares si R es un disco.
4. La integral típica es $\displaystyle\int r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}$.

4B.3.2 Integral de superficie de una función

1. Parametriza la superficie con la tabla de 4B.1 y escribe dS.
2. Escribe los límites de los parámetros con las restricciones del enunciado (primer octante: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$).
3. Sustituye la parametrización en f y multiplica por el factor de dS.
4. Integra; separa en producto de integrales cuando se pueda.

4B.3.3 Flujo directo por una superficie abierta

1. Escribe la superficie como $z = g(x, y)$ y su normal hacia arriba $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$. Si piden la orientación hacia la parte negativa del eje Z, usa $-\vec{N}$.
2. Sustituye $z = g(x, y)$ en $\vec{F}$ y calcula $\vec{F} \cdot \vec{N}$.

3.3 Procedimientos

3.3.1 Integral de línea de un campo escalar

1. Parametriza la curva: $\vec{r}(t)$ y los límites de t (véase la tabla de 3.1).
2. Calcula $\vec{r}\,'(t)$ y su norma $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. En un segmento es la longitud $|B - A|$; en una circunferencia de radio R, es R.
3. Sustituye $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en f.
4. Integra $\displaystyle\int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$.

3.3.2 Trabajo parametrizando la curva

1. Escribe $\vec{r}(t)$ y encuentra los valores de t que corresponden a A y a B sustituyendo sus coordenadas. Por ejemplo, en $(3\cos t,\ \operatorname{sen} t)$ el punto $(3, 0)$ corresponde a $t = 0$ y el $(0, 1)$ a $t = \frac{\pi}{2}$.
2. Deriva cada componente: $\vec{r}\,'(t)$.
3. Sustituye la curva en el campo: $\vec{F}(\vec{r}(t))$.
4. Haz el producto punto $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$ y simplifica; casi siempre aparece $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
5. Integra de t_A a t_B. Si la curva tiene varios tramos, suma las integrales.

3.3.3 ¿Es conservativo? El rotacional

1. Identifica P, Q y R.
2. Calcula aparte las seis derivadas cruzadas:

	∂_x	∂_y	∂_z
P	—	P_y	P_z
Q	Q_x	—	Q_z
R	R_x	R_y	—

3. Compara las tres parejas: R_y con Q_z, R_x con P_z, Q_x con P_y.
4. Escribe el rotacional con el patrón de signos $+ - +$: $\nabla\times\vec{F} = \big(R_y - Q_z,\ -(R_x - P_z),\ Q_x - P_y\big)$.
5. Si las tres parejas son iguales, $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$: el campo es conservativo (en $\mathbb{R}^3$ o en una región simplemente conexa) y la integral es independiente de la trayectoria. Sigue con 3.3.4.
6. Si alguna pareja es distinta, el campo no es conservativo: sigue con 3.3.2.

3.3.4 Función potencial y trabajo

1. Integra P respecto a x, con y y z como constantes: $\varphi = \int P\,dx + g(y, z)$.
2. Deriva ese φ respecto a y, iguala a Q y despeja g_y.
3. Integra g_y respecto a y: $g = \cdots + h(z)$. Actualiza φ.
4. Deriva respecto a z, iguala a R, despeja $h'(z)$ e integra.
5. **Comprueba** que $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$ y $\varphi_z = R$.
6. Calcula $W = \varphi(B) - \varphi(A)$: **final menos inicial**.

Es el mismo método que el de las ecuaciones diferenciales exactas, con una variable más.

3.3.5 Constantes para que el campo sea conservativo y solenoidal

1. Calcula el rotacional dejando las constantes como letras (3.3.3).
2. Cada componente del rotacional igualada a cero es una ecuación.
3. Si piden que sea solenoidal, agrega $P_x + Q_y + R_z = 0$.
4. Resuelve el sistema, sustituye las constantes en $\vec{F}$ y, si lo piden, obtén φ con 3.3.4.

3.3.6 Trabajo en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas

1. Escribe los factores de escala: polares y cilíndricas $(1, r, 1)$; esféricas $(1, \rho\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho)$.
2. Forma la diferencial $\vec{F}\cdot d\vec{r} = h_1F_1\,dq_1 + h_2F_2\,dq_2 + h_3F_3\,dq_3$. En cilíndricas, la componente F_θ **se multiplica por** r.
3. Busca φ con $\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i} = h_iF_i$, con el método de 3.3.4.
4. Si existe, $W = \varphi(B) - \varphi(A)$ con A y B en las mismas coordenadas del campo. No hace falta pasar a cartesianas ni parametrizar la recta.
5. Si no existe y el camino es un arco de circunferencia r = constante, entonces $dr = 0$ y solo queda $\displaystyle\int F_\theta\, r\, d\theta$.
6. Si los puntos vienen en cartesianas y el campo en polares, convierte los puntos: $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y θ según el cuadrante.

3.3.7 Curva cerrada

1. Calcula el rotacional.
2. Si $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$ y el campo está definido en todo $\mathbb{R}^3$ (o en una región simplemente conexa que contenga la curva), entonces $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. No parametrices la curva.
3. Si no es cero, parametriza (3.3.2) o, en el plano, aplica el teorema de Green (Unidad 4, parte A).

3.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 4.

Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = (8xy^3z)\,\hat{\imath} + (12x^2y^2z)\,\hat{\jmath} + (4x^2y^3)\,\hat{k}$ cuando la partícula se desplaza a lo largo de la hélice $\vec{r}(t) = (2\cos t)\,\hat{\imath} + (2\,\mathrm{sen}\,t)\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}$, desde el punto $A(2,0,0)$ hasta el punto $B\left(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Datos: $P = 8xy^3z$, $Q = 12x^2y^2z$, $R = 4x^2y^3$; $A(2,0,0)$, $B\left(1,\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Planteamiento. Antes de parametrizar la hélice se revisa si el campo es conservativo: $W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ y, si $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$, $W = \varphi(B) - \varphi(A)$.

Resolución.

1. Derivadas: $P_y = 24xy^2z$, $P_z = 8xy^3$; $Q_x = 24xy^2z$, $Q_z = 12x^2y^2$; $R_x = 8xy^3$, $R_y = 12x^2y^2$.
2. Rotacional: $R_y - Q_z = 0$, $-(R_x - P_z) = 0$, $Q_x - P_y = 0$. El campo es **conservativo** y la forma de la hélice ya no importa.
3. $\varphi = \int 8xy^3z\,dx = 4x^2y^3z + g(y,z)$.
4. $\varphi_y = 12x^2y^2z + g_y = Q = 12x^2y^2z \Rightarrow g_y = 0$, así que $g = h(z)$.

- $\nabla\cdot\vec{F} > 0$ en un punto: es una **fuente**, sale más fluido del que entra.
- $\nabla\cdot\vec{F} < 0$: es un **sumidero**, entra más del que sale.
- $\nabla\cdot\vec{F} = 0$ en todo el dominio: el campo es **solenoidal**.

Teorema de Gauss (de la divergencia). Si S es una superficie **cerrada** que encierra el sólido V y $\hat{n}$ es la normal exterior:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

Si la divergencia es una constante c, el flujo es c por el volumen del sólido y **no hay que integrar**.

Rotacional y teorema de Stokes.

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\right)$$

Si C es la frontera de una superficie S:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\,dS$$

- La integral de la izquierda es la **circulación** (o el trabajo en una curva cerrada).
- Sirve **cualquier** superficie con frontera C; se elige la más sencilla, casi siempre el pedazo de plano que encierra la curva.
- **Orientación (regla de la mano derecha):** C antihoraria vista desde arriba corresponde a la normal hacia arriba. Si C va en sentido horario, el signo cambia.
- El teorema de Green es el caso en que S está en el plano XY.

Simetría. Si el sólido o la superficie es simétrico respecto al plano $x = 0$ (por ejemplo, una esfera, un cilindro o un cono centrados en el eje Z), entonces $\iiint_V x\,dV = 0$; igual con y. Una esfera centrada en el origen también da $\iiint_V z\,dV = 0$.

Volúmenes que se usan.

Sólido	Volumen
Esfera de radio a	$\frac{4}{3}\pi a^3$
Semiesfera	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Cilindro	$\pi r^2 h$
Cono	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Paraboloide $z = h - x^2 - y^2$ sobre $z = 0$	$\frac{1}{2}\pi h^2$
Caja	$a\,b\,c$
Área de la esfera	$4\pi a^2$

Superficie	Parametrización	dS	Normal unitaria exterior
Cilindro $x^2+y^2=a^2$	$(a\cos\theta,\ a\operatorname{sen}\theta,\ z)$	$a\,d\theta\,dz$	$\hat{n}=(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ 0)$
Gráfica $z=g(x,y)$	$(x,\ y,\ g(x,y))$	$\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dA$	$\pm\frac{(-g_x,-g_y,1)}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}$
Plano $z=c$	$(x,\ y,\ c)$	dA	$\pm\hat{k}$

En la esfera, $0\le\phi\le\pi$ (desde el polo norte) y $0\le\theta\le2\pi$.

Área de una superficie e integral de superficie.

$$A(S)=\iint_S dS=\iint_D\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|du\,dv,\qquad \iint_S f\,dS=\iint_D f\big(\vec{r}(u,v)\big)\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|du\,dv$$

Flujo. El flujo de un campo $\vec{F}$ a través de una superficie orientada es

$$\iint_S\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS=\iint_D\vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\big(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\big)\,du\,dv$$

- Mide cuánto campo **atraviesa** la superficie. Si se invierte la normal, el flujo cambia de signo.
- En una superficie **cerrada** se usa la normal **exterior**: un flujo positivo significa que sale más campo del que entra.
- En la forma de la derecha no se divide entre $|\vec{N}|$: la norma se cancela con la de dS.

Integral triple. Para f continua en un sólido V, $\iiint_V f\,dV$ es el límite de las sumas de $f\,\Delta V$. Con $f=1$ da el **volumen**. Se calcula con integrales reiteradas: z de piso a techo, luego la sombra en el plano XY.

Coordenadas	Cambio	dV
Cilíndricas	$x=r\cos\theta,\ y=r\operatorname{sen}\theta,\ z=z$	$r\,dr\,d\theta\,dz$
Esféricas	$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,$ $z=\rho\cos\phi$	$\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

El factor de dV es el jacobiano de la transformación ($|J|=r$ en cilíndricas, $\rho^2\operatorname{sen}\phi$ en esféricas).

Divergencia. Para $\vec{F}=P\,\hat{\imath}+Q\,\hat{\jmath}+R\,\hat{k}$:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Si $\vec{F}=F_r\,\hat{e}_r+F_\theta\,\hat{e}_\theta+F_z\,\hat{e}_z$ está en cilíndricas:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

5. $\varphi_z=4x^2y^3+h'(z)=R=4x^2y^3\Rightarrow h'(z)=0$. Entonces $\varphi=4x^2y^3z$.
6. $\varphi(B)=4\cdot1\cdot(\sqrt{3})^3\cdot\frac{\pi}{3}=4\cdot3\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}\,\pi$ y $\varphi(A)=0$, porque $y=0$.

Resultado: $W=\varphi(B)-\varphi(A)=4\sqrt{3}\,\pi$ unidades de trabajo.

La hélice está en el enunciado para tentar a parametrizar. Con el rotacional nulo, el trabajo solo depende de los extremos. El mismo valor se obtiene integrando sobre la hélice de $t=0$ a $t=\frac{\pi}{3}$.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Integral de un campo escalar sobre un segmento

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 3.

Calcule la integral de línea $\int_C(x+y)\,ds$, donde C es el segmento de recta que va del punto $A(0,0)$ al punto $B(4,3)$.

Resolución.

1. $\vec{r}(t)=A+t(B-A)=(4t,\ 3t)$, $0\le t\le1$.
2. $\vec{r}\,'=(4,3)$, de donde $|\vec{r}\,'|=\sqrt{16+9}=5$.
3. $f(\vec{r}(t))=4t+3t=7t$.
4. $\displaystyle\int_0^1 7t\cdot5\,dt=35\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{35}{2}$.

Resultado: $\int_C(x+y)\,ds=\frac{35}{2}$.

Ejercicio 3.5.2 · Integral de un campo escalar sobre una hélice

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 4.

Calcule $\int_C f(x,y,z)\,ds$, donde $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy$ y C es la hélice $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen}t$, $z=t$, recorrida en el intervalo $[-2\pi,0]$.

Resolución.

1. $\vec{r}\,'=(-\operatorname{sen}t,\ \cos t,\ 1)$, de donde $|\vec{r}\,'|=\sqrt{\operatorname{sen}^2t+\cos^2t+1}=\sqrt{2}$.
2. $f(\vec{r}(t))=\cos^2t+\operatorname{sen}^2t+t^2+2\operatorname{sen}t\cos t=1+t^2+\operatorname{sen}2t$.
3. $\displaystyle\int_C f\,ds=\sqrt{2}\int_{-2\pi}^{0}\big(1+t^2+\operatorname{sen}2t\big)\,dt=\sqrt{2}\left[t+\frac{t^3}{3}-\frac{\cos2t}{2}\right]_{-2\pi}^{0}$.
4. El término del coseno vale $-\frac{1}{2}$ en los dos límites y se cancela. Queda $\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right)$.

Resultado: $\int_C f\,ds=\dfrac{2\sqrt{2}\,\pi\,(3+4\pi^2)}{3}$.

Ejercicio 3.5.3 · Campo no conservativo sobre una elipse

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 4.

Obtenga $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y)=-y\,\hat{\imath}+x\,\hat{\jmath}$ y C es la parte de la elipse $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ que se encuentra en el primer cuadrante, desde el punto $P(3,0)$ hasta el punto $Q(0,1)$.

Resolución.

1. $Q_x - P_y = 1 - (-1) = 2 \neq 0$: el campo **no** es conservativo. Hay que parametrizar.
2. $\vec{r}(t) = (3\cos t,\ \operatorname{sen} t)$. En P: $t = 0$; en Q: $t = \frac{\pi}{2}$.
3. $\vec{r}\,'(t) = (-3\operatorname{sen} t,\ \cos t)$ y $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\operatorname{sen} t,\ 3\cos t)$.
4. $\vec{F} \cdot \vec{r}\,' = 3\operatorname{sen}^2 t + 3\cos^2 t = 3$.
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 3\,dt = \frac{3\pi}{2}$.

Resultado: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 3.5.4 · Trabajo contra la gravedad

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 5.

Una ardilla que pesa 1.2 lb sube a un árbol cilíndrico siguiendo la trayectoria helicoidal $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 4t$, con $0 \le t \le 8\pi$ y distancias en pies. ¿Cuánto trabajo realiza?

Datos: $w = 1.2$ [lb] $= \frac{6}{5}$ [lb]; $0 \le t \le 8\pi$; distancias en [ft].

Planteamiento. Para subir, la ardilla aplica una fuerza igual a su peso hacia arriba: $\vec{F} = (0,\ 0,\ \frac{6}{5})$. Es un campo constante, conservativo, con $\varphi = \frac{6}{5}z$.

Resolución.

1. Con la parametrización: $\vec{r}\,' = (-\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 4)$ y $\vec{F} \cdot \vec{r}\,' = \frac{6}{5} \cdot 4 = \frac{24}{5}$.
2. $\displaystyle W = \int_0^{8\pi} \frac{24}{5}\,dt = \frac{24}{5} \cdot 8\pi = \frac{192\pi}{5}$.
3. Con la función potencial: $\Delta z = 4(8\pi) - 0 = 32\pi$ y $W = \frac{6}{5} \cdot 32\pi = \frac{192\pi}{5}$. Las vueltas alrededor del tronco no cuentan.

Resultado: $W = \frac{192\pi}{5}$ **lb·ft** ≈ 120.6 lb·ft.

Ejercicio 3.5.5 · Independencia de la trayectoria

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 4.

Sea la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = e^{2z}\,\hat{\imath} + 3y^2\,\hat{\jmath} + 2xe^{2z}\,\hat{k}$ y C es una curva que une los puntos $A(1, 1, \ln 3)$ y $B(2, 2, \ln 3)$.

- a) Demuestre que la integral es independiente de la trayectoria.
- b) Obtenga una función potencial de $\vec{F}$.
- c) Calcule el valor de la integral.

Resolución.

