CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cálculo Integral

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.2.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental 10

Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia 22

Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales 35

Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución 50

Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional 64

Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016) 78

Apéndice A · Formulario 89

Apéndice B · Exámenes 92

Apéndice C · Fe de erratas 95

Apéndice D · Fuentes 97

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 99

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Integral** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sirve a los dos planes de estudio con los que se imparte la asignatura:

- **Plan 2010**, con el programa aprobado en 2008: cuatro temas, de las integrales definida e indefinida a las funciones de varias variables, con un tema completo de logaritmo, exponencial e hiperbólicas.
- **Plan 2016**: cuatro temas. Empieza con sucesiones y series; el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas pasaron a la materia anterior, y la regla de L'Hôpital y la integral impropia se quedaron en el tema de integrales.

Los métodos de integración, sus aplicaciones y las funciones de varias variables son los mismos en los dos planes. El cuaderno sigue el orden del Plan 2010 y agrega, marcada, la unidad que es de un solo plan:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y **qué plan es el tuyo**.
1. Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann, teorema fundamental e integrales inmediatas.
2. Logaritmo, exponencial e hiperbólicas (solo Plan 2010); regla de L'Hôpital e integral impropia (los dos planes).
3. Parte A: métodos de integración. Parte B: aplicaciones (área, longitud de arco y volumen).
4. Funciones de varias variables.
5. Sucesiones y series (solo Plan 2016).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa).

- *Plan 2010:* «El alumno aplicará los conceptos fundamentales del cálculo integral de funciones reales de variable real, y las variaciones de una función escalar de variable vectorial, para resolver problemas físicos y geométricos.»
- *Plan 2016:* «El alumno utilizará conceptos del cálculo integral para funciones reales de variable real y las variaciones de funciones escalares de variable vectorial respecto a cada una de sus variables, para resolver problemas físicos y geométricos.»

De dónde salen los ejercicios.

- Se revisaron los **112 exámenes finales y extraordinarios publicados** de la asignatura: 52 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2016-2) y 60 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), más 17 exámenes parciales del Plan 2016. Varios tienen versiones A, B, C y D.
- Muchos traen una resolución publicada. **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias**; cada resultado se verificó con álgebra computacional y después se comparó con la resolución publicada, cuando la hay. Las diferencias están en el Apéndice C.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora ni formulario. Los exámenes recientes lo dicen expresamente, y los anteriores están hechos para aritmética exacta. Por eso las resoluciones dejan los resultados exactos: $\frac{32}{3}$, $\frac{117\pi}{5}$, e^6, $\ln 2$.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Formato de cada resolución. Planteamiento → pasos numerados → **resultado** en negritas. Cada integral indefinida termina con su comprobación: se deriva el resultado y se obtiene el integrando.

Marcas de plan. Lo que es de un solo plan lo dice en el título de la unidad o de la sección, con el rótulo SOLO PLAN 2010 o SOLO PLAN 2016. Lo que no lleva rótulo es de los dos planes.

Rutas de estudio. La Unidad 0 dice qué unidades estudiar según tu plan y propone, para cada plan, una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

> **Instrucciones de emergencia**
>
> - **Tiempo:** 30 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
> - **Para qué:** saber qué plan es el tuyo, qué unidades estudiar, en qué orden y qué necesitas de la materia anterior.
> - Si eres de la Generación 2027 o posterior, tu plan es el 2026: usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial e Integral.*

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

Cálculo Integral se imparte con dos programas. Los métodos de integración, sus aplicaciones y las funciones de varias variables son iguales; cambian el primer tema y el lugar del logaritmo y la exponencial.

- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

	Plan 2010	Plan 2016
Estudia	Unidades 1 a 4 completas	Unidad 5, Unidad 1, de la Unidad 2 solo L'Hôpital e integral impropia, Unidades 3 y 4
No estudies	Unidad 5	Las secciones de la Unidad 2 marcadas SOLO PLAN 2010 (repásalas solo si las necesitas) y el área en polares de la Unidad 3
El examen trae	valor medio, L'Hôpital o impropia, tres integrales, una aplicación y dos problemas de varias variables	series, una integral (valor medio, L'Hôpital o impropia), tres integrales, una aplicación y dos problemas de varias variables

Tu programa, unidad por unidad. El cuaderno sigue la numeración del Plan 2010. Si tu plan es el 2016, esta tabla dice dónde está cada tema de tu programa:

Tema del programa del Plan 2016	En este cuaderno
1. Sucesiones y series	Unidad 5
2. Las integrales definida e indefinida (2.1 a 2.5)	Unidad 1
2.6 Regla de L'Hôpital; 2.7 integral impropia	Unidad 2, secciones sin rótulo

Tema del programa del Plan 2016	En este cuaderno
3. Métodos de integración (3.1 a 3.3)	Unidad 3, Parte A
3.4 Aplicaciones (área, longitud de arco, volumen)	Unidad 3, Parte B
4. Derivación y diferenciación de funciones de varias variables	Unidad 4

Las unidades y secciones de un solo plan lo dicen en su título y en su recuadro de instrucciones.

0.2 Cómo es el examen

Según los 52 finales y extraordinarios del Plan 2010 (2010-1 a 2016-2) y los 60 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1):

- **Duración:** 2 horas (2.5 horas en algunos exámenes de 2010 y 2011).
- **Problemas:** 6, de 10 a 20 puntos cada uno, que suman 100. Hasta 2012-1, algunos traían 7.
- **Material:** ninguno. Desde 2024 las instrucciones dicen «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno, ni formulario». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{32}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, e^6, $\ln 2$.
- **Plantilla casi fija**, con el mismo orden en los dos planes salvo el primer problema:
  1. Plan 2010: valor medio y teorema del valor medio (Unidad 1). Plan 2016: una serie, su intervalo de convergencia o una serie de Maclaurin (Unidad 5).
  2. Plan 2010: regla de L'Hôpital o integral impropia (Unidad 2). Plan 2016: valor medio, L'Hôpital o impropia (Unidades 1 y 2).
  3. Tres integrales, una por método (Unidad 3, Parte A).
  4. Una aplicación: área, volumen o longitud de arco (Unidad 3, Parte B).
  5. y 6. Dos problemas de varias variables (Unidad 4).
- **Cada inciso se califica por separado.** En el problema de las tres integrales, cada una vale lo mismo.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Exámenes en los que aparece cada unidad. Las versiones del mismo examen (tipos A a D) cuentan por separado.

Unidad	Tema	Plan 2010 (52)	Plan 2016 (60)
1	Valor medio, Riemann, teorema fundamental	**52**	34
2	L'Hôpital, integral impropia, derivadas de logaritmos y exponenciales	**52**	31 (L'Hôpital o impropia)
3A	Tres integrales por método	**52**	**60**

Unidad	Tema	Plan 2010 (52)	Plan 2016 (60)
3B	Área, volumen, longitud de arco	**52**	**56**
4	Varias variables (dos problemas)	**52**	**60**
5	Sucesiones y series, Maclaurin	—	**59**

Observaciones:

- **La Unidad 3 y la Unidad 4 valen dos tercios del examen** en los dos planes: dos problemas cada una. Son las primeras que se estudian.
- En el problema de las tres integrales casi siempre hay una de fracciones parciales (50 de 52 y 51 de 60); las otras dos suelen ser por partes y por sustitución trigonométrica.
- En la Unidad 4 lo que más sale es la derivada direccional y el gradiente (29 de 52 y 33 de 60), seguidos del dominio con curvas de nivel, el plano tangente y las derivadas parciales sucesivas.
- En la Unidad 1 casi todo es valor medio (41 de 52 en el Plan 2010). En la Unidad 2, L'Hôpital (28) e impropia (22) se reparten el problema 2 del Plan 2010.
- En el Plan 2016, el problema 1 es de series: convergencia, intervalo de convergencia o suma (35 de 60) o una serie de Maclaurin o Taylor (26 de 60).
- Del programa casi no se evalúan: la condición de integrabilidad, la demostración del teorema fundamental, la definición del logaritmo como integral, los límites dobles, las diferenciales de orden superior y la derivación implícita en sistemas. Se mencionan, pero no se desarrollan.

0.4 Lo que se usa de la materia anterior

Cálculo Integral da por sabido el cálculo diferencial de una variable: en el Plan 2010 es la materia Cálculo Diferencial; en el Plan 2016, Cálculo y Geometría Analítica. Esto es lo que se usa aquí y dónde:

Lo que se usa	Para qué	Unidades
Reglas de derivación y regla de la cadena; derivadas de las trigonométricas directas e inversas	Integrales inmediatas («derivar al revés»), cambio de variable y comprobar cada antiderivada	1, 3A
Diferencial: $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$	Cambio de variable; diferencial total	1, 3A, 4
Límites: formas indeterminadas, al infinito, laterales	L'Hôpital, integral impropia, sumas de Riemann	1, 2
Continuidad en un intervalo	Hipótesis del teorema del valor medio y del teorema fundamental	1, 2

Lo que se usa	Para qué	Unidades
Función inversa, dominio y recorrido	Logaritmo y exponencial como inversas; triángulo de la sustitución trigonométrica; dominio en dos variables	2, 3A, 4
Derivación implícita y paramétrica; recta tangente y normal	Longitud de arco en paramétricas; plano tangente y recta normal	3B, 4
Álgebra: completar el cuadrado, dividir polinomios, factorizar	Fracciones parciales y sustitución trigonométrica	3A
Identidades trigonométricas	Potencias trigonométricas y sustitución trigonométrica	3A

- **Si tu plan es el 2016:** el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas (definición, propiedades, gráficas y derivadas) son de tu materia anterior. Aquí se usan para L'Hôpital y para integrar; si te hace falta un repaso, están en las secciones de la Unidad 2 marcadas SOLO PLAN 2010 .
- **Si tu plan es el 2010:** las sucesiones y series son de tu materia anterior y no vienen en este examen; no estudies la Unidad 5.
- Lo que **no** viene de la materia anterior en ningún plan: la regla de L'Hôpital, la integral impropia y todo lo de varias variables. Se enseña desde cero.

0.5 Orden de estudio

El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar por puntos y por dependencia: las integrales de la Parte A de la Unidad 3 son el problema 3 y la base de casi todo lo demás (aplicaciones, valor medio, impropias).

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	Unidad 0 y Unidad 3, Parte A	Unidad 0 y Unidad 3, Parte A
2	Unidad 3, Parte B	Unidad 3, Parte B
3	Unidad 4	Unidad 4
4	Unidades 1 y 2	Unidad 5
5	Simulacro (Apéndice B)	Unidad 1, L'Hôpital e impropia de la Unidad 2 y simulacro (Apéndice B)

Ruta de 2 semanas.

- **Plan 2010.** Primera semana: Unidad 3 (Partes A y B) y Unidad 4. Segunda semana: Unidades 1 y 2 y un simulacro.
- **Plan 2016.** Primera semana: Unidad 3 (Partes A y B) y Unidad 4. Segunda semana: Unidad 5, Unidad 1, L'Hôpital e impropia de la Unidad 2 y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

1. las sumas de Riemann (Unidad 1);
2. las funciones hiperbólicas inversas (Unidad 2);
3. las potencias trigonométricas con exponentes altos (Unidad 3, Parte A);
4. la longitud de arco en polares (Unidad 3, Parte B);
5. la diferencial total y el límite doble (Unidad 4).

0.6 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por las tres integrales: son el problema más mecánico y cada una vale por separado.
3. Sigue con los dos problemas de varias variables y la aplicación. En la aplicación, dibuja la región antes de plantear la integral.
4. Deja para el final el problema de valor medio, L'Hôpital o series.
5. Comprueba al final: deriva cada antiderivada, revisa que el valor c del teorema del valor medio esté en el intervalo, que un área sea positiva y que un vector unitario tenga norma 1.

0.7 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno comprenderá los conceptos de las integrales definida e indefinida y las aplicará en el cálculo y obtención de integrales. El programa de 2016 dice lo mismo con «identificará» en lugar de «comprenderá»; su tema 2 agrega la regla de L'Hôpital y la integral impropia, que en este libro están en la Unidad 2.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** unidad compartida. En el Plan 2010 es el tema 1 (subtemas 1.1 a 1.4); en el Plan 2016, los subtemas 2.1 a 2.5 del tema 2. Las integrales cuyo resultado es un logaritmo natural (2.5 del Plan 2016) están, en el Plan 2010, dentro del subtema 2.4; aquí van con las inmediatas y el cambio de variable.
- **Frecuencia:** en el Plan 2010 sale en los 52 exámenes, siempre como problema 1: valor medio y teorema del valor medio en 41 exámenes (40 problemas), sumas de Riemann en 7, teorema fundamental (derivar una integral con límite variable) en 4 e integral con un parámetro en 2. En el Plan 2016 sale en 34 de los 60 exámenes, como problema 2, que comparte con L'Hôpital y la impropia: valor medio 25, integral con parámetro 6, teorema fundamental 2 y Riemann 1.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1.1 y los procedimientos 1.3.1, 1.3.4 y 1.3.5 (30 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 1.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1.5 con cronómetro (12 min cada uno).

1.1 Conceptos y expresiones

El problema del área y las sumas de Riemann. Para medir el área bajo la gráfica de f en $[a,b]$, el intervalo se parte en n subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, con puntos $x_i = a + i\,\Delta x$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Sobre cada subintervalo se levanta un rectángulo de altura $f(x_i)$. La suma de sus áreas es una *suma de Riemann*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Integral definida. Si el límite de las sumas de Riemann existe cuando $n \to \infty$, ese límite es la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Interpretación geométrica: es el área *con signo* entre la gráfica y el eje x: cuenta positiva el área sobre el eje y negativa el área bajo él.

Propiedades. Para f y g integrables y k constante:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (sirve para las funciones por tramos);
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
- si $f(x) \le g(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Valor medio (ordenada media). El valor medio de f en $[a,b]$ es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Los exámenes lo llaman también *valor promedio* u *ordenada media*, y a veces lo escriben $f(c)$.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (TVM). Si f es continua en $[a,b]$, existe al menos un $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a),$$

es decir, $f(c) = \bar{f}$. *Interpretación geométrica:* el área bajo la curva es igual a la de un rectángulo de base $b-a$ y altura $\bar{f}$ (figura del ejemplo 1.4.1). El número c se llama *abscisa media*. Puede haber más de uno; solo valen los que están en el intervalo.

Integral indefinida y Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Si f es continua, la integral con el extremo superior variable

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es derivable y $F'(x) = f(x)$ (primera parte del TFC): F es una *antiderivada* o *primitiva* de f. Todas las antiderivadas difieren en una constante; su familia es la integral indefinida, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. La segunda parte del TFC da la regla para calcular integrales definidas sin límites:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Con la regla de la cadena, si los dos límites son funciones de x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$

Integrales inmediatas y cambio de variable. Una integral es *inmediata* si el integrando es la derivada de una función conocida (la tabla está en 1.3.5). El *cambio de variable* $u = g(x)$, $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ lleva $\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ a la inmediata $\int f(u)\,\mathrm{d}u$. Las integrales de la forma $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ dan $\ln|g(x)|$; de ellas salen $\int \tan x\,\mathrm{d}x$ y $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

Lo que el programa pide y los exámenes no preguntan. El programa incluye la *condición de integrabilidad* (toda función continua en $[a,b]$, o acotada con un número

finito de discontinuidades, es integrable) y la *demostración* del TFC (se aplica el TVM a $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ y se hace $h \to 0$). Ninguna de las dos se ha preguntado en los 112 exámenes revisados; basta saber enunciarlas.

1.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcule el valor medio (valor promedio, ordenada media) de f en $[a,b]$»	Valor medio (1.3.1)
«…y el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio», «abscisa media»	Valor medio y TVM (1.3.1)
«La función cuya gráfica está en la figura» (rectas por tramos)	Integral por áreas (1.3.2) y valor medio (1.3.1)
«Mediante el límite de la suma de Riemann, calcule…»	Sumas de Riemann (1.3.3)
«Obtenga $F'(x)$ si $F(x)$ es una integral con límite variable», «usando el Teorema Fundamental del Cálculo»	TFC con límites variables (1.3.4)
Un integrando de la forma $f(g(x))\,g'(x)$ o $\frac{g'(x)}{g(x)}$: $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$, $\tan x$, $\frac{1}{x\ln x}$	Inmediatas y cambio de variable (1.3.5)
«Determine a (o b) tal que la integral valga…», «para que el valor medio sea…», «para que las dos funciones tengan la misma ordenada media»	Integral con parámetro (1.3.6)

1.3 Procedimientos

1.3.1 Valor medio y Teorema del Valor Medio

1. Revisa que f sea continua en $[a,b]$ (si no, el TVM no garantiza nada).
2. Calcula $\int_a^b f(x)\,dx$ con una antiderivada (1.3.5) y divide entre $b-a$: eso es $\bar{f}$.
3. Para el TVM, resuelve la ecuación $f(c) = \bar{f}$.
4. Conserva solo las raíces que están en $[a,b]$ y descarta las demás diciendo por qué. Puede haber una o varias; si no queda ninguna, hay un error (el teorema garantiza al menos una).
5. Si $f(c) = \bar{f}$ no se puede despejar con funciones elementales, basta dar $\bar{f}$; el teorema asegura que c existe.

Atajo de simetría. Si f es impar alrededor del centro del intervalo, su integral vale cero: $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ y $\int_0^2 (x-1)^3\,dx = 0$. Así se ve rápido que el valor medio de $1 + \sqrt[3]{x-1}$ en $[0,2]$ es 1.

1.3.2 Integral definida por áreas: función dada por una gráfica

1. Escribe la función por tramos, con la recta de cada tramo: con dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y la recta, $y = y_1 + m(x-x_1)$.

2. Separa la integral en los mismos tramos (propiedad aditiva).
3. Cada tramo es un rectángulo, un triángulo o un trapecio: $A = \frac{y_1+y_2}{2}(x_2 - x_1)$. Lo que esté bajo el eje x se resta.
4. Suma, divide entre $b - a$ para el valor medio y busca c tramo por tramo con la recta de cada uno.

1.3.3 Sumas de Riemann

1. Escribe $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$ (no olvides el sumando a).
2. Sustituye x_i en f y desarrolla en potencias de i: $f(x_i) = \alpha + \beta i + \gamma i^2$, con α, β, γ que dependen de n.
3. Multiplica por Δx y separa la suma. Usa

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

4. Simplifica: cada término queda como un cociente de polinomios en n. Toma el límite $n \to \infty$ (solo cuentan los términos de mayor grado).
5. Comprueba con el TFC: $F(x)\big|_a^b$ debe dar lo mismo. Si f es lineal, también con el área de un trapecio.

1.3.4 TFC: derivar una integral con límites variables

1. Identifica el integrando $f(t)$, el límite superior $g(x)$ y el inferior $h(x)$. Si un límite es constante, su término vale cero.
2. Aplica
$$F'(x) = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$
No hace falta integrar.
3. Si piden F' en un punto, simplifica antes de sustituir ($\ln e^x = x$).
4. Comprobación: si f tiene antiderivada sencilla, calcula F explícitamente y derívala.

