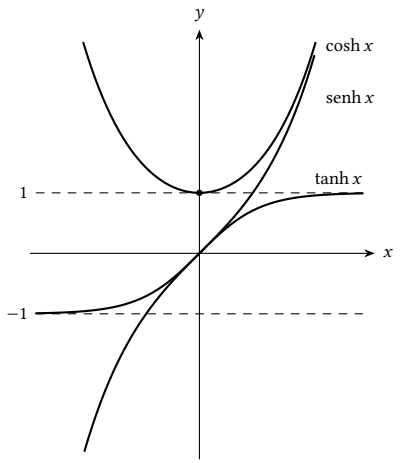


Identidades.

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$$
$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x, \qquad \operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x,$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x.$$

Inversas en forma logarítmica.

$$\operatorname{ang\,senh} x = \ln\!\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R};$$
$$\operatorname{ang\,cosh} x = \ln\!\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1;$$
$$\operatorname{ang\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Se obtienen al despejar x de $y = \operatorname{senh} x$ (y de las otras) con $u = e^x$, que da una ecuación cuadrática en u.

2.1.3 Regla de L'Hôpital

Si $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, o los dos límites son infinitos, y existe $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), entonces

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vale para $x \to a$, $x \to a^{\pm}$ y $x \to \pm\infty$. Se derivan el numerador y el denominador *por separado* (no es la regla del cociente). Si el nuevo límite vuelve a ser $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica otra vez.

Las siete formas indeterminadas. Solo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ admiten la regla directamente. $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$ se reescriben como un cociente. 1^{∞}, 0^0 e ∞^0 se resuelven tomando logaritmo: si $y = f(x)^{g(x)}$, entonces $\ln y = g(x) \ln f(x)$, que es de la forma $0 \cdot \infty$, y $\lim y = e^{\lim \ln y}$. No son indeterminadas: $\frac{0}{\infty} = 0$, $\infty + \infty = \infty$, $0^{\infty} = 0$, $\infty^{\infty} = \infty$.

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cálculo Integral

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.2.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno conocerá las funciones logaritmo y exponencial, así como sus propiedades, y las aplicará en el cálculo de límites, derivadas e integrales. En el Plan 2016, la regla de L'Hôpital y la integral impropia son los subtemas 2.6 y 2.7 del tema cuyo objetivo es: «El alumno identificará los conceptos de las integrales definida e indefinida y los aplicará en el cálculo y obtención de integrales.»

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** el Plan 2010 estudia toda la unidad. El Plan 2016 estudia aquí las secciones de L'Hôpital y de integral impropia; las de logaritmo, exponencial e hiperbólicas (marcadas «Solo Plan 2010») son de su curso anterior y se leen como repaso, porque se usan para derivar, integrar y calcular límites.
- **Frecuencia:** es el problema 2 de los 52 exámenes del Plan 2010: L'Hôpital en 28 (formas 1^∞ 9, $\infty-\infty$ 5, 0^0 5, $0\cdot\infty$ 3 y otras 6), integral impropia en 22 y derivada de logaritmos o exponenciales en 6; las hiperbólicas aparecen dentro de otros problemas en 10. En los 60 exámenes del Plan 2016, L'Hôpital sale en 17 y la integral impropia en 14, casi siempre como problema 2, que se alterna con temas de la Unidad 1.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas (Plan 2010); de 2 a 3 horas (Plan 2016).
- **Ruta corta:**
  1. Plan 2010: lee la sección 2.1 y el formulario 2.8 (30 min). Plan 2016: lee 2.1.3 y 2.1.4 (15 min) y repasa las derivadas del formulario 2.8.
  2. Sigue los ejemplos de la sección 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve con cronómetro (12 min cada uno) los ejercicios 2.5 de L'Hôpital e impropia; en el Plan 2010, también los de derivadas.

2.1 Conceptos y expresiones

2.1.1 Logaritmo natural y exponencial SOLO PLAN 2010

Logaritmo natural. Para $x>0$ se define

$$\ln x=\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Por el teorema fundamental, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x=\frac{1}{x}$. Su dominio es $(0,\infty)$, su recorrido es $\mathbb{R}$, es creciente, $\ln 1=0$ y $\ln x<0$ si $0<x<1$. El número $e\approx 2.718$ es el que cumple $\ln e=1$.

Propiedades. Para $a,b>0$ y r real:

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,\qquad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b,\qquad \ln a^r=r\ln a.$$

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Integral** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sirve a los dos planes de estudio con los que se imparte la asignatura:

- **Plan 2010**, con el programa aprobado en 2008: cuatro temas, de las integrales definida e indefinida a las funciones de varias variables, con un tema completo de logaritmo, exponencial e hiperbólicas.
- **Plan 2016**: cuatro temas. Empieza con sucesiones y series; el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas pasaron a la materia anterior, y la regla de L'Hôpital y la integral impropia se quedaron en el tema de integrales.