1. a) $R_y - Q_z = 0 - 0 = 0$; $-(R_x - P_z) = -(2e^{2z} - 2e^{2z}) = 0$; $Q_x - P_y = 0 - 0 = 0$. Como $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$, la integral es **independiente de la trayectoria**.
2. b) $\varphi = \int e^{2z}\,dx = xe^{2z} + g(y,z)$.
3. $\varphi_y = g_y = 3y^2 \Rightarrow g = y^3 + h(z)$.
4. $\varphi_z = 2xe^{2z} + h'(z) = 2xe^{2z} \Rightarrow h' = 0$. Entonces $\varphi = xe^{2z} + y^3$.
5. c) $e^{2\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)^2 = 9$. $\varphi(B) = 2 \cdot 9 + 8 = 26$ y $\varphi(A) = 9 + 1 = 10$.

Resultado: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 26 - 10 = \mathbf{16}$.

Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno calculará integrales múltiples y las aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos, así como utilizará los teoremas de Gauss y Stokes para calcular integrales de superficie.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 33 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026, y en los 11 extraordinarios. El **flujo** sale en 9 de los 11 extraordinarios y el teorema de Stokes, en 3. Suele ser el problema 6 (a veces también el 5) y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad. El flujo con el teorema de Gauss, solo, se aprende en 2.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4B.1 y el procedimiento 4B.3.5 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 4B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de flujo 4B.5.7 a 4B.5.14 con cronómetro (15 min cada uno).
  4. Después, Stokes (4B.5.5 y 4B.5.6) y, si queda tiempo, las integrales de superficie (4B.5.1 a 4B.5.3).

4B.1 Conceptos y expresiones

Superficies. Una superficie se da de dos maneras:

- **Explícita:** $z = g(x,y)$ sobre una región R del plano XY (su sombra).
- **Paramétrica:** $\vec{r}(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$ con (u,v) en una región D.

Vector normal y elemento de superficie.

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v, \qquad dS = \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| du\,dv$$

Para $z = g(x,y)$, con $\vec{r}(x,y) = (x,\ y,\ g)$:

$$\vec{N} = (-g_x,\ -g_y,\ 1) \ \text{(apunta hacia arriba)}, \qquad dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dA$$

Superficies frecuentes.

Superficie	Parametrización	dS	Normal unitaria exterior
Esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$	$(a\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ a\cos\phi)$	$a^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$	$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{a}$

- Disco πa^2 · elipse πab · cilindro $\pi r^2 h$ · cono $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

4A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja la región (o la sombra del sólido) con sus intersecciones.
2. Decide coordenadas: cartesianas si las fronteras son rectas y parábolas; polares si hay x^2+y^2; u, v si el enunciado las sugiere.
3. Escribe el elemento de área **con su jacobiano** antes de poner límites.
4. Escribe los límites: los de adentro pueden tener letras; los de afuera, solo números.
5. Para Green: P, Q, $Q_x - P_y$, la región y el sentido, en ese orden.
6. Integra de adentro hacia afuera, un renglón por integral, y recuadra el resultado exacto.

Si no se encuentra el camino, escribe el dibujo, el elemento de área, los límites y la integral planteada completa. El planteamiento correcto también cuenta.

Ejercicio 3.5.6 · Campo conservativo con senos y cosenos

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = -(2y^2\cos z)\,\hat{\imath} - (4xy\cos z)\,\hat{\jmath} + (2xy^2\operatorname{sen} z)\,\hat{k}$ al desplazar una partícula del punto $A\left(\sqrt{2}, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ al punto $B\left(\sqrt{2}, 2, \frac{3\pi}{4}\right)$ a lo largo de la recta que los une.

Resolución.

1. $Q_z = -4xy\,(-\operatorname{sen} z) = 4xy\operatorname{sen} z$ y $R_y = 4xy\operatorname{sen} z$: componente $\hat{\imath}$ nula.
2. $P_z = -2y^2(-\operatorname{sen} z) = 2y^2\operatorname{sen} z$ y $R_x = 2y^2\operatorname{sen} z$: componente $\hat{\jmath}$ nula.
3. $P_y = -4y\cos z$ y $Q_x = -4y\cos z$: componente $\hat{k}$ nula. El campo es conservativo y la recta no importa.
4. $\varphi = \int -2y^2\cos z\,dx = -2xy^2\cos z + g(y,z)$. Al derivar: $\varphi_y = -4xy\cos z + g_y = Q \Rightarrow g_y = 0$, y $\varphi_z = 2xy^2\operatorname{sen} z + g_z = R \Rightarrow g_z = 0$. Entonces $\varphi = -2xy^2\cos z$.
5. $\varphi(B) = -2\sqrt{2}\cdot 4\cdot\cos\frac{3\pi}{4} = -8\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8$.
6. $\varphi(A) = -2\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2$.

Resultado: $W = 8 - (-2) =$ **10** unidades de trabajo.

Ejercicio 3.5.7 · Constantes para un campo solenoidal y conservativo

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 4.

Determine el valor de las constantes a, b y c de forma que el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x-by)\,\hat{\imath} + (y+ax)\,\hat{\jmath} + (bz-cy)\,\hat{k}$ sea solenoidal y conservativo a la vez. Con los valores obtenidos, encuentre la función potencial de $\vec{F}$.

Resolución.

1. Derivadas: $P_y = -b$, $P_z = 0$; $Q_x = a$, $Q_z = 0$; $R_x = 0$, $R_y = -c$.
2. Rotacional: $\big(-c-0,\ -(0-0),\ a-(-b)\big) = (-c,\ 0,\ a+b)$. Conservativo: $c = 0$ y $a = -b$.
3. Divergencia: $1 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = -2$, y entonces $a = 2$.
4. $\vec{F} = (x+2y)\,\hat{\imath} + (2x+y)\,\hat{\jmath} - 2z\,\hat{k}$.
5. $\varphi = \int (x+2y)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2xy + g(y,z)$; $\varphi_y = 2x + g_y = 2x + y \Rightarrow g = \frac{y^2}{2} + h(z)$; $\varphi_z = h'(z) = -2z \Rightarrow h = -z^2$.

Resultado: $a = 2$, $b = -2$, $c = 0$ y $\varphi = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - z^2$. El término $2xy$ aparece una sola vez.

Ejercicio 3.5.8 · Trabajo en coordenadas polares

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 4 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Sea el campo vectorial $\vec{F}(r,\theta) = (r\cos 2\theta)\,\hat{e}_r - (r\operatorname{sen} 2\theta)\,\hat{e}_\theta$. Calcule el trabajo realizado sobre una partícula a lo largo de la curva $x^2 + 2y + y^2 = 0$, del punto $A(0,-2)$ al punto $B(1,-1)$.

Planteamiento. En polares $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\,dr + F_\theta\, r\,d\theta = r\cos 2\theta\,dr - r^2\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$. Se busca φ con $\varphi_r = r\cos 2\theta$ y $\varphi_\theta = -r^2\operatorname{sen} 2\theta$.

Resolución.

1. $\varphi = \int r\cos 2\theta\, dr = \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta + g(\theta)$.
2. $\varphi_\theta = -r^2\operatorname{sen} 2\theta + g'(\theta) = -r^2\operatorname{sen} 2\theta \Rightarrow g' = 0$. Entonces $\varphi = \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, porque $r^2\cos 2\theta = r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = x^2 - y^2$.
3. El campo es conservativo y la curva (la circunferencia $x^2 + (y+1)^2 = 1$) ya no importa.
4. $\varphi(B) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$ y $\varphi(A) = \frac{1}{2}(0-4) = -2$.

Resultado: $W = 0 - (-2) = \mathbf{2}$ unidades de trabajo.

> Los puntos vienen en cartesianas y el campo en polares. Pasar φ a cartesianas evita calcular ángulos en el tercer y cuarto cuadrantes.

Ejercicio 3.5.9 · Trabajo en coordenadas esféricas

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 4.

Obtenga el trabajo que realiza el campo de fuerzas, definido en coordenadas esféricas por

$$\vec{F}(\rho,\theta,\phi) = \phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\rho + \frac{\phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi}\,\hat{e}_\theta + \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\phi,$$

sobre una partícula que se desplaza del punto $A\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ al punto $B\left(3, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$, dados también en coordenadas esféricas.

Planteamiento. Factores de escala $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho\operatorname{sen}\phi$, $h_\phi = \rho$. Como la letra ϕ ya es un ángulo, la función potencial se llama aquí f.

Resolución.

1. $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi\operatorname{sen}\theta\, d\rho + \frac{\phi\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi}\,\rho\operatorname{sen}\phi\, d\theta + \operatorname{sen}\theta\,\rho\, d\phi = \phi\operatorname{sen}\theta\, d\rho + \rho\phi\cos\theta\, d\theta + \rho\operatorname{sen}\theta\, d\phi$. El $\operatorname{sen}\phi$ se cancela.
2. $f = \int \phi\operatorname{sen}\theta\, d\rho = \rho\phi\operatorname{sen}\theta + g(\theta,\phi)$.
3. $f_\theta = \rho\phi\cos\theta + g_\theta = \rho\phi\cos\theta \Rightarrow g_\theta = 0$; $f_\phi = \rho\operatorname{sen}\theta + g_\phi = \rho\operatorname{sen}\theta \Rightarrow g_\phi = 0$. Entonces $f = \rho\phi\operatorname{sen}\theta$: la diferencial es exacta.
4. $f(B) = 3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\pi = 0$ y $f(A) = 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Resultado: $W = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ unidades de trabajo.

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = (\cos y - y^2\operatorname{sen}x - z^2)\hat{\imath} + (-x\operatorname{sen}y + 2y\cos x - 2)\hat{\jmath} + (1 - 2xz)\hat{k}$ cuando una partícula recorre una sola vez la trayectoria cerrada $x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}$ (hipocicloide de cuatro puntas).

Resultado: $W = 0$, porque $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$ y la curva es cerrada.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4A.6.7

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 6.

Empleando el teorema de Green, calcule $\oint_C (y-x)\,dx + (2x-y)\,dy$, donde C es la frontera de la región delimitada por $y = x$ y $y = x^2 - x$.

Resultado: $\frac{4}{3}$ (sentido positivo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4A.6.8

Adaptado de: Guía de estudio para presentar examen extraordinario de Cálculo Vectorial, 1986, ejemplo V.a.3.

Calcule $\iint_R (x^2 + y^2)\,dA$, donde R es la región limitada por $x + y = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 0$ y $x - y = 2$. Use $u = x + y$, $v = x - y$.

Resultado: $\frac{8}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

4A.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar el jacobiano:** en polares $dA = r\,dr\,d\theta$. Sin la r, el ejemplo 4A.4 da $\frac{4\pi}{3}$ en lugar de π.
2. **Radio contra radio al cuadrado:** $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de radio 3, no de radio 9; $x^2 + y^2 = 2$ tiene radio $\sqrt{2}$.
3. **Letras en los límites de afuera:** la integral exterior lleva solo números.
4. **Jacobiano del cambio de variable:** el que va en la integral es $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$, el **recíproco** del que se calcula con $u(x,y)$, $v(x,y)$, y siempre en **valor absoluto**.
5. **Orden de integración:** si una primitiva no existe ($\int e^{x^2}dx$), cambia el orden y recalcula los límites desde el dibujo.
6. **Cono de dos hojas:** $z^2 = x^2 + y^2$ es $z = \pm r$; la altura es $2r$.
7. **Límites de θ contra la región:** si la región es solo $y \geq 0$, θ va de 0 a π, no de 0 a 2π.
8. **Green al revés:** el integrando es $Q_x - P_y$, en ese orden. P acompaña a dx y Q a dy.
9. **Sentido de la curva:** Green da la integral en sentido antihorario; en sentido horario se cambia el signo.
10. **Integrales de vuelta completa:** $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$, pero $\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = 1$.

4A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Área: $A = \iint_R dA$ · volumen: $V = \iint_R (z_{techo} - z_{piso})\,dA$.
- Polares: $x^2 + y^2 = r^2$, $dA = r\,dr\,d\theta$.
- Cambio de variable: $dA = \left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$, con $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 1\Big/J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- Green: $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dA$, C antihoraria.
- Área con Green: $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.
- $\int r^n dr = \frac{r^{n+1}}{n+1}\cdot\int r\,e^{ar^2}dr = \frac{e^{ar^2}}{2a}\cdot\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Ejercicio propuesto 4A.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 5.

Obtenga $I = \iint_R \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) dx\,dy$, donde R es la región del primer cuadrante entre las circunferencias con centro en el origen y radios 1 y 2.

Resultado: $I = -\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4A.6.2

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo C, problema 5.

Calcule el área de la región del plano XY limitada por las gráficas de $xy = 7$ y $x + y = 8$.

Resultado: $A = 24 - 7\ln 7$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4A.6.3

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo C, problema 5.

Por medio de una integral doble, calcule el área de la región limitada por $x^2 + y^2 = 9$ y $x + y = 3$ (el segmento circular más pequeño).

Resultado: $A = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}(\pi - 2)$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 4A.6.4

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 5.

Calcule el área de la región que es interior a las curvas polares $r = e$ y $r = 2e\,\operatorname{sen}\theta$.

Resultado: $A = e^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4A.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 5.

Calcule el volumen limitado por las superficies $z = 0$, $y + z = 16$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Resultado: $V = 64\pi$ u³.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 4A.6.6

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 5.

Calcule $\oint_C xy\,dx + (x+y)\,dy$, donde C es la frontera de la región situada entre $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 16$, con $y \geq 0$.

Resultado: $\frac{7\pi}{2}$ (sentido positivo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 4.

Sea el campo de fuerzas $\vec{F}(r,\theta,z) = (rz^2\operatorname{sen}^2\theta)\,\hat{e}_r + (rz^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\hat{e}_\theta + (r^2z\operatorname{sen}^2\theta)\,\hat{e}_z$. Calcule el trabajo que efectúa en el movimiento de una partícula del punto $A\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ al punto $B(2,0,-1)$ a lo largo de la recta que los une. El campo y los puntos están en coordenadas cilíndricas circulares.

Resultado: $\varphi = \frac{1}{2}r^2z^2\operatorname{sen}^2\theta$ y $W = -1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 4 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Obtenga el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\vec{F}(r,\theta) = \theta\,\hat{e}_r - \hat{e}_\theta$ en el movimiento de una partícula desde el punto $A(2,0)$ hasta el punto $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ a lo largo del arco de circunferencia que los une. El campo y los puntos están en coordenadas polares.

Resultado: $W = -\pi$ (el campo no es conservativo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 4.

Sea $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\hat{\imath} + y^2\,\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$. Determine $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de la trayectoria C: $x = y^2$, $z = 0$, del punto $O(0,0,0)$ al punto $P(2,\sqrt{2},0)$.

Resultado: $\varphi = \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)$ y $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = (-y^3 - 2y + 2z^4)\,\hat{\imath} + (-2x - 3xy^2 + z)\,\hat{\jmath} + (y + 8xz^3 + 6)\,\hat{k}$ en el movimiento de una partícula a lo largo del segmento de recta que une al punto $A(-1,2,1)$ con el punto $B(1,0,1)$.

Resultado: $\varphi = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + yz + 6z$ y $W = -10$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 4.

Sea el campo de fuerzas $\vec{F}(r,\theta) = 4r^3\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_r + r^3\cos\theta\,\hat{e}_\theta$. Determine el trabajo que realiza al desplazar una partícula desde el punto $A(0,0)$ hasta el punto $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ a lo largo de la recta que los une. El campo y los puntos están en coordenadas polares.

Resultado: $\varphi = r^4\operatorname{sen}\theta$ y $W = 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 3.6.7

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 4.

Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath}$ cuando una partícula se desplaza sobre la trayectoria triangular con vértices en $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,1)$, recorrida en sentido antihorario.

Resultado: $W = -1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 3.6.8

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 3 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Determine si el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(\ln x + \sec^2(x+y)\big)\,\hat{\imath} + \left(\sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2}\right)\hat{\jmath} + \frac{z}{y^2+z^2}\,\hat{k}$$

es conservativo y solenoidal.

Resultado: es **conservativo**, con $\varphi = x\ln x - x + \tan(x+y) + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2)$, y **no es solenoidal**: $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{x} + 4\sec^2(x+y)\tan(x+y)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 3.6.9

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-2, problema 3.

Sea el campo $\vec{F}(r,\theta,z) = -\frac{z}{r^2}\sec^2\theta\,\hat{e}_r + \frac{2z}{r^2}\sec^2\theta\tan\theta\,\hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} + \frac{\tan^2\theta}{r}\right)\hat{e}_z$, en coordenadas cilíndricas. Compruebe que es conservativo y calcule el trabajo que realiza al mover una partícula del punto $A\left(1,\frac{\pi}{4},1\right)$ al punto $B(2,0,2)$.