1.3.5 Integrales inmediatas y cambio de variable

Tabla mínima (con u función de x y $a > 0$):

- $\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C$.
- $\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C$; $\int \cos u\,\mathrm{d}u = \operatorname{sen} u + C$; $\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C$.
- $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

1. Busca dentro del integrando una función $g(x)$ cuya derivada también aparezca (salvo una constante): $\operatorname{sen} x$ con $\cos x$; $\ln x$ con $\frac{1}{x}$; $2 - x$ con -1.

2. Haz $u = g(x)$, $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, y reescribe toda la integral en u. Si sobra alguna x, el cambio no sirve.
3. Integra con la tabla y regresa a x. En una definida, o regresas a x o cambias los límites a $u(a)$ y $u(b)$.
4. Comprueba derivando el resultado.

1.3.6 Integral con parámetro

1. Calcula la integral (o el valor medio) dejando el parámetro como letra.
2. Iguala al dato y despeja. Con logaritmos, aplica la exponencial a los dos lados; con raíces, despeja la raíz y eleva al cuadrado.
3. Revisa que el valor obtenido deje el integrando continuo en el intervalo ($\sqrt{1-x}$ pide $b < 1$; $\ln x$ en un denominador pide no pasar por $x = 1$) y que cumpla la condición del enunciado ($a > 0$).
4. Si son dos funciones con la misma ordenada media en el mismo intervalo, basta igualar las integrales: el factor $\frac{1}{b-a}$ se cancela.

1.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Valor medio y abscisa del TVM

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 1.

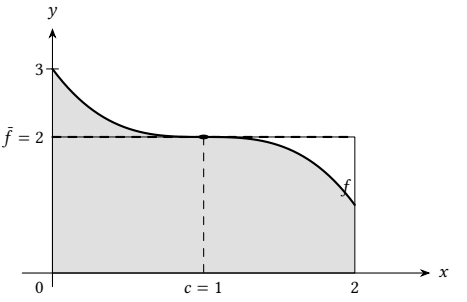
Calcule el valor medio de $f(x) = 2 - (x-1)^3$ en el intervalo $[0, 2]$ y obtenga el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Resolución.

1. f es un polinomio: es continua en $[0, 2]$ y el TVM se aplica.
2. Con $u = x - 1$, $\int (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^4}{4}$. Entonces

$$\int_0^2 \left[2 - (x-1)^3\right]\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{(x-1)^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \left(4 - \tfrac{1}{4}\right) - \left(0 - \tfrac{1}{4}\right) = 4.$$

3. Valor medio: $\bar{f} = \frac{4}{2-0} = 2$.
4. TVM: $2 - (c-1)^3 = 2 \Rightarrow (c-1)^3 = 0 \Rightarrow c = 1$, que está en $[0, 2]$.
5. $\bar{f} = 2$ **y** $c = 1$**.** El rectángulo de base 2 y altura 2 tiene la misma área que la región bajo la curva: lo que la curva sobra en $[0, 1]$ le falta en $[1, 2]$.



Ejemplo resuelto · Integral por sumas de Riemann

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo C, problema 1.

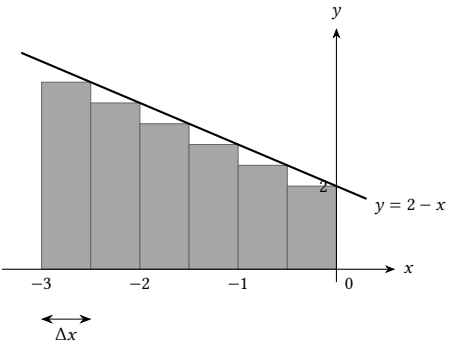
Por medio del límite de la suma de Riemann, calcule $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{0-(-3)}{n} = \frac{3}{n}$ y $x_i = -3 + \frac{3i}{n}$.
2. $f(x_i) = 2 - \left(-3 + \frac{3i}{n}\right) = 5 - \frac{3i}{n}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(5 - \frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} \\ &= \frac{15}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{15}{n}\,n - \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 15 - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $\lim_{n\to\infty} S_n = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$.
5. Comprobación: $\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} = 0 - \left(-6 - \frac{9}{2}\right) = \frac{21}{2}$; también es el trapecio de alturas $f(-3) = 5$ y $f(0) = 2$ y base 3: $\frac{5+2}{2}\cdot 3 = \frac{21}{2}$.
6. $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{21}{2}$.



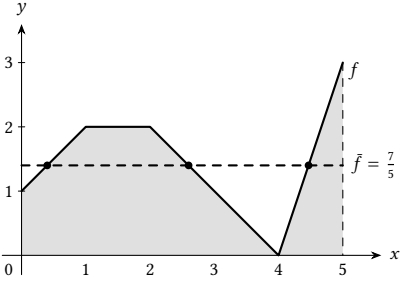
Con $n = 6$ (figura) los rectángulos quedan por debajo de la recta, porque f decrece y se toma el extremo derecho; al crecer n el error $\frac{9}{2n}$ tiende a cero.

1.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1.5.1 · Valor medio de una función dada por su gráfica

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 1.

La gráfica de f en $[0, 5]$ está formada por segmentos de recta que unen los puntos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ y $(5, 3)$ (figura). a) Calcule el valor medio de f en $[0, 5]$. b) Obtenga los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)



Resolución.

1. Por tramos: $f(x) = 1 + x$ en $[0, 1]$; $f(x) = 2$ en $[1, 2]$; $f(x) = 4 - x$ en $[2, 4]$; $f(x) = 3(x - 4)$ en $[4, 5]$.
2. Áreas: trapecio $\frac{1+2}{2}(1) = \frac{3}{2}$; rectángulo $2(1) = 2$; triángulo $\frac{2\cdot 2}{2} = 2$; triángulo $\frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$. Toda el área está sobre el eje:

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 2 + 2 + \frac{3}{2} = 7.$$

3. **a)** $\bar{f} = \frac{7}{5}$.
4. TVM, tramo por tramo, con $f(c) = \frac{7}{5}$:
   - en $[0,1]$: $1 + c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{2}{5}$ (sí está);
   - en $[1,2]$: $f = 2 \neq \frac{7}{5}$ (ninguno);
   - en $[2,4]$: $4 - c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{13}{5}$ (sí está);
   - en $[4,5]$: $3(c-4) = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{67}{15} \approx 4.47$ (sí está).
5. **b)** $c = \frac{2}{5}$, $c = \frac{13}{5}$ **y** $c = \frac{67}{15}$.

Ejercicio 1.5.2 · Riemann con un integrando cuadrático

Adaptado de: 1er extraordinario 2011-2, problema 1.

Mediante el límite de las sumas de Riemann, obtenga $\int_1^3 (x^2+1)\,dx$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$.
2. $f(x_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= 4 + \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &\quad + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 4 + 4\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $4 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.
5. Comprobación: $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3 = (9+3) - \left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{32}{3}$.
6. $\int_1^3 (x^2+1)\,dx = \frac{32}{3}$.

Ejercicio 1.5.3 · TFC con un límite exponencial

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 1.

Sea $F(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$. Calcule $F'(\ln 2)$.

Resolución.

1. Integrando $f(t) = \ln t$; límite superior $g(x) = e^x$, con $g'(x) = e^x$; el inferior es constante.

2. TFC: $F'(x) = \ln(e^x)\, e^x = x\, e^x$.
3. En $x = \ln 2$: $F'(\ln 2) = \ln 2 \cdot e^{\ln 2} = 2 \ln 2$.
4. Comprobación: $\int \ln t \, \mathrm{d}t = t \ln t - t$, así que $F(x) = x\, e^x - e^x + 1$ y $F'(x) = e^x + x\, e^x - e^x = x\, e^x$.
5. $F'(\ln 2) = 2 \ln 2 = \ln 4$ (≈ 1.386).

Ejercicio 1.5.4 · Dos funciones con la misma ordenada media

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 1.

Si las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{a}{2\sqrt{2-x}}$ tienen la misma ordenada media en el intervalo $[0, 1]$, calcule el valor de a.

Resolución.

1. El intervalo es el mismo, así que basta igualar las integrales (el factor $\frac{1}{1-0}$ es igual en los dos lados).
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{ang\,tan} x \big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
3. Con $u = 2 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} = -\sqrt{2-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sqrt{2-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$. Entonces

$$\int_0^1 \frac{a\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} = a\left(-\sqrt{2-x}\right)\Big|_0^1 = a\left(\sqrt{2}-1\right).$$

4. $a\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}$. Racionalizando:

$$a = \frac{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)}{4} \approx 1.896.$$

5. g es continua en $[0, 1]$ porque $2 - x > 0$: el valor sirve.
6. $a = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{4}$.

Ejercicio 1.5.5 · Límite inferior desconocido con logaritmo

Adaptado de: 2º final 2024-2, problema 2.

Determine el valor de $a > 0$ que cumple

$$\int_a^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln 2.$$

Resolución.

1. Cambio de variable: $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. La integral es $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$, así que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(\ln x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$.

2. Evaluación (con $a > 1$, para que $\ln x > 0$ en todo el intervalo):

$$\ln(\ln x)\Big|_a^{e^2} = \ln 2 - \ln(\ln a).$$

3. $\ln 2 - \ln(\ln a) = \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln a) = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e$.
4. $a = e > 1$: el integrando es continuo en $[e, e^2]$ y el valor sirve. Un $a \leq 1$ dejaría $x = 1$ (donde $\ln x = 0$) dentro del intervalo.
5. $a = e$.

Ejercicio 1.5.6 · TVM con tres abscisas medias

Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 2.

Sea $f(x) = 3x^2 - 5x^4$ en $[-1, 1]$. Calcule el o los valores de c del intervalo que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Resolución.

1. Integral:

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 - 5x^4)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 - x^5\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= (1 - 1) - (-1 + 1) = 0.$$

2. Valor medio: $\bar{f} = \frac{0}{2} = 0$.
3. TVM: $3c^2 - 5c^4 = 0 \Rightarrow c^2(3 - 5c^2) = 0 \Rightarrow c = 0$ o $c^2 = \frac{3}{5}$.
4. $c = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{5} \approx \pm 0.775$: los dos están en $[-1, 1]$.
5. $c = 0$, $c = \frac{\sqrt{15}}{5}$ **y** $c = -\frac{\sqrt{15}}{5}$. El teorema garantiza al menos uno; aquí hay tres.

1.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1**.

Ejercicio propuesto 1.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2020-1, problema 2.

Mediante el límite de las sumas de Riemann, calcule $\int_1^3 (x + 1)\,\mathrm{d}x$.

Resultado: 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 1.6.2

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,\mathrm{d}t$. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine $F'(x)$.

Resultado: $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 1.6.3

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 2.

Si $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = 1$, calcule el valor de $b > 0$.

Resultado: $b = \frac{3}{4}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 1.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 1.

Determine el valor medio de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Resultado: $\bar{f} = \frac{2(e-1)}{\pi} \approx 1.094$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 99.

Ejercicio propuesto 1.6.5

Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 1.

a) Calcule el valor medio de $f(x) = |\tan x|$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. b) Obtenga el valor de c que cumple el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)

Resultado: a) $\bar{f} = \frac{2\ln 2}{\pi} = \frac{\ln 4}{\pi} \approx 0.441$; b) $c = \operatorname{ang\,tan} \frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

1.7 Errores frecuentes

- **Olvidar dividir entre $b-a$.** $\int_a^b f$ es un área; el valor medio es una altura: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
- **Confundir $\bar{f}$ con c.** $\bar{f}$ es una ordenada (un valor de y); c es una abscisa, la x donde $f(c) = \bar{f}$.
- **Dejar abscisas fuera del intervalo.** Al resolver $f(c) = \bar{f}$ pueden salir raíces fuera de $[a, b]$: se descartan diciendo por qué.
- **Escribir $x_i = i\,\Delta x$.** En Riemann el punto es $x_i = a + i\,\Delta x$; solo coincide con $i\,\Delta x$ cuando $a = 0$. Y cada término se multiplica por Δx.
- **Olvidar $g'(x)$ en el TFC.** La derivada de $\int_1^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ es $f(x^2)\cdot 2x$, no $f(x^2)$. Con el límite inferior variable, el término va restando.
- **Perder el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$; en una definida, el intervalo no puede contener un cero de u.
- **Ignorar el dominio al despejar un parámetro.** Un b que deje $\sqrt{1-x}$ o $\ln x$ fuera de su dominio dentro del intervalo no sirve, aunque cumpla la ecuación.

1.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

1.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Identifica el tipo con la tabla 1.2: valor medio, gráfica, Riemann, TFC o parámetro.
2. Valor medio: integra, divide entre $b-a$, resuelve $f(c) = \bar{f}$ y revisa que $c \in [a,b]$.
3. Riemann: escribe Δx y $x_i = a + i\,\Delta x$ antes de sustituir; separa en $\sum 1$, $\sum i$, $\sum i^2$.
4. TFC: no integres; aplica $f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$.
5. Cierra siempre con una comprobación: derivar la antiderivada o calcular la integral por el TFC.

Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno conocerá las funciones logaritmo y exponencial, así como sus propiedades, y las aplicará en el cálculo de límites, derivadas e integrales. En el Plan 2016, la regla de L'Hôpital y la integral impropia son los subtemas 2.6 y 2.7 del tema cuyo objetivo es: «El alumno identificará los conceptos de las integrales definida e indefinida y los aplicará en el cálculo y obtención de integrales.»

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** el Plan 2010 estudia toda la unidad. El Plan 2016 estudia aquí las secciones de L'Hôpital y de integral impropia; las de logaritmo, exponencial e hiperbólicas (marcadas «Solo Plan 2010») son de su curso anterior y se leen como repaso, porque se usan para derivar, integrar y calcular límites.
- **Frecuencia:** es el problema 2 de los 52 exámenes del Plan 2010: L'Hôpital en 28 (formas 1^∞ 9, $\infty - \infty$ 5, 0^0 5, $0 \cdot \infty$ 3 y otras 6), integral impropia en 22 y derivada de logaritmos o exponenciales en 6; las hiperbólicas aparecen dentro de otros problemas en 10. En los 60 exámenes del Plan 2016, L'Hôpital sale en 17 y la integral impropia en 14, casi siempre como problema 2, que se alterna con temas de la Unidad 1.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas (Plan 2010); de 2 a 3 horas (Plan 2016).
- **Ruta corta:**
  1. Plan 2010: lee la sección 2.1 y el formulario 2.8 (30 min). Plan 2016: lee 2.1.3 y 2.1.4 (15 min) y repasa las derivadas del formulario 2.8.
  2. Sigue los ejemplos de la sección 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve con cronómetro (12 min cada uno) los ejercicios 2.5 de L'Hôpital e impropia; en el Plan 2010, también los de derivadas.

2.1 Conceptos y expresiones

2.1.1 Logaritmo natural y exponencial SOLO PLAN 2010

Logaritmo natural. Para $x > 0$ se define

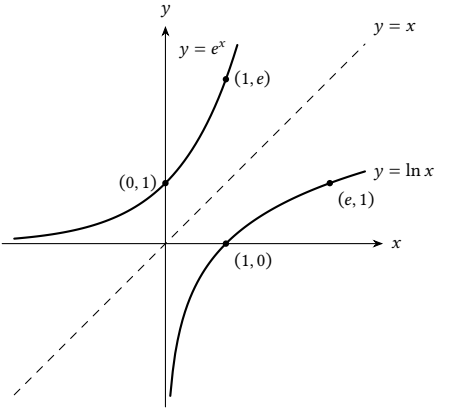
$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Por el teorema fundamental, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}$. Su dominio es $(0, \infty)$, su recorrido es $\mathbb{R}$, es creciente, $\ln 1 = 0$ y $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$. El número $e \approx 2.718$ es el que cumple $\ln e = 1$.

Propiedades. Para $a, b > 0$ y r real:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \qquad \ln a^r = r \ln a.$$

Exponencial. e^x es la inversa de $\ln x$: $e^{\ln x} = x$ para $x > 0$ y $\ln e^x = x$ para todo x. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido $(0, \infty)$; $(e^x)' = e^x$. Las gráficas de $\ln x$ y e^x son simétricas respecto a la recta $y = x$: $\ln x$ pasa por $(1, 0)$ y $(e, 1)$; e^x, por $(0, 1)$ y $(1, e)$.



Otras bases y cambio de base. Para $a > 0$, $a \neq 1$:

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Con el cambio de base, todo logaritmo se escribe con ln antes de derivar.

El número e como límite.

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e, \qquad \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e.$$

Más general: $\lim_{x\to\infty}\big(1 + \frac{a}{x}\big)^{bx} = e^{ab}$. Sirve para comprobar las formas 1^∞ (2.3.5).

Series de potencias (subtema 2.4 del Plan 2010). El desarrollo de $\ln(1 + x)$ y e^x en series de potencias no ha salido en ninguno de los 52 exámenes del Plan 2010. Las series de Maclaurin y de Taylor, con estas funciones entre los ejemplos, están en la Unidad 5, en la sección de series de Maclaurin y Taylor.

2.1.2 Funciones hiperbólicas SOLO PLAN 2010

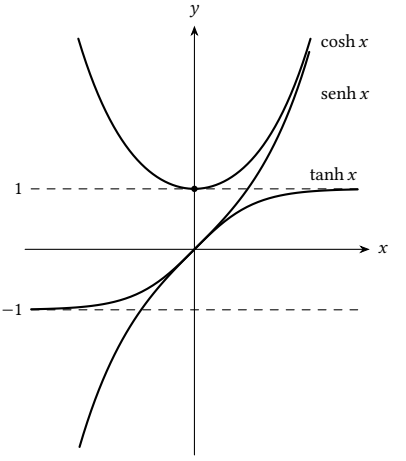
Definiciones.

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}.$$

Valores que se usan en los límites: $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, $\tanh 0 = 0$; cerca de 0, $\coth x$ y $\operatorname{csch} x$ tienden a $\pm\infty$. $\cosh x \geq 1$ es par; $\operatorname{senh} x$ y $\tanh x$ son impares; $\tanh x$ está entre -1 y 1 (asíntotas $y = \pm 1$).



Identidades.

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$$
$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x, \qquad \operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x,$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x.$$

Inversas en forma logarítmica.

$$\operatorname{ang\,senh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \quad x \in \mathbb{R};$$
$$\operatorname{ang\,cosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr), \quad x \geq 1;$$
$$\operatorname{ang\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Se obtienen al despejar x de $y = \operatorname{senh} x$ (y de las otras) con $u = e^x$, que da una ecuación cuadrática en u.

2.1.3 Regla de L'Hôpital

Si $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, o los dos límites son infinitos, y existe $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), entonces

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vale para $x \to a$, $x \to a^{\pm}$ y $x \to \pm\infty$. Se derivan el numerador y el denominador *por separado* (no es la regla del cociente). Si el nuevo límite vuelve a ser $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica otra vez.

Las siete formas indeterminadas. Solo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ admiten la regla directamente. $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$ se reescriben como un cociente. 1^{∞}, 0^0 e ∞^0 se resuelven tomando logaritmo: si $y = f(x)^{g(x)}$, entonces $\ln y = g(x) \ln f(x)$, que es de la forma $0 \cdot \infty$, y $\lim y = e^{\lim \ln y}$. No son indeterminadas: $\frac{0}{\infty} = 0$, $\infty + \infty = \infty$, $0^{\infty} = 0$, $\infty^{\infty} = \infty$.