Los métodos de integración, sus aplicaciones y las funciones de varias variables son los mismos en los dos planes. El cuaderno sigue el orden del Plan 2010 y agrega, marcada, la unidad que es de un solo plan:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y **qué plan es el tuyo**.
1. Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann, teorema fundamental e integrales inmediatas.
2. Logaritmo, exponencial e hiperbólicas (solo Plan 2010); regla de L'Hôpital e integral impropia (los dos planes).
3. Parte A: métodos de integración. Parte B: aplicaciones (área, longitud de arco y volumen).
4. Funciones de varias variables.
5. Sucesiones y series (solo Plan 2016).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa).

- *Plan 2010:* «El alumno aplicará los conceptos fundamentales del cálculo integral de funciones reales de variable real, y las variaciones de una función escalar de variable vectorial, para resolver problemas físicos y geométricos.»
- *Plan 2016:* «El alumno utilizará conceptos del cálculo integral para funciones reales de variable real y las variaciones de funciones escalares de variable vectorial respecto a cada una de sus variables, para resolver problemas físicos y geométricos.»

De dónde salen los ejercicios.

- Se revisaron los **112 exámenes finales y extraordinarios publicados** de la asignatura: 52 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2016-2) y 60 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), más 17 exámenes parciales del Plan 2016. Varios tienen versiones A, B, C y D.
- Muchos traen una resolución publicada. **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias**; cada resultado se verificó con álgebra computacional y después se comparó con la resolución publicada, cuando la hay. Las diferencias están en el Apéndice C.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Ejercicio propuesto 1.6.3

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 2.

Si $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 1$, calcule el valor de $b > 0$.

Resultado: $b = \frac{3}{4}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 1.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 1.

Determine el valor medio de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Resultado: $\bar{f} = \frac{2(e-1)}{\pi} \approx 1.094$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 1.6.5

Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 1.

a) Calcule el valor medio de $f(x) = |\tan x|$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. b) Obtenga el valor de c que cumple el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)

Resultado: a) $\bar{f} = \frac{2\ln 2}{\pi} = \frac{\ln 4}{\pi} \approx 0.441$; b) $c = \operatorname{ang\,tan} \frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

1.7 Errores frecuentes

- **Olvidar dividir entre $b-a$.** $\int_a^b f$ es un área; el valor medio es una altura: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
- **Confundir $\bar{f}$ con c.** $\bar{f}$ es una ordenada (un valor de y); c es una abscisa, la x donde $f(c) = \bar{f}$.
- **Dejar abscisas fuera del intervalo.** Al resolver $f(c) = \bar{f}$ pueden salir raíces fuera de $[a, b]$: se descartan diciendo por qué.
- **Escribir $x_i = i\,\Delta x$.** En Riemann el punto es $x_i = a + i\,\Delta x$; solo coincide con $i\,\Delta x$ cuando $a = 0$. Y cada término se multiplica por Δx.
- **Olvidar $g'(x)$ en el TFC.** La derivada de $\int_1^{x^2} f(t)\,dt$ es $f(x^2)\cdot 2x$, no $f(x^2)$. Con el límite inferior variable, el término va restando.
- **Perder el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{du}{u} = \ln|u|$; en una definida, el intervalo no puede contener un cero de u.
- **Ignorar el dominio al despejar un parámetro.** Un b que deje $\sqrt{1-x}$ o $\ln x$ fuera de su dominio dentro del intervalo no sirve, aunque cumpla la ecuación.

1.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 30 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué plan es el tuyo, qué unidades estudiar, en qué orden y qué necesitas de la materia anterior.
- Si eres de la Generación 2027 o posterior, tu plan es el 2026: usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial e Integral.*

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

Cálculo Integral se imparte con dos programas. Los métodos de integración, sus aplicaciones y las funciones de varias variables son iguales; cambian el primer tema y el lugar del logaritmo y la exponencial.

- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

	Plan 2010	Plan 2016
Estudia	Unidades 1 a 4 completas	Unidad 5, Unidad 1, de la Unidad 2 solo L'Hôpital e integral impropia, Unidades 3 y 4
No estudies	Unidad 5	Las secciones de la Unidad 2 marcadas SOLO PLAN 2010 (repásalas solo si las necesitas) y el área en polares de la Unidad 3
El examen trae	valor medio, L'Hôpital o impropia, tres integrales, una aplicación y dos problemas de varias variables	series, una integral (valor medio, L'Hôpital o impropia), tres integrales, una aplicación y dos problemas de varias variables

Tu programa, unidad por unidad. El cuaderno sigue la numeración del Plan 2010. Si tu plan es el 2016, esta tabla dice dónde está cada tema de tu programa:

Tema del programa del Plan 2016	En este cuaderno
1. Sucesiones y series	Unidad 5
2. Las integrales definida e indefinida (2.1 a 2.5)	Unidad 1
2.6 Regla de L'Hôpital; 2.7 integral impropia	Unidad 2, secciones sin rótulo

2. TFC: $F'(x) = \ln(e^x)\, e^x = x\, e^x$.
3. En $x = \ln 2$: $F'(\ln 2) = \ln 2 \cdot e^{\ln 2} = 2 \ln 2$.
4. Comprobación: $\int \ln t \, \mathrm{d}t = t \ln t - t$, así que $F(x) = x\, e^x - e^x + 1$ y $F'(x) = e^x + x\, e^x - e^x = x\, e^x$.
5. $F'(\ln 2) = 2 \ln 2 = \ln 4$ (≈ 1.386).