Resultado: $\varphi = \frac{z}{r}\sec^2\theta$ y $W = -1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

3.7 Errores frecuentes

1. **Signo de la componente $\hat{\jmath}$ del rotacional:** lleva un menos delante, $-(R_x - P_z)$, o bien $P_z - R_x$. Escribe el determinante y el patrón $+\ -\ +$.
2. $|\vec{r}\,'|$ **en el lugar equivocado:** va en $\int_C f\,ds$ y **no** va en $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.
3. **Límites de t:** se encuentran sustituyendo A y B en $\vec{r}(t)$. Recorrer la curva de B a A cambia el signo del trabajo.
4. **Derivadas de seno y coseno:** $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$; con un menos delante, $(-\cos z)' = +\operatorname{sen} z$. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$. En el segundo cuadrante el coseno es negativo: $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. **Orden de la resta:** $W = \varphi(\text{final}) - \varphi(\text{inicial})$, nunca al revés.
6. **Términos repetidos en φ:** si $2xy$ ya salió al integrar P, no se vuelve a sumar al integrar Q. Por eso se integra una sola vez y luego se deriva y se compara.

Resolución.

1. $P = 4 + e^{\sqrt{x}}$, de donde $P_y = 0$. $Q = \operatorname{sen} y + 3x^2$, de donde $Q_x = 6x$.
2. Región: $4 \le r \le 9$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Se toma C en sentido positivo.
3. $\displaystyle\iint_R 6x\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_4^9 6r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta.$
4. En r: $\displaystyle\int_4^9 6r^2\,dr = 2\left(9^3 - 4^3\right) = 2(729-64) = 1330.$
5. En θ: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = 1.$

Resultado: 1330.

Ejercicio 4A.5.8 · Green sobre un triángulo

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 5.

Mediante el teorema de Green, evalúe $\displaystyle\oint_C xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$, donde C es el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(2,2)$ y $D(2,4)$, con orientación positiva.

Resolución.

1. $P = xy^2 \Rightarrow P_y = 2xy$; $Q = 2x^2y \Rightarrow Q_x = 4xy$. Entonces $Q_x - P_y = 2xy$.
2. Región: los lados AB y AD están sobre $y = x$ y $y = 2x$; el lado BD sobre $x = 2$. Así, $0 \le x \le 2$, $x \le y \le 2x$.
3. $\displaystyle\int_0^2\int_x^{2x} 2xy\,dy\,dx = \int_0^2 x\left[y^2\right]_x^{2x}dx = \int_0^2 x\,(4x^2 - x^2)\,dx = \int_0^2 3x^3\,dx.$
4. $\displaystyle= \tfrac{3}{4}x^4\Big|_0^2 = \tfrac{3}{4}\cdot 16 = 12.$

Resultado: 12.

Ejercicio 4A.5.9 · Área de una elipse con Green

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.

Por medio del teorema de Green, calcule el área de la región limitada por la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Resolución.

1. Forma canónica: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; semiejes 3 y 2.
2. Parametrización antihoraria: $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$. Entonces $dx = -3\operatorname{sen} t\,dt$ y $dy = 2\cos t\,dt$.
3. $x\,dy - y\,dx = \left(6\cos^2 t + 6\operatorname{sen}^2 t\right)dt = 6\,dt.$
4. $A = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} 6\,dt = \frac{1}{2}\cdot 12\pi.$

Resultado: $A = 6\pi$ u², que coincide con $\pi ab = \pi\cdot 3\cdot 2$.

4A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4A**.

Ejercicio 4A.5.5 · Volumen entre un cono y un cilindro

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 6.

Calcule el volumen de la región limitada por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$.

Resolución.

1. $z^2 = r^2 \Rightarrow z = \pm r$: el cono tiene **dos hojas**, una arriba y otra abajo del plano XY. El cilindro da la sombra $0 \le r \le 1$.
2. Techo $z = r$, piso $z = -r$; altura $r - (-r) = 2r$.
3. $V = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 2r \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\, d\theta$.

Resultado: $V = \frac{4\pi}{3}$ u³.

> Si solo se toma la hoja superior ($0 \le z \le r$) resulta $\frac{2\pi}{3}$. El enunciado no la restringe, así que la región incluye las dos hojas. Conviene escribirlo en la respuesta.

Ejercicio 4A.5.6 · Cambio de variable

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 5 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Calcule $\displaystyle\iint_D (x+y)\, e^{x^2-y^2}\, dA$ sobre la región D limitada por $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$ y $x + y = 3$. Sugerencia: use $u = x - y$, $v = x + y$.

Resolución.

1. Límites: $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 3$.
2. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$, así que $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2}$ y $dA = \frac{1}{2}\, du\, dv$.
3. Comprobación: $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{v-u}{2}$ dan $\left|\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
4. Integrando: $x + y = v$ y $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = uv$.
5. $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^3\int_0^2 v\, e^{uv}\, du\, dv$. Primero en u (v constante): $\displaystyle\int_0^2 v\, e^{uv}\, du = \left[e^{uv}\right]_{u=0}^{u=2} = e^{2v} - 1$.
6. En v: $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^3 \left(e^{2v} - 1\right) dv = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2v}}{2} - v\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^6}{2} - 3 - \frac{1}{2}\right)$.

Resultado: $\frac{e^6 - 7}{4}$.

> Si se integra primero en v aparece $\int \frac{e^{3u}}{u}\, du$, que no tiene primitiva elemental. El orden sí importa para poder calcular.

Ejercicio 4A.5.7 · Green entre dos cuartos de circunferencia

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 5.

Utilice el teorema de Green para calcular $\displaystyle\oint_C \left(4 + e^{\sqrt{x}}\right) dx + \left(\operatorname{sen} y + 3x^2\right) dy$, donde C es la frontera de la región entre dos cuartos de circunferencia del primer cuadrante, de radios 4 y 9.

7. **Factores de escala:** en polares y cilíndricas F_θ se multiplica por r; en esféricas, F_θ por $\rho \operatorname{sen}\phi$ y F_ϕ por ρ. Sin ellos la potencial no cuadra.
8. **Curva cerrada con rotacional nulo:** el trabajo es cero solo si el campo está definido en una región simplemente conexa que contenga la curva. Un campo como $\dfrac{-y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}}{x^2 + y^2}$ tiene rotacional nulo y circulación 2π alrededor del origen.
9. **«Recta» en cilíndricas o polares:** no significa que r, θ y z varíen linealmente. Con función potencial no importa: solo se usan A y B.
10. **Constantes:** $a + b = 0$ da $a = -b$; no se divide entre una constante que podría ser cero.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\int_C f\, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\, |\vec{r}\,'(t)|\, dt \cdot \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$.
- Segmento $\vec{r} = A + t(B - A)$, $t \in [0,1]$ · circunferencia $(x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\operatorname{sen} t)$ · elipse $(a\cos t,\ b\operatorname{sen} t)$.
- $\nabla \times \vec{F} = \left(R_y - Q_z,\ -(R_x - P_z),\ Q_x - P_y\right)$ · $\nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$.
- Conservativo: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \nabla\varphi \Rightarrow W = \varphi(B) - \varphi(A)$; curva cerrada $\Rightarrow W = 0$. Solenoidal: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
- Potencial: $\varphi = \int P\, dx + g(y,z) \longrightarrow$ derivar e igualar a $Q \longrightarrow$ derivar e igualar a $R \longrightarrow$ comprobar.
- $\vec{F}\cdot d\vec{r} = h_1F_1\, dq_1 + h_2F_2\, dq_2 + h_3F_3\, dq_3$ · polares y cilíndricas $h = (1, r, 1)$ · esféricas $h = (1, \rho\operatorname{sen}\phi, \rho)$.
- Gravedad: $W = w\,\Delta z$.
- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u' \cdot (\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u' \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi \cdot e^{2\ln 3} = 9$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe arriba qué se pide: $\int_C f\, ds$ (escalar) o $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (trabajo).
2. Para un trabajo, escribe P, Q y R, la tabla de seis derivadas y el rotacional con el patrón $+\ -\ +$.
3. Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, escribe «el campo es conservativo y la integral es independiente de la trayectoria».
4. Obtén φ y **compruébala** derivando.
5. Calcula $\varphi(B) - \varphi(A)$ con la tabla de senos y cosenos. Deja el resultado exacto y recuadrado, con unidades si las hay.
6. Si el rotacional no es nulo, parametriza: $\vec{r}(t)$, límites, $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{F}(\vec{r}(t))$ y el producto punto.

Si no se encuentra el camino, escribe el campo (P, Q, R), el determinante del rotacional con las seis derivadas, la frase «si $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$, entonces $W = \varphi(B) - \varphi(A)$» y el arranque $\varphi = \int P\, dx + g(y,z)$; o bien $\vec{r}(t)$, $\vec{r}\,'(t)$ y la integral planteada con sus límites. El planteamiento correcto también cuenta.

Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno calculará integrales múltiples y las aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos, así como utilizará los teoremas de Gauss y Stokes para calcular integrales de superficie.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 19 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026 (en 5 de los 11 extraordinarios). Suele ser el problema 5 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4A.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 4A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4A.5 con cronómetro (15 min cada uno). Empieza por 4A.5.3, 4A.5.5 y 4A.5.7.

4A.1 Conceptos y expresiones

Integral doble. Sea f continua en una región acotada R del plano XY. Se divide R en rectángulos pequeños de área ΔA y se suma $f\,\Delta A$ en cada uno; el límite de esas sumas es la integral doble

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

Toda función continua en una región cerrada y acotada es integrable.

Interpretación geométrica.

- Con $f=1$, la integral es el **área** de la región: $A=\iint_R dA$.
- Si $f\geq 0$, es el **volumen** del sólido que está debajo de la superficie $z=f(x,y)$ y arriba de R.
- El volumen entre dos superficies, un **techo** $z=z_2(x,y)$ y un **piso** $z=z_1(x,y)$, sobre la sombra R del sólido en el plano XY, es

$$V=\iint_R \big(z_2-z_1\big)\,dA$$

Integral reiterada. La integral doble se calcula como dos integrales sencillas, de adentro hacia afuera.

- Región de tipo I: $a\leq x\leq b$, $g_1(x)\leq y\leq g_2(x)$. Entonces $\displaystyle\iint_R f\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\,dy\,dx$.
- Región de tipo II: $c\leq y\leq d$, $h_1(y)\leq x\leq h_2(y)$. Entonces $\displaystyle\iint_R f\,dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\,dx\,dy$.

Ejercicio 4A.5.2 · Volumen con cambio de orden de integración

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 5.

Determine el volumen del sólido bajo la superficie $z=y\,e^{x^2}$ y sobre la región R del primer cuadrante acotada por $x=y^2$, $x=4$ y $y=0$.

Resolución.

1. La región: $0\leq y\leq 2$, $y^2\leq x\leq 4$, o bien $0\leq x\leq 4$, $0\leq y\leq\sqrt{x}$.
2. Si se integra primero en x aparece $\int e^{x^2}dx$, que no tiene primitiva elemental. Se integra **primero en** y.
3. $V=\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} y\,e^{x^2}\,dy\,dx$. En y, e^{x^2} es constante: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy=\frac{x}{2}$.
4. $V=\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{2}\,e^{x^2}\,dx$. Con $w=x^2$, $dw=2x\,dx$: $V=\frac{1}{4}\big[e^{x^2}\big]_0^4=\frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)$.

Resultado: $V=\frac{e^{16}-1}{4}$ u³.

Ejercicio 4A.5.3 · Integral sobre un anillo

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 5.

Calcule $\displaystyle\iint_R 4e^{2(x^2+y^2)}\,dA$, donde R es la región limitada por las circunferencias $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=9$.

Resolución.

1. Anillo: $2\leq r\leq 3$, $0\leq\theta\leq 2\pi$. El integrando es $4e^{2r^2}$ y $dA=r\,dr\,d\theta$.
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_2^3 4r\,e^{2r^2}\,dr\,d\theta$.
3. En r: con $w=2r^2$, $dw=4r\,dr$, así que $\displaystyle\int_2^3 4r\,e^{2r^2}dr=\big[e^{2r^2}\big]_2^3=e^{18}-e^8$.
4. En θ: el resultado no depende de θ; se multiplica por 2π.

Resultado: $2\pi\left(e^{18}-e^8\right)$.

Ejercicio 4A.5.4 · Área de un pétalo

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 5.

Utilice integrales dobles para calcular el área de la región delimitada por uno de los pétalos de la rosa $r=2\operatorname{sen}3\theta$.

Resolución.

1. Un pétalo va entre dos ceros consecutivos de $\operatorname{sen}3\theta$: $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$, con $0\leq r\leq 2\operatorname{sen}3\theta$.
2. $A=\displaystyle\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\operatorname{sen}3\theta} r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/3} 2\operatorname{sen}^2 3\theta\,d\theta$.
3. Con $\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$: $A=\displaystyle\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\operatorname{sen}6\theta}{6}\Big|_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}-0$.

Resultado: $A=\frac{\pi}{3}$ u².

4A.3.6 Área con el teorema de Green

1. Parametriza la frontera en sentido antihorario: elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x=a\cos t$, $y=b\,\mathrm{sen}\,t$, $0\le t\le 2\pi$.
2. Calcula $x\,dy-y\,dx$ en términos de t.
3. $A=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$.

4A.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 5.

Calcule el volumen de la región que está debajo de la superficie $z=2x^2+2y^2$, arriba del plano XY y en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$.

Datos: techo $z=2x^2+2y^2$; piso $z=0$; sombra: disco $x^2+y^2\le 1$ [u].

Planteamiento.

- El volumen es $V=\iint_R(z_{techo}-z_{piso})\,dA=\iint_R(2x^2+2y^2)\,dA$, con R el disco de radio 1.
- En polares: $2x^2+2y^2=2r^2$, $dA=r\,dr\,d\theta$, $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$.

Resolución.

1. $V=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^3\,dr\,d\theta$.
2. En r: $\displaystyle\int_0^1 2r^3\,dr=2\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.
3. En θ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$.

Resultado: $V=\pi$ u³.

> El cilindro de radio 1 y altura 2 (la altura del paraboloide en el borde) tiene volumen 2π. El sólido debajo del paraboloide ocupa exactamente la mitad.

4A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4A.5.1 · Área entre dos parábolas

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 5.

Mediante una integral doble, calcule el área de la región limitada por las parábolas $y^2=ax$ y $x^2=ay$, con $a>0$.

Resolución.

1. Intersecciones: de $x^2=ay$, $y=\frac{x^2}{a}$. En $y^2=ax$: $\frac{x^4}{a^2}=ax\Rightarrow x(x^3-a^3)=0$, así que $x=0$ o $x=a$.
2. Entre 0 y a, el techo es $y=\sqrt{ax}$ y el piso, $y=\frac{x^2}{a}$ (en $x=\frac{a}{2}$: $\frac{a}{\sqrt{2}}>\frac{a}{4}$).
3. $A=\displaystyle\int_0^a\int_{x^2/a}^{\sqrt{ax}}dy\,dx=\int_0^a\left(\sqrt{a}\,x^{1/2}-\frac{x^2}{a}\right)dx$.
4. $=\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}a^{3/2}-\frac{a^3}{3a}=\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{3}a^2$.

Resultado: $A=\frac{a^2}{3}$ u².

- Los límites de la integral interior pueden tener la otra variable; los de la exterior, **solo números**.
- Si una región es de los dos tipos, el resultado no depende del orden. Cuando una integral interior no tiene primitiva elemental ($\int e^{x^2}dx$, $\int\frac{e^{3u}}{u}du$), se **cambia el orden**.

Coordenadas polares. Con $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

$$x^2+y^2=r^2,\qquad dA=r\,dr\,d\theta$$

El factor r es el jacobiano de la transformación. Un disco, un anillo o un sector circular son «rectángulos» en r y θ:

Región	Límites
disco $x^2+y^2\le a^2$	$0\le r\le a$, $0\le\theta\le 2\pi$
anillo $a^2\le x^2+y^2\le b^2$	$a\le r\le b$, $0\le\theta\le 2\pi$
primer cuadrante	$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
semiplano $y\ge 0$	$0\le\theta\le\pi$
curva polar $r=g(\theta)$	$0\le r\le g(\theta)$, θ entre dos raíces de g

Cambio de variable. Si $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ transforma una región R' del plano UV en la región R del plano XY:

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\iint_{R'}f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right|du\,dv,\qquad J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$$

- En la integral va el **valor absoluto** del jacobiano: un área nunca es negativa.
- Si el enunciado da $u(x,y)$ y $v(x,y)$, es más rápido calcular el jacobiano inverso y usar el recíproco: $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\dfrac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$.
- Las fronteras de R dicen los límites: si R está limitada por $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$, $x+y=3$, con $u=x-y$ y $v=x+y$ la región nueva es el rectángulo $0\le u\le 2$, $0\le v\le 3$.