2.1.4 Integral impropia

Una integral es *impropia* si un límite de integración es infinito o si el integrando no está acotado en un punto del intervalo (extremo o interior). Se define con un límite:

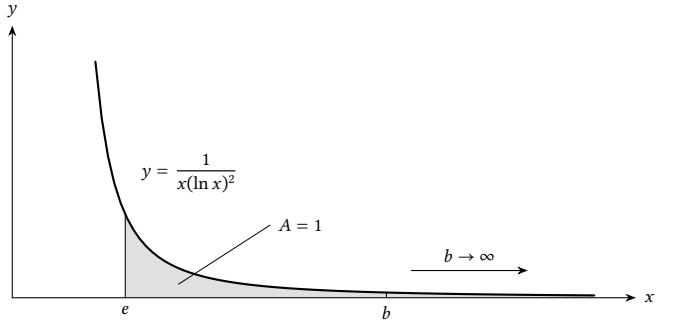
$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

y, si f no está acotada en a,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si el límite existe y es finito, la integral *converge* y su valor es ese límite; si no existe o es infinito, *diverge*. Con $\int_{-\infty}^{\infty}$, o con un punto malo c dentro de $[a, b]$, se parte en dos integrales y *cada una* debe converger.

Integrales p (sirven para anticipar el resultado): $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$, y $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p < 1$.



2.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcular $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$» con $\log_a$, una base variable o a^x	Derivadas con ln y cambio de base (2.3.1)
$y = f(x)^{g(x)}$, o e elevado a algo con ln	Derivación logarítmica (2.3.1)
Aparecen senh, cosh, tanh en una derivada, integral o límite	Hiperbólicas (2.3.2)
«Calcular, si existe, el límite» de un cociente que da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$	L'Hôpital (2.3.3)
Un producto que da $0 \cdot \infty$, o una resta de fracciones que da $\infty - \infty$	Reescribir como cociente (2.3.4)
Una potencia $f(x)^{g(x)}$ que da 1^{∞}, 0^0 o ∞^0	Tomar logaritmo (2.3.5)

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determinar si la integral converge o diverge» con ∞ en un límite	Impropia de límite infinito (2.3.6)
Integral definida cuyo integrando se va a infinito en un extremo o dentro del intervalo	Impropia de integrando no acotado (2.3.7)

2.3 Procedimientos

2.3.1 Derivada de logaritmos y exponenciales; derivación logarítmica SOLO PLAN 2010

1. Si hay $\log_a$ (aunque la base dependa de x), cambia a ln: $\log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$.
2. Simplifica con las propiedades *antes* de derivar: $\ln e^u = u$, $\ln u^r = r \ln u$, $\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$. Muchas veces la función queda muy sencilla.
3. Deriva con la regla de la cadena: $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $(e^u)' = e^u u'$, $(a^u)' = a^u \ln a \, u'$, $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.
4. Si la función es $y = f(x)^{g(x)}$ (base y exponente variables), toma ln en los dos lados, $\ln y = g \ln f$, deriva implícitamente y despeja:

$$y' = f^{\,g}\Big(g' \ln f + g\,\frac{f'}{f}\Big).$$

5. Evalúa en el punto pedido al final.

2.3.2 Funciones hiperbólicas SOLO PLAN 2010

1. Derivadas: $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u \; u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u \; u'$ (sin signo menos); $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u \; u'$; $(\coth u)' = -\operatorname{csch}^2 u \; u'$; $(\operatorname{sech} u)' = -\operatorname{sech} u \tanh u \; u'$; $(\operatorname{csch} u)' = -\operatorname{csch} u \coth u \; u'$.
2. Integrales: las mismas fórmulas al revés, por ejemplo $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$ y $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$.
3. Inversas: $(\operatorname{ang\,senh} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$; $(\operatorname{ang\,cosh} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$; $(\operatorname{ang\,tanh} u)' = \dfrac{u'}{1-u^2}$. Al integrar, el resultado puede darse con ang senh o con su forma logarítmica.
4. Si una expresión mezcla e^x y e^{-x}, reescríbela con las definiciones ($e^x + e^{-x} = 2\cosh x$) o multiplica por e^x. Por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 1} = \operatorname{ang\,tan} e^x + C.$$

5. En un límite, sustituye primero $\operatorname{senh} 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$ para saber qué forma indeterminada es.

2.3.3 L'Hôpital: formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

1. Sustituye el valor: confirma que da $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$. Escríbelo, porque sin forma indeterminada la regla no se aplica.
2. Deriva el numerador y el denominador por separado.

3. Simplifica el nuevo cociente (fracciones dentro de fracciones, factores comunes) y vuelve a sustituir.
4. Si sigue indeterminado, repite. Si un factor tiende a un número distinto de cero (como $\cos x \to 1$ o $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to 1$), sácalo del límite para no derivarlo.

2.3.4 L'Hôpital: formas $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$

1. $0 \cdot \infty$: escribe $f\,g = \frac{f}{1/g}$ o $\frac{g}{1/f}$. Deja en el denominador el factor que sea más fácil de derivar; un ln se queda casi siempre en el numerador.
2. $\infty - \infty$ con dos fracciones: haz la resta con común denominador. Queda $\frac{0}{0}$.
3. Aplica 2.3.3.

2.3.5 L'Hôpital: formas 1^∞, 0^0 e ∞^0

1. Llama $y = f(x)^{g(x)}$ e identifica la forma sustituyendo.
2. Toma logaritmo: $\ln y = g(x) \ln f(x)$. Es $0 \cdot \infty$.
3. Escríbelo como cociente, $\ln y = \dfrac{\ln f(x)}{1/g(x)}$, y aplica 2.3.3.
4. Si $\lim \ln y = L$, entonces $\lim y = e^L$. **No olvides este paso:** el límite de $\ln y$ no es la respuesta.
5. Comprobación rápida para 1^∞: si $f \to 1$ y $g \to \infty$, entonces $\lim f^{\,g} = e^{\lim g\,(f-1)}$.

2.3.6 Integral impropia de límite infinito

1. Escribe el límite: $\int_a^\infty = \lim_{b\to\infty} \int_a^b$ (o $\int_{-\infty}^c = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c$). Si los dos límites son infinitos, parte en un punto cómodo, como 0.
2. Calcula la antiderivada (Unidad 3A si hace falta) y comprueba derivándola.
3. Evalúa entre a y b y toma el límite. Recuerda: $e^{-b} \to 0$, $\ln b \to \infty$ y $\frac{1}{\ln b} \to 0$ si $b \to \infty$; $\operatorname{ang\,tan} b \to \pm\frac{\pi}{2}$ si $b \to \pm\infty$.
4. Concluye con palabras: «converge a…» o «diverge».

2.3.7 Integral impropia de integrando no acotado

1. Busca dónde se anula el denominador o dónde un ln se va a $-\infty$, y si ese punto está en un extremo o *dentro* del intervalo. Una integral con un punto malo interior parece una integral definida normal: es la trampa.
2. Extremo: $\int_a^b = \lim_{t\to a^+} \int_t^b$ (o $\lim_{t\to b^-} \int_a^t$).
3. Punto interior c: $\int_a^b = \lim_{t\to c^-} \int_a^t + \lim_{s\to c^+} \int_s^b$. Si una de las dos diverge, toda la integral diverge.
4. Antiderivada, comprobación por derivación, evaluación y límite, como en 2.3.6.

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · L'Hôpital, forma 1^∞

Adaptado de: 1er final 2011-2, tipo C, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

Resolución.

1. Al sustituir, la base tiende a 1 y el exponente a ∞: forma 1^{∞}.
2. Sea $y = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$. Entonces

$$\ln y = 3x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{3x}},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
3. Derivadas: $\left[\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right]' = \dfrac{-2/x^2}{1 + 2/x}$ y $\left[\frac{1}{3x}\right]' = -\dfrac{1}{3x^2}$.
4. L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ln y &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2/x^2}{1 + 2/x} \cdot \left(-3x^2\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{1 + 2/x} = 6.\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{3x} = e^6$.
6. Comprobación con la fórmula de e: $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \to e^{ab}$ con $a = 2$ y $b = 3$.

Ejemplo resuelto · Integral impropia que converge

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ converge o diverge.

Resolución.

1. El límite superior es infinito:

$$\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_e^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}.$$

2. Cambio de variable $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

   Comprobación: $\left(-\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$.
3. Evaluación:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_e^{b} &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln e}\right) \\ &= 0 + 1.\end{aligned}$$

4. **La integral converge y vale 1.** Es el área de la región sombreada de la figura de 2.1.4.

Ejemplo resuelto · L'Hôpital con hiperbólicas

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0^+} (\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. $\cosh 0 = 1$ y $\frac{1}{\operatorname{senh} x} \to \infty$: forma 1^∞.
2. Sea $y = (\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$; $\ln y = \dfrac{\ln \cosh x}{\operatorname{senh} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$ ($\ln 1 = 0$, $\operatorname{senh} 0 = 0$).
3. L'Hôpital, con $(\ln \cosh x)' = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$ y $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tanh x}{\cosh x} = \frac{0}{1} = 0.$$

4. $\lim_{x\to 0^+} (\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x} = e^0 = 1$.
5. Comprobación con la regla rápida de 1^∞: $\frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x} \to 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \to 0$), así que el límite es e^0.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Derivada con base variable: cambio de base

Adaptado de: 1er final 2010-1, tipo C, problema 2.

Calcule $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}$ si $y = \log_{e^x}(2x)^x$.

Resolución.

1. Cambio de base (para $x > 0$): $y = \dfrac{\ln(2x)^x}{\ln e^x} = \dfrac{x \ln 2x}{x} = \ln 2x$.
2. Derivada: $y' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$.
3. $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = \dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 2.5.2 · Derivación logarítmica de $x^{1/x}$

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 2.

Obtenga $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$ si $y = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Resolución.

1. Como $e^{\frac{\ln x}{x}} = \left(e^{\ln x}\right)^{1/x}$, la función es $y = x^{1/x}$: base y exponente variables.
2. Logaritmo: $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$.
3. Derivación implícita: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
4. Despeje: $y' = x^{1/x}\,\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
5. En $x = 1$: $y' = 1 \cdot \dfrac{1 - 0}{1}$.

6. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 1$.

Ejercicio 2.5.3 · Forma 0^0 con seno hiperbólico

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 3.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. El enunciado original escribe $x \to 0$; como $x^{\operatorname{senh} x}$ solo está definida para $x > 0$, el límite es por la derecha. Al sustituir, la base y el exponente tienden a 0: forma 0^0.
2. Sea $y = x^{\operatorname{senh} x}$: $\ln y = \operatorname{senh} x \ln x = \dfrac{\ln x}{\operatorname{csch} x}$, de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital, con $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{csch} x \coth x} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\operatorname{senh}^2 x}{x \cosh x}\right).$$

4. Se separa: $-\dfrac{\operatorname{senh} x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \to -1 \cdot \dfrac{0}{1} = 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to \frac{\cosh 0}{1} = 1$).
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x} = e^0 = 1$.

Ejercicio 2.5.4 · Forma $\infty - \infty$: L'Hôpital dos veces

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Resolución.

1. Cerca de 1, las dos fracciones crecen sin límite: forma $\infty - \infty$. Común denominador:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\ln x + 1 - 1 = \ln x$; denominador $\ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Sigue $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: numerador $\frac{1}{x}$; denominador $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1/x + 1/x^2} = \frac{1}{1+1}.$$

4. **El límite vale $\frac{1}{2}$.**

Ejercicio 2.5.5 · Forma ∞^0

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 2.

Determine, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Resolución.

1. Base $\to \infty$, exponente $\to 0$: forma ∞^0.
2. Sea $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$: $\ln y = x \ln \frac{1}{x} = -x \ln x = -\dfrac{\ln x}{1/x}$, de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

Ejercicio 2.5.6 · Impropia con un punto malo interior

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x-1}}$ converge o diverge.

Resolución.

1. El denominador se anula en $x = 1$, que está *dentro* de $[0, 9]$. Se parte:
$$\int_0^9 = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t + \lim_{s\to 1^+} \int_s^9 .$$
2. Antiderivada: $\displaystyle\int \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)^{2/3} + C$. Comprobación: $\left[\frac{1}{2}(x-1)^{2/3}\right]' = \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}$.
3. Primera parte: $\lim_{t\to 1^-}\left[\frac{1}{2}(t-1)^{2/3} - \frac{1}{2}(-1)^{2/3}\right] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, porque $(-1)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 = 1$.
4. Segunda parte: $\lim_{s\to 1^+}\left[\frac{1}{2}(8)^{2/3} - \frac{1}{2}(s-1)^{2/3}\right] = \frac{1}{2}(4) - 0 = 2$.
5. Las dos convergen: $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
6. **La integral converge y vale $\frac{3}{2}$.**

Ejercicio 2.5.7 · Impropia hacia $-\infty$: completar el cuadrado

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$ converge o diverge.

Resolución.

1. Completar el cuadrado: $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$. Antiderivada: $\operatorname{ang\,tan}(x+1) + C$. Comprobación: $\left[\operatorname{ang\,tan}(x+1)\right]' = \frac{1}{(x+1)^2+1}$.
2. Límite inferior infinito:
$$\lim_{a\to -\infty} \operatorname{ang\,tan}(x+1)\Big|_a^{-1} = \operatorname{ang\,tan} 0 - \lim_{a\to -\infty} \operatorname{ang\,tan}(a+1).$$
3. $\operatorname{ang\,tan} 0 = 0$ y $\operatorname{ang\,tan}(a+1) \to -\frac{\pi}{2}$: el resultado es $0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

4. **La integral converge y vale $\frac{\pi}{2}$.**

Ejercicio 2.5.8 · Impropia con integrando no acotado en un extremo

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo A, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

Resolución.

1. En $x=0$ el denominador se anula: $\displaystyle\int_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1$.
2. Cambio de variable $u=\sqrt{x}+1$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{4}{3}\big(\sqrt{x}+1\big)^{3/2} + C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2}\right]' = 2(\sqrt{x}+1)^{1/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. Evaluación:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{4}{3}\,2^{3/2} - \frac{4}{3}\big(\sqrt{\varepsilon}+1\big)^{3/2}\right]$$
$$= \frac{4}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big).$$

4. **La integral converge y vale $\frac{4}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big) = \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$ (≈ 2.44).**

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x+\cos x)^{\csc x}$.

Resultado: e.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\Big)$.

Resultado: $-\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 2° extraordinario 2011-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to\infty} 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)$.

Resultado: 2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 2° extraordinario 2010-1, tipo A, problema 2.

Calcule, de ser posible, $\int_5^6 \frac{\ln(x-5)}{2x-10}\,\mathrm{d}x$.

Resultado: La integral diverge (tiende a $-\infty$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: 2° final 2016-1, tipo A, problema 2.

Calcule $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ si $y = \log_2\left(\frac{e^{\operatorname{sen} x}}{2}\right)$.

Resultado: $\frac{1}{\ln 2}$ (≈ 1.44).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2016-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0^+} (1-\operatorname{senh} x)^{\coth x}$.

Resultado: e^{-1}.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

2.7 Errores frecuentes

- **Usar L'Hôpital sin forma indeterminada.** Antes de derivar, sustituye y escribe la forma. $\frac{1}{0^+}$ no es indeterminada: es ∞.
- **Derivar con la regla del cociente.** En L'Hôpital se derivan el numerador y el denominador por separado.
- **Olvidar regresar del logaritmo.** En 1^∞, 0^0 e ∞^0 se calcula $\lim \ln y = L$; la respuesta es e^L, no L.
- **Creer que $1^\infty = 1$.** Es indeterminada: $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} \to e^6$.
- **Signos en las hiperbólicas.** $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$, sin el signo menos del coseno; $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, con resta.
- **No ver el punto malo interior.** $\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x-1}}$ parece normal, pero en $x=1$ el integrando no está acotado: hay que partir en dos.
- **Declarar que converge sin tomar el límite.** Si $F(b) \to \infty$, la integral diverge, aunque la antiderivada esté bien.

- **Derivar $\log_{e^x}$ sin cambiar de base.** Primero $\log_a u = \frac{\ln u}{\ln a}$ y simplificar; casi siempre queda algo sencillo.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^r = r \ln a$; $e^{\ln x} = x$; $\ln e^x = x$.
- $a^x = e^{x \ln a}$; $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $(e^u)' = e^u u'$; $(a^u)' = a^u \ln a\, u'$; $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.
- $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; $\displaystyle\int e^u\, du = e^u + C$; $\displaystyle\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
- $y = f^{\,g}$: $y' = f^{\,g}\big(g' \ln f + g \frac{f'}{f}\big)$.
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$; $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.
- $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u'$; $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- $\operatorname{ang\,senh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$; $\operatorname{ang\,cosh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)$; $\operatorname{ang\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.
- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$.
- $y = f^{\,g}$: $\lim y = e^{\lim g \ln f}$; $\lim_{x\to\infty}\big(1 + \frac{a}{x}\big)^{bx} = e^{ab}$.
- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, si $p < 1$.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Límite: sustituye y escribe la forma indeterminada antes de cualquier otra cosa.
2. Potencia $f^{\,g}$: toma ln, pasa a cociente, aplica L'Hôpital y termina con e^L.
3. Integral: revisa los límites ($\pm\infty$) y los ceros del denominador dentro del intervalo; escribe el límite antes de integrar.
4. Deriva la antiderivada para comprobarla y concluye «converge a…» o «diverge».
5. Derivadas con $\log_a$: cambio de base, simplifica y después deriva.

Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno adquirirá habilidad en el uso de diversas técnicas de integración y las aplicará en la resolución de problemas geométricos. El programa de 2016 dice lo mismo con otras palabras: «El alumno aplicará métodos de integración y los utilizará en la resolución de problemas geométricos».

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** los dos. Los métodos son los temas 3.1 a 3.4 del Plan 2010 y 3.1 a 3.3 del Plan 2016. El Plan 2016 no nombra las «sustituciones diversas» (tema 3.4 del Plan 2010), pero esas integrales salen en 20 de sus 60 exámenes.
- **Frecuencia:** es el problema 3 (tres integrales, una por método) en los 52 exámenes del Plan 2010 y en los 60 del Plan 2016. Incisos por método en el Plan 2010: fracciones parciales 50, sustitución trigonométrica 35, por partes 34, otras sustituciones 23 y potencias trigonométricas 3. En el Plan 2016: fracciones parciales 51, por partes 43, sustitución trigonométrica 35, otras sustituciones 20 y potencias trigonométricas 9.
- **Tiempo:** de 6 a 8 horas para esta parte. Es la que más rinde: vale un sexto del examen por sí sola y es la base de la Parte B, de la integral impropia y de Cálculo Vectorial.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la tabla de la sección 3A.2 y la de integrales inmediatas de la 3A.1 (30 min).
  2. Lee los procedimientos 3A.3.1, 3A.3.3 y 3A.3.4 (partes, sustitución trigonométrica y fracciones: la terna típica).
  3. Sigue el ejemplo 3A.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 3A.5 con cronómetro (8 min cada integral) y comprueba cada resultado derivando.