Ejercicio 1.5.4 · Dos funciones con la misma ordenada media

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 1.

Si las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{a}{2\sqrt{2-x}}$ tienen la misma ordenada media en el intervalo $[0, 1]$, calcule el valor de a.

Resolución.

1. El intervalo es el mismo, así que basta igualar las integrales (el factor $\frac{1}{1-0}$ es igual en los dos lados).
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{ang\,tan} x \big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
3. Con $u = 2 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} = -\sqrt{2-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sqrt{2-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$. Entonces

$$\int_0^1 \frac{a\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} = a\left(-\sqrt{2-x}\right)\Big|_0^1 = a\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

4. $a\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}$. Racionalizando:

$$a = \frac{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)}{4} \approx 1.896.$$

5. g es continua en $[0, 1]$ porque $2 - x > 0$: el valor sirve.
6. $a = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{4}$.

Ejercicio 1.5.5 · Límite inferior desconocido con logaritmo

Adaptado de: 2º final 2024-2, problema 2.

Determine el valor de $a > 0$ que cumple

$$\int_a^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln 2.$$

Resolución.

1. Cambio de variable: $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. La integral es $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$, así que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

   Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(\ln x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$.

Unidad	Tema	Plan 2010 (52)	Plan 2016 (60)
3B	Área, volumen, longitud de arco	**52**	**56**
4	Varias variables (dos problemas)	**52**	**60**
5	Sucesiones y series, Maclaurin	—	**59**

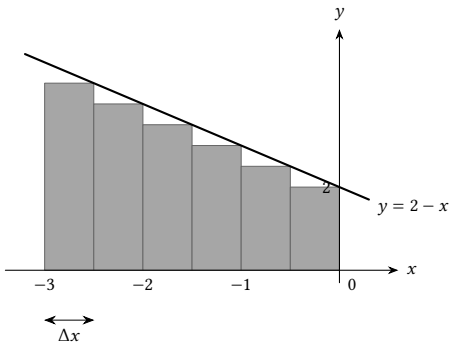
Observaciones:

- **La Unidad 3 y la Unidad 4 valen dos tercios del examen** en los dos planes: dos problemas cada una. Son las primeras que se estudian.
- En el problema de las tres integrales casi siempre hay una de fracciones parciales (50 de 52 y 51 de 60); las otras dos suelen ser por partes y por sustitución trigonométrica.
- En la Unidad 4 lo que más sale es la derivada direccional y el gradiente (29 de 52 y 33 de 60), seguidos del dominio con curvas de nivel, el plano tangente y las derivadas parciales sucesivas.
- En la Unidad 1 casi todo es valor medio (41 de 52 en el Plan 2010). En la Unidad 2, L'Hôpital (28) e impropia (22) se reparten el problema 2 del Plan 2010.
- En el Plan 2016, el problema 1 es de series: convergencia, intervalo de convergencia o suma (35 de 60) o una serie de Maclaurin o Taylor (26 de 60).
- Del programa casi no se evalúan: la condición de integrabilidad, la demostración del teorema fundamental, la definición del logaritmo como integral, los límites dobles, las diferenciales de orden superior y la derivación implícita en sistemas. Se mencionan, pero no se desarrollan.

0.4 Lo que se usa de la materia anterior

Cálculo Integral da por sabido el cálculo diferencial de una variable: en el Plan 2010 es la materia Cálculo Diferencial; en el Plan 2016, Cálculo y Geometría Analítica. Esto es lo que se usa aquí y dónde:

Lo que se usa	Para qué	Unidades
Reglas de derivación y regla de la cadena; derivadas de las trigonométricas directas e inversas	Integrales inmediatas («derivar al revés»), cambio de variable y comprobar cada antiderivada	1, 3A
Diferencial: $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$	Cambio de variable; diferencial total	1, 3A, 4
Límites: formas indeterminadas, al infinito, laterales	L'Hôpital, integral impropia, sumas de Riemann	1, 2
Continuidad en un intervalo	Hipótesis del teorema del valor medio y del teorema fundamental	1, 2



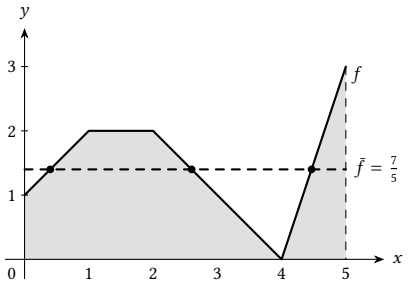
Con $n = 6$ (figura) los rectángulos quedan por debajo de la recta, porque f decrece y se toma el extremo derecho; al crecer n el error $\frac{9}{2n}$ tiende a cero.