Teorema de Green. Sea C una curva cerrada simple, recorrida en **sentido positivo** (antihorario: la región queda a la izquierda), que limita una región R. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en R:

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

- Cambia una integral de línea difícil por una doble sencilla. Conviene cuando P o Q tienen términos sin primitiva ($e^{\sqrt{x}}$, sen y) que **desaparecen al derivar**: $e^{\sqrt{x}}$ no depende de y, así que no aparece en P_y.
- Si la curva se recorre en sentido horario, el resultado cambia de signo.
- Si la región tiene un hueco (un anillo), la frontera son las dos curvas: la exterior en sentido antihorario y la interior en sentido horario. Green se aplica igual sobre toda la región.

Área con el teorema de Green. Con $P = -\frac{y}{2}$ y $Q = \frac{x}{2}$, el integrando vale 1:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Geometría que se usa.

Figura	Área o volumen
Disco de radio a	πa^2
Elipse de semiejes a, b	πab
Triángulo	$\frac{1}{2}$ base × altura
Cilindro	$\pi r^2 h$
Cono	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Esfera	$\frac{4}{3}\pi r^3$

4A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«calcular el área de la región limitada por las curvas…», «mediante una integral doble»	área con integral doble	4A.3.1
«volumen del sólido bajo la superficie $z = \ldots$ y sobre la región R»	volumen con integral doble	4A.3.2
«volumen de la región limitada por las superficies…» (cono, paraboloide, cilindro)	volumen entre techo y piso	4A.3.2
$x^2 + y^2$ en el integrando o en las fronteras; circunferencias, anillos, sectores	polares	4A.3.3
«uno de los pétalos de la rosa $r = \ldots$», curvas dadas en polares	área en polares	4A.3.3
«Sugerencia: use $u = \ldots$, $v = \ldots$», fronteras rectas inclinadas $x \pm y = c$	cambio de variable	4A.3.4
$\oint_C P\,dx + Q\,dy$ sobre una curva **cerrada plana**, «mediante el teorema de Green»	teorema de Green	4A.3.5
«por medio del teorema de Green, calcular el área…»	área con Green	4A.3.6

4A.3 Procedimientos

4A.3.1 Área de una región con integral doble

1. **Dibuja** las curvas y sombrea la región.
2. Calcula los **puntos de intersección** igualando las ecuaciones.
3. Elige el orden: si la región tiene un «techo» y un «piso» como funciones de x, integra primero en y; si tiene «derecha» e «izquierda» como funciones de y, primero en x.

4. Escribe $A = \displaystyle\int_a^b \int_{\text{piso}}^{\text{techo}} dy\,dx = \int_a^b (\text{techo} - \text{piso})\,dx$.
5. Integra y comprueba que el resultado sea positivo.

4A.3.2 Volumen con integral doble

1. Identifica el **techo** $z_2(x, y)$ y el **piso** $z_1(x, y)$. Si dice «arriba del plano XY», el piso es $z = 0$.
2. Obtén la **sombra** R del sólido en el plano XY: casi siempre la da un cilindro ($x^2+y^2 = 1$) o la intersección del techo con el piso.
3. Escribe $V = \iint_R (z_2 - z_1)\,dA$.
4. Si la sombra es un disco o un anillo, pasa a polares (4A.3.3).
5. Si la integral interior no sale, cambia el orden de integración y recalcula los límites con el dibujo.

4A.3.3 Integral doble en polares

1. Traduce: $x^2 + y^2 = r^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$.
2. Escribe $dA = r\,dr\,d\theta$. **La r del jacobiano no se olvida.**
3. Límites de r: el radio es la raíz del número de la circunferencia ($x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r = 3$).
4. Límites de θ con el dibujo: vuelta completa 0 a 2π; primer cuadrante 0 a $\frac{\pi}{2}$; semiplano $y \geq 0$, 0 a π.
5. Integra primero en r y después en θ. Si ya no queda θ, multiplica por la longitud del intervalo de θ.
6. Para una rosa $r = a\,\text{sen}\,n\theta$, un pétalo va entre dos ceros consecutivos de $\text{sen}\,n\theta$: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$.

4A.3.4 Cambio de variable

1. Lee las fronteras y escribe los límites de u y de v: la región nueva suele ser un rectángulo.
2. Calcula $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$ y toma el recíproco, o despeja $x(u, v)$, $y(u, v)$ y calcula $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ directamente.
3. Escribe $dA = \left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$.
4. Reescribe el integrando en u y v. Busca factorizaciones: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = uv$.
5. Elige el orden que haga sencilla la primera integral.

4A.3.5 Teorema de Green

1. Identifica P (lo que multiplica a dx) y Q (lo que multiplica a dy).
2. Calcula $Q_x - P_y$. En Q_x la y se trata como constante; en P_y, la x.
3. Describe la región R que encierra C, con un dibujo.
4. Revisa el sentido de C: si es antihorario, la integral de línea es $\iint_R (Q_x - P_y)\,dA$; si es horario, cambia el signo. Si el enunciado no lo dice, se usa el sentido positivo y se escribe así.
5. Calcula la integral doble, en polares si la región es circular.

5. e) $\hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u} = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$ y $\hat{e}_v = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$. Como el sistema no es ortogonal, $\hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = \frac{3}{5} \neq 0$.

Ejercicio 2B.6.2 ← volver

1. a) $\nabla u = (1,-4,1)$, $\nabla v = (1,0,-1)$, $\nabla w = (2,1,2)$. Productos punto: $1+0-1=0$, $2-4+2=0$, $2+0-2=0$: **ortogonal**.
2. b) $|\nabla u| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\nabla v| = \sqrt{2}$, $|\nabla w| = 3$; $\hat{e}_u = \frac{(1,-4,1)}{3\sqrt{2}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_w = \frac{(2,1,2)}{3}$.
3. c) $u_u = \vec{u} \cdot \hat{e}_u = \frac{2-4+2}{3\sqrt{2}} = 0$; $u_v = \frac{2-2}{\sqrt{2}} = 0$; $u_w = \frac{4+1+4}{3} = 3$.
4. $\vec{u} = 3\,\hat{e}_w$.

Ejercicio 2B.6.3 ← volver

1. $\vec{r}_u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{r}_v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$: ortogonal.
2. $h_u = h_v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $f_u = 4\sqrt{2}\,u^3v^3$ y $f_v = 3\sqrt{2}\,u^4v^2$.
4. $\nabla f = \dfrac{4\sqrt{2}\,u^3v^3}{\sqrt{2}/2}\,\hat{e}_u + \dfrac{3\sqrt{2}\,u^4v^2}{\sqrt{2}/2}\,\hat{e}_v = 8u^3v^3\,\hat{e}_u + 6u^4v^2\,\hat{e}_v$.

Ejercicio 2B.6.4 ← volver

1. $x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} = \rho\,\hat{e}_\rho$ y $x^2 + y^2 = \rho^2$, así que $\vec{F} = \rho^3\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z$.
2. $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho \cdot \rho^3)}{\partial \rho} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = \dfrac{4\rho^3}{\rho} + 1 = 4\rho^2 + 1$.
3. Comprobación en cartesianas: $P = x^3 + xy^2$, $Q = x^2y + y^3$, $R = z$; $P_x + Q_y + R_z = 4x^2 + 4y^2 + 1$.

Ejercicio 2B.6.5 ← volver

1. $\vec{r} = (u\cos\theta,\ v\,\mathrm{sen}\,\theta,\ u^2 + v^2)$.
2. a) $\vec{e}_\theta = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-u\,\mathrm{sen}\,\theta,\ v\cos\theta,\ 0)$. Su unitario es $\hat{e}_\theta = \dfrac{(-u\,\mathrm{sen}\,\theta,\ v\cos\theta,\ 0)}{\sqrt{u^2\mathrm{sen}^2\theta + v^2\cos^2\theta}}$.
3. b) $\vec{r}_v = (0,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 2v)$, así que $h_v = \sqrt{\mathrm{sen}^2\theta + 4v^2}$.
4. c) Con $\vec{r}_u = (\cos\theta, 0, 2u)$: $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -u\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & v\cos\theta \\ 2u & 2v & 0 \end{vmatrix}$.
5. Desarrollando por la primera fila: $\cos\theta\,(0 - 2v^2\cos\theta) - 0 + (-u\,\mathrm{sen}\,\theta)(0 - 2u\,\mathrm{sen}\,\theta) = 2u^2\mathrm{sen}^2\theta - 2v^2\cos^2\theta$.

Ejercicio 2B.6.6 ← volver

1. $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rF_r)}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^3z + \frac{r^2}{2}\mathrm{sen}\,\theta\right) = 3rz + \mathrm{sen}\,\theta$.
2. $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$.
3. $\dfrac{\partial F_z}{\partial z} = -3rz$.
4. $\nabla \cdot \vec{F} = 3rz + \mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 3rz = 0$: **el campo es solenoidal**.

3. Obtén la sombra R: si dice $z \geq c$, iguala $g = c$.
4. Flujo $= \iint_R \vec{F} \cdot \vec{N}\,dA$, en polares si R es un disco.
5. Comprobación opcional: cierra la superficie con una tapa plana, aplica Gauss y resta el flujo de la tapa.

4B.3.4 Integral triple en cilíndricas o esféricas

1. **Dibuja** el sólido: piso, techo y sombra.
2. Elige coordenadas: cilíndricas si hay $x^2 + y^2$ (cilindro, cono, paraboloide); esféricas si hay $x^2 + y^2 + z^2$ (esfera).
3. Traduce el integrando ($\sqrt{x^2 + y^2} = r$) y escribe dV **con su jacobiano**.
4. Límites: z de piso a techo; r del centro al radio de la sombra; θ según la región. Los de adentro pueden tener letras; el de afuera, solo números.
5. Integra de adentro hacia afuera.

4B.3.5 Flujo con el teorema de Gauss (divergencia constante)

1. Comprueba que la superficie es **cerrada** y escríbelo: «S es cerrada; por el teorema de Gauss…».
2. Escribe P, Q y R en renglones separados.
3. Deriva P solo respecto a x, Q solo respecto a y y R solo respecto a z. Si una letra no aparece, ese término vale 0. Suma.
4. Si la divergencia es un número c: obtén las medidas del sólido (el radio de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es 5) y su volumen con la tabla de 4B.1.
5. Flujo $= c \cdot V$. Déjalo exacto, con π.

4B.3.6 Gauss con divergencia variable

1. Calcula la divergencia; suele quedar algo como $3y + 2z$, x^2, $2z$ o $x^2 + y^2$.
2. **Simetría:** quita los términos x, y (y z, en una esfera centrada) cuyo integral vale cero por simetría.
3. Si queda una constante, multiplícala por el volumen.
4. Si queda un término como x^2, $x^2 + y^2$ o z, integra en cilíndricas o esféricas (4B.3.4).
5. Si el volumen no es de tabla, calcúlalo con una integral doble: $V = \iint_R (z_{techo} - z_{piso})\,dA$.

4B.3.7 ¿Entra o sale fluido? (divergencia en cilíndricas)

1. Identifica F_r, F_θ y F_z.
2. Término 1: multiplica F_r por r, deriva respecto a r y divide entre r.
3. Término 2: deriva F_θ respecto a θ y divide entre r.
4. Término 3: deriva F_z respecto a z.
5. Suma y evalúa en el punto. **Negativa: entra más del que sale.** Positiva: sale más. Cero: igual.
6. Atajo: $r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$ es el campo $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, con divergencia 3.

4B.3.8 Campo radial unitario sobre una esfera

1. $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ tiene divergencia $\frac{2}{\rho}$, que no es constante y no está definida en el origen. **No conviene Gauss.**

2. En la esfera de radio a: $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{a}$ y $|\vec{r}| = a$, así que $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{a\cdot a} = 1$.
3. Flujo $= 1 \cdot$ Área $= 4\pi a^2$.

4B.3.9 Circulación con el teorema de Stokes

1. Calcula $\nabla \times \vec{F}$ componente por componente.
2. Elige la superficie más sencilla con frontera C: el disco o la porción de plano que encierra la curva. Si es $z = g(x, y)$, $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$.
3. Calcula $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N}$ sobre la superficie. Si es constante, la circulación es esa constante por el **área de la sombra**.
4. Revisa el **sentido** de C: evalúa la parametrización en dos valores de t. Antihorario visto desde arriba: signo +; horario: signo −. Si el enunciado no lo dice, usa el sentido antihorario visto desde arriba y escríbelo.
5. Si queda un término con x o y sobre un disco centrado, vale cero por simetría.

4B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 6.

Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ a través de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Datos: $\vec{F} = (x, y, z)$; S: esfera de radio 3 [u], cerrada; normal exterior.

Planteamiento. La superficie es cerrada, así que se aplica el teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

Resolución.

1. $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$, constante.
2. Radio $\sqrt{9} = 3$; volumen $V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$.
3. Flujo $= 3 \cdot 36\pi = 108\pi$.
4. **Comprobación directa:** en la esfera, $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{3}$ y $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$. Flujo $= 3 \cdot$ Área $= 3 \cdot 4\pi(9) = 108\pi$.

Resultado: el flujo neto es 108π y es positivo: el campo sale de la esfera.

> Con divergencia constante, el problema se reduce a una fórmula de volumen. Antes de integrar cualquier flujo por una superficie cerrada, calcula la divergencia.

4B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4B.5.1 · Área de una porción de superficie

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 5.

Calcule el área de la porción de la superficie $z = x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

Resolución.

1. $g_x = 2x$ y $g_y = -2y$, de donde $1 + g_x^2 + g_y^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2 = 1 + 4r^2$.

3. $s(t) = \int_1^t 10u\, du = 5t^2 - 5$.
4. $5t^2 - 5 = 40 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$.
5. $\vec{r}(3) = (4 - 27,\ 5,\ 36) = (-23, 5, 36)$.

Ejercicio 2A.6.7

← volver

1. Parametriza con $x = t$: $\vec{r}(t) = (t,\ t,\ 2t^2)$; el origen es $t_0 = 0$.
2. $\vec{r}\,' = (1, 1, 4t) \Rightarrow (1, 1, 0)$; $\vec{r}\,'' = (0, 0, 4)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (4, -4, 0)$, con norma $4\sqrt{2}$; $|\vec{r}\,'| = \sqrt{2}$.
4. a) $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$, $\hat{B} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = (0, 0, 1)$.
5. b) $\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$.
6. c) $\rho = \frac{1}{2}$; centro $= (0, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 1) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.
7. d) Normal $(1, -1, 0)$ por el origen: $x - y = 0$.

Ejercicio 2A.6.8

← volver

1. $2s + 3t = 1$ y $-s + 2t = -4$. De la segunda, $s = 2t + 4$; en la primera, $7t + 8 = 1$, así que $t = -1$ y $s = 2$.
2. $z = 2(-1)^2 - 3(2) = -4$: el punto es $(1, -4, -4)$.
3. $\vec{r}_s = (2, -1, -3)$ y $\vec{r}_t = (3, 2, 4t) = (3, 2, -4)$.
4. $\vec{N} = \vec{r}_s \times \vec{r}_t = \big((-1)(-4) - (-3)(2),\ -[(2)(-4) - (-3)(3)],\ (2)(2) - (-1)(3)\big) = (10, -1, 7)$.
5. Plano: $10(x - 1) - (y + 4) + 7(z + 4) = 0$, es decir, $10x - y + 7z + 14 = 0$.
6. Recta normal: $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

Ejercicio 2A.6.9

← volver

1. El punto está en las dos superficies: $9 + 4 + 36 = 49$ y $9 + 4 = 13$.
2. $\vec{N}_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z) = (6, 4, -12)$ y $\vec{N}_2 = \nabla(x^2 + y^2) = (2x, 2y, 0) = (6, 4, 0)$.
3. $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \big((4)(0) - (-12)(4),\ -[(6)(0) - (-12)(6)],\ (6)(4) - (4)(6)\big) = (48, -72, 0) = 24\,(2, -3, 0)$.
4. Recta por $(3, 2, -6)$ con dirección $(2, -3, 0)$: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}$, $z = -6$.