3A.1 Conceptos y expresiones

Integral indefinida. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ quiere decir que $F'(x) = f(x)$. Por eso toda integral indefinida se *comprueba derivando*: si la derivada del resultado no regresa al integrando, hay un error. En este libro cada integral termina con esa comprobación en una línea.

Cambio de variable. Si $u = g(x)$, entonces $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ y

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Todos los métodos de esta unidad terminan en una integral inmediata, casi siempre después de un cambio de variable. Al final se regresa a x.

Integrales inmediatas. Hay que saberlas de memoria: en el examen no se permite formulario.

Integral	Resultado (más C)
$\int u^n \, du,\ n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\int \dfrac{du}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$
$\int e^u \, du$	e^u
$\int \operatorname{sen} u \, du;\ \int \cos u \, du$	$-\cos u;\ \operatorname{sen} u$
$\int \sec^2 u \, du;\ \int \csc^2 u \, du$	$\tan u;\ -\cot u$
$\int \sec u \tan u \, du$	$\sec u$
$\int \csc u \cot u \, du$	$-\csc u$
$\int \tan u \, du$	$-\ln \lvert \cos u \rvert = \ln \lvert \sec u \rvert$
$\int \cot u \, du$	$\ln \lvert \operatorname{sen} u \rvert$
$\int \sec u \, du$	$\ln \lvert \sec u + \tan u \rvert$
$\int \csc u \, du$	$\ln \lvert \csc u - \cot u \rvert$
$\int \dfrac{du}{a^2 + u^2}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{ang\,tan} \dfrac{u}{a}$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$	$\operatorname{ang\,sen} \dfrac{u}{a}$
$\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{ang\,sec} \dfrac{u}{a}$ (con $u > a > 0$)
$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert$

Identidades trigonométricas que se usan.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Valor absoluto y constante. El logaritmo lleva valor absoluto: $\int \frac{dx}{x-2} = \ln \lvert x-2 \rvert + C$. Dos resultados que difieren en una constante son los dos correctos: $\ln \lvert x^2 + x - 2 \rvert$ y $\ln \lvert x+2 \rvert + \ln \lvert x-1 \rvert$ son la misma antiderivada; $2 \operatorname{ang\,sec} \sqrt{e^x}$ y $2 \operatorname{ang\,tan} \sqrt{e^x - 1}$ también.

Los cinco métodos. *Por partes* (3A.3.1) para productos de funciones de distinto tipo; *potencias trigonométricas* (3A.3.2) para $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$ y $\tan^m x \sec^n x$; *sustitución trigonométrica* (3A.3.3) para raíces de $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ y $x^2 - a^2$; *fracciones parciales* (3A.3.4) para cocientes de polinomios; *sustituciones diversas* (3A.3.5) para raíces de x, exponenciales y logaritmos dentro de otra función. Muchas integrales de examen combinan dos: primero un cambio de variable y después uno de los otros cuatro.

3A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado siempre dice «Efectuar las integrales» (o «Efectúa»); lo que decide el método es la **forma del integrando**. Revisa los renglones en este orden: el primero que encaje es el método.

El integrando tiene…	Procedimiento
Una función $g(x)$ y, multiplicando, su derivada (salvo una constante): $x\cos x^2$, $\frac{\ln x}{x}$, $\frac{2x+1}{x^2+x-2}$	Cambio de variable $u = g(x)$ (3A.3.5)
Un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$	Fracciones parciales (3A.3.4); si el grado de P es mayor o igual que el de Q, divide primero
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$ sin raíces reales	Completa el cuadrado y usa ang tan (3A.3.3)
$\sqrt{a^2-x^2}$ (sola, en un cociente o elevada a $\frac{3}{2}$)	$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ (3A.3.3)
$\sqrt{a^2+x^2}$ o $(x^2+a^2)^{3/2}$	$x = a\tan\theta$ (3A.3.3)
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$ (3A.3.3)
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	Completa el cuadrado y después uno de los tres anteriores (3A.3.3)
Polinomio por e^{ax}, $\mathrm{sen}\,ax$ o $\cos ax$	Partes con u = polinomio (3A.3.1)
Polinomio (o nada) por $\ln x$, ang tan x, ang sen x, ang sec x	Partes con u = el logaritmo o la inversa (3A.3.1)
$e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\mathrm{sen}(\ln x)$, $\cos(\ln x)$	Partes dos veces: integral cíclica (3A.3.1)
$\mathrm{sen}^m x\cos^n x$ con un exponente impar	Separa un factor y usa $\mathrm{sen}^2+\cos^2=1$ (3A.3.2)
$\mathrm{sen}^m x\cos^n x$ con los dos exponentes pares	Ángulo doble (3A.3.2)
$\tan^m x\sec^n x$, $(\tan x-\sec x)^2$, cocientes de seno y coseno	Pasa a tan y sec y usa $1+\tan^2=\sec^2$ (3A.3.2)
$\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$ o $\sqrt[3]{x}$ dentro de otra función	$u = \sqrt{x}$ (o la raíz que aparezca) (3A.3.5)
e^x dentro de una raíz o de un cociente	$u = e^x$ o $u = \sqrt{e^x-1}$ (3A.3.5)
$\ln x$ junto con $\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$u = \ln x$ (3A.3.5)
$\frac{1}{x}$ dentro de otra función y $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ o $\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$	$u = \frac{1}{x}$ (3A.3.5)

La terna típica. En 50 de los 52 exámenes del Plan 2010 un inciso es de fracciones parciales; los otros dos suelen ser uno por partes y uno de sustitución trigonométrica. Si un inciso no encaja en ninguno, casi siempre es de sustitución ($u = \sqrt{x}$, $u = e^x$, $u = \ln x$) seguida de uno de los otros métodos.

3A.3 Procedimientos

3A.3.1 Integración por partes

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

1. Elige u con el orden **LIATE**: Logaritmo, Inversa trigonométrica, Algebraica (polinomio), Trigonométrica, Exponencial. La primera que aparezca en el integrando es u; el resto, con $\mathrm{d}x$, es $\mathrm{d}v$.
2. Escribe el cuadro: u, $\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v$, $v = \int \mathrm{d}v$ (sin constante).
3. Aplica la fórmula. La nueva integral $\int v\,\mathrm{d}u$ debe ser más sencilla; si no lo es, cambia la elección.
4. Si queda otra vez un producto de polinomio por exponencial o trigonométrica, repite partes (una vez por cada grado del polinomio).
5. **Integral cíclica** ($e^{ax}\operatorname{sen} bx$, $\operatorname{sen}(\ln x)$): aplica partes dos veces *con el mismo tipo de u*. Reaparece la integral original I; despéjala como una incógnita: $I = \cdots - kI \Rightarrow (1+k)I = \ldots$
6. Con $\ln x$ o una inversa sola, toma $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$.

Las que hay que saber.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

$$\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{ang\,sen} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Con $\operatorname{ang\,sec} x$ (para $x > 1$): $u = \operatorname{ang\,sec} x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; la integral que queda es algebraica (ejercicio de la sección 3A.5).

3A.3.2 Potencias trigonométricas

En el examen de Cálculo Integral salen poco (3 incisos en el Plan 2010 y 9 en el Plan 2016), pero Cálculo Vectorial las usa en casi todas las integrales de línea, de superficie y en polares. Vale la pena dominarlas.

$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x$**.**

1. Si m es impar, separa un $\operatorname{sen} x$, pasa el resto a cosenos con $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y usa $u = \cos x$.
2. Si n es impar, separa un $\cos x$, pasa el resto a senos con $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y usa $u = \operatorname{sen} x$.
3. Si los dos son pares, baja las potencias con $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; repite si hace falta.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x &= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\\ \int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C\\ \int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

$\int \tan^m x \sec^n x\,\mathrm{d}x$**.**

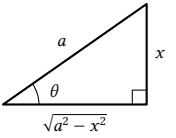
1. Si n es par, separa un $\sec^2 x$, pasa el resto a tangentes con $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ y usa $u = \tan x$. Ejemplo:

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^4 x\,\mathrm{d}x &= \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{3}\tan^3 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x + C\end{aligned}$$

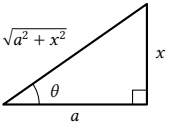
2. Si m es impar, separa $\sec x \tan x$, pasa el resto a secantes con $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y usa $u = \sec x$.
3. Si solo hay tangentes, convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x - 1$ y repite (ejercicio de la sección 3A.5).
4. Si el integrando es un cociente de senos y cosenos, escríbelo como $\tan^m x \sec^n x$: $\frac{\operatorname{sen}^a x}{\cos^b x} = \tan^a x \sec^{b-a} x$. Sirve también con exponentes fraccionarios.

También conviene saber $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C$ (por partes, cíclica): aparece al final de varias sustituciones trigonométricas y en longitud de arco.

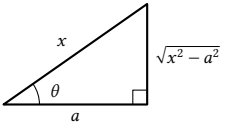
3A.3.3 Sustitución trigonométrica



$x = a\operatorname{sen}\theta$



$x = a\tan\theta$



$x = a\sec\theta$

Raíz	Sustitución y lo que queda
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$, $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$, $\mathrm{d}x = a\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$

1. Identifica a. Si la raíz es $\sqrt{16-9x^2}$, escribe $3x = 4\operatorname{sen}\theta$ (es decir, $u = 3x$, $a = 4$).
2. Si hay ax^2+bx+c, completa el cuadrado: $x^2+6x+18 = (x+3)^2+9$; haz $u = x+3$ y sigue con u.
3. Sustituye x, dx y la raíz; simplifica hasta una integral trigonométrica (casi siempre de potencias, 3A.3.2).
4. Integra en θ.
5. Regresa a x **con el triángulo**: dibuja el de tu caso (figura), pon x y a donde dice la sustitución y lee $\operatorname{sen}\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$… como cociente de lados. El ángulo solo se escribe con su inversa: $\theta = \operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec}\frac{x}{a}$.

3A.3.4 Fracciones parciales

1. **Compara grados.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, divide: $\frac{P}{Q} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{Q}$.
2. **Factoriza el denominador** en factores lineales y cuadráticos irreducibles. Para una cúbica, prueba raíces enteras que dividan al término independiente ($\pm1, \pm2, \ldots$) y divide.
3. **Escribe la descomposición:**
   - cada $(x-r)$ distinto da $\frac{A}{x-r}$;
   - un $(x-r)^k$ repetido da $\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$;
   - cada cuadrático irreducible x^2+px+q da $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$; si está al cuadrado, también $\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^2}$.
4. **Obtén las constantes.** Multiplica por el denominador. Sustituye las raíces reales (cada una da una constante al instante: método de «tapar»); para las que falten, iguala coeficientes de x^2 o del término independiente, o sustituye un valor sencillo como $x = 0$.
5. **Integra cada término:**

$$\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{x-r} = A\ln|x-r|, \qquad \int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r},$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+q}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\ln(x^2+q) + \frac{C}{\sqrt{q}}\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{\sqrt{q}}.$$

6. Junta los logaritmos si quieres ($\ln|x-1| - \ln|x-2| = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$) y comprueba derivando o sumando las fracciones.

Atajo. Antes de descomponer, revisa si el numerador es la derivada del denominador, o casi: $\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \ln|x^2+x-2| + C$ sale con $u = x^2+x-2$.

3A.3.5 Sustituciones diversas

1. Busca la parte «incómoda» del integrando (una raíz de x, una exponencial dentro de una raíz, un $\ln x$ o un $\frac{1}{x}$ dentro de otra función) y llámala u.
2. Despeja x y dx en términos de u, o identifica du en el integrando.
3. Sustituye todo: no debe quedar ninguna x. Lo que queda suele ser una integral inmediata, racional (3A.3.4), de partes (3A.3.1) o de sustitución trigonométrica (3A.3.3).
4. Regresa a x y comprueba derivando.

Sustitución	Ejemplo
$u=\sqrt{x}$, $x=u^2$, $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$
$u=e^x$, $\mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x$	$\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}=\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\operatorname{ang\,tan} e^x+C$
$u=\ln x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$
$u=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$	$\int \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u=\cos\frac{1}{x}+C$
$u=x^2$, $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$	$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan}x^2+C$

3A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · La terna típica: partes, sustitución trigonométrica y fracciones

Adaptado de: 2º final 2011-2, tipo A, problema 3.

Efectúe las integrales:

$$\text{a)}\ \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)}\ \int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Resolución.

1. a) Polinomio por coseno: partes con $u=x$, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x$, $v=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$.

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}x\operatorname{sen}2x-\tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen}2x\,\mathrm{d}x$$

2. **a)** $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$**.** Comprobación: $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+x\cos 2x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x=x\cos 2x$.
3. b) Raíz de $1-x^2$: $x=\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int \cot^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int(\csc^2\theta-1)\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\cot\theta-\theta+C\end{aligned}$$

4. Del triángulo (hipotenusa 1, opuesto x, adyacente $\sqrt{1-x^2}$): $\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\theta=\operatorname{ang\,sen}x$.
5. **b)** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{ang\,sen}x+C$**.** Comprobación:

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

6. c) Racional propia; $x^3+x^2=x^2(x+1)$, con x repetido:

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

7. $x-3 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$. Con $x=0$: $B=-3$. Con $x=-1$: $C=-4$. Coeficiente de x^2: $A+C=0 \Rightarrow A=4$.
8. **c)** $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln|x| + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1| + C$**.** Comprobación:

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x+1} = \frac{4x^2+4x-3x-3-4x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x-3}{x^3+x^2}$$

3A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3A.5.1 · Partes cíclica: exponencial por seno

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Partes con $u=\operatorname{sen} x$, $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$:

$$I = \tfrac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

2. Otra vez partes, con el mismo tipo de u: $u=\cos x$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos x + \tfrac{1}{2}I$$

3. Sustituyendo: $I = \frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}I$, así que $\frac{5}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x)$.
4. $\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$**.** Comprobación:

$$\tfrac{1}{5}e^{2x}\big[2(2\operatorname{sen} x - \cos x) + (2\cos x + \operatorname{sen} x)\big] = e^{2x}\operatorname{sen} x$$

Ejercicio 3A.5.2 · Partes con una inversa: x ang sec x

Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int x\operatorname{ang\,sec} x\,\mathrm{d}x$ (con $x>1$).

Resolución.

1. LIATE: la inversa es u. $u=\operatorname{ang\,sec} x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, $v=\frac{x^2}{2}$.
2. Partes:

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. La integral que queda es inmediata con $w = x^2-1$: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$.
4. $\int x\operatorname{ang\,sec} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$**.** Comprobación:

$$x\operatorname{ang\,sec} x + \frac{x^2}{2x\sqrt{x^2-1}} - \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} = x\operatorname{ang\,sec} x$$

Ejercicio 3A.5.3 · Potencia impar de la tangente

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Solo hay tangentes: se convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x - 1$.

$$\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x = \int \tan x \sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \tan x\,\mathrm{d}x$$

2. La primera es inmediata con $u = \tan x$, $\mathrm{d}u = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$: $\frac{1}{2}\tan^2 x$. La segunda es $-\ln|\cos x|$.
3. $\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$**.** Comprobación: $\tan x \sec^2 x - \tan x = \tan x(\sec^2 x - 1) = \tan^3 x$.

Ejercicio 3A.5.4 · Cociente de potencias con exponente fraccionario

Adaptado de: 1er final 2010-1, tipo C, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Se escribe como $\tan^m x \sec^n x$: $\cos^7 x = \cos x \cdot \cos^6 x$, así que

$$\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}} = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^{1/3} x \sec^2 x$$

2. Hay $\sec^2 x$ (exponente par): $u = \tan x$, $\mathrm{d}u = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int u^{1/3}\,\mathrm{d}u = \tfrac{3}{4}u^{4/3}$$

3. $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\tan^{4/3} x + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\tan^4 x} + C$**.** Comprobación: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\tan^{1/3} x \sec^2 x = \tan^{1/3} x \sec^2 x$.

Ejercicio 3A.5.5 · Sustitución trigonométrica con seno: $\sqrt{16 - 9x^2}$

Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Raíz de $a^2 - u^2$ con $u = 3x$, $a = 4$: $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{16 - 9x^2} = 4\cos\theta$, $x^4 = \frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta$.

2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{4\cos\theta \cdot \frac{4}{3}\cos\theta}{\frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{27}{16}\int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{27}{16}\int \cot^2\theta\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{9}{16}\cot^3\theta + C$$

(con $w = \cot\theta$, $\mathrm{d}w = -\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$).

3. Triángulo: hipotenusa 4, opuesto $3x$, adyacente $\sqrt{16-9x^2}$. Entonces $\cot\theta = \frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}$ y $\cot^3\theta = \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{27x^3}$.
4. $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}\mathrm{d}x = -\frac{(16-9x^2)^{3/2}}{48x^3} + C$. Comprobación:

$$\frac{27x^4\sqrt{16-9x^2} + 3x^2(16-9x^2)^{3/2}}{48x^6} = \frac{\sqrt{16-9x^2}\,(27x^2 + 48 - 27x^2)}{48x^4}$$
$$= \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}$$

Ejercicio 3A.5.6 · Sustitución trigonométrica con secante: $\sqrt{x^2-1}$

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$ (con $x > 1$).

Resolución.

1. Raíz de $x^2 - a^2$ con $a = 1$: $x = \sec\theta$, $\mathrm{d}x = \sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{x^2-1} = \tan\theta$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int (\sec^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta = \tan\theta - \theta + C$$

3. Triángulo: hipotenusa x, adyacente 1, opuesto $\sqrt{x^2-1}$; $\tan\theta = \sqrt{x^2-1}$, $\theta = \operatorname{ang\,sec} x$.
4. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{ang\,sec} x + C$. Comprobación:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Ejercicio 3A.5.7 · Fracciones con un cuadrático repetido

Adaptado de: 1er extraordinario 2019-2, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 10x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Racional propia (grado 3 contra grado 4); x^2+1 es irreducible y está al cuadrado:

$$\frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

2. $2x^3+10x=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$. Igualando coeficientes: $A=2$, $B=0$, $A+C=10\Rightarrow C=8$, $D=0$.
3. $\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\ln(x^2+1)$ y $\int \frac{8x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{4}{x^2+1}$ (las dos con $u=x^2+1$).
4. $\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\ln(x^2+1)-\frac{4}{x^2+1}+C$**.** Comprobación:

$$\frac{2x}{x^2+1}+\frac{8x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x+8x}{(x^2+1)^2}$$

Otra vía, más corta: con $u=x^2+1$, $x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$ y $2x^2+10=2u+8$, la integral es $\int\left(\frac{1}{u}+\frac{4}{u^2}\right)\mathrm{d}u$.

Ejercicio 3A.5.8 · Fracción impropia: dividir primero

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 4, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Grado 3 contra grado 2: se divide. Cociente $x-1$, residuo $2x+1$:

$$\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}=x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

   (se comprueba con $(x-1)(x^2+x-2)+2x+1=x^3-x+3$).
2. $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ y $2x+1=A(x-1)+B(x+2)$. Con $x=1$: $B=1$; con $x=-2$: $A=1$. (También sirve el atajo: $2x+1$ es la derivada de x^2+x-2.)
3. $\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+2|+\ln|x-1|+C$**.** Comprobación:

$$x-1+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

Ejercicio 3A.5.9 · Fracciones con un factor lineal repetido

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Resolución.