1.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1.5.1 · Valor medio de una función dada por su gráfica

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 1.

La gráfica de f en $[0, 5]$ está formada por segmentos de recta que unen los puntos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ y $(5, 3)$ (figura). a) Calcule el valor medio de f en $[0, 5]$. b) Obtenga los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)



Resolución.

1. Por tramos: $f(x) = 1 + x$ en $[0, 1]$; $f(x) = 2$ en $[1, 2]$; $f(x) = 4 - x$ en $[2, 4]$; $f(x) = 3(x - 4)$ en $[4, 5]$.
2. Áreas: trapecio $\frac{1+2}{2}(1) = \frac{3}{2}$; rectángulo $2(1) = 2$; triángulo $\frac{2\cdot 2}{2} = 2$; triángulo $\frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$. Toda el área está sobre el eje:

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{3}{2} + 2 + 2 + \tfrac{3}{2} = 7.$$

1. las sumas de Riemann (Unidad 1);
2. las funciones hiperbólicas inversas (Unidad 2);
3. las potencias trigonométricas con exponentes altos (Unidad 3, Parte A);
4. la longitud de arco en polares (Unidad 3, Parte B);
5. la diferencial total y el límite doble (Unidad 4).

0.6 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por las tres integrales: son el problema más mecánico y cada una vale por separado.
3. Sigue con los dos problemas de varias variables y la aplicación. En la aplicación, dibuja la región antes de plantear la integral.
4. Deja para el final el problema de valor medio, L'Hôpital o series.
5. Comprueba al final: deriva cada antiderivada, revisa que el valor c del teorema del valor medio esté en el intervalo, que un área sea positiva y que un vector unitario tenga norma 1.

0.7 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

2. Haz $u = g(x)$, $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, y reescribe toda la integral en u. Si sobra alguna x, el cambio no sirve.
3. Integra con la tabla y regresa a x. En una definida, o regresas a x o cambias los límites a $u(a)$ y $u(b)$.
4. Comprueba derivando el resultado.

1.3.6 Integral con parámetro

1. Calcula la integral (o el valor medio) dejando el parámetro como letra.
2. Iguala al dato y despeja. Con logaritmos, aplica la exponencial a los dos lados; con raíces, despeja la raíz y eleva al cuadrado.
3. Revisa que el valor obtenido deje el integrando continuo en el intervalo ($\sqrt{1-x}$ pide $b < 1$; $\ln x$ en un denominador pide no pasar por $x = 1$) y que cumpla la condición del enunciado ($a > 0$).
4. Si son dos funciones con la misma ordenada media en el mismo intervalo, basta igualar las integrales: el factor $\frac{1}{b-a}$ se cancela.

1.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Valor medio y abscisa del TVM

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 1.
Calcule el valor medio de $f(x) = 2 - (x-1)^3$ en el intervalo $[0, 2]$ y obtenga el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.
Resolución.

1. f es un polinomio: es continua en $[0, 2]$ y el TVM se aplica.
2. Con $u = x - 1$, $\int (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^4}{4}$. Entonces

$$\int_0^2 \big[2 - (x-1)^3\big]\,\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{(x-1)^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \left(4 - \tfrac{1}{4}\right) - \left(0 - \tfrac{1}{4}\right) = 4.$$

3. Valor medio: $\bar{f} = \frac{4}{2-0} = 2$.
4. TVM: $2 - (c-1)^3 = 2 \Rightarrow (c-1)^3 = 0 \Rightarrow c = 1$, que está en $[0, 2]$.
5. $\bar{f} = 2$ **y** $c = 1$**.** El rectángulo de base 2 y altura 2 tiene la misma área que la región bajo la curva: lo que la curva sobra en $[0, 1]$ le falta en $[1, 2]$.

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (sirve para las funciones por tramos);
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
- si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Valor medio (ordenada media). El valor medio de f en $[a, b]$ es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Los exámenes lo llaman también *valor promedio* u *ordenada media*, y a veces lo escriben $f(c)$.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (TVM). Si f es continua en $[a, b]$, existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a),$$

es decir, $f(c) = \bar{f}$. *Interpretación geométrica:* el área bajo la curva es igual a la de un rectángulo de base $b - a$ y altura $\bar{f}$ (figura del ejemplo 1.4.1). El número c se llama *abscisa media*. Puede haber más de uno; solo valen los que están en el intervalo.