E.2B · Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Ejercicio 2B.6.1

← volver

1. a) $\nabla u = (1, -2)$ y $\nabla v = (1, 2)$; $\nabla u \cdot \nabla v = 1 - 4 = -3 \neq 0$: **no es ortogonal**.
2. b) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$.
3. c) Sumando, $u + v = 2x$; restando, $v - u = 4y$. Inversa: $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{v-u}{4}$.
4. d) $\vec{r}_u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $\vec{r}_v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $h_u = h_v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \big(0,\ 0,\ (2e^{2\pi})(-4) - 0\big) = (0, 0, -8e^{2\pi})$, con norma $8e^{2\pi}$.
4. $|\vec{r}\,'|^3 = 8e^{6\pi}$, así que $\kappa = \dfrac{8e^{2\pi}}{8e^{6\pi}} = e^{-4\pi}$.

Ejercicio 2A.6.3 ← volver

1. $4\,\mathrm{sen}\,t = 4 \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$. Comprobación: $1 - \sqrt{8}\cos\frac{\pi}{2} = 1$.
2. $\vec{r}\,' = (\sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,t,\ 4\cos t) \Rightarrow (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$; $\vec{r}\,'' = (\sqrt{8}\cos t,\ \sqrt{8}\cos t,\ -4\,\mathrm{sen}\,t) \Rightarrow (0, 0, -4)$.
3. a) $|\vec{r}\,'| = \sqrt{8+8} = 4$, así que $\hat{T} = \frac{(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)}{4} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$.
4. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (-8\sqrt{2},\ 8\sqrt{2},\ 0)$, con norma 16.
5. b) $\kappa = \dfrac{16}{4^3} = \dfrac{1}{4}$ y $\rho = 4$.
6. c) Normal $(-1, 1, 0)$ por $(1, 1, 4)$: $-(x-1) + (y-1) = 0$, es decir, $x - y = 0$.

Ejercicio 2A.6.4 ← volver

1. $\cos t = 1$, $\mathrm{sen}\,t = 0 \Rightarrow t_0 = 0$. Comprobación: $1 + 0 + 1 = 2$.
2. $\vec{r}\,' = (-\mathrm{sen}\,t,\ \cos t,\ -\mathrm{sen}\,t + \cos t) \Rightarrow (0, 1, 1)$; $\vec{r}\,'' = (-\cos t,\ -\mathrm{sen}\,t,\ -\cos t - \mathrm{sen}\,t) \Rightarrow (-1, 0, -1)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \big((1)(-1) - (1)(0),\ -[(0)(-1) - (1)(-1)],\ (0)(0) - (1)(-1)\big) = (-1, -1, 1)$, con norma $\sqrt{3}$.
4. a) $\hat{T} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{B} = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}$.
5. $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{6}}\big((-1)(1) - (1)(1),\ -[(-1)(1) - (1)(0)],\ (-1)(1) - (-1)(0)\big) = \frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}$.
6. b) Plano normal ($\perp \hat{T}$) por $(1, 0, 2)$: $y + (z - 2) = 0$, es decir, $y + z = 2$.

Ejercicio 2A.6.5 ← volver

1. $A(0, 0, 3)$ corresponde a $s = 0$. Sea $k = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
2. $\vec{r}\,' = (3k\cos ks,\ k,\ -3k\,\mathrm{sen}\,ks) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0)$, que ya es unitario: $\hat{T} = \frac{(3,1,0)}{\sqrt{10}}$.
3. $\vec{r}\,'' = (-3k^2\,\mathrm{sen}\,ks,\ 0,\ -3k^2\cos ks) \Rightarrow \big(0, 0, -\frac{3}{10}\big)$. Como s es longitud de arco, $\kappa = |\vec{r}\,''| = \frac{3}{10}$ y $\hat{N} = \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|} = (0, 0, -1)$.
4. $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0) \times (0, 0, -1) = \frac{(-1,3,0)}{\sqrt{10}}$.
5. $\vec{r}\,''' = (-3k^3\cos ks,\ 0,\ 3k^3\,\mathrm{sen}\,ks) \Rightarrow (-3k^3, 0, 0) = \big(-\frac{3}{10\sqrt{10}}, 0, 0\big)$; $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (-3k^3,\ 9k^3,\ 0) = \big(-\frac{3}{10\sqrt{10}},\ \frac{9}{10\sqrt{10}},\ 0\big)$, con norma al cuadrado $\frac{90}{1000} = \frac{9}{100}$.
6. $\tau = \dfrac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2} = \dfrac{\big(-\frac{3}{10\sqrt{10}}\big)\big(-\frac{3}{10\sqrt{10}}\big)}{\frac{9}{100}} = \dfrac{\frac{9}{1000}}{\frac{9}{100}} = \dfrac{1}{10}$.

Ejercicio 2A.6.6 ← volver

1. En $A(1, 5, 4)$: $4 - 3t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$ (al despegar, $t \geq 0$).
2. $\vec{r}\,' = (-6t,\ 0,\ 8t)$ y $|\vec{r}\,'| = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = 10t$.

2. Sombra: disco $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
3. $A = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\; r\,dr\,d\theta$.
4. En r: $\left[\dfrac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}\right]_0^{\sqrt{2}} = \dfrac{9^{3/2} - 1}{12} = \dfrac{27 - 1}{12} = \dfrac{13}{6}$.
5. En θ: $\frac{13}{6} \cdot 2\pi$.

Resultado: $A = \frac{13\pi}{3}$ u².

Ejercicio 4B.5.2 · Integral de superficie sobre un octante de esfera

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 5.

Calcule $\displaystyle\iint_S xz\,dS$, donde S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

Resolución.

1. Parametrización: $x = 3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = 3\cos\phi$, con $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $dS = 9\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$.
2. $xz\,dS = (3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta)(3\cos\phi)(9\,\mathrm{sen}\,\phi)\,d\phi\,d\theta = 81\,\mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta\,d\phi\,d\theta$.
3. Se separa: $81\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\,d\phi = 81\cdot 1\cdot\left.\frac{\mathrm{sen}^3\phi}{3}\right|_0^{\pi/2} = 81\cdot\frac{1}{3}$.

Resultado: 27.

Ejercicio 4B.5.3 · Flujo directo por un paraboloide

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 5.

Calcule el flujo del campo eléctrico $\vec{E} = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath} + (z+1)\,\hat{k}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z = 2$, donde $z \geq -2$. La superficie se orienta hacia la parte negativa del eje Z.

Resolución.

1. La superficie es $z = g = 2 - x^2 - y^2$ y **no es cerrada**: Gauss no se aplica directo.
2. Normal hacia arriba: $(-g_x, -g_y, 1) = (2x, 2y, 1)$. Hacia abajo: $\vec{N} = (-2x, -2y, -1)$.
3. Sobre la superficie, $z + 1 = 3 - x^2 - y^2$. Entonces $\vec{E}\cdot\vec{N} = -2xy + 2xy - (3 - x^2 - y^2) = -(3 - r^2)$.
4. Sombra: $z = -2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, disco $r \leq 2$.
5. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2} -(3 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = -2\pi\left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = -2\pi(6 - 4) = -4\pi$.
6. **Comprobación con Gauss:** $\nabla\cdot\vec{E} = 0 + 0 + 1 = 1$. Se cierra con la tapa $z = -2$, $r \leq 2$. El volumen encerrado es $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 8\pi$. En la tapa, la normal exterior es $-\hat{k}$ y $\vec{E}\cdot(-\hat{k}) = -(z+1) = 1$, así que su flujo es 4π. Por el paraboloide hacia afuera (arriba): $8\pi - 4\pi = 4\pi$; hacia abajo, -4π.

Resultado: -4π (con la orientación hacia arriba sería 4π).

Ejercicio 4B.5.4 · Integral triple en cilíndricas

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 5.

Calcule $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, donde V es el sólido acotado por $z=0$, $z=4$ y $x^2+y^2=9$.

Resolución.

1. Cilindro de radio 3: $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 3$, $0\le z\le 4$.
2. Integrando $\sqrt{x^2+y^2}=r$; $dV=r\,dr\,d\theta\,dz$.
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^4 r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^3 4r^2\,dr\,d\theta$.
4. En r: $4\cdot\frac{3^3}{3}=36$. En θ: $36\cdot 2\pi$.

Resultado: 72π.

Ejercicio 4B.5.5 · Stokes con una curva en sentido horario

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 5.

Mediante el teorema de Stokes obtenga $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}=-y\,\hat{\imath}+x\,\hat{\jmath}+\operatorname{sen} z\,\hat{k}$ y $C:\ \vec{r}(t)=\operatorname{sen} t\,\hat{\imath}+\cos t\,\hat{\jmath}+4\,\hat{k}$.

Resolución.

1. $\nabla\times\vec{F}=\big(0-0,\ 0-0,\ 1-(-1)\big)=(0,0,2)$.
2. C es la circunferencia de radio 1 en el plano $z=4$. Superficie: el disco que encierra, con $\hat{n}=\hat{k}$.
3. $(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{k}=2$, constante: $\iint_S 2\,dS=2\pi$ en sentido antihorario.
4. **Sentido:** $t=0$ da $(0,1)$ y $t=\frac{\pi}{2}$ da $(1,0)$; la curva va de arriba hacia la derecha, en sentido **horario** visto desde arriba. El signo cambia.
5. Comprobación directa: $\vec{F}\cdot\vec{r}\,'=(-\cos t)(\cos t)+(\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)=-1$, y $\int_0^{2\pi}-1\,dt=-2\pi$.

Resultado: -2π.

Ejercicio 4B.5.6 · Stokes en un plano inclinado

Adaptado de: 2º final 2024-1, tipo A, problema 5.

Calcule la circulación de $\vec{F}=(2x-2y)\,\hat{\imath}+(y-z)\,\hat{\jmath}+(x-z)\,\hat{k}$ en una vuelta, en sentido positivo, a la curva C de intersección del plano $2x+2y-z=0$ con el cilindro $x^2+y^2=1$.

Resolución.

1. $\nabla\times\vec{F}=\big(0-(-1),\ 0-1,\ 0-(-2)\big)=(1,-1,2)$.
2. Superficie: la porción del plano $z=2x+2y$ dentro del cilindro. $\vec{N}=(-2,-2,1)$, hacia arriba (sentido positivo).
3. $(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{N}=-2+2+2=2$, constante.
4. Sombra: disco de radio 1, de área π. Circulación $=2\pi$.

Resultado: 2π.

Ejercicio 4B.5.7 · Gauss en un cono con tapa

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo neto de $\vec{F}=x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el

1. $f_x=-4x(x^2-4)=0\Rightarrow x=0$ o $x=\pm2$; $f_y=2(y+1)=0\Rightarrow y=-1$; $f_z=2z=0\Rightarrow z=0$.
2. $H=\operatorname{diag}(16-12x^2,\ 2,\ 2)$.
3. $(0,-1,0)$: $(16,32,64)$, **mínimo relativo**; $f=-(0-4)^2=-16$.
4. $(\pm2,-1,0)$: $(-32,-64,-128)$, signos $(-,-,-)$, **puntos silla**; $f=0$.

Ejercicio 1.6.7

← volver

1. Vértice (x,y,z) en el primer octante, sobre el elipsoide; lados $2x$, $2y$, z. Objetivo $V=4xyz$; restricción $g=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.
2. $\nabla V=\lambda\nabla g$: $4yz=\frac{\lambda x}{2}$, $4xz=\frac{\lambda y}{2}$, $4xy=\frac{2\lambda z}{9}$.
3. Multiplicando cada ecuación por su variable: $4xyz=\frac{\lambda x^2}{2}=\frac{\lambda y^2}{2}=\frac{2\lambda z^2}{9}$. De ahí $x=y$ y $z^2=\frac{9}{4}x^2$.
4. En la restricción: $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}=1\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}\Rightarrow x=y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, y $z=\frac{3}{2}x=\sqrt{3}$.
5. Lados: $\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}$; $V=4\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Ejercicio 1.6.8

← volver

1. Objetivo $d^2=x^2+y^2+z^2$; restricción $g=z-4x^2+4y^2=5$.
2. $\nabla d^2=\lambda\nabla g$: $2x=-8\lambda x$, $2y=8\lambda y$, $2z=\lambda$.
3. Factoriza: $2x(1+4\lambda)=0$ y $2y(1-4\lambda)=0$.
4. Caso $x=0$, $y=0$: $z=5$, $d=5$.
5. Caso $x=0$, $\lambda=\frac{1}{4}$: $z=\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{8}+4y^2=5\Rightarrow y^2=\frac{39}{32}=\frac{78}{64}$, $y=\pm\frac{\sqrt{78}}{8}$; $d^2=\frac{78}{64}+\frac{1}{64}=\frac{79}{64}$.
6. Caso $\lambda=-\frac{1}{4}$, $y=0$: $z=-\frac{1}{8}$ y $-\frac{1}{8}-4x^2=5$, imposible.
7. Comparación: $\frac{\sqrt{79}}{8}\approx 1.11<5$. **Punto** $\left(0,\pm\frac{\sqrt{78}}{8},\frac{1}{8}\right)$**, distancia** $\frac{\sqrt{79}}{8}$**.**

E.2A · Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie

Ejercicio 2A.6.1

← volver

1. $t^2=1$, $-t=-1$ y $-t^2=-1$ dan $t_0=1$.
2. $\vec{v}=(2t,-1,-2t)\Rightarrow(2,-1,-2)$, $|\vec{v}|=3$; $\vec{a}=(2,0,-2)$.
3. $a_T=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|}=\dfrac{4+0+4}{3}=\dfrac{8}{3}$.
4. $\vec{a}_T=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{(2,-1,-2)}{3}=\dfrac{1}{9}(16,-8,-16)$.
5. $\vec{a}_N=\vec{a}-\vec{a}_T=\dfrac{1}{9}(18,0,-18)-\dfrac{1}{9}(16,-8,-16)=\dfrac{1}{9}(2,8,-2)$. Comprobación: $\vec{a}_N\cdot\vec{v}=\frac{1}{9}(4-8+4)=0$.

Ejercicio 2A.6.2

← volver

1. $e^{2t}=e^{2\pi}\Rightarrow t_0=\pi$. Comprobación: $\cos 2\pi=1$.
2. $\vec{r}\,'=(2e^{2t},\ -2\operatorname{sen}2t,\ 0)\Rightarrow(2e^{2\pi},0,0)$; $\vec{r}\,''=(4e^{2t},\ -4\cos 2t,\ 0)\Rightarrow(4e^{2\pi},-4,0)$.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1 · Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

Ejercicio 1.6.1

← volver

1. $f_x = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = -2$; $f_y = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$.
2. $f_{xx} = 2x + 3$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = 2(2x+3)$.
3. $(-1,-2)$: $D = 2 > 0$ y $f_{xx} = 1 > 0$, **mínimo relativo**; $f = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4 - 2 - 8 = -\frac{29}{6}$.
4. $(-2,-2)$: $D = -2 < 0$, **punto silla**; $f = -\frac{14}{3}$.

Ejercicio 1.6.2

← volver

1. $f_x = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $f_y = 2y^2 - 8 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$.
2. $f_{xx} = -2$, $f_{yy} = 4y$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = -8y$.
3. $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$: $D = 16 > 0$ y $f_{xx} = -2 < 0$, **máximo relativo**; $f = -\frac{16}{3} - \frac{1}{4} + 16 + \frac{1}{2} = \frac{131}{12}$.
4. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$: $D = -16 < 0$, **punto silla**; $f = -\frac{125}{12}$.

Ejercicio 1.6.3

← volver

1. $f_x = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f_y = -2y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$.
2. $f_{xx} = 12x^2 - 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = -2(12x^2 - 2)$.
3. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$: $D = 4 > 0$ y $f_{xx} = -2 < 0$, **máximo relativo**; $f = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 2 = \frac{17}{4}$.
4. $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\right)$: $f_{xx} = 4$, $D = -8 < 0$, **puntos silla**; $f = 4$.