1. Raíces enteras de la cúbica: $x=1$ la anula ($1-5+8-4=0$). Al dividir entre $x-1$ queda $x^2-4x+4=(x-2)^2$. Así, $x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)^2$.
2. Descomposición:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

3. $1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$. Con $x = 1$: $A = 1$. Con $x = 2$: $C = 1$. Coeficiente de x^2: $A + B = 0 \Rightarrow B = -1$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+8x-4} = \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$. Comprobación: al sumar $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ sobre $(x-1)(x-2)^2$, el numerador es $(x-2)^2 - (x-1)(x-2) + (x-1) = 1$.

Ejercicio 3A.5.10 · Sustitución $u = x^2$ y después tangente

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. El factor x es casi la derivada de x^2: $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}$$

2. Raíz de $1+u^2$: $u = \tan\theta$, $\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{1+u^2} = \sec\theta$.

$$I = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

3. Regreso: $\tan\theta = u = x^2$, $\sec\theta = \sqrt{1+x^4}$.
4. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C$. Comprobación:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x + \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{x^2+\sqrt{1+x^4}} = \frac{x\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)}{\sqrt{1+x^4}\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$$

3A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución y comprueba cada uno derivando. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3A**.

Ejercicio propuesto 3A.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Resultado: $\frac{x}{2}\big[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3A.6.2

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

Resultado: $\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.3

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 3, inciso a).

Efectúe $\int (\tan x - \sec x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Resultado: $2\tan x - 2\sec x - x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.4

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Resultado: $\frac{1}{6}\,\mathrm{sen}^3(x^2) + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.5

Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left[(x+3)^2+9\right]^3}}$.

Resultado: $\frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.6

Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}$.

Resultado: $\frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{ang\,tan}\,e^x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3A.6.7

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

Resultado: $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3A.6.8

Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Resultado: $\operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1}+C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

3A.7 Errores frecuentes

- **No comprobar.** Derivar el resultado toma un minuto y detecta casi todos los errores de signo y de constantes; varias resoluciones publicadas tienen justo esos errores (Apéndice C).
- **Olvidar el factor de v en partes.** Si $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, entonces $v = \frac{x^2}{2}$, no x^2; si $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.
- **Cambiar de u a media integral cíclica.** En la segunda aplicación de partes hay que elegir el mismo tipo de función como u; si no, se regresa a la integral original y queda $0 = 0$.
- **No dividir una fracción impropia.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, las fracciones parciales dan un sistema sin solución.
- **Olvidar términos en la descomposición.** Un $(x-2)^2$ pide $\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$; un cuadrático irreducible pide numerador $Bx+C$, no solo B.
- **Dejar la respuesta en θ.** En la sustitución trigonométrica hay que regresar a x con el triángulo; θ solo aparece como $\operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec}\frac{x}{a}$.
- **Olvidar el factor del cambio en $\mathrm{d}x$.** Con $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, no $\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
- **Quitar el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln|x-2|$, porque el integrando también existe para $x < 2$.

3A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Partes: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$; elección de u con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$; $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x|$.
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$; $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.
- $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta$; $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec\theta$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\frac{u}{a}$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|$.

- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r}+\cdots+\frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,dx}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,dx}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+q)$.

3A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Empieza el examen por el problema 3: son tres integrales y cada una se decide con la tabla de 3A.2.
2. Antes de elegir método, busca un cambio de variable inmediato (la derivada de algo está multiplicando) o una simplificación algebraica.
3. Escribe el método al inicio de cada inciso («por partes», «$x = 2\tan\theta$», «fracciones parciales»); si te equivocas después, el planteamiento cuenta.
4. En fracciones parciales, revisa grados y factoriza antes de escribir la descomposición; usa las raíces para las constantes.
5. En sustitución trigonométrica, dibuja el triángulo antes de integrar: lo necesitarás para regresar a x.
6. Comprueba cada resultado derivando (una línea) y escribe $+C$.

Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno adquirirá habilidad en el uso de diversas técnicas de integración y las aplicará en la resolución de problemas geométricos. El programa de 2016 dice lo mismo con otras palabras: «El alumno aplicará métodos de integración y los utilizará en la resolución de problemas geométricos.»

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** todo es de los dos planes salvo el área en coordenadas polares (3B.3.2), que solo pide el Plan 2010. La longitud de arco en paramétricas la nombra solo el programa del Plan 2010; el del Plan 2016 no, pero sale en uno de sus exámenes y se deja para los dos.
- **Frecuencia:** es el problema 4 en los 52 exámenes del Plan 2010: área entre curvas 20, volumen de revolución 16, longitud de arco 13 (cartesiana 8, paramétrica 4, polar 1) y área en polares 5. En el Plan 2016 sale en 56 de los 60 exámenes: área 36, volumen 12, longitud de arco 8 y ningún problema de polares.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte. Las integrales se resuelven con lo de la Parte A; aquí lo nuevo es plantearlas.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 3B.1 y 3B.3 (30 min).
  2. Sigue los tres ejemplos de la sección 3B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3B.5 con cronómetro (15 min cada uno), empezando por la figura.

3B.1 Conceptos y expresiones

La idea de todas las aplicaciones. Se corta la figura en pedazos muy delgados, se escribe la medida de un pedazo (el *elemento diferencial*) y se suman todos con una integral definida. Los límites de la integral son el primero y el último valor de la variable en la que se corta. Por eso cada problema empieza con la gráfica de la región y un pedazo dibujado.

Área entre curvas. Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el elemento es un rectángulo vertical de altura $f(x) - g(x)$ y ancho $\mathrm{d}x$:

$$A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x.$$

Si conviene cortar en franjas horizontales (curvas de la forma $x = h(y)$, como las parábolas horizontales), el elemento tiene largo «derecha menos izquierda»:

$$A = \int_c^d \big[x_{\text{der}}(y) - x_{\text{izq}}(y)\big]\,\mathrm{d}y.$$

El área siempre es positiva y se da en $[u^2]$. Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, cambia cuál está arriba y la integral se parte en el punto de cruce.

Área en coordenadas polares SOLO PLAN 2010 . Para una curva $r = f(\theta)$, el elemento es un sector circular delgado de radio r y ángulo $\mathrm{d}\theta$, con área $\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \mathrm{d}\theta.$$

Los límites son los ángulos entre los que la curva barre la región una sola vez; en un pétalo, los valores de θ donde $r = 0$.

Longitud de arco. Un tramo muy corto de curva es casi un segmento de largo $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Según cómo esté dada la curva:

$$y = f(x): \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$x(t),\ y(t): \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$r = f(\theta): \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

La longitud se da en $[u]$. En los exámenes, el radicando casi siempre queda lineal ($\sqrt{1+9x}$) o como un cuadrado perfecto disfrazado: si no se simplifica, revisa la derivada. La derivada de las paramétricas viene de Cálculo Diferencial.

Sólido de revolución. Al girar una región plana alrededor de una recta (el *eje de giro*) se forma un sólido. Hay dos maneras de cortarlo:

- *Discos y arandelas:* el rectángulo es *perpendicular* al eje. Al girar forma un disco de radio R o, si la región no toca el eje, una arandela de radio exterior R e interior r:

$$V = \pi\int_a^b \left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}x.$$

- *Capas cilíndricas:* el rectángulo es *paralelo* al eje. Al girar forma un tubo delgado de radio ρ, altura h y grosor $\mathrm{d}x$, con volumen $2\pi\rho h\mathrm{d}x$:

$$V = 2\pi\int_a^b \rho(x)\,h(x)\mathrm{d}x.$$

Los radios son *distancias al eje de giro*, no ordenadas: con el eje $y = k$, el radio a la curva $y = f(x)$ es $|f(x) - k|$; con el eje $x = k$, el radio de una capa es $|x - k|$. El volumen se da en $[u^3]$.

Lo que no se pregunta. El área de una superficie de revolución, el centroide y el trabajo no aparecen en los exámenes de los dos planes; tampoco la longitud de arco en polares en el banco del Plan 2016.

3B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcular el área de la región limitada por las gráficas de…» con $y = f(x)$	Área en x (3B.3.1)
Curvas como $y^2 - 4y - x = 0$ o $x = y^2$ (parábolas horizontales)	Área en y (3B.3.1)
«Área de un pétalo», «de la cardioide», $r = f(\theta)$	Área en polares (3B.3.2)
«Longitud de arco» o «longitud de la gráfica de f en $[a, b]$»	Longitud de arco (3B.3.3), forma cartesiana
«La curva dada por $x = \ldots$, $y = \ldots$» con parámetro t	Longitud de arco (3B.3.3), paramétricas
«Longitud de la curva $r = 3\theta^2$»	Longitud de arco (3B.3.3), polares
«Volumen del sólido… al girar alrededor del eje de las abscisas»	Discos o arandelas en x (3B.3.4)
«… alrededor del eje de las ordenadas»	Capas en x (3B.3.5) o discos en y (3B.3.4)
«… alrededor de la recta $y = k$» o «$x = k$»	Discos (3B.3.4) o capas (3B.3.5) con el radio medido desde la recta

3B.3 Procedimientos

3B.3.1 Área entre curvas

1. Dibuja las curvas: identifica rectas, parábolas (vértice y hacia dónde abren), e^x, $\ln x$. Si alguna ecuación tiene y^2 y no x^2, despeja x: es una parábola horizontal.
2. Calcula los puntos de corte igualando las dos expresiones. Los cortes son los límites de la integral.
3. Elige el corte: franjas verticales ($\mathrm{d}x$) si cada vertical entra por una curva y sale por otra; franjas horizontales ($\mathrm{d}y$) si así pasa con las horizontales. Con parábolas horizontales casi siempre es en y.
4. Decide qué curva está arriba (o a la derecha) probando un punto intermedio. Si el orden cambia, parte la integral.
5. Integra «arriba menos abajo» o «derecha menos izquierda» y da el resultado en $[u^2]$. Si sale negativo, restaste al revés.

Simetría. Si las dos funciones son impares ($\sqrt[3]{x}$ y x) o la región es simétrica respecto a un eje, calcula una parte y multiplica. Nunca integres de un lado al otro de un cruce sin partir: las áreas con signo se cancelan.

3B.3.2 Área en coordenadas polares SOLO PLAN 2010

1. Dibuja la curva con una tabla de θ y r (cada $\frac{\pi}{4}$ o $\frac{\pi}{6}$). Rosa $r = a\cos n\theta$: n pétalos si n es impar y $2n$ si es par. Cardioide $r = a(1 \pm \operatorname{sen}\theta)$ o $a(1 \pm \cos\theta)$.
2. Busca los límites: en un pétalo, los ángulos consecutivos donde $r = 0$; en una curva cerrada que no pasa dos veces por el mismo punto, una vuelta completa (0 a 2π).

3. Aprovecha la simetría: integra media región y multiplica por 2.
4. Calcula $A = \frac{1}{2}\int r^2 \mathrm{d}\theta$. Para $\cos^2$ y sen^2 usa el ángulo doble: $\cos^2 2\theta = \frac{1+\cos 4\theta}{2}$ (Parte A).

3B.3.3 Longitud de arco

1. Identifica la forma de la curva: $y = f(x)$, paramétrica o polar, y escribe la fórmula que corresponde.
2. Deriva y eleva al cuadrado: $[f'(x)]^2$, o $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2$, o $r^2 + (r')^2$.
3. Simplifica el radicando antes de integrar. En paramétricas con $e^t \cos t$ y $e^t \operatorname{sen} t$, los productos cruzados se cancelan; en polares con $r = a\theta^2$, saca el factor común.
4. Integra (casi siempre un cambio de variable $u = 1 + 9x$ o $u = \theta^2 + 4$) y evalúa. Da el resultado exacto en $[u]$.

3B.3.4 Volumen por discos y arandelas

1. Dibuja la región, el eje de giro con línea punteada y un rectángulo *perpendicular* al eje.
2. Si el eje es horizontal ($y = 0$ o $y = k$), el rectángulo es vertical y se integra en x; si es vertical ($x = 0$ o $x = k$), es horizontal y se integra en y: despeja x de cada curva.
3. Mide los radios desde el eje: R hasta la curva más lejana, r hasta la más cercana ($r = 0$ si la región toca el eje).
4. Calcula $V = \pi\int(R^2 - r^2)$. Se eleva cada radio por separado: $R^2 - r^2 \neq (R - r)^2$.

Eje $y = k$. La región entre $y = x^2$ y $y = x$ ($0 \le x \le 1$) gira alrededor de $y = 2$. La recta queda arriba de la región, así que la curva más lejana es la de abajo: $R = 2 - x^2$ y $r = 2 - x$, y

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2\right] \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{15}\,[u^3].$$

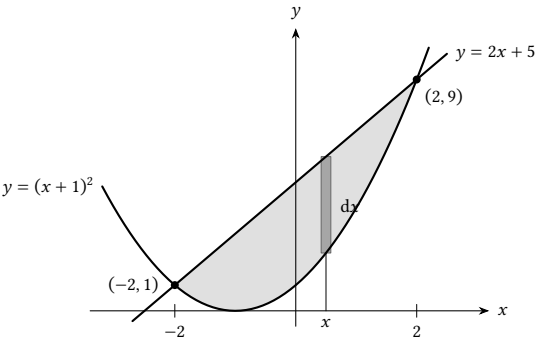
3B.3.5 Volumen por capas cilíndricas

1. Dibuja la región y un rectángulo *paralelo* al eje de giro.
2. Para un eje vertical ($x = 0$ o $x = k$) el rectángulo es vertical y se integra en x: radio $\rho = |x - k|$, altura $h =$ curva de arriba menos curva de abajo.
3. Calcula $V = 2\pi \int \rho\, h \mathrm{d}x$.
4. Si puedes, comprueba con discos en y: los dos métodos dan el mismo volumen.

Cuándo conviene cada uno. Alrededor del eje y con curvas $y = f(x)$ difíciles de despejar, o con una región que necesitaría dos integrales en y, usa capas. Si x se despeja fácil ($y = \ln x \Rightarrow x = e^y$), los discos en y suelen ser más cortos.

3B.4 Ejemplo resuelto

> **Ejemplo resuelto · Área entre una parábola y una recta**
>
> *Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 4.*
>
> Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2x + 1$ y $y = 2x + 5$.
>
> **Resolución.**



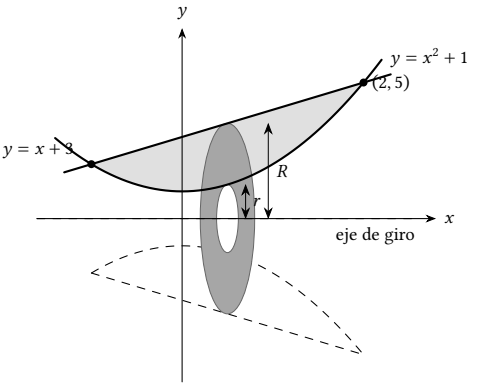
1. Figura: $y = (x+1)^2$ es una parábola con vértice en $(-1, 0)$ que abre hacia arriba; $y = 2x + 5$ es una recta de pendiente 2.
2. Cortes: $x^2 + 2x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Puntos $(-2, 1)$ y $(2, 9)$.
3. En $x = 0$ la recta vale 5 y la parábola 1: la recta está arriba. Rectángulo vertical de altura $(2x + 5) - (x^2 + 2x + 1) = 4 - x^2$.
4. Integral:
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}.$$
5. Evaluación: $\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.
6. $A = \dfrac{32}{3}\,[u^2] \approx 10.67\,[u^2]$**.** Comprobación: el integrando $4 - x^2$ es par, así que $A = 2\int_0^2 (4 - x^2)\mathrm{d}x = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$.

Ejemplo resuelto · Volumen por arandelas alrededor del eje x

Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje x, la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$.

Resolución.



1. Cortes: $x^2+1=x+3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$. Puntos $(-1,2)$ y $(2,5)$.
2. En $x=0$ la recta vale 3 y la parábola 1: la recta está arriba. Las dos curvas están sobre el eje ($y \geq 1$), así que la región no toca el eje: arandelas con $R=x+3$ y $r=x^2+1$.
3. Integrando: $(x+3)^2-(x^2+1)^2 = x^2+6x+9-x^4-2x^2-1 = -x^4-x^2+6x+8$.
4. Integral:

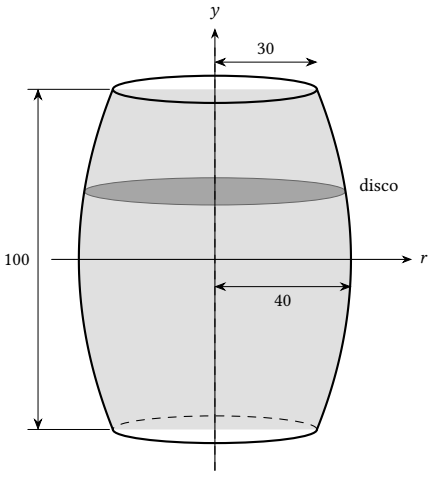
$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left(-x^4-x^2+6x+8\right)\mathrm{d}x$$
$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right)\Big|_{-1}^{2}.$$

5. En $x=2$: $-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}+12+16=\frac{284}{15}$. En $x=-1$: $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+3-8=-\frac{67}{15}$. Diferencia: $\frac{351}{15}=\frac{117}{5}$.
6. $V=\dfrac{117\pi}{5}\,[u^3] \approx 73.5\,[u^3]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right) = -x^4-x^2+6x+8$.

Ejemplo resuelto · Volumen de un barril

Un barril mide 1 m de altura. Su radio es de 40 cm a la mitad de la altura y de 30 cm en las tapas, y su perfil es parabólico. Calcule cuántos litros le caben.

Resolución.



1. Ejes: el eje y es el eje del barril, con el origen a la mitad de la altura y todo en centímetros, así que $-50 \le y \le 50$. El radio a la altura y es $r(y)$.
2. Perfil parabólico, simétrico, con máximo 40 en $y = 0$: $r(y) = 40 - ky^2$. En las tapas, $r(\pm 50) = 30 \Rightarrow 40 - 2500k = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{250}$. Así, $r(y) = 40 - \frac{y^2}{250}$.
3. Cada corte horizontal es un disco de radio $r(y)$ y grosor $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}V = \pi\, r(y)^2 \mathrm{d}y$.
4. Por simetría, el doble de la mitad de arriba:

$$V = \pi \int_{-50}^{50} \Big(40 - \frac{y^2}{250}\Big)^2 \mathrm{d}y$$
$$= 2\pi \int_{0}^{50} \Big(1600 - \frac{8y^2}{25} + \frac{y^4}{62\,500}\Big)\mathrm{d}y.$$

5. Término a término, de 0 a 50: $1600(50) = 80\,000$; $\frac{8}{25}\cdot\frac{50^3}{3} = \frac{40\,000}{3}$; $\frac{1}{62\,500}\cdot\frac{50^5}{5} = 1000$. Suma: $81\,000 - \frac{40\,000}{3} = \frac{203\,000}{3}$.
6. $V = \dfrac{406\,000\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3 \approx 425\,162\ \mathrm{cm}^3$. Como $1\ \mathrm{L} = 1000\ \mathrm{cm}^3$:
7. **Al barril le caben unos 425 L.** Comprobación: un cilindro de radio 40 cm y 1 m de alto tendría unos 503 L, y uno de radio 30 cm, unos 283 L; el barril queda entre los dos y más cerca del primero, porque casi toda su altura tiene radio cercano a 40.