Integral indefinida y Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Si f es continua, la integral con el extremo superior variable

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es derivable y $F'(x) = f(x)$ (primera parte del TFC): F es una *antiderivada* o *primitiva* de f. Todas las antiderivadas difieren en una constante; su familia es la integral indefinida, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. La segunda parte del TFC da la regla para calcular integrales definidas sin límites:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Con la regla de la cadena, si los dos límites son funciones de x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$

Integrales inmediatas y cambio de variable. Una integral es *inmediata* si el integrando es la derivada de una función conocida (la tabla está en 1.3.5). El *cambio de variable* $u = g(x)$, $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ lleva $\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ a la inmediata $\int f(u)\,\mathrm{d}u$. Las integrales de la forma $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ dan $\ln|g(x)|$; de ellas salen $\int \tan x\,\mathrm{d}x$ y $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

Lo que el programa pide y los exámenes no preguntan. El programa incluye la *condición de integrabilidad* (toda función continua en $[a, b]$, o acotada con un número

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental 10

Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia 22

Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales 35

Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución 50

Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional 64

Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016) 78

Apéndice A · Formulario 89

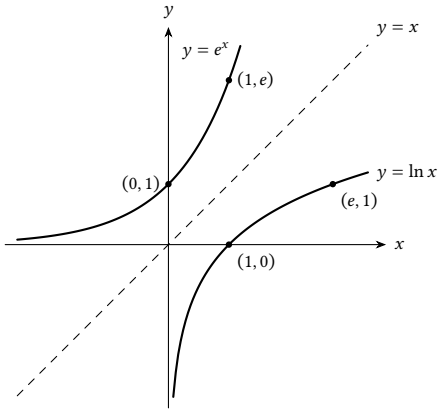
Apéndice B · Exámenes 92

Apéndice C · Fe de erratas 95

Apéndice D · Fuentes 97

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 99

Exponencial. e^x es la inversa de $\ln x$: $e^{\ln x} = x$ para $x > 0$ y $\ln e^x = x$ para todo x. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido $(0, \infty)$; $(e^x)' = e^x$. Las gráficas de $\ln x$ y e^x son simétricas respecto a la recta $y = x$: $\ln x$ pasa por $(1, 0)$ y $(e, 1)$; e^x, por $(0, 1)$ y $(1, e)$.



Otras bases y cambio de base. Para $a > 0$, $a \neq 1$:

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Con el cambio de base, todo logaritmo se escribe con ln antes de derivar.

El número e como límite.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e.$$

Más general: $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$. Sirve para comprobar las formas 1^∞ (2.3.5).

Series de potencias (subtema 2.4 del Plan 2010). El desarrollo de $\ln(1 + x)$ y e^x en series de potencias no ha salido en ninguno de los 52 exámenes del Plan 2010. Las series de Maclaurin y de Taylor, con estas funciones entre los ejemplos, están en la Unidad 5, en la sección de series de Maclaurin y Taylor.

2.1.2 Funciones hiperbólicas SOLO PLAN 2010

Definiciones.

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x},$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}.$$

Valores que se usan en los límites: $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, $\tanh 0 = 0$; cerca de 0, $\coth x$ y $\operatorname{csch} x$ tienden a $\pm\infty$. $\cosh x \geq 1$ es par; $\operatorname{senh} x$ y $\tanh x$ son impares; $\tanh x$ está entre -1 y 1 (asíntotas $y = \pm 1$).

Sin calculadora ni formulario. Los exámenes recientes lo dicen expresamente, y los anteriores están hechos para aritmética exacta. Por eso las resoluciones dejan los resultados exactos: $\frac{32}{3}$, $\frac{117\pi}{5}$, e^6, $\ln 2$.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Formato de cada resolución. Planteamiento → pasos numerados → **resultado** en negritas. Cada integral indefinida termina con su comprobación: se deriva el resultado y se obtiene el integrando.

Marcas de plan. Lo que es de un solo plan lo dice en el título de la unidad o de la sección, con el rótulo SOLO PLAN 2010 o SOLO PLAN 2016. Lo que no lleva rótulo es de los dos planes.

Rutas de estudio. La Unidad 0 dice qué unidades estudiar según tu plan y propone, para cada plan, una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

1.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Identifica el tipo con la tabla 1.2: valor medio, gráfica, Riemann, TFC o parámetro.
2. Valor medio: integra, divide entre $b-a$, resuelve $f(c) = \bar{f}$ y revisa que $c \in [a,b]$.
3. Riemann: escribe Δx y $x_i = a + i\,\Delta x$ antes de sustituir; separa en $\sum 1$, $\sum i$, $\sum i^2$.
4. TFC: no integres; aplica $f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$.
5. Cierra siempre con una comprobación: derivar la antiderivada o calcular la integral por el TFC.

Tema del programa del Plan 2016	En este cuaderno
3. Métodos de integración (3.1 a 3.3)	Unidad 3, Parte A
3.4 Aplicaciones (área, longitud de arco, volumen)	Unidad 3, Parte B
4. Derivación y diferenciación de funciones de varias variables	Unidad 4

Las unidades y secciones de un solo plan lo dicen en su título y en su recuadro de instrucciones.