Ejercicio 1.6.4

← volver

1. $f_x = e^{-x}(2x - x^2 - y^2)$ y $f_y = 2y\,e^{-x}$. Como $e^{-x} \neq 0$: $y = 0$ y $x(2-x) = 0$.
2. Puntos críticos: $(0,0)$ y $(2,0)$.
3. $f_{xx} = e^{-x}(x^2 + y^2 - 4x + 2)$, $f_{yy} = 2e^{-x}$, $f_{xy} = -2y\,e^{-x}$.
4. $(0,0)$: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$; $D = 4 > 0$, **mínimo relativo**, con $f = 0$.
5. $(2,0)$: $f_{xx} = -2e^{-2}$, $f_{yy} = 2e^{-2}$, $f_{xy} = 0$; $D = -4e^{-4} < 0$, **punto silla**, con $f = 4e^{-2}$.

Ejercicio 1.6.5

← volver

1. $f_x = \frac{9}{2}x^2 + 9x = \frac{9}{2}x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -2$; $f_y = 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$; $f_z = -2z + 2 = 0 \Rightarrow z = 1$.
2. $H = \operatorname{diag}(9x+9,\ 4,\ -2)$: $\Delta_1 = 9x + 9$, $\Delta_2 = 4(9x+9)$, $\Delta_3 = -8(9x+9)$.
3. $(0,1,1)$: $(9, 36, -72)$, signos $(+,+,-)$, **punto silla**; $f = 2 - 1 - 4 + 2 + 9 = \mathbf{8}$.
4. $(-2,1,1)$: $(-9,-36,72)$, signos $(-,-,+)$, **punto silla**; $f = -12 + 2 - 1 + 18 - 4 + 2 + 9 = \mathbf{14}$.

Ejercicio 1.6.6

← volver

semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 3$.

Resolución.

1. Cono más tapa: superficie cerrada, se aplica Gauss. $\nabla \cdot \vec{F} = 3$.
2. Medidas: altura $h = 3$; en $z = 3$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$, así que el radio es 3.
3. $V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(3) = 9\pi$.
4. Flujo $= 3 \cdot 9\pi$.

Resultado: 27π.

Ejercicio 4B.5.8 · Radio de la esfera a partir del flujo

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 6.

Sean $\vec{F} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y la superficie cerrada $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$. Determine a para que el flujo de $\vec{F}$ a través de S sea 32π.

Resolución.

1. $\nabla \cdot \vec{F} = 3$ y $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.
2. Flujo $= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$.
3. $4\pi a^3 = 32\pi \Rightarrow a^3 = 8$.

Resultado: $a = 2$ (la única raíz real positiva).

Ejercicio 4B.5.9 · Divergencia no constante y simetría

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 6 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Calcule el flujo de $\vec{F} = (xy - z^2)\,\hat{\imath} + (x^2 + y^2)\,\hat{\jmath} + (z^2 - x)\,\hat{k}$ a través de la esfera $\vec{r}(\theta,\phi) = \big(2\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi,\ 2\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi,\ 2\cos\phi\big)$.

Resolución.

1. La parametrización es la esfera de radio **2** centrada en el origen: superficie cerrada.
2. $P_x = y$, $Q_y = 2y$, $R_z = 2z$, así que $\nabla \cdot \vec{F} = 3y + 2z$, que **no** es constante.
3. Flujo $= 3\iiint_V y\,dV + 2\iiint_V z\,dV$.
4. La bola es simétrica respecto a los planos $y = 0$ y $z = 0$: las dos integrales valen 0.

Resultado: el flujo es 0.

Ejercicio 4B.5.10 · Cilindro cortado por un plano inclinado

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 6.

Determine el flujo de $\vec{F} = z^2 \ln y\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + e^x\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ limitado por los planos $z = 2x + 2y + 6$ y $z = -2$.

Resolución.

1. $P_x = 0$ (no hay x), $Q_y = 2$, $R_z = 0$ (no hay z): $\nabla \cdot \vec{F} = 2$.
2. El volumen no es de tabla: $V = \displaystyle\iint_{r\le 4} \big[(2x + 2y + 6) - (-2)\big]\,dA = \iint_{r\le 4} (2x + 2y + 8)\,dA$.
3. El disco está centrado en el origen: $\iint x\,dA = \iint y\,dA = 0$. Queda $V = 8 \cdot \pi(4)^2 = 128\pi$.
4. Flujo $= 2 \cdot 128\pi$.

Resultado: 256π.

El enunciado tiene dos detalles: $\ln y$ no está definido para $y \leq 0$, y el plano inclinado queda por debajo de $z = -2$ donde $x + y < -4$. El problema se resuelve formalmente con el teorema de Gauss, como arriba.

Ejercicio 4B.5.11 · Gauss con integración en cilíndricas

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 6.

Obtenga el flujo neto de $\vec{F} = 4xyz\,\hat{\imath} + x^2y\,\hat{\jmath} - 2yz^2\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por $z = 0$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

Resolución.

1. $P_x = 4yz$, $Q_y = x^2$, $R_z = -4yz$: $\nabla \cdot \vec{F} = x^2$.
2. Sólido: $0 \leq z \leq 4 - r^2$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Con $x^2 = r^2\cos^2\theta$:
3. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r^2\cos^2\theta\; r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^2\left(4r^3 - r^5\right)dr$.
4. $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi$ y $\int_0^2(4r^3 - r^5)\,dr = 16 - \frac{64}{6} = \frac{16}{3}$.

Resultado: $\frac{16\pi}{3}$.

Ejercicio 4B.5.12 · Campo en cilíndricas a través de una caja

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 6.

Calcule el flujo neto del campo $\vec{E}(r,\theta,z) = r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$, expresado en coordenadas cilíndricas circulares, a través de la superficie cerrada de la caja $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 4$.

Resolución.

1. $F_r = r$, $F_\theta = 0$, $F_z = z$.
2. $\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot r)}{\partial r} = \frac{2r}{r} = 2$; $\frac{1}{r}\frac{\partial 0}{\partial\theta} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$. Entonces $\nabla \cdot \vec{E} = 3$.
3. Comprobación: $r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$, con divergencia $1 + 1 + 1 = 3$.
4. $V = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$. Flujo $= 3 \cdot 12$.

Resultado: 36 (sin π: el sólido es una caja).

Ejercicio 4B.5.13 · ¿Entra o sale el fluido?

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 4.

Suponga que $\vec{F}(r,\theta,z) = r\cos\theta\,\hat{e}_r + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta + z\,\hat{e}_z$ modela el flujo de un fluido. En el punto $A\left(17, \frac{2\pi}{3}, -2\right)$, ¿es más el fluido que entra del que sale?

Resolución.

1. Término 1: $r\,F_r = r^2\cos\theta$; derivado respecto a r, $2r\cos\theta$; entre r, $2\cos\theta$.
2. Término 2: $F_\theta = r\,\mathrm{sen}\,\theta$; derivado respecto a θ, $r\cos\theta$; entre r, $\cos\theta$.
3. Término 3: $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$.
4. $\nabla \cdot \vec{F} = 3\cos\theta + 1$. Los valores $r = 17$ y $z = -2$ no intervienen.
5. En $\theta = \frac{2\pi}{3}$: $3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{2} < 0$.

Resultado: $\nabla \cdot \vec{F}(A) = -\frac{1}{2}$: el punto es un sumidero y **sí entra más fluido del que sale**.

Apéndice D · Fuentes y bibliografía

↑ Volver al índice

Exámenes de los que se adaptaron los ejercicios:

- Exámenes extraordinarios de *Cálculo Vectorial*, semestres 2018-1, 2018-2, 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2 y 2026-1, algunos con su resolución publicada. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Primeros y segundos exámenes finales de *Cálculo Vectorial*, semestres 2016-1 a 2018-2 y 2024-1 a 2025-2, varios con su resolución publicada. Facultad de Ingeniería, UNAM.

Material de consulta:

- Belaunzarán García, E.; Frontana de la Cruz, B.; Gómez Saavedra, R.; González Gutiérrez, E.; Patiño Ramírez, J. A.; Rivas Gómez, S. *Apuntes de Cálculo Vectorial*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1981.
- González Gutiérrez, E.; Patiño Ramírez, J.; Tristán López, A. *Guía de estudio para presentar examen extraordinario de Cálculo Vectorial*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1986.
- Ramírez Manny, P. *Serie de Cálculo Vectorial* (problemas resueltos).
- *Series de ejercicios de Cálculo Vectorial*: 1. Máximos y mínimos; 2. Funciones vectoriales; 3. Integrales de línea; 4. Integrales múltiples. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Pita Ruiz, C. *Cálculo Vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- Marsden, J. E.; Tromba, A. J. *Cálculo Vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- Programa de la asignatura *Cálculo Vectorial* (clave 0063), plan de estudios 2010. Facultad de Ingeniería, UNAM.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Diferencias entre las resoluciones publicadas de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno.

C.1 · Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2A · Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie

Guía de extraordinario de 1986, grupo 6, ejercicio 1 (propuesto 2A.6.8): en la resolución publicada aparecen $t = 1$, $s = 2$, el vector normal $-2\hat{\imath} + 17\hat{\jmath} + 7\hat{k}$, el plano tangente $2x - 17y - 7z + 98 = 0$ y la recta normal $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+4}{17} = \frac{z+4}{7}$. El valor verificado es $s = 2, t = -1$, $\vec{N} = (10, -1, 7)$, el plano $10x - y + 7z + 14 = 0$ y la recta $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

Guía de extraordinario de 1986, grupo 7, ejercicio 2 (propuesto 2A.6.9): en la resolución publicada aparecen $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = -4\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$ y la recta $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{12}$, $z = -6$. El valor verificado es $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = (48, -72, 0)$, paralelo a $(2, -3, 0)$, y la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}$, $z = -6$.

C.2B · Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

1er extraordinario 2018-2, problema 3 (propuesto 3.6.9): en la resolución publicada aparece $W = -2$ u.t., al evaluar la función potencial como $1 - (2 + 1)$. El valor verificado es $W = -1$: con $\varphi = \frac{z}{r}\sec^2\theta$, $\varphi(B) = 1$ y $\varphi(A) = 2$.

C.4A · Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

1er final 2018-2, tipo A, problema 5 (propuesto 4A.6.6): en la resolución publicada aparece 7π, porque se integró θ de 0 a 2π. La región solo tiene $y \geq 0$, así que θ va de 0 a π; el valor verificado es $\frac{7\pi}{2}$.

C.4B · Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

Sin erratas registradas en esta unidad.

Ejercicio 4B.5.14 · Campo radial unitario

Adaptado de: 2º final 2024-1, tipo A, problema 6 (repetido en el 3er extraordinario 2024-1).

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \dfrac{x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Resolución.

1. $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$: su divergencia no es constante y no está definida en el origen, que está dentro de la esfera. Se calcula directo.
2. Radio $a = 2$. En la esfera, $|\vec{r}| = 2$ y $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{2}$.
3. $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{r}}{2} \cdot \frac{\vec{r}}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{4} = 1$.
4. Flujo $= 1 \cdot$ Área $= 4\pi(2)^2$.

Resultado: 16π.

4B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4B**.

Ejercicio propuesto 4B.6.1

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo de $\vec{F} = 3x\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + 4z\,\hat{k}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Resultado: 1500π.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 4B.6.2

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-2, problema 6.

Calcule el flujo de $\vec{F} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.

Resultado: 8π.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 4B.6.3

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \left(x^2y^2 + 3x\right)\hat{\imath} + \left(-\frac{2}{3}xy^3 + 3y\right)\hat{\jmath} + 3z\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada de un cilindro circular recto con tapas, de radio 2 y altura 8.

Resultado: 288π.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 4B.6.4

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 6.

Utilizando el teorema de la divergencia, calcule $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,dS$ para $\vec{F} = z\,\hat{\imath} + x^2y\,\hat{\jmath} + y^2z\,\hat{k}$,

donde S está formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = -1$ y $z = 1$.

Resultado: 16π.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 4B.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 6, repetido en el tipo B.

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \left(x^3 + \ln z\right)\hat{\imath} + \left(e^x - 3x^2 y\right)\hat{\jmath} + (\cos x + z)\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por $z = 0$, $y + z = 16$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Resultado: 64π.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 4B.6.6

Adaptado de: 2º final 2017-2, tipo A, problema 6.

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \left(x^2 - yz\right)\hat{\imath} + \left(z^2 - 2xy\right)\hat{\jmath} + \left(z^2 - xy\right)\hat{k}$ a través de la superficie cerrada limitada por el semicono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$, y el plano $z = 3$.

Resultado: $\frac{81\pi}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 4B.6.7

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 6.

Sea S la superficie $9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ y sea $\vec{F} = \left(\operatorname{sen} z - y^2 x\right)\hat{\imath} + \left(\cos z - x^2 y\right)\hat{\jmath} + (4z - e^{xy})\hat{k}$. Calcule el flujo neto de $\vec{F}$ a través de S.

Resultado: $\frac{192\pi}{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 4B.6.8

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 5.

Calcule $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ en la región D limitada por $x^2 + y^2 = 16$, $z = -5$ y $z = 4$.

Resultado: 384π.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 4B.6.9

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 6.

Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ localizada en el primer octante y limitada por los planos $x = 0$, $y = x$ y $z = 0$.

Resultado: 4π u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Examen	Problemas
2º final 2025-2, tipo A	puntos críticos · triedro y plano normal · campo solenoidal en cilíndricas · trabajo sobre un triángulo · área entre parábolas · flujo con Gauss

Examen	Problemas
1er final 2017-2, tipo A	rectángulo inscrito con Lagrange · curvatura, torsión, plano osculador, a_T y a_N · constantes para campo irrotacional · trabajo en polares · Green · circulación
1er final 2017-2, tipo C	distancia mínima con Lagrange · constantes para una función armónica · curvatura y radio de torsión · integral de línea sobre una elipse · Stokes · flujo con Gauss
2º final 2017-2, tipo A	puntos críticos · transformación y jacobiano · función armónica, campo solenoidal e irrotacional · integral de línea en cilíndricas · circulación · flujo con Gauss
1er final 2018-1, tipo A (el tipo B trae los mismos problemas en otro orden)	distancia mínima a un plano · triedro y torsión de una intersección · campo solenoidal e irrotacional en cilíndricas · trabajo en cilíndricas · integral de línea cerrada · flujo con Gauss
2º final 2018-1, tipo A	caja con tapa · triedro, curvatura, centro de curvatura y plano osculador · laplaciano · integral de línea en cilíndricas sobre una circunferencia · Stokes · flujo con Gauss
1er final 2018-2, tipo A	caja sin tapa con Lagrange · a_T y a_N · radio y circunferencia de curvatura · trabajo sobre una curva cerrada con campo conservativo · Green · flujo por un elipsoide
1er final 2018-2, tipo C	caja inscrita en un paraboloide · longitud de arco · transformación lineal y gradiente · trabajo con campo conservativo · volumen · Green
2º final 2018-2, tipo A (repetido en el 2º extraordinario 2018-2)	Lagrange · ángulo entre una curva y una superficie paramétrica · transformación ortogonal y divergencia · constante para campo conservativo y potencial · área con integral doble · Stokes
1er final 2024-1, tipo A (el tipo B cambia los datos)	puntos críticos · posición tras recorrer una longitud de arco · transformación lineal y jacobiano · trabajo · integral doble en polares · flujo con Gauss
1er final 2024-2	distancia mínima con Lagrange · curvatura · transformación lineal en 3 variables · trabajo · área con integral doble
2º final 2024-2, tipo A	puntos críticos en 3 variables · a_T y a_N · gradiente en curvilíneas · trabajo · integral de superficie
1er final 2025-1, tipo A	extremos en una región cerrada · hélice: longitud de arco y triedro · transformación lineal · trabajo por dos trayectorias · área de un pétalo en polares · Stokes
2º final 2025-1, tipo A	puntos críticos · tangente, curvatura y plano osculador · transformación y jacobiano · trabajo en polares · integral doble en polares · flujo con Gauss
1er final 2025-2, tipo A	caja inscrita en un elipsoide · triedro, curvatura y torsión · transformación lineal y área imagen · trabajo · volumen bajo una superficie

Ejercicio propuesto 4B.6.10

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 6.

Calcule el área del cilindro $y = x^2$ limitada por el primer octante y por los planos $x = 1$ y $z = x$.

Resultado: $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 4B.6.11

Adaptado de: 2º final 2016-2, tipo A, problema 5.

Determine $\iint_S xy^2\,dS$, donde S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ limitada por el primer octante y por el plano $z = 2$.