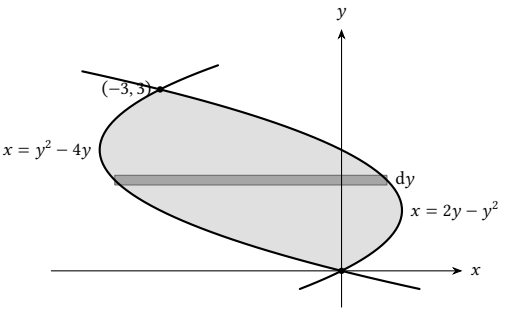
3B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3B.5.1 · Área entre dos parábolas horizontales

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 - 4y - x = 0$ y $y^2 - 2y + x = 0$.

Resolución.



1. Se despeja x: $x = y^2 - 4y$ es una parábola horizontal que abre a la derecha, con vértice $(-4, 2)$; $x = 2y - y^2$ abre a la izquierda, con vértice $(1, 1)$.
2. Cortes: $y^2 - 4y = 2y - y^2 \Rightarrow 2y^2 - 6y = 0 \Rightarrow 2y(y-3) = 0$, así que $y = 0$ y $y = 3$. Puntos $(0, 0)$ y $(-3, 3)$.
3. Franjas horizontales. En $y = 1$: $2y - y^2 = 1$ y $y^2 - 4y = -3$; la de la derecha es $x = 2y - y^2$.
4. Largo de la franja: $(2y - y^2) - (y^2 - 4y) = 6y - 2y^2$.
5. Integral:
$$A = \int_0^3 (6y - 2y^2)\mathrm{d}y = \left(3y^2 - \frac{2y^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 27 - 18.$$
6. $A = 9\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(3y^2 - \frac{2}{3}y^3\right) = 6y - 2y^2$.

Ejercicio 3B.5.2 · Área con dos regiones: raíz cúbica y recta

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = x$.

Resolución.

1. Cortes: $\sqrt[3]{x} = x \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$, así que $x = -1, 0, 1$. Hay dos regiones.
2. En $[0, 1]$, con $x = \frac{1}{8}$: $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$; arriba está f. En $[-1, 0]$, con $x = -\frac{1}{8}$: $x = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$; arriba está g.
3. Las dos funciones son impares: las regiones son simétricas respecto al origen y tienen la misma área.
4. Integral:
$$A = 2\int_0^1 (x^{1/3} - x)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1.$$
5. $2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4}$.
6. $A = \frac{1}{2}\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{3}{4}x^{4/3}\right) = x^{1/3}$. Sin partir, $\int_{-1}^1 (x^{1/3} - x)\mathrm{d}x = 0$: las dos áreas se cancelan.

Ejercicio 3B.5.3 · Arandelas entre seno y coseno hiperbólicos

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$, $y = \cosh x$, $x = 0$ y $x = \ln 2$.

Resolución.

1. Figura: $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x} > 0$, así que $\cosh x$ está arriba; en $[0, \ln 2]$, $\operatorname{senh} x \geq 0$. La región va de $y = \operatorname{senh} x$ a $y = \cosh x$ y no toca el eje (salvo en el punto $(0, 0)$ de su borde inferior).
2. Arandelas: $R = \cosh x$, $r = \operatorname{senh} x$.
3. Integral, con la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$:

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} \left(\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x\right) \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\ln 2} \mathrm{d}x.$$

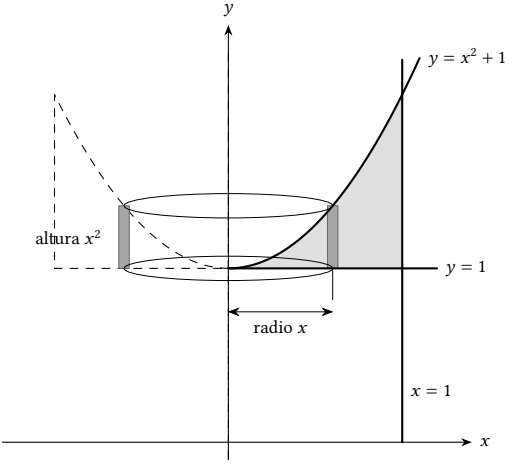
4. $V = \pi \ln 2\,[u^3] \approx 2.18\,[u^3]$. Comprobación: con $\cosh \ln 2 = \frac{5}{4}$ y $\operatorname{senh} \ln 2 = \frac{3}{4}$, el integrando en $x = \ln 2$ es $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$.

Ejercicio 3B.5.4 · Capas cilíndricas alrededor del eje y

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 1$ y $x = 1$.

Resolución.



1. Región: $0 \leq x \leq 1$ y $1 \leq y \leq x^2 + 1$. El eje de giro ($x = 0$) es su borde izquierdo.
2. Rectángulos verticales (paralelos al eje): capas de radio $\rho = x$ y altura $h = (x^2 + 1) - 1 = x^2$.

3. Integral:
$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \mathrm{d}x = 2\pi \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{4}.$$
4. $V = \dfrac{\pi}{2}\,[u^3]$.
5. Comprobación con arandelas en y, para $1 \le y \le 2$: $R = 1$ (la recta $x = 1$) y $r = \sqrt{y-1}$ (la parábola):
$$V = \pi \int_1^2 \big[1 - (y-1)\big]\mathrm{d}y = \pi\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 3B.5.5 · Discos en y con logaritmo

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$ y $x = 0$.

Resolución.

1. Se despeja x: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$. La región está entre el eje y ($x = 0$) y la curva $x = e^y$, para $0 \le y \le 1$.
2. La región toca el eje de giro: discos horizontales de radio $R = e^y$.
3. Integral:
$$V = \pi \int_0^1 e^{2y}\mathrm{d}y = \pi \left.\frac{e^{2y}}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}\big(e^2 - 1\big).$$
4. $V = \dfrac{\pi(e^2-1)}{2}\,[u^3] \approx 10.04\,[u^3]$.
5. Comprobación con capas: en x la región se parte en $0 \le x \le 1$ (altura 1) y $1 \le x \le e$ (altura $1 - \ln x$). Con partes, $\int_1^e x(1-\ln x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-3}{4}$, y
$$2\pi\Big(\frac{1}{2} + \frac{e^2-3}{4}\Big) = \frac{\pi(e^2-1)}{2}.$$
Los discos en y evitan partir la región y la integración por partes.

Ejercicio 3B.5.6 · Longitud de arco en cartesianas

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 4.

Calcule la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\big[0, \frac{1}{3}\big]$.

Resolución.

1. $f(x) = 2x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = 3x^{1/2} \Rightarrow [f'(x)]^2 = 9x$.
2. Integral:
$$L = \int_0^{1/3} \sqrt{1 + 9x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Cambio de variable $u = 1 + 9x$, $\mathrm{d}u = 9\mathrm{d}x$; los límites pasan a $u = 1$ y $u = 4$:
$$L = \frac{1}{9}\int_1^4 u^{1/2}\mathrm{d}u = \frac{2}{27}\left.u^{3/2}\right|_1^4 = \frac{2}{27}(8-1).$$

4. $L = \dfrac{14}{27}\,[u] \approx 0.52\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\big] = \frac{2}{27}\cdot\frac{3}{2}\cdot 9\sqrt{1+9x} = \sqrt{1+9x}$.

Ejercicio 3B.5.7 · Longitud de arco en paramétricas: espiral

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 5.

Calcule la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, con $t \in [0, \ln 11]$.

Resolución.

1. Derivadas (producto):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

2. Suma de cuadrados: los productos cruzados $\pm 2\operatorname{sen} t\cos t$ se cancelan,

$$e^{-2t}\big[(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2\big] = 2e^{-2t}.$$

3. Integral:

$$L = \int_0^{\ln 11} \sqrt{2}\,e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\big(-e^{-t}\big)\Big|_0^{\ln 11} = \sqrt{2}\Big(1 - \frac{1}{11}\Big).$$

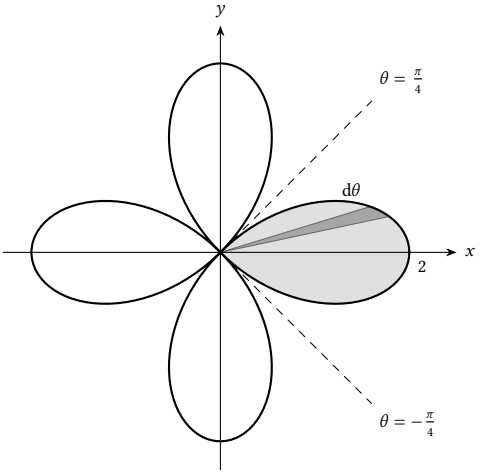
4. $L = \dfrac{10\sqrt{2}}{11}\,[u] \approx 1.29\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\sqrt{2}e^{-t}\big) = \sqrt{2}e^{-t}$; y la distancia al origen baja de 1 a $\frac{1}{11}$: L es mayor que esa diferencia, $\frac{10}{11}$.

Ejercicio 3B.5.8 · Área de un pétalo de una rosa

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 4.

SOLO PLAN 2010 Calcule el área de la región limitada por uno de los pétalos de la rosa $r = 2\cos 2\theta$.

Resolución.



1. La rosa tiene $2 \cdot 2 = 4$ pétalos de largo 2. El pétalo sobre el eje x positivo empieza y acaba donde $r = 0$: $\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$.
2. Por simetría respecto al eje x, el doble de la mitad de arriba:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 4\cos^2 2\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} 2\big(1 + \cos 4\theta\big)\mathrm{d}\theta.$$

3. $\big(2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta\big)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi = \frac{\pi}{2}$.
4. $A = \dfrac{\pi}{2}\,[u^2] \approx 1.57\,[u^2]$**.** Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big(2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta\big) = 2 + 2\cos 4\theta = 4\cos^2 2\theta$; los cuatro pétalos suman 2π, la mitad del círculo de radio 2.

3B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E**.

Ejercicio propuesto 3B.6.1

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = 4x^3$ y $y = 8x^2$.

Resultado: $A = \dfrac{16}{3}\,[u^2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3B.6.2

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1$ y $x = 0$.

Resultado: $V = \dfrac{\pi}{7}\,[u^3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2020-1, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por $x = 0$, $y = e^{-x}$, $y = 0$ y $x = \ln 2$. Dibuje el sólido.

Resultado: $V = \dfrac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.4

Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 5.

Calcule la longitud de arco de la curva $r = 3\theta^2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Resultado: $L = \left(\pi^2 + 4\right)^{3/2} - 8\,[u] \approx 43.65\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.5

Adaptado de: 3er extraordinario 2015-1, problema 4.

SOLO PLAN 2010 Calcule el área de la región limitada por la curva $r = 2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Resultado: $A = 6\pi\,[u^2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 4.

Calcule la longitud de la gráfica de $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Resultado: $L = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{6}\,[u] \approx 0.30\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

3B.7 Errores frecuentes

- **Empezar sin figura.** Sin la gráfica no se sabe qué curva está arriba, si hay dos regiones ni si la región toca el eje de giro.
- **Integrar de un lado al otro de un cruce.** Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, las áreas con signo se cancelan ($\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x} - x)\mathrm{d}x = 0$). Parte la integral.
- **Equivocar «derecha menos izquierda».** En las parábolas horizontales despeja x con cuidado: $y^2 - 2y + x = 0$ da $x = 2y - y^2$, no $y^2 - 2y$.
- **Elevar mal en las arandelas.** $\pi\int(R^2 - r^2)$ no es $\pi\int(R - r)^2$.
- **Medir el radio desde el eje equivocado.** Con el eje $y = k$ o $x = k$, el radio es la distancia a esa recta, no la ordenada ni la abscisa.
- **Olvidar 2π en las capas o π en los discos**, o el $\frac{1}{2}$ del área en polares.
- **Límites polares por tanteo.** En un pétalo, los límites son los ángulos donde $r = 0$; integrar de 0 a 2π en una rosa da todos los pétalos.

- **Olvidar el 1 en la longitud de arco**: es $\sqrt{1+[f']^2}$, no $\sqrt{[f']^2}$.

3B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Área en x: $A=\int_a^b \big[f(x)-g(x)\big]\,\mathrm{d}x$, con f arriba.
- Área en y: $A=\int_c^d \big[x_{\text{der}}-x_{\text{izq}}\big]\,\mathrm{d}y$.
- Área en polares SOLO PLAN 2010 : $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\mathrm{d}\theta$.
- Arco, cartesianas: $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
- Arco, paramétricas: $L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.
- Arco, polares: $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta$.
- Discos y arandelas: $V=\pi\int_a^b\big(R^2-r^2\big)\mathrm{d}x$ (o $\mathrm{d}y$).
- Capas: $V=2\pi\int_a^b \rho\,h\mathrm{d}x$, con ρ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$.

3B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja las curvas, marca los puntos de corte y sombrea la región. Dibuja un rectángulo (o un sector) representativo.
2. En volumen, dibuja el eje de giro punteado y decide: rectángulo perpendicular al eje (discos) o paralelo (capas).
3. Escribe el elemento diferencial con palabras: «arriba menos abajo», «radio exterior», «radio por altura».
4. Plantea la integral con sus límites y simplifica el integrando antes de integrar.
5. Integra con la técnica de la Parte A, evalúa con fracciones exactas y escribe las unidades $[u^2]$, $[u]$ o $[u^3]$.
6. Revisa el signo y el orden de magnitud con la figura: un área no puede salir negativa ni mayor que el rectángulo que la contiene.

Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno comprenderá el concepto de función escalar de variable vectorial, determinará la variación de este tipo de funciones en cualquier dirección y la aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos. El programa de 2016 dice: «El alumno analizará la variación de una función escalar de variable vectorial respecto a cada una de sus variables y resolverá problemas físicos y geométricos.»

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** el tema 4 es el mismo en los dos planes (4.1 a 4.9). El Plan 2010 nombra además tres subtemas que nunca se han preguntado (párrafo final de la sección 4.1).
- **Frecuencia:** son los problemas 5 y 6 de todos los exámenes: 52 de 52 en el Plan 2010 (112 problemas: dos por examen en 42, tres en 9 y uno en el restante) y 60 de 60 en el Plan 2016 (116 problemas). Por subtema, Plan 2010 / Plan 2016: derivada direccional y gradiente 29/33; dominio, recorrido y región 22/29; plano tangente y recta normal 20/22; parciales sucesivas y mixtas (verificar una ecuación) 19/18; regla de la cadena y razones de cambio 14/12; curvas de nivel 9/10; diferencial total 3/1; límite doble 1/0; derivación implícita 1/0.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad. En el examen, de 15 a 20 minutos por problema.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 y la tabla de la 4.2 (30 min).
  2. Estudia los procedimientos 4.3.1, 4.3.2, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.8 y 4.3.10: cubren casi todos los problemas.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 4.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro (15 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Función escalar de variable vectorial. Asigna un número real a cada punto de una región del plano o del espacio: $z = f(x, y)$ o $w = f(x, y, z)$. Ejemplos físicos: la temperatura de una placa, el potencial eléctrico, el volumen de un cilindro como función de su radio y su altura.

Dominio, recorrido y región de definición. El *dominio* es el conjunto de puntos (x, y) donde la regla tiene sentido; dibujado en el plano xy es la *región de definición*. El *recorrido* es el conjunto de valores que toma z. Las tres restricciones que aparecen en los exámenes son:

- raíz cuadrada (o de índice par): radicando ≥ 0;
- logaritmo: argumento > 0;
- cociente: denominador $\neq 0$.

En la figura, el borde que pertenece a la región se traza continuo y el que no pertenece, punteado. Una *región* es abierta si no contiene ningún punto de su frontera y cerrada si los contiene todos.

Gráfica y curvas de nivel. La gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie en el espacio. Su *curva de nivel* k es el conjunto de puntos del plano xy donde $f(x, y) = k$: es la proyección del corte de la superficie con el plano $z = k$. Solo hay curva de nivel para los k del recorrido. Con tres variables, $f(x, y, z) = k$ es una *superficie de nivel*.

Límite y continuidad. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ significa que f se acerca a L por *cualquier* trayectoria que llegue a (a, b). Si dos trayectorias dan valores distintos, el límite no existe. f es continua en (a, b) si el límite existe y vale $f(a, b)$. Los polinomios, la exponencial, el seno y el coseno son continuos en todo el plano; los cocientes, raíces y logaritmos, en su dominio.

Derivadas parciales. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ se calcula derivando respecto a x con y constante; f_y, con x constante. Interpretación geométrica: $f_x(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente, en el punto $(a, b, f(a, b))$, a la curva que resulta de cortar la superficie con el plano $y = b$; $f_y(a, b)$, la de la curva que resulta del corte con $x = a$. Interpretación física: razón de cambio de f cuando solo cambia una variable.

Derivadas parciales sucesivas. Se deriva otra vez: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{yy}, y las mixtas $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ (primero x, luego y) y f_{yx}. *Teorema de las derivadas mixtas* (de Schwarz): si las mixtas son continuas, $f_{xy} = f_{yx}$; el orden no importa. Lo mismo con las de tercer orden.

Vector normal, plano tangente y recta normal. Si la superficie es $F(x, y, z) = 0$, el gradiente $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ en un punto P_0 de ella es normal a la superficie. Con $\mathbf{n} = \nabla F(P_0) = (a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

es el plano tangente, y la recta normal es

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Si la superficie es $z = f(x, y)$, basta tomar $F = f(x, y) - z$, con normal $(f_x, f_y, -1)$.

Diferencial total. Si $z = f(x, y)$ es diferenciable,

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

y para cambios pequeños $\Delta z \approx \mathrm{d}z$. Con tres variables se agrega $f_z\,\mathrm{d}z$.

Regla de la cadena. Si $z = f(u, v)$ con $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

y lo mismo con y. Si $z = f(x, y)$ con $x = x(t)$ y $y = y(t)$, la *derivada total* es

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Derivación implícita. Si $F(x, y, z) = 0$ define z como función de x y y, y $F_z \neq 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Con una ecuación $F(x, y) = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F_x}{F_y}$.

Gradiente y derivada direccional. El gradiente es el vector de las parciales: $\nabla f = (f_x, f_y)$ o (f_x, f_y, f_z); ∇ es el *operador nabla*. La derivada direccional en la dirección del vector *unitario* $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Como $\nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \cos\theta$:

- f aumenta más rápido en la dirección de ∇f, y esa máxima razón de cambio (máxima variación) vale $\|\nabla f\|$;
- disminuye más rápido en la dirección de $-\nabla f$, con razón $-\|\nabla f\|$;
- no cambia en las direcciones perpendiculares a ∇f ($D_{\mathbf{u}} f = 0$);
- $\nabla f(a, b)$ es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (a, b).