0.2 Cómo es el examen

Según los 52 finales y extraordinarios del Plan 2010 (2010-1 a 2016-2) y los 60 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1):

- **Duración:** 2 horas (2.5 horas en algunos exámenes de 2010 y 2011).
- **Problemas:** 6, de 10 a 20 puntos cada uno, que suman 100. Hasta 2012-1, algunos traían 7.
- **Material:** ninguno. Desde 2024 las instrucciones dicen «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno, ni formulario». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{32}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, e^6, $\ln 2$.
- **Plantilla casi fija**, con el mismo orden en los dos planes salvo el primer problema:
  1. Plan 2010: valor medio y teorema del valor medio (Unidad 1). Plan 2016: una serie, su intervalo de convergencia o una serie de Maclaurin (Unidad 5).
  2. Plan 2010: regla de L'Hôpital o integral impropia (Unidad 2). Plan 2016: valor medio, L'Hôpital o impropia (Unidades 1 y 2).
  3. Tres integrales, una por método (Unidad 3, Parte A).
  4. Una aplicación: área, volumen o longitud de arco (Unidad 3, Parte B).
  5. y 6. Dos problemas de varias variables (Unidad 4).
- **Cada inciso se califica por separado.** En el problema de las tres integrales, cada una vale lo mismo.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Exámenes en los que aparece cada unidad. Las versiones del mismo examen (tipos A a D) cuentan por separado.

Unidad	Tema	Plan 2010 (52)	Plan 2016 (60)
1	Valor medio, Riemann, teorema fundamental	**52**	34
2	L'Hôpital, integral impropia, derivadas de logaritmos y exponenciales	**52**	31 (L'Hôpital o impropia)
3A	Tres integrales por método	**52**	**60**

2. Evaluación (con $a > 1$, para que $\ln x > 0$ en todo el intervalo):

$$\ln(\ln x)\Big|_a^{e^2} = \ln 2 - \ln(\ln a).$$

3. $\ln 2 - \ln(\ln a) = \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln a) = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e$.
4. $a = e > 1$: el integrando es continuo en $[e, e^2]$ y el valor sirve. Un $a \leq 1$ dejaría $x = 1$ (donde $\ln x = 0$) dentro del intervalo.
5. $a = e$**.**

Ejercicio 1.5.6 · TVM con tres abscisas medias

Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 2.

Sea $f(x) = 3x^2 - 5x^4$ en $[-1, 1]$. Calcule el o los valores de c del intervalo que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Resolución.

1. Integral:

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 - 5x^4)\,dx = \left(x^3 - x^5\right)\Big|_{-1}^{1} = (1-1) - (-1+1) = 0.$$

2. Valor medio: $\bar{f} = \frac{0}{2} = 0$.
3. TVM: $3c^2 - 5c^4 = 0 \Rightarrow c^2(3 - 5c^2) = 0 \Rightarrow c = 0$ o $c^2 = \frac{3}{5}$.
4. $c = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{5} \approx \pm 0.775$: los dos están en $[-1, 1]$.
5. $c = 0$**,** $c = \frac{\sqrt{15}}{5}$ **y** $c = -\frac{\sqrt{15}}{5}$**.** El teorema garantiza al menos uno; aquí hay tres.

1.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1**.

Ejercicio propuesto 1.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2020-1, problema 2.

Mediante el límite de las sumas de Riemann, calcule $\int_1^3 (x+1)\,dx$.

Resultado: 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 1.6.2

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,dt$. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine $F'(x)$.

Resultado: $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Lo que se usa	Para qué	Unidades
Función inversa, dominio y recorrido	Logaritmo y exponencial como inversas; triángulo de la sustitución trigonométrica; dominio en dos variables	2, 3A, 4
Derivación implícita y paramétrica; recta tangente y normal	Longitud de arco en paramétricas; plano tangente y recta normal	3B, 4
Álgebra: completar el cuadrado, dividir polinomios, factorizar	Fracciones parciales y sustitución trigonométrica	3A
Identidades trigonométricas	Potencias trigonométricas y sustitución trigonométrica	3A

- **Si tu plan es el 2016:** el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas (definición, propiedades, gráficas y derivadas) son de tu materia anterior. Aquí se usan para L'Hôpital y para integrar; si te hace falta un repaso, están en las secciones de la Unidad 2 marcadas SOLO PLAN 2010 .
- **Si tu plan es el 2010:** las sucesiones y series son de tu materia anterior y no vienen en este examen; no estudies la Unidad 5.
- Lo que **no** viene de la materia anterior en ningún plan: la regla de L'Hôpital, la integral impropia y todo lo de varias variables. Se enseña desde cero.

0.5 Orden de estudio

El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar por puntos y por dependencia: las integrales de la Parte A de la Unidad 3 son el problema 3 y la base de casi todo lo demás (aplicaciones, valor medio, impropias).