Resultado: $\frac{32}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 4B.6.12

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 5.

Calcule la circulación de $\vec{F} = (2x - 2y)\,\hat{\imath} + (y - z)\,\hat{\jmath} + (x - z)\,\hat{k}$ alrededor de la parte del plano $x + 2y + 2z = 0$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Resultado: $\frac{3\pi}{2}$ (frontera antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 4B.6.13

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 6.

Mediante el teorema de Stokes, calcule la circulación de $\vec{F} = y^2\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$.

Resultado: π (antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4B.6.14

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 6.

Calcule la circulación total de $\vec{F} = yz^2\,\hat{\imath} + x^2z\,\hat{\jmath} + xy^2\,\hat{k}$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 5 - z$, $z = 1$.

Resultado: -4π (antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

4B.7 Errores frecuentes

1. **Gauss en una superficie abierta:** el teorema solo vale si la superficie **encierra** un volumen. «Solo el paraboloide» no es cerrada: se calcula directo o se cierra con una tapa y se resta su flujo.

2. **Divergencia incompleta:** son siempre tres derivadas. Si una letra no aparece en su componente, ese término vale 0, pero se escribe.
3. **Derivar respecto a la letra equivocada:** P con x, Q con y, R con z. Nunca P con y.
4. **Fórmulas de volumen:** el cono lleva $\frac{1}{3}$; la esfera, $\frac{4}{3}$ y r^3, no r^2.
5. **Radio contra radio al cuadrado:** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ tiene radio 5.
6. **Divergencia en cilíndricas:** el primer término se multiplica por r antes de derivar: $\nabla \cdot (r\,\hat{e}_r) = 2$, no 1.
7. **Campo $\vec{r}/|\vec{r}|$:** no tiene divergencia constante; el flujo por la esfera es su área, $4\pi a^2$.
8. **Orientación:** «hacia la parte negativa del eje Z» cambia el signo de $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$.
9. **Sentido en Stokes:** revisa la parametrización con dos valores de t. $(\operatorname{sen} t, \cos t)$ va en sentido horario.
10. **Olvidar el jacobiano:** $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ en cilíndricas y $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ en esféricas; en la esfera, $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$.
11. **Simetría mal usada:** $\iiint x\,dV = 0$ solo si el sólido es simétrico respecto al plano $x = 0$. En un octante no se anula.
12. **Signo de la divergencia:** negativa significa que entra más fluido del que sale; positiva, que sale más.

4B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $z = g(x, y)$: $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$, $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dA$ · paramétrica: $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.
- Esfera: $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$, $\hat{n} = \vec{r}/a$ · cilindro: $dS = a\,d\theta\,dz$.
- Flujo: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,dS = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,du\,dv$.
- dV: cilíndricas $r\,dr\,d\theta\,dz$; esféricas $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$.
- Divergencia: $P_x + Q_y + R_z$ · cilíndricas: $\frac{1}{r}\partial_r(rF_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta F_\theta + \partial_z F_z$.
- Gauss: $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\,dV$ (cerrada, normal exterior).
- Rotacional: $(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$ · Stokes: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\,dS$ (antihoraria desde arriba con normal hacia arriba).
- Esfera $\frac{4}{3}\pi a^3$, área $4\pi a^2$ · cilindro $\pi r^2 h$ · cono $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ · paraboloide $z = h - r^2$: $\frac{1}{2}\pi h^2$.
- $\int r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr = \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}$ · $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \pi$ · $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi = 2$.

4B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe qué tipo de problema es: área o integral de superficie, flujo directo, triple, Gauss o Stokes.
2. Para un flujo: ¿la superficie es cerrada? Si sí, escribe el teorema de Gauss y calcula la divergencia término por término.
3. Con divergencia constante: medidas del sólido, volumen de tabla y producto. Con divergencia variable: simetría primero, luego la integral triple en cilíndricas o esféricas.
4. Para Stokes: rotacional, superficie más sencilla, $\vec{N}$, producto punto y **sentido** de la curva.
5. Escribe el elemento (dS o dV) con su factor antes de poner límites.
6. Recuadra el resultado exacto y, si es un flujo, di si sale o entra.

Si no se encuentra el camino, escribe el teorema que corresponde, la divergencia o el

Examen	Problemas
2º extraordinario 2025-2	tanque con extremos semiesféricos · a_T, a_N, κ y τ · transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ · divergencia en cilíndricas · trabajo contra la gravedad en una hélice · flujo con Gauss
1er extraordinario 2026-1	tanque de costo mínimo · transformación $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ · $\int_C f\,ds$ sobre un segmento · constantes para campo solenoidal y conservativo · integral triple en cilíndricas · flujo por una esfera

Finales. Mismo formato.

Examen	Problemas
1er final 2016-1, tipo A	puntos críticos en 3 variables · curvatura y torsión · constante para campo conservativo y potencial en polares · trabajo en polares · integral triple · flujo con Gauss
1er final 2016-1, tipo C	caja sin tapa de costo mínimo · curvatura de una curva plana · gradiente con una transformación · trabajo en polares · área entre curvas · circulación
2º final 2016-1, tipo A	puntos críticos en 3 variables · aceleraciones tangencial y normal · laplaciano en cilíndricas · integral de línea por segmentos · área con Green · área de una porción de esfera
1er final 2016-2, tipo A	lata con Lagrange · constantes para transformación ortogonal y gradiente · trabajo · longitud de arco y aceleración normal · área de una porción de plano · flujo con Gauss
1er final 2016-2, tipo C	extremos con restricción · partícula: posición, a_T, a_N y curvatura · divergencia y rotacional en cilíndricas · integral de línea $\int_C \vec{R} \times d\vec{r}$ · circulación · flujo con Gauss
2º final 2016-2, tipo A	puntos críticos en 3 variables · ángulo entre superficies · transformación ortogonal y laplaciano · integral de línea con campo conservativo · integral de superficie · flujo de un campo cilíndrico
1er final 2017-1, tipo A	puntos críticos en 3 variables · curvatura, torsión, a_T y a_N · laplaciano en curvilíneas · trabajo · flujo con Gauss · área de un cilindro
1er final 2017-1, tipo C	caja con tapa de volumen máximo · triedro móvil · laplaciano en cilíndricas · función potencial · área con integral doble · flujo con Gauss
2º final 2017-1, tipo A	distancia mínima y máxima con Lagrange · curvatura de una intersección · integral de línea cerrada · transformación ortogonal · trabajo con Stokes · flujo con Gauss

Apéndice B · Qué vino en cada examen (2016–2026)

↑ Volver al índice

Problemas en el orden del examen. Un examen repetido se cita por su aplicación más antigua, con la nota «repetido en…».

Extraordinarios.

Examen	Problemas
1er extraordinario 2018-1, tipo A	puntos críticos · aceleraciones tangencial y normal, y curvatura · divergencia en cilíndricas · trabajo sobre una curva cerrada (hipocicloide) · teorema de Green · flujo por una esfera
2º extraordinario 2018-1, tipo A	puntos críticos · transformación ortogonal con parámetro · triedro, κ, τ y plano osculador · trabajo en cilíndricas · área entre dos curvas polares · circulación
1er extraordinario 2018-2	puntos críticos · gradiente de la divergencia · trabajo con campo conservativo en cilíndricas · volumen con integral doble · transformación no ortogonal · flujo con Gauss
1er extraordinario 2024-1	punto crítico con parámetro k · triedro y planos del triedro · transformación, regiones y jacobiano · $\int_C f\,ds$ sobre una hélice · flujo por un paraboloide
3er extraordinario 2024-1 (el mismo día se aplicó el 2º final 2024-1, tipo A, con cuatro problemas iguales)	puntos críticos en 3 variables · transformación u, v, w y gradiente · curvatura de una intersección · trabajo en polares sobre un arco · circulación (Stokes) · flujo por una esfera
1er extraordinario 2024-2 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1)	caja inscrita en un cono · tangencia curva–superficie · campo conservativo y solenoidal · trabajo en polares · integral doble con cambio de variable · flujo por una esfera
2º extraordinario 2024-2	Lagrange · recta: longitud de arco y curvatura · divergencia y rotacional en cilíndricas · independencia de la trayectoria y función potencial · Stokes · volumen entre cono y cilindro
2º extraordinario 2025-1	puntos críticos en 3 variables · ángulo curva–superficie · transformación lineal y rotacional · trabajo sobre una elipse · área de una superficie · flujo de un campo cilíndrico
1er extraordinario 2025-2	costo mínimo · curvatura y plano osculador · vector base, factor de escala y jacobiano · trabajo en esféricas · volumen bajo un paraboloide · flujo por una esfera de radio a

rotacional calculados y la integral planteada con sus límites. Solo eso ya vale cerca de la mitad del problema.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Geometría que se usa en los problemas aplicados:

- Cilindro: $V = \pi r^2 h$ · pared $2\pi rh$ · base y tapa $2\pi r^2$ (si está abierto, πr^2).
- Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ · $A = 4\pi r^2$ · cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- Caja: $V = xyz$ · con tapa $A = 2(xy + xz + yz)$ · sin tapa $A = xy + 2xz + 2yz$.

Cálculo base (sin calculadora):

- $\int \sec^2 u\,du = \tan u \cdot \int \ln x\,dx = x\ln x - x \cdot \int r\,e^{ar^2}dr = \frac{e^{ar^2}}{2a} \cdot \int r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}$.
- $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \pi \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi = 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$.
- $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \cdot (\cosh t)' = \operatorname{senh} t \cdot (\operatorname{senh} t)' = \cosh t$.

Tema	Expresiones
Extremos (U1)	puntos críticos: $\nabla f = \vec{0} \cdot D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$: $D>0, f_{xx}>0$ mínimo; $D>0, f_{xx}<0$ máximo; $D<0$ silla; $D=0$ no decide · 3 variables: $(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3) = (+,+,+)$ mínimo, $(-,+,-)$ máximo, otro con $\Delta_3 \neq 0$ silla · Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = c$
Curvas (U2A)	$\hat{T} = \frac{\vec{r}\,'}{\lvert\vec{r}\,'\rvert} \cdot \hat{B} = \frac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert} \cdot \hat{N} = \hat{B}\times\hat{T} \cdot \kappa = \frac{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert^3} \cdot \tau = \frac{(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')\cdot\vec{r}\,'''}{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert^2} \cdot$ $a_T = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{v}\rvert} \cdot a_N = \frac{\lvert\vec{v}\times\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert} \cdot s = \int\lvert\vec{r}\,'\rvert\,dt$ · plano osculador $\perp \hat{B}$, normal $\perp \hat{T}$, rectificante $\perp \hat{N}$ · tangencia: $\vec{r}\,' \cdot \nabla F = 0$ · ángulo curva–superficie: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\lvert\vec{r}\,'\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert\lvert\vec{n}\rvert}$
Coordenadas curvilíneas (U2B)	directa $x(u,v)$: $h_u = \lvert\vec{r}_u\rvert$, $\hat{e}_u = \vec{r}_u/h_u$ · inversa $u(x,y)$: $h_u = 1/\lvert\nabla u\rvert$, $\hat{e}_u = \nabla u/\lvert\nabla u\rvert$ · $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$ · ortogonal: $\lvert J\rvert = h_u h_v h_w$ · $a_u = \vec{a}\cdot\hat{e}_u$ · cilíndricas $h = (1, r, 1)$ · esféricas $h = (1, \rho\operatorname{sen}\phi, \rho)$
Operadores (U2B)	$\nabla f = \sum \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\hat{e}_i$ · $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\partial_1(h_2h_3F_1) + \partial_2(h_1h_3F_2) + \partial_3(h_1h_2F_3)\right]$ · $\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$ con (q_1,q_2,q_3) dextrógiro (esféricas: (ρ,ϕ,θ)) · solenoidal: $\nabla\cdot\vec{F} = 0$ · irrotacional: $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$
Integrales de línea (U3)	$\int_C f\,ds = \int f(\vec{r}(t))\lvert\vec{r}\,'(t)\rvert dt$ · $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$ · segmento $\vec{r} = A + t(B-A)$, $t\in[0,1]$ · $\nabla\times\vec{F} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$ · conservativo: $W = \varphi(B) - \varphi(A)$ · curvilíneas: $d\vec{r} = \sum h_i\,dq_i\,\hat{e}_i$
Integrales dobles (U4A)	$dA = r\,dr\,d\theta \cdot dA = \lvert J(\frac{x,y}{u,v})\rvert\,du\,dv \cdot V = \iint(z_{techo} - z_{piso})\,dA$ · Green: $\oint P\,dx + Q\,dy = \iint(Q_x - P_y)\,dA$ (antihorario)

Tema	Expresiones
Superficie, triples, Stokes y Gauss (U4B)	$dV = r\,dr\,d\theta\,dz \cdot dV = \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ · área: $\iint\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dA \cdot z = g(x,y)$: $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$ · Gauss: $\oiint\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint\nabla\cdot\vec{F}\,dV$ · Stokes: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{N}\,dA$

Ejercicio 2B.6.7 ← volver

1. En esféricas, $f = \rho^5$, que solo depende de ρ.
2. $\nabla^2 f = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \cdot 5\rho^4\right) = \dfrac{30\rho^5}{\rho^2} = 30\rho^3$.
3. En $B(1,1,0)$: $\rho = \sqrt{2}$ y $\rho^3 = 2\sqrt{2}$, así que $\nabla^2 f = 60\sqrt{2}$.

Ejercicio 2B.6.8 ← volver

1. $\vec{r}_u = (2,-4)$ y $\vec{r}_v = (6,3)$; $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 12 - 12 = 0$: ortogonal.
2. $h_u = \sqrt{20}$ y $h_v = \sqrt{45}$.
3. $f_u = 2$ y $f_v = 2v$. Como $\frac{1}{h_u}\hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u^2}$: $\nabla f = \dfrac{2}{20}(2,-4) + \dfrac{2v}{45}(6,3) = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{4v}{15},\ -\dfrac{2}{5} + \dfrac{2v}{15}\right)$.
4. En $v = 2$: $\nabla f = \left(\frac{3}{15} + \frac{8}{15},\ -\frac{6}{15} + \frac{4}{15}\right) = \frac{11}{15}\hat{\imath} - \frac{2}{15}\hat{\jmath}$.

E.3 · Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. $R_y - Q_z = 0 - 0 = 0$.
2. $R_x = -2z$ y $P_z = -2z$, así que $-(R_x - P_z) = 0$.
3. $Q_x = -\operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x$ y $P_y = -\operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x$, así que $Q_x - P_y = 0$.
4. El rotacional es nulo en todo $\mathbb{R}^3$ y la curva es cerrada: $W = 0$. No hace falta parametrizar la hipocicloide.
5. Comprobación: $\varphi = x\cos y + y^2 \cos x - xz^2 - 2y + z$ cumple $\nabla\varphi = \vec{F}$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. En cilíndricas: $\vec{F}\cdot d\vec{r} = rz^2 \operatorname{sen}^2\theta\, dr + r\left(rz^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) d\theta + r^2 z \operatorname{sen}^2\theta\, dz$.
2. $\varphi = \int rz^2 \operatorname{sen}^2\theta\, dr = \frac{1}{2}r^2z^2 \operatorname{sen}^2\theta + g(\theta, z)$.
3. $\varphi_\theta = r^2z^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + g_\theta$, que coincide con rF_θ si $g_\theta = 0$; $\varphi_z = r^2 z \operatorname{sen}^2\theta + g_z$, que coincide con F_z si $g_z = 0$. Entonces $\varphi = \frac{1}{2}r^2z^2 \operatorname{sen}^2\theta$.
4. $\varphi(A) = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ y $\varphi(B) = 0$, porque $\operatorname{sen} 0 = 0$.
5. $W = 0 - 1 = -1$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\, dr + F_\theta\, r\, d\theta = \theta\, dr - r\, d\theta$.
2. No es diferencial exacta: de $\varphi_r = \theta$ sale $\varphi = r\theta + g(\theta)$, y entonces $\varphi_\theta = r + g'(\theta)$, que nunca es igual a $-r$. Hay que integrar sobre el arco.
3. Sobre el arco $r = 2$: $dr = 0$ y θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$.
4. $W = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (-2)\, d\theta = -\pi$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. Cada componente depende solo de su variable, así que el rotacional es nulo: $\varphi = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$.
2. $\varphi(P) = \frac{1}{3}\left(8 + (\sqrt{2})^3 + 0\right) = \frac{8+2\sqrt{2}}{3}$ y $\varphi(O) = 0$.
3. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \dfrac{8 + 2\sqrt{2}}{3}$.
4. Comprobación directa con $\vec{r}(t) = (t^2, t, 0)$, $0 \le t \le \sqrt{2}$: $\vec{F} \cdot \vec{r}\,' = 2t^5 + t^2$ e $\int_0^{\sqrt{2}} (2t^5 + t^2)\, dt = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. $R_y - Q_z = 1 - 1 = 0$; $-(R_x - P_z) = -(8z^3 - 8z^3) = 0$; $Q_x - P_y = (-2 - 3y^2) - (-3y^2 - 2) = 0$. Es conservativo.
2. $\varphi = \int (-y^3 - 2y + 2z^4)\, dx = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + g(y, z)$.
3. $\varphi_y = -3xy^2 - 2x + g_y = -2x - 3xy^2 + z \Rightarrow g_y = z \Rightarrow g = yz + h(z)$.
4. $\varphi_z = 8xz^3 + y + h'(z) = y + 8xz^3 + 6 \Rightarrow h = 6z$. Entonces $\varphi = -xy^3 - 2xy + 2xz^4 + yz + 6z$.
5. $\varphi(B) = \varphi(1, 0, 1) = 2 + 6 = 8$ y $\varphi(A) = \varphi(-1, 2, 1) = 8 + 4 - 2 + 2 + 6 = 18$.
6. $W = 8 - 18 = -10$.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 4r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr + r \cdot r^3 \cos\theta\, d\theta = 4r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr + r^4 \cos\theta\, d\theta$.
2. $\varphi = \int 4r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr = r^4 \operatorname{sen}\theta + g(\theta)$; $\varphi_\theta = r^4 \cos\theta + g' = r^4 \cos\theta \Rightarrow g' = 0$.
3. $\varphi(B) = 1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ y $\varphi(A) = 0$.
4. $W = 1$.