Lo que el programa menciona y no se pregunta. El Plan 2010 incluye, además, la comparación entre el incremento y la diferencial total, la diferencial de orden superior y la permanencia de la forma de la diferencial total (subtemas 4.6 y 4.7); el Plan 2016 los quitó. Los dos planes nombran la derivación implícita en sistemas de ecuaciones. En los 112 exámenes revisados no hay ningún problema de estos temas: basta saber que existen. La comparación entre incremento y diferencial aparece solo como comentario en el ejercicio de diferenciales.

4.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determine el dominio», «el recorrido», «trace la región de definición»	Dominio y región (4.3.1)
«Obtenga (trace, identifique) las curvas de nivel para $z = k$»	Curvas de nivel (4.3.2)
«Calcule el límite cuando $(x, y) \to (a, b)$» o «¿es continua?»	Límite doble (4.3.3)
«Pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano $y = b$»	Derivada parcial (4.3.4)
«Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ en (a, b)», «compruebe que las mixtas son iguales», «verifique que u satisface la ecuación…»	Parciales sucesivas (4.3.5)
«Plano tangente» o «recta normal» a una superficie en un punto	Plano tangente (4.3.6)

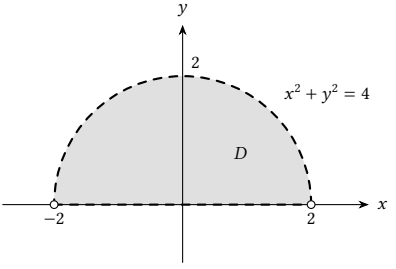
El enunciado dice…	Procedimiento
«Por medio de diferenciales…», «cambio aproximado», «error en el volumen»	Diferencial total (4.3.7)
«Sean $z = f(u, v)$, $u = \ldots$, $v = \ldots$», «calcule $\frac{dz}{dt}$», «¿a qué razón cambia…?»	Regla de la cadena (4.3.8)
«$F(x, y, z) = 0$ define z como función de x y y»	Derivación implícita (4.3.9)
«Derivada direccional», «razón de cambio en la dirección de…», «dirección de máximo aumento», «máxima variación», «dirección en que no cambia»	Gradiente y derivada direccional (4.3.10)

4.3 Procedimientos

4.3.1 Dominio, recorrido y región de definición

1. Escribe una condición por cada raíz par (≥ 0), logaritmo (> 0) y denominador ($\neq 0$). Si una raíz está en el denominador, la condición es > 0.
2. Resuelve cada condición para dejar a la vista la curva frontera: recta, circunferencia, elipse, parábola o hipérbola (completa cuadrados si hace falta).
3. Toma la intersección de todas las condiciones y escríbela como conjunto: $D_f = \{(x, y) \mid \ldots\}$.
4. Dibuja la frontera: continua si el signo es $\geq$ o $\leq$, punteada si es $>$, $<$ o $\neq$. Para saber de qué lado está la región, prueba un punto, como el origen.
5. Recorrido: sigue la cadena de valores de adentro hacia afuera (por ejemplo, $w = 1 - x - y \in (1, \infty) \Rightarrow \ln w \in (0, \infty) \Rightarrow \ldots$).

Por ejemplo, $f(x, y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ pide $y > 0$ (logaritmo) y $4 - x^2 - y^2 > 0$ (raíz en el denominador). Su región de definición es el semidisco superior abierto: los dos bordes van punteados.



4.3.2 Curvas de nivel

1. Calcula primero el recorrido: solo los k del recorrido tienen curva de nivel.
2. Iguala $f(x, y) = k$, despeja hasta quitar raíces y denominadores (eleva al cuadrado cuidando el signo) y lleva la ecuación a la forma canónica.

3. Identifica la cónica: $x^2 + y^2 = r^2$ circunferencia; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipse; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hipérbola; $x = y^2 + c$ parábola; $ax + by = c$ recta.
4. Dibuja las curvas pedidas en el mismo plano, cada una con su valor de k, y respeta el dominio (por ejemplo, si f tiene y en un numerador con raíz, la curva puede ser solo media cónica).

4.3.3 Límite doble por trayectorias

1. Sustituye el punto. Si f es continua ahí (no queda $\frac{0}{0}$), ese es el límite.
2. Si queda indeterminado, acércate por rectas $y = mx$ (o parábolas $y = mx^2$). Si el resultado depende de m, **el límite no existe**.
3. Ejemplo: $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ con $y = mx$ da $\dfrac{m}{1 + m^2}$, que cambia con m: no existe el límite en $(0, 0)$.

4.3.4 Derivadas parciales e interpretación geométrica

1. Para f_x, trata a y como constante y deriva con las reglas de una variable; para f_y, al revés.
2. «Pendiente de la recta tangente a la curva de intersección con el plano $y = b$»: es $f_x(a, b)$. Con el plano $x = a$: es $f_y(a, b)$.
3. Si piden la recta tangente, su dirección es $(1, 0, f_x)$ en el primer caso y $(0, 1, f_y)$ en el segundo.

4.3.5 Derivadas parciales sucesivas y verificación de una ecuación

1. Calcula las primeras parciales y simplifica antes de volver a derivar.
2. Respeta el orden indicado: en $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}$ se deriva primero dos veces respecto a y y luego respecto a x. Por el teorema de las mixtas puedes elegir el orden más cómodo y decirlo.
3. Para «verificar que u satisface la ecuación» (Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$, calor $u_t = k\, u_{xx}$ u otra), calcula solo las derivadas que aparecen, sustitúyelas y agrupa términos semejantes hasta llegar a $0 = 0$.
4. Evalúa al final, si piden el valor en un punto.

4.3.6 Plano tangente y recta normal

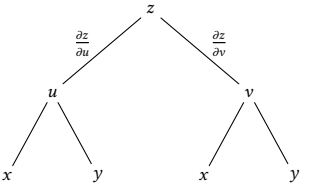
1. Si la superficie es $z = f(x, y)$ y te dan solo (x_0, y_0), calcula $z_0 = f(x_0, y_0)$. Si te dan P_0 completo, comprueba que está en la superficie.
2. Escribe la superficie como $F(x, y, z) = 0$: pasa todo a un lado (para $z = f$, $F = f(x, y) - z$).
3. Calcula $\nabla F(P_0) = (a, b, c)$. Puedes dividir entre un factor común.
4. Plano: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$; desarrolla y simplifica.
5. Recta normal: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$, o en paramétricas $(x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct)$ si alguna componente es cero.

4.3.7 Diferencial total y cambio aproximado

1. Escribe la fórmula de la magnitud (volumen, área, resistencia…) en función de sus variables.
2. Calcula $\mathrm{d}V = V_r\,\mathrm{d}r + V_h\,\mathrm{d}h$.
3. Evalúa las parciales en los valores *iniciales* y toma $\mathrm{d}r = r_{\text{final}} - r_{\text{inicial}}$ con su signo (negativo si la variable disminuye).
4. Da el resultado con unidades y di si es aumento o disminución.

4.3.8 Regla de la cadena y razones de cambio

1. Dibuja el árbol: la función arriba, las variables intermedias en medio y las independientes abajo.
2. Para $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, recorre cada camino de z a x; cada camino da un producto de derivadas y los caminos se suman.
3. Evalúa las variables intermedias en el punto antes de sustituir (por ejemplo, $u = e^{2x+y}$ en $(1,-1)$ vale e).
4. Razones de cambio relacionadas: escribe la fórmula ($V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$), deriva respecto a t con la regla de la cadena, sustituye los datos del instante y despeja la razón que falta. «Permanece constante» significa $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$.



4.3.9 Derivación implícita

1. Pasa todo a un lado: $F(x,y,z) = 0$.
2. Calcula F_x, F_y y F_z tratando a las tres variables como independientes.
3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$; evalúa en el punto, que debe cumplir la ecuación.

4.3.10 Gradiente y derivada direccional

1. Calcula ∇f y evalúalo en el punto.
2. Convierte la dirección en vector *unitario*: $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Si te dan dos puntos, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$; si te dan un ángulo, $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; si te dan una recta, usa su vector director.
3. $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, con unidades de f por unidad de longitud.
4. Dirección de máximo aumento: $\nabla f(P)$; de máximo descenso: $-\nabla f(P)$; máxima razón de cambio: $\|\nabla f(P)\|$.
5. Dirección en que f no cambia: $\nabla f \cdot \mathbf{u} = 0$. En el plano, si $\nabla f = (a,b)$, son $\pm(-b,a)$; con ángulo, $a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta = 0$.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Temperatura: razón de cambio y dirección de máximo aumento

Adaptado de: 1er extraordinario 2010-2, tipo A, problema 7.

La temperatura en el punto (x, y, z) es $T(x, y, z) = 2e^{-x^2-8y^2+9z^2}$, con T en grados Celsius y x, y, z en metros. Obtenga: a) la razón de cambio de la temperatura en el punto $(-1, 2, 2)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; b) la dirección en la que T aumenta más rápidamente en ese punto.

Resolución.

1. Gradiente (regla de la cadena con la exponencial):

$$\nabla T = 2e^{-x^2-8y^2+9z^2}(-2x,\ -16y,\ 18z).$$

2. En $(-1, 2, 2)$ el exponente vale $-1 - 32 + 36 = 3$:

$$\nabla T(-1, 2, 2) = 2e^3(2, -32, 36) = e^3(4, -64, 72).$$

3. Vector unitario: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$, así que $\mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
4. a) Derivada direccional:

$$D_{\mathbf{u}}T = e^3\,\frac{8 + 128 + 72}{3} = \frac{208}{3}e^3.$$

   La temperatura aumenta a razón de $\frac{208}{3}e^3$ °C/m (unos 1393 °C/m).
5. b) **La dirección de máximo aumento es la de** $\nabla T(-1, 2, 2) = e^3(4, -64, 72)$, es decir, la del vector $(1, -16, 18)$; como unitario, $\frac{1}{\sqrt{581}}(1, -16, 18)$. En esa dirección la razón de cambio es $\|\nabla T\| = 4\sqrt{581}\,e^3$ °C/m.

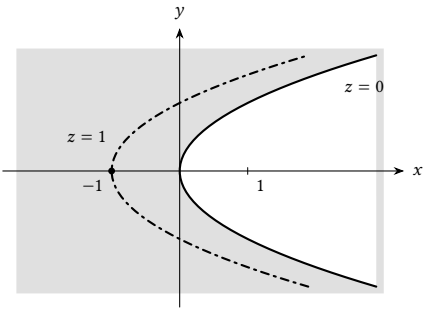
Ejemplo resuelto · Dominio y curvas de nivel

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 5.

Sea $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$. Represente gráficamente su dominio y obtenga las ecuaciones de sus curvas de nivel para $z = 0$ y $z = 1$.

Resolución.

1. Raíz cuadrada: $y^2 - x \geq 0$, es decir, $x \leq y^2$. $D_f = \{(x, y) \mid x \leq y^2\}$.
2. La frontera es la parábola $x = y^2$ (vértice en el origen, abre hacia la derecha) y pertenece al dominio ($\geq$): se traza continua. Con el punto $(-1, 0)$: $-1 \leq 0$ se cumple; la región es el exterior de la parábola, a su izquierda.
3. Recorrido (no se pide, pero confirma los niveles): la raíz toma todos los valores ≥ 0, así que $R_f = [0, \infty)$; los niveles $z = 0$ y $z = 1$ existen.
4. $z = 0$: $\sqrt{y^2 - x} = 0 \Rightarrow x = y^2$, la propia frontera.
5. $z = 1$: $y^2 - x = 1 \Rightarrow x = y^2 - 1$, la misma parábola recorrida una unidad a la izquierda (vértice $(-1, 0)$).
6. En general, el nivel $k \geq 0$ es $x = y^2 - k^2$: una familia de parábolas con el mismo eje.



4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Dominio, recorrido y región con logaritmo

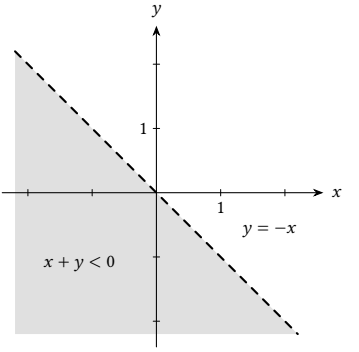
Adaptado de: 1er extraordinario 2012-1, problema 5.

Determine el dominio y el recorrido, y trace la región de definición de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\ln(1-x-y)}}.$$

Resolución.

1. Condiciones: logaritmo, $1-x-y>0$; raíz en el denominador, $\ln(1-x-y)>0$.
2. $\ln w > 0$ si y solo si $w > 1$: $1-x-y>1 \Rightarrow x+y<0$. Esta condición ya implica la primera.
3. $D_f = \{(x,y) \mid x+y<0\}$**:** el semiplano debajo de la recta $y=-x$, que no pertenece a la región (punteada). El origen no está: $0<0$ es falso.
4. Recorrido: en el dominio, $w = 1-x-y$ toma todos los valores de $(1,\infty)$; entonces $\ln w \in (0,\infty)$, $\sqrt{\ln w} \in (0,\infty)$ y su recíproco también. $R_f = \{z \mid z>0\}$**.**



Ejercicio 4.5.2 · Curvas de nivel y recorrido

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 5.

Trace las curvas de nivel de la función

$$z = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$$

para $z = 1$ y $z = 2$. Determine el recorrido de la función.

Resolución.

1. Dominio: $x^2 + 4y^2 > 0$, es decir, todo el plano salvo el origen.
2. Recorrido: $\sqrt{x^2 + 4y^2}$ toma todos los valores de $(0, \infty)$, así que z toma todos los de $(-\infty, 0)$. $R = \{z \mid z < 0\}$**.**
3. Como 1 y 2 no están en el recorrido, **las curvas de nivel** $z = 1$ **y** $z = 2$ **no existen** (ningún punto da un valor positivo).
4. Lo que sí existe son los niveles negativos. Con $z = k < 0$: $\sqrt{x^2 + 4y^2} = -\frac{2}{k} \Rightarrow x^2 + 4y^2 = \frac{4}{k^2}$, elipses centradas en el origen.
5. $z = -1$: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, elipse de semiejes 2 y 1. $z = -2$: $x^2 + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$, elipse de semiejes 1 y $\frac{1}{2}$.
6. **Resultado:** $R = (-\infty, 0)$**; los niveles** $z = 1$ **y** $z = 2$ **están vacíos; las curvas de nivel son elipses** $x^2 + 4y^2 = \frac{4}{k^2}$**, más pequeñas cuanto más negativo es** k**.**

Ejercicio 4.5.3 · Pendiente de la tangente a la curva de intersección

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 5.

Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ con el plano $y = 0$, en el punto $P(\sqrt{5}, 0)$.

Resolución.

1. El plano $y = 0$ deja fija a y: la pendiente es $f_x(\sqrt{5}, 0)$. La curva es la semicircunferencia $z = \sqrt{9 - x^2}$ y el punto de la superficie es $(\sqrt{5}, 0, 2)$.
2. Derivada parcial:
$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$
3. En el punto: $f_x(\sqrt{5}, 0) = \dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{9 - 5}}$.
4. $m = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$**.** La superficie baja al aumentar x, como se espera en la mitad derecha de una semiesfera.

Ejercicio 4.5.4 · Comprobar una ecuación con segundas derivadas

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 5.

Compruebe que se cumple

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

para $z = \operatorname{senh}(3x + y) - \cosh(x - 2y)$.

Resolución.

1. Primeras parciales ($(\operatorname{senh})' = \cosh$, $(\cosh)' = \operatorname{senh}$):

$$z_x = 3\cosh(3x + y) - \operatorname{senh}(x - 2y),$$
$$z_y = \cosh(3x + y) + 2\operatorname{senh}(x - 2y).$$

2. Segundas parciales:

$$z_{xx} = 9\operatorname{senh}(3x + y) - \cosh(x - 2y),$$
$$z_{xy} = 3\operatorname{senh}(3x + y) + 2\cosh(x - 2y),$$
$$z_{yy} = \operatorname{senh}(3x + y) - 4\cosh(x - 2y).$$

3. Sustitución, agrupando por función:

$$(18 - 15 - 3)\operatorname{senh}(3x + y)$$
$$+ (-2 - 10 + 12)\cosh(x - 2y) = 0.$$

4. **Ambos coeficientes valen cero: la igualdad se cumple para todo** (x, y)**.**

Ejercicio 4.5.5 · Plano tangente a un elipsoide

Adaptado de: 2° extraordinario 2016-2, problema 6.

Obtenga la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1$$

en el punto $A(0, 1, 1)$.

Resolución.

1. El punto está en la superficie: $0 + 0 + 1 = 1$.
2. $F(x, y, z) = x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 - 1$; $\nabla F = \left(2x,\ \frac{y-1}{2},\ 2z\right)$.
3. En A: $\nabla F(0, 1, 1) = (0, 0, 2)$.
4. Plano: $0(x - 0) + 0(y - 1) + 2(z - 1) = 0$.
5. $z = 1$**.** Es un plano horizontal: A es el punto más alto del elipsoide. La recta normal es la vertical $x = 0$, $y = 1$, $z = 1 + 2t$.

Ejercicio 4.5.6 · Diferencial total: contracción de un cilindro

Adaptado de: 1er extraordinario 2011-1, tipo A, problema 6.

Por efecto de la temperatura, un cilindro metálico se contrae: su radio pasa de 10 a 9.8 cm y su altura de 15 a 14.5 cm. Calcule, por medio de diferenciales, el cambio en el volumen del cilindro.

Resolución.

1. $V = \pi r^2 h$, así que

$$\mathrm{d}V = 2\pi r h\,\mathrm{d}r + \pi r^2\,\mathrm{d}h.$$

2. Valores iniciales $r = 10$, $h = 15$; cambios $\mathrm{d}r = -0.2 = -\frac{1}{5}$, $\mathrm{d}h = -0.5 = -\frac{1}{2}$.
3. Sustitución:
$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= 2\pi(10)(15)\left(-\tfrac{1}{5}\right) + \pi(100)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= -60\pi - 50\pi.\end{aligned}$$
4. $\mathrm{d}V = -110\pi$ **cm**^{3} (unos 346 cm^3): el volumen disminuye.
5. Comparación con el incremento exacto: $\Delta V = \pi(9.8)^2(14.5) - \pi(100)(15) = -\frac{5371}{50}\pi \approx -107.4\pi$. La diferencial se aleja menos del 3 %.

Ejercicio 4.5.7 · Regla de la cadena con dos variables intermedias

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.

Sean $z = u^2 - v$, $u = e^{2x+y}$ y $v = \operatorname{sen}(x+y)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en $(1,-1)$.

Resolución.

1. Árbol: z depende de u y v; cada una depende de x y y. $z_u = 2u$, $z_v = -1$.
2. Derivadas intermedias: $u_x = 2e^{2x+y}$, $u_y = e^{2x+y}$, $v_x = v_y = \cos(x+y)$.
3. En $(1,-1)$: $2x + y = 1$ y $x + y = 0$, así que $u = e$, $u_x = 2e$, $u_y = e$, $v_x = v_y = \cos 0 = 1$.
4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z_u\, u_x + z_v\, v_x = 2e(2e) + (-1)(1)$.
5. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = z_u\, u_y + z_v\, v_y = 2e(e) + (-1)(1)$.
6. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1)} = 4e^2 - 1$ **y** $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,-1)} = 2e^2 - 1$. Comprobación directa: $z = e^{4x+2y} - \operatorname{sen}(x+y)$ da $z_x = 4e^{4x+2y} - \cos(x+y)$, que en el punto vale $4e^2 - 1$.