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	Unidad 0 y Unidad 3, Parte A	Unidad 0 y Unidad 3, Parte A
2	Unidad 3, Parte B	Unidad 3, Parte B
3	Unidad 4	Unidad 4
4	Unidades 1 y 2	Unidad 5
5	Simulacro (Apéndice B)	Unidad 1, L'Hôpital e impropia de la Unidad 2 y simulacro (Apéndice B)

Ruta de 2 semanas.

- **Plan 2010.** Primera semana: Unidad 3 (Partes A y B) y Unidad 4. Segunda semana: Unidades 1 y 2 y un simulacro.
- **Plan 2016.** Primera semana: Unidad 3 (Partes A y B) y Unidad 4. Segunda semana: Unidad 5, Unidad 1, L'Hôpital e impropia de la Unidad 2 y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

3. **a)** $\bar{f} = \frac{7}{5}$.
4. TVM, tramo por tramo, con $f(c) = \frac{7}{5}$:
   - en $[0,1]$: $1 + c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{2}{5}$ (sí está);
   - en $[1,2]$: $f = 2 \neq \frac{7}{5}$ (ninguno);
   - en $[2,4]$: $4 - c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{13}{5}$ (sí está);
   - en $[4,5]$: $3(c-4) = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{67}{15} \approx 4.47$ (sí está).
5. **b)** $c = \frac{2}{5}$, $c = \frac{13}{5}$ **y** $c = \frac{67}{15}$.

Ejercicio 1.5.2 · Riemann con un integrando cuadrático

Adaptado de: 1er extraordinario 2011-2, problema 1.

Mediante el límite de las sumas de Riemann, obtenga $\int_1^3 (x^2+1)\,dx$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$.
2. $f(x_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= 4 + \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &\quad + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 4 + 4\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $4 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.
5. Comprobación: $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3 = (9+3) - \left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{32}{3}$.
6. $\int_1^3 (x^2+1)\,dx = \frac{32}{3}$.

Ejercicio 1.5.3 · TFC con un límite exponencial

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 1.

Sea $F(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$. Calcule $F'(\ln 2)$.

Resolución.

1. Integrando $f(t) = \ln t$; límite superior $g(x) = e^x$, con $g'(x) = e^x$; el inferior es constante.

Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno comprenderá los conceptos de las integrales definida e indefinida y las aplicará en el cálculo y obtención de integrales. El programa de 2016 dice lo mismo con «identificará» en lugar de «comprenderá»; su tema 2 agrega la regla de L'Hôpital y la integral impropia, que en este libro están en la Unidad 2.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** unidad compartida. En el Plan 2010 es el tema 1 (subtemas 1.1 a 1.4); en el Plan 2016, los subtemas 2.1 a 2.5 del tema 2. Las integrales cuyo resultado es un logaritmo natural (2.5 del Plan 2016) están, en el Plan 2010, dentro del subtema 2.4; aquí van con las inmediatas y el cambio de variable.
- **Frecuencia:** en el Plan 2010 sale en los 52 exámenes, siempre como problema 1: valor medio y teorema del valor medio en 41 exámenes (40 problemas), sumas de Riemann en 7, teorema fundamental (derivar una integral con límite variable) en 4 e integral con un parámetro en 2. En el Plan 2016 sale en 34 de los 60 exámenes, como problema 2, que comparte con L'Hôpital y la impropia: valor medio 25, integral con parámetro 6, teorema fundamental 2 y Riemann 1.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1.1 y los procedimientos 1.3.1, 1.3.4 y 1.3.5 (30 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 1.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1.5 con cronómetro (12 min cada uno).

1.1 Conceptos y expresiones

El problema del área y las sumas de Riemann. Para medir el área bajo la gráfica de f en $[a,b]$, el intervalo se parte en n subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, con puntos $x_i = a + i\,\Delta x$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Sobre cada subintervalo se levanta un rectángulo de altura $f(x_i)$. La suma de sus áreas es una *suma de Riemann*:

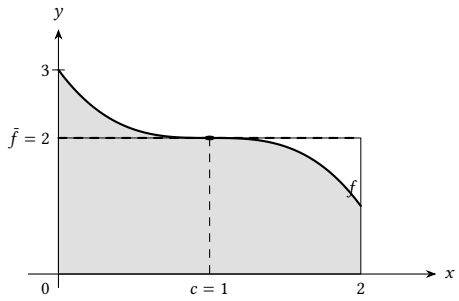
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Integral definida. Si el límite de las sumas de Riemann existe cuando $n \to \infty$, ese límite es la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Interpretación geométrica: es el área *con signo* entre la gráfica y el eje x: cuenta positiva el área sobre el eje y negativa el área bajo él.

Propiedades. Para f y g integrables y k constante:



Ejemplo resuelto · Integral por sumas de Riemann

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo C, problema 1.