Ejercicio 3.6.7 ← volver

1. $Q_x - P_y = -1 - 1 = -2 \neq 0$: no es conservativo. Se suma por tramos, con $\vec{F} \cdot d\vec{r} = y\, dx - x\, dy$.
2. De A a B: $y = 0$, $dy = 0$, así que la integral vale 0.
3. De B a C: $\vec{r}(t) = (1 - t,\ t)$, $0 \le t \le 1$; $y\, dx - x\, dy = t(-dt) - (1 - t)\, dt = -dt$, que integra -1.
4. De C a A: $x = 0$, $dx = 0$, así que la integral vale 0.
5. $W = 0 - 1 + 0 = -1$. Con el teorema de Green: $\iint_R (Q_x - P_y)\, dA = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Ejercicio 3.6.8 ← volver

1. $R_y = \dfrac{-2yz}{(y^2 + z^2)^2}$ y $Q_z = \dfrac{-2yz}{(y^2 + z^2)^2}$: componente $\hat{\imath}$ nula.
2. $R_x = 0$ y $P_z = 0$: componente $\hat{\jmath}$ nula.
3. $Q_x = 2\sec^2(x + y)\tan(x + y) = P_y$: componente $\hat{k}$ nula.
4. $\varphi = \int \left(\ln x + \sec^2(x + y)\right) dx = x \ln x - x + \tan(x + y) + g(y, z)$; $\varphi_y = \sec^2(x + y) + g_y \Rightarrow g_y = \frac{y}{y^2 + z^2} \Rightarrow g = \frac{1}{2}\ln(y^2 + z^2) + h(z)$; $\varphi_z = \frac{z}{y^2 + z^2} + h' \Rightarrow h' = 0$. El campo **es conservativo**, con $\varphi = x \ln x - x + \tan(x + y) + \frac{1}{2}\ln(y^2 + z^2)$.
5. $\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{1}{x} + 2\sec^2(x + y)\tan(x + y)\right) + \left(2\sec^2(x + y)\tan(x + y) + \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2}\right) + \frac{y^2 - z^2}{(y^2 + z^2)^2}$.

4. Sombra: disco de radio 1. Circulación $= \frac{3}{2}\pi = \frac{3\pi}{2}$ (sentido antihorario visto desde arriba; en sentido contrario, $-\frac{3\pi}{2}$).

Ejercicio 4B.6.13 ← volver

1. La curva es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $z = 1$.
2. $\nabla \times \vec{F} = \big(0 - 0,\ 0 - 0,\ 1 - 2y\big) = (0, 0, 1 - 2y)$.
3. Superficie: el disco en $z = 1$, con $\hat{n} = \hat{k}$. $\iint_{r \le 1} (1 - 2y)\, dA = \pi - 2\iint y\, dA = \pi - 0$.
4. π (sentido antihorario visto desde arriba).

Ejercicio 4B.6.14 ← volver

1. Con $z = 1$: $x^2 + y^2 = 4$, circunferencia de radio 2 en el plano $z = 1$.
2. $\nabla \times \vec{F} = \big(2xy - x^2,\ 2yz - y^2,\ 2xz - z^2\big)$.
3. Superficie: el disco en $z = 1$, con $\hat{n} = \hat{k}$. Ahí, $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = 2x - 1$.
4. $\iint_{r \le 2} (2x - 1)\, dA = 2 \cdot 0 - 4\pi$.
5. -4π (sentido antihorario visto desde arriba).

Ejercicio 4B.6.7 ← volver

1. Forma canónica: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, un elipsoide cerrado. Para cada $r\le 2$, $-\frac{3}{2}\sqrt{4-r^2}\le z\le \frac{3}{2}\sqrt{4-r^2}$.
2. $P_x=-y^2$, $Q_y=-x^2$, $R_z=4$: $\nabla\cdot\vec F=4-r^2$.
3. En z: $(4-r^2)\cdot 3\sqrt{4-r^2}=3(4-r^2)^{3/2}$.
4. Flujo $=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 3(4-r^2)^{3/2}\,r\,dr\,d\theta = 6\pi\left[-\frac{1}{5}(4-r^2)^{5/2}\right]_0^2 = 6\pi\cdot\frac{32}{5}$.
5. $\frac{192\pi}{5}$.

Ejercicio 4B.6.8 ← volver

1. Cilindro de radio 4 entre $z=-5$ y $z=4$ (altura 9). Integrando r; $dV=r\,dr\,d\theta\,dz$.
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_{-5}^{4} r^2\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 9\cdot\frac{4^3}{3}=2\pi\cdot 9\cdot\frac{64}{3}$.
3. 384π.

Ejercicio 4B.6.9 ← volver

1. Esfera de radio 4: $dS=16\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$.
2. Primer octante: $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$. Entre los planos $y=x$ y $x=0$: $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
3. $A=\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} 16\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = 16\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}=4\pi$ **u²**.

Ejercicio 4B.6.10 ← volver

1. Parametrización $\vec r(x,z)=(x,\ x^2,\ z)$ con $0\le x\le 1$, $0\le z\le x$.
2. $\vec r_x=(1,2x,0)$, $\vec r_z=(0,0,1)$; $\vec r_x\times\vec r_z=(2x,-1,0)$, de norma $\sqrt{1+4x^2}$.
3. $A=\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{1+4x^2}\,dz\,dx=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left[\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{12}\right]_0^1$.
4. $A=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$ **u²**.

Ejercicio 4B.6.11 ← volver

1. Cilindro de radio 2: $x=2\cos\theta$, $y=2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z=z$; $dS=2\,d\theta\,dz$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le z\le 2$.
2. $xy^2\,dS=(2\cos\theta)(4\,\mathrm{sen}^2\theta)(2)\,d\theta\,dz=16\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta\,dz$.
3. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\pi/2} 16\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta\,dz=16\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{32}{3}$.

Ejercicio 4B.6.12 ← volver

1. $\nabla\times\vec F=(1,-1,2)$, como en el ejercicio 4B.5.6.
2. Superficie: $z=-\frac{x}{2}-y$; $\vec N=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$, hacia arriba.
3. $(\nabla\times\vec F)\cdot\vec N=\frac{1}{2}-1+2=\frac{3}{2}$, constante.

6. $\nabla\cdot\vec F=\frac{1}{x}+4\sec^2(x+y)\tan(x+y)\neq 0$: **no es solenoidal**.

Ejercicio 3.6.9 ← volver

1. En cilíndricas: $\vec F\cdot d\vec r=-\frac{z}{r^2}\sec^2\theta\,dr+\frac{2z}{r}\sec^2\theta\tan\theta\,d\theta+\frac{\sec^2\theta}{r}\,dz$, porque $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$.
2. $\varphi=\int -\frac{z}{r^2}\sec^2\theta\,dr=\frac{z}{r}\sec^2\theta+g(\theta,z)$.
3. $\varphi_\theta=\frac{z}{r}\cdot 2\sec^2\theta\tan\theta+g_\theta$, que coincide si $g_\theta=0$; $\varphi_z=\frac{\sec^2\theta}{r}+g_z$, que coincide si $g_z=0$. Es conservativo, con $\varphi=\frac{z}{r}\sec^2\theta$.
4. $\varphi(B)=\frac{2}{2}\sec^2 0=1$ y $\varphi(A)=\frac{1}{1}\sec^2\frac{\pi}{4}=2$.
5. $W=1-2=-1$.

E.4A · Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

Ejercicio 4A.6.1 ← volver

1. Región: $1\le r\le 2$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; el integrando es $\cos\frac{\pi r^2}{2}$.
2. $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) r\,dr\,d\theta$.
3. En r: con $w=\frac{\pi r^2}{2}$, $dw=\pi r\,dr$: $\displaystyle\int_1^2\cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)r\,dr=\frac{1}{\pi}\Big[\mathrm{sen}\,w\Big]_{\pi/2}^{2\pi}=\frac{1}{\pi}(0-1)=-\frac{1}{\pi}$.
4. En θ: $-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4A.6.2 ← volver

1. Intersecciones: $x(8-x)=7\Rightarrow x^2-8x+7=0\Rightarrow(x-1)(x-7)=0$, así que $x=1$ y $x=7$.
2. Entre ellas, el techo es la recta $y=8-x$ y el piso, la hipérbola $y=\frac{7}{x}$ (en $x=2$: $6>3.5$).
3. $A=\displaystyle\int_1^7\left(8-x-\frac{7}{x}\right)dx=\left[8x-\frac{x^2}{2}-7\ln x\right]_1^7$.
4. $=\left(56-\frac{49}{2}-7\ln 7\right)-\left(8-\frac{1}{2}\right)=24-7\ln 7$. $A=24-7\ln 7$ **u²**.

Ejercicio 4A.6.3 ← volver

1. Intersecciones: la recta $x+y=3$ corta a la circunferencia en $(3,0)$ y $(0,3)$.
2. El segmento pequeño está entre la recta (piso) y el arco $y=\sqrt{9-x^2}$ (techo), para $0\le x\le 3$.
3. $A=\displaystyle\int_0^3\left[\sqrt{9-x^2}-(3-x)\right]dx$.
4. $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ es un cuarto del círculo de radio 3: $\frac{9\pi}{4}$. Además $\int_0^3(3-x)\,dx=\frac{9}{2}$ (un triángulo).
5. $A=\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}=\frac{9}{4}(\pi-2)$ **u²**.

Ejercicio 4A.6.4 ← volver

1. $r = e$ es la circunferencia de radio e con centro en el origen; $r = 2e\,\operatorname{sen}\theta$ es la de radio e con centro en $(0, e)$.
2. Intersección: $e = 2e\,\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, así que $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
3. Por simetría respecto al eje Y se calcula la mitad derecha y se duplica. Para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ manda la curva $r = 2e\,\operatorname{sen}\theta$; para $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, la curva $r = e$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{(2e\,\operatorname{sen}\theta)^2}{2}\,d\theta = e^2\int_0^{\pi/6}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = e^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
5. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{e^2}{2}\,d\theta = \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi e^2}{6}$.
6. $A = 2\left[e^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\pi e^2}{6}\right] = e^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **u²**.

Ejercicio 4A.6.5 ← volver

1. Techo $z = 16 - y$, piso $z = 0$, sombra: disco $r \le 2$ (en el disco, $16 - y > 0$).
2. $V = \displaystyle\iint_R (16-y)\,dA = 16\cdot\text{Área} - \iint_R y\,dA$.
3. El disco es simétrico respecto al eje X, así que $\iint_R y\,dA = 0$.
4. $V = 16\cdot 4\pi = 64\pi$ **u³.**

Ejercicio 4A.6.6 ← volver

1. $P = xy \Rightarrow P_y = x$; $Q = x + y \Rightarrow Q_x = 1$. Entonces $Q_x - P_y = 1 - x$.
2. Región: medio anillo, $3 \le r \le 4$, $0 \le \theta \le \pi$.
3. $\displaystyle\iint_R (1-x)\,dA = \text{Área} - \iint_R x\,dA$.
4. Área: $\frac{1}{2}\pi(16-9) = \frac{7\pi}{2}$. El medio anillo es simétrico respecto al eje Y, así que $\iint_R x\,dA = 0$ (en polares, $\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$).
5. $\frac{7\pi}{2}$**.**

Ejercicio 4A.6.7 ← volver

1. $P = y - x \Rightarrow P_y = 1$; $Q = 2x - y \Rightarrow Q_x = 2$. Entonces $Q_x - P_y = 1$: la integral es el área de la región.
2. Intersecciones: $x = x^2 - x \Rightarrow x(x-2) = 0$, así que $x = 0$ y $x = 2$. Entre ellas, la recta $y = x$ está arriba.
3. $\displaystyle A = \int_0^2 \left[x - (x^2 - x)\right]dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = 4 - \frac{8}{3}$.
4. $\frac{4}{3}$**.**

Ejercicio 4A.6.8 ← volver

1. Límites: $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2$.
2. $\displaystyle J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; entonces $\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| = \frac{1}{2}$.

3. $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, de donde $x^2 + y^2 = \frac{(u+v)^2 + (u-v)^2}{4} = \frac{u^2+v^2}{2}$.
4. $\displaystyle\int_0^2\int_0^2 \frac{u^2+v^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_0^2\left(\frac{8}{3} + 2v^2\right)dv = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right)$.
5. $\frac{8}{3}$**.**

E.4B · Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

Ejercicio 4B.6.1 ← volver

1. Esfera, superficie cerrada. $\nabla\cdot\vec{F} = 3 + 2 + 4 = 9$.
2. Radio 5: $V = \frac{4}{3}\pi(125) = \frac{500\pi}{3}$.
3. Flujo $= 9\cdot\frac{500\pi}{3} = 1500\pi$.

Ejercicio 4B.6.2 ← volver

1. Cono más tapa, cerrada. $\nabla\cdot\vec{F} = 3$.
2. Altura 2; en $z = 2$ el radio es 2. $V = \frac{1}{3}\pi(4)(2) = \frac{8\pi}{3}$.
3. Flujo $= 3\cdot\frac{8\pi}{3} = 8\pi$.

Ejercicio 4B.6.3 ← volver

1. $P_x = 2xy^2 + 3$, $Q_y = -2xy^2 + 3$, $R_z = 3$. Entonces $\nabla\cdot\vec{F} = 9$.
2. $V = \pi(2)^2(8) = 32\pi$.
3. Flujo $= 9\cdot 32\pi = 288\pi$.

Ejercicio 4B.6.4 ← volver

1. $P_x = 0$, $Q_y = x^2$, $R_z = y^2$: $\nabla\cdot\vec{F} = x^2 + y^2 = r^2$.
2. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-1}^1 r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{2^4}{4}$.
3. 16π**.**

Ejercicio 4B.6.5 ← volver

1. $P_x = 3x^2$, $Q_y = -3x^2$, $R_z = 1$: $\nabla\cdot\vec{F} = 1$. El flujo es el volumen.
2. Techo $z = 16 - y$, piso $z = 0$, sombra: disco $r \le 2$.
3. $V = \iint_R (16-y)\,dA = 16\cdot 4\pi - \iint_R y\,dA$, y la segunda vale 0 por simetría.
4. Flujo $= 64\pi$.

Ejercicio 4B.6.6 ← volver

1. $P_x = 2x$, $Q_y = -2x$, $R_z = 2z$: $\nabla\cdot\vec{F} = 2z$.
2. Sólido: $r \le z \le 3$, $0 \le r \le 3$.
3. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^3 2z\,r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^3 \left(9 - r^2\right)r\,dr$.
4. $= 2\pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = 2\pi\cdot\frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}$.