Por medio del límite de la suma de Riemann, calcule $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{0-(-3)}{n} = \frac{3}{n}$ y $x_i = -3 + \frac{3i}{n}$.
2. $f(x_i) = 2 - \left(-3 + \frac{3i}{n}\right) = 5 - \frac{3i}{n}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(5 - \frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} \\ &= \frac{15}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{15}{n}\,n - \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 15 - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $\lim_{n\to\infty} S_n = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$.
5. Comprobación: $\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} = 0 - \left(-6 - \frac{9}{2}\right) = \frac{21}{2}$; también es el trapecio de alturas $f(-3) = 5$ y $f(0) = 2$ y base 3: $\frac{5+2}{2}\cdot 3 = \frac{21}{2}$.
6. $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{21}{2}$.

finito de discontinuidades, es integrable) y la *demostración* del TFC (se aplica el TVM a $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ y se hace $h \to 0$). Ninguna de las dos se ha preguntado en los 112 exámenes revisados; basta saber enunciarlas.

1.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcule el valor medio (valor promedio, ordenada media) de f en $[a,b]$»	Valor medio (1.3.1)
«…y el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio», «abscisa media»	Valor medio y TVM (1.3.1)
«La función cuya gráfica está en la figura» (rectas por tramos)	Integral por áreas (1.3.2) y valor medio (1.3.1)
«Mediante el límite de la suma de Riemann, calcule…»	Sumas de Riemann (1.3.3)
«Obtenga $F'(x)$ si $F(x)$ es una integral con límite variable», «usando el Teorema Fundamental del Cálculo»	TFC con límites variables (1.3.4)
Un integrando de la forma $f(g(x))\,g'(x)$ o $\frac{g'(x)}{g(x)}$: $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$, $\tan x$, $\frac{1}{x\ln x}$	Inmediatas y cambio de variable (1.3.5)
«Determine a (o b) tal que la integral valga…», «para que el valor medio sea…», «para que las dos funciones tengan la misma ordenada media»	Integral con parámetro (1.3.6)

1.3 Procedimientos

1.3.1 Valor medio y Teorema del Valor Medio

1. Revisa que f sea continua en $[a,b]$ (si no, el TVM no garantiza nada).
2. Calcula $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ con una antiderivada (1.3.5) y divide entre $b-a$: eso es $\bar{f}$.
3. Para el TVM, resuelve la ecuación $f(c) = \bar{f}$.
4. Conserva solo las raíces que están en $[a,b]$ y descarta las demás diciendo por qué. Puede haber una o varias; si no queda ninguna, hay un error (el teorema garantiza al menos una).
5. Si $f(c) = \bar{f}$ no se puede despejar con funciones elementales, basta dar $\bar{f}$; el teorema asegura que c existe.

Atajo de simetría. Si f es impar alrededor del centro del intervalo, su integral vale cero: $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0$ y $\int_0^2 (x-1)^3\,\mathrm{d}x = 0$. Así se ve rápido que el valor medio de $1 + \sqrt[3]{x-1}$ en $[0,2]$ es 1.

1.3.2 Integral definida por áreas: función dada por una gráfica

1. Escribe la función por tramos, con la recta de cada tramo: con dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), la pendiente es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y la recta, $y = y_1 + m(x-x_1)$.

2. Separa la integral en los mismos tramos (propiedad aditiva).
3. Cada tramo es un rectángulo, un triángulo o un trapecio: $A = \frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)$. Lo que esté bajo el eje x se resta.
4. Suma, divide entre $b-a$ para el valor medio y busca c tramo por tramo con la recta de cada uno.

1.3.3 Sumas de Riemann

1. Escribe $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$ (no olvides el sumando a).
2. Sustituye x_i en f y desarrolla en potencias de i: $f(x_i) = \alpha + \beta i + \gamma i^2$, con α, β, γ que dependen de n.
3. Multiplica por Δx y separa la suma. Usa

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

4. Simplifica: cada término queda como un cociente de polinomios en n. Toma el límite $n \to \infty$ (solo cuentan los términos de mayor grado).
5. Comprueba con el TFC: $F(x)\big|_a^b$ debe dar lo mismo. Si f es lineal, también con el área de un trapecio.

1.3.4 TFC: derivar una integral con límites variables

1. Identifica el integrando $f(t)$, el límite superior $g(x)$ y el inferior $h(x)$. Si un límite es constante, su término vale cero.
2. Aplica
$$F'(x) = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$
No hace falta integrar.
3. Si piden F' en un punto, simplifica antes de sustituir ($\ln e^x = x$).
4. Comprobación: si f tiene antiderivada sencilla, calcula F explícitamente y derívala.

1.3.5 Integrales inmediatas y cambio de variable

Tabla mínima (con u función de x y $a > 0$):

- $\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C$.
- $\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C$; $\int \cos u\,\mathrm{d}u = \operatorname{sen} u + C$; $\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C$.
- $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

1. Busca dentro del integrando una función $g(x)$ cuya derivada también aparezca (salvo una constante): $\operatorname{sen} x$ con $\cos x$; $\ln x$ con $\frac{1}{x}$; $2-x$ con -1.