Ejercicio 4.5.8 · Razón de cambio: cono de volumen constante

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 6.

La altura h de un cono circular recto crece a razón de 2 cm/min. Calcule la razón a la que debe cambiar su radio r para que el volumen del cono permanezca constante, en el instante en que la altura mide 3 cm y el radio 2 cm.

Resolución.

1. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Regla de la cadena respecto a t:
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\pi r h\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{3}\pi r^2\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$
2. Volumen constante: $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$. Datos: $r = 2$, $h = 3$, $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2$.
3. $0 = \frac{2}{3}\pi(2)(3)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{3}\pi(4)(2) \Rightarrow 4\pi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{8\pi}{3}$.
4. $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{3}$ **cm/min:** el radio debe disminuir $\frac{2}{3}$ cm por minuto.

Ejercicio 4.5.9 · Dirección de máximo aumento y máxima razón de cambio

Adaptado de: 1er extraordinario 2019-2, problema 6.

Para la función $f(x,y) = e^{2x}\operatorname{sen} y$: a) determine la dirección en la que aumenta más rápidamente en el punto $P\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; b) obtenga la máxima razón de cambio.

Resolución.

1. $\nabla f = \left(2e^{2x}\,\text{sen}\,y,\ e^{2x}\cos y\right)$.
2. En P: $e^0 = 1$ y $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, así que $\nabla f(P) = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. **a) La dirección de** $\nabla f(P) = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$, que es la del vector $(2, 1)$; como unitario, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
4. **b)** $\|\nabla f(P)\| = \sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, problema 5.

Sea $f(x, y) = xy\ln(xy)$. Calcule $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right|_{(e,e)}$.

Resultado: $f_{xy} = 2 + \ln(xy)$; en (e, e) vale 4.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 5.

Verifique que la función $u(x, y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$ satisface la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Resultado: $u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x = -u_{yy}$; la suma es cero.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 3er extraordinario 2020-1, problema 6.

Obtenga la ecuación cartesiana del plano tangente a la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ en el punto $P(2, 2)$.

Resultado: $2x + 2y + z = 9$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

Obtenga la ecuación de la recta normal a la superficie $2xy - z + z^4 = -4$ en el punto $A(1, -2, 1)$.

Resultado: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 5.

Sean $f(u,v) = u^2 - v$, $u = e^{2x-y}$ y $v = \ln(xy)$. Calcule $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}$.

Resultado: $-1 - 2e^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 6.

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$. Determine la dirección $\theta \in [\pi, 2\pi]$ en la que la función permanece constante a partir del punto $P(2,1)$.

Resultado: $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

4.7 Errores frecuentes

- **Olvidar una condición del dominio.** Una raíz en el denominador pide > 0, no ≥ 0; un logaritmo dentro de una raíz pide dos condiciones (argumento > 0 y logaritmo ≥ 0).
- **Trazar mal el borde.** Continuo si pertenece a la región ($\geq$, $\leq$), punteado si no ($>$, $<$, $\neq$). Prueba un punto para saber de qué lado sombrear.
- **Dar curvas de nivel fuera del recorrido.** Si f solo toma valores negativos, los niveles positivos no tienen curva. Calcula el recorrido antes.
- **Usar un vector que no es unitario.** En $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, divide primero entre $\|\mathbf{v}\|$; si no, el resultado sale multiplicado por esa norma.
- **Confundir dirección con razón de cambio.** La dirección de máximo aumento es el vector ∇f; la máxima razón de cambio es el número $\|\nabla f\|$.
- **Olvidar z_0 en el plano tangente.** Si dan $P(x_0, y_0)$ para $z = f(x,y)$, calcula $z_0 = f(x_0, y_0)$ antes de escribir el plano.
- **Perder un camino en la regla de la cadena.** Dibuja el árbol: cada camino de la función a la variable es un sumando.
- **Signo en las diferenciales.** Si la magnitud disminuye, dr y dh son negativos; evalúa las parciales en los valores iniciales.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Dominio: raíz par ≥ 0; logaritmo > 0; denominador $\neq 0$.
- Curva de nivel k: $f(x,y) = k$, con k en el recorrido.
- Límite doble: si por $y = mx$ depende de m, no existe.
- Plano tangente a $F(x,y,z) = 0$ en P_0, con $\nabla F(P_0) = (a,b,c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- Recta normal: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

- Plano tangente a $z = f(x, y)$:

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

- Mixtas continuas: $f_{xy} = f_{yx}$. Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- Diferencial total: $\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y \approx \Delta z$.
- Cadena: $z_x = z_u\,u_x + z_v\,v_x$; $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z_x\,x'(t) + z_y\,y'(t)$.
- Implícita: $z_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$.
- $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$; $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$ con $\|\mathbf{u}\| = 1$.
- Máximo aumento: dirección ∇f, razón $\|\nabla f\|$. Máximo descenso: $-\nabla f$. Sin cambio: $\mathbf{u} \perp \nabla f$.
- Volúmenes que salen: cilindro $V = \pi r^2 h$; cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Identifica el tipo con la tabla 4.2; los dos problemas de la unidad suelen ser de tipos distintos.
2. Dominio: escribe cada condición, resuélvela, dibuja con borde continuo o punteado y prueba un punto.
3. Curvas de nivel: primero el recorrido; después iguala a k y nombra la cónica.
4. Derivadas: simplifica cada parcial antes de volver a derivar y evalúa al final.
5. Plano tangente y direccional: evalúa ∇F o ∇f en el punto, normaliza el vector de dirección y escribe unidades si las hay.
6. Revisa que el punto esté en la superficie o en el dominio y que el resultado responda exactamente lo que se pregunta (dirección, razón, ecuación).

4.10 Puente a Cálculo Vectorial

Cálculo Vectorial, la materia siguiente, da por sabido lo que se practica en este libro. Antes de empezarla, conviene repasar:

- **Extremos de funciones de varias variables** (matriz hessiana, multiplicadores de Lagrange): derivadas parciales de primero y segundo orden, mixtas y gradiente (Unidad 4, secciones 4.3.4, 4.3.5 y 4.3.10).
- **Curvas y superficies** (vector normal, plano tangente, operadores diferenciales): plano tangente y recta normal, gradiente y regla de la cadena (Unidad 4, secciones 4.3.6, 4.3.8 y 4.3.10).
- **Integrales de línea:** sustitución, integración por partes y potencias trigonométricas como $\int \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t$ o $\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$ (Unidad 3, Parte A); parametrización de curvas y longitud de arco (Unidad 3, Parte B).
- **Integrales dobles** (y el teorema de Green): antiderivadas rápidas para las integrales iteradas, sustitución trigonométrica (Unidad 3, Parte A) y área en coordenadas polares (Unidad 3, Parte B), que anticipa el cambio a polares.
- **Integrales triples y de superficie:** integrales trigonométricas y de potencias (Unidad 3, Parte A); los volúmenes de revolución (Unidad 3, Parte B) sirven para comprobar resultados.

Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno analizará sucesiones y series para representar funciones por medio de series de potencias.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2016. En el Plan 2010 este tema no es de esta materia (se evalúa en Cálculo Diferencial); salta esta unidad. La sección de series de Maclaurin y Taylor cubre también el subtema 2.4 del Plan 2010 (desarrollo de ln y exp en series de potencias), que no ha salido en sus exámenes.
- **Frecuencia:** es el problema 1 en 59 de los 60 finales y extraordinarios del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1), con 61 problemas porque dos exámenes traen dos. Son 35 de sucesiones y series: intervalo de convergencia (19, casi siempre con el análisis de los extremos), carácter de una serie con un criterio (9: ocho del cociente y uno de Leibniz) y suma de una serie (7: geométricas, un decimal periódico y una diferencia de dos geométricas). Los otros 26 son series de Maclaurin (20) o de Taylor alrededor de otro punto (6); tres piden además el intervalo. Los siete primeros parciales de 2024-2 y 2025-1 son, completos, de esta unidad.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 5.1 y 5.3 (30 min) y memoriza el formulario de la sección 5.8: el examen no permite formulario.
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (12 min cada uno): el intervalo de convergencia primero, porque es el más frecuente.

5.1 Conceptos y expresiones

Sucesión. Una sucesión es una lista infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dada por un término general a_n. *Converge* a L si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (un número); si el límite no existe o es infinito, *diverge*. El límite se calcula como el de una función de x (con L'Hôpital si hace falta): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 7^0 = 1$. La sucesión es *monótona* si siempre crece ($a_{n+1} \geq a_n$) o siempre decrece ($a_{n+1} \leq a_n$), y *acotada* si $|a_n| \leq M$ para todo n. Toda sucesión monótona y acotada converge.

Serie. Una serie es la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ Su *suma parcial* es $S_n = a_1 + \cdots + a_n$; la serie converge a S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Hay que distinguir: la *sucesión* a_n puede converger (a cero) y la *serie* diverger, como en la armónica.

Criterio del término *n*-ésimo. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (o no existe), la serie diverge. Si el límite es cero, no se concluye nada.

Series de referencia.

Serie	Carácter
Geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$	converge si $\lvert r\rvert < 1$, con suma $\frac{a}{1-r}$ (a es el primer término); diverge si $\lvert r\rvert \geq 1$
Serie p: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	converge si $p > 1$; diverge si $p \leq 1$
Armónica $\sum \frac{1}{n}$ $(p = 1)$	diverge
Armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	converge (condicionalmente), con suma $\ln 2$
Telescópica $\sum(b_n - b_{n+1})$	$S_n = b_1 - b_{n+1}$; converge a $b_1 - \lim b_n$ si ese límite existe

Criterios para series de términos positivos.

- *Comparación directa:* si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge; si $a_n \geq b_n \geq 0$ y $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ diverge.
- *Comparación en el límite:* si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ con $0 < c < \infty$, las dos series tienen el mismo carácter. Se compara con una geométrica o una serie p que tenga las potencias dominantes: $\frac{n+1}{n^3+2}$ con $\frac{1}{n^2}$.
- *Cociente (D'Alembert):* con $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, la serie converge si $L < 1$, diverge si $L > 1$ y el criterio no decide si $L = 1$. Es el criterio de las series con factoriales y potencias c^n.

Series alternadas (Leibniz). Una serie $\sum(-1)^{n+1}b_n$ con $b_n > 0$ converge si b_n es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Si además $\sum |a_n|$ converge, la convergencia es *absoluta*; si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge, es *condicional*. Toda serie absolutamente convergente converge.

Serie de potencias. Es una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, con centro a. Converge en un intervalo centrado en a: solo en $x = a$, para todo x (radio $R = \infty$) o para $|x - a| < R$, y en los extremos $x = a \pm R$ puede converger o no; cada extremo se estudia aparte. Ese conjunto es el *intervalo de convergencia*.

Series de Taylor y de Maclaurin. Si f tiene derivadas de todos los órdenes en a, su serie de Taylor alrededor de a es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

es decir, $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$ La serie de Maclaurin es el caso $a = 0$. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias se puede derivar e integrar término a término (el radio no cambia), y en ella se puede sustituir x por $2x$, $-x$, x^2, etcétera.

5.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determine el carácter de la serie» o «si converge o diverge» con números (sin x)	Carácter de una serie (5.3.1)
«Empleando el criterio del cociente o de D'Alembert»	Carácter de una serie (5.3.1), con el cociente
«Si es convergente, calcule su suma»; una lista $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\ldots$; un decimal periódico	Suma de una serie (5.3.2)
«Empleando el criterio de Leibniz»; un factor $(-1)^n$	Serie alternada (5.3.3); revisa antes el término n-ésimo
«Intervalo de convergencia», con x en la serie; «incluir el análisis de los extremos»	Intervalo de convergencia (5.3.4)
«Serie de Maclaurin» o «de Taylor alrededor de a» de una función; «los primeros términos»; «el término enésimo»	Serie por derivadas (5.3.5)
La función es una conocida con $2x$, $-x$, x^2 o una constante, o una derivada o integral de una conocida	Serie a partir de una conocida (5.3.6)

5.3 Procedimientos

5.3.1 Carácter de una serie numérica

1. Calcula $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si no es cero (o no existe), **diverge** y terminaste.
2. ¿Es geométrica ($a_n = ar^{n-1}$) o serie p? Decide con la tabla de la sección 5.1.
3. ¿Hay factoriales o potencias c^n? Usa el cociente: simplifica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ antes de tomar el límite ($\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, $\frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$).
4. ¿Es un cociente de polinomios o de raíces? Compara en el límite con la serie p de las potencias dominantes.
5. ¿Hay $(-1)^n$? Usa Leibniz (5.3.3) y, si piden, revisa la convergencia absoluta.

5.3.2 Suma de una serie

1. Escribe los primeros términos y localiza el primer término a y la razón $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Cuidado con el índice: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$ empieza en $\frac{4}{9}$, no en 4.
2. Si $|r| < 1$, la suma es $\frac{a}{1-r}$; si $|r| \geq 1$, la serie diverge.
3. Si el término es una suma o diferencia de dos geométricas convergentes, suma cada una por separado.
4. Si es telescópica (fracciones parciales como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$), escribe S_n, cancela y toma el límite.
5. Un decimal periódico $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots$ es geométrica con $r = \frac{1}{10}$.

5.3.3 Serie alternada (criterio de Leibniz)

1. Escribe la serie como $\sum(-1)^{n+1}b_n$ con $b_n > 0$.
2. Calcula $\lim_{n\to\infty} b_n$. Si no es cero, la serie diverge por el término n-ésimo (no por Leibniz).
3. Comprueba que b_n decrece: $b_{n+1} \leq b_n$, o bien la derivada de $b(x)$ es negativa.

4. Con las dos condiciones, converge. Si piden el tipo, estudia $\sum b_n$: si converge, es absoluta; si no, condicional.

5.3.4 Intervalo de convergencia

1. Aplica el cociente con valor absoluto a toda la expresión, incluida la x:
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$
2. Resuelve $L(x) < 1$. Queda $|x - a| < R$, es decir, $a - R < x < a + R$. Si $L(x) = 0$ para todo x, el intervalo es $(-\infty, \infty)$ y no hay extremos.
3. Sustituye cada extremo en la serie **original**: obtienes dos series numéricas. Decide cada una con 5.3.1 (casi siempre serie p o Leibniz).
4. Escribe el intervalo con corchete en los extremos que convergen y paréntesis en los que divergen.

5.3.5 Serie de Maclaurin o Taylor por derivadas

1. Haz la tabla: f, f', f'', f''', $f^{(4)}$ y cada una evaluada en a (en Maclaurin, $a = 0$). Simplifica antes de derivar: $\ln \sqrt[3]{1+x} = \frac{1}{3}\ln(1+x)$.
2. Busca el patrón de $f^{(n)}(a)$: signo alternado $(-1)^{n+1}$, factorial $(n-1)!$, potencias 2^n, ceros en los pares o impares.
3. Escribe los términos $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ y el término general con su índice inicial.
4. Si piden el intervalo, aplica 5.3.4 al término general.

5.3.6 Serie a partir de una conocida

1. Reconoce la conocida: e^u, $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\operatorname{senh} u$, $\cosh u$, $\ln(1+u)$, $\frac{1}{1-u}$.
2. Sustituye u ($u = 2x$, $u = -x$, $u = x^2$, $u = 2(x-1)$) y simplifica cada término.
3. Si la función es una derivada o integral de una conocida, deriva o integra término a término: $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}$.
4. El intervalo es el de la conocida con u en lugar de x: $\frac{2}{1+x}$ converge si $|-x| < 1$. En los extremos revisa de nuevo, porque integrar puede ganar un extremo y derivar perderlo.

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Intervalo de convergencia con los dos extremos

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}.$$

Resolución.

1. Cociente con valor absoluto:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(2x-1)^n}\right| = |2x-1|\,\frac{n}{n+1}.$$

2. Límite: $L(x) = |2x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |2x-1|$.
3. Converge si $|2x-1| < 1$: $-1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$. Centro $\frac{1}{2}$, radio $\frac{1}{2}$.
4. Extremo $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$, la armónica (serie p con $p = 1$): diverge.
5. Extremo $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, alternada con $b_n = \frac{1}{n}$, que decrece y tiende a cero: converge por Leibniz (condicionalmente, porque $\sum \frac{1}{n}$ diverge).
6. **Intervalo de convergencia:** $0 \le x < 1$**, es decir,** $[0, 1)$**.**

Ejemplo resuelto · Serie de Maclaurin de $\ln(x+1)$

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo C, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \ln(x+1)$.

Resolución.

1. Tabla de derivadas, evaluadas en 0:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$(1+x)^{-1}$	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1
3	$2(1+x)^{-3}$	2
4	$-6(1+x)^{-4}$	-6

2. Patrón: $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ para $n \ge 1$. El coeficiente es

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

3. **Serie:**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

4. Intervalo (no lo pide el enunciado, pero sale en otros exámenes): el cociente da $L = |x|$; en $x = 1$ queda la armónica alternada (converge) y en $x = -1$, $-\sum \frac{1}{n}$ (diverge). Converge en $(-1, 1]$.
5. Comprobación: derivando término a término, $1 - x + x^2 - \cdots = \frac{1}{1+x}$, que es la derivada de $\ln(1+x)$.

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Intervalo con los dos extremos convergentes

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Obtenga el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^n\, n^2}$$

e incluya el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{4}.$$
2. $\frac{|x-4|}{4} < 1 \Rightarrow |x-4| < 4 \Rightarrow 0 < x < 8$. Centro 4, radio 4.
3. $x = 0$: $\frac{(-1)^n(-4)^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^{2n}4^n}{4^n n^2} = \frac{1}{n^2}$. Serie p con $p = 2 > 1$: converge.
4. $x = 8$: $\frac{(-1)^n 4^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$. La serie de sus valores absolutos es $\sum \frac{1}{n^2}$, que converge: converge absolutamente.
5. **Intervalo de convergencia:** $0 \le x \le 8$**, es decir,** $[0, 8]$**.**

Ejercicio 5.5.2 · Intervalo con exponente $n-1$

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\, x^{n-1}}{n}.$$

Resolución.

1. Cociente (las potencias de x bajan un grado: $\frac{x^n}{x^{n-1}} = x$):
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^{n+1}|x|^n}{n+1} \cdot \frac{n}{4^n|x|^{n-1}} = 4|x|\,\frac{n}{n+1} \to 4|x|.$$
2. $4|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$. Centro 0, radio $\frac{1}{4}$.
3. $x = \frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4}{n}$. La serie $4\sum \frac{1}{n}$ diverge (armónica).
4. $x = -\frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4(-1)^{n-1}}{n}$. Es 4 por la armónica alternada: converge (condicionalmente) por Leibniz.
5. **Intervalo de convergencia:** $-\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4}$**, es decir,** $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$**.**

Ejercicio 5.5.3 · Intervalo con factorial: radio infinito

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{n!}.$$

Resolución.

1. Cociente, con $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}|x+1|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n|x+1|^n} = \frac{3|x+1|}{n+1}.$$

2. Para cualquier x fijo, $\lim_{n\to\infty} \frac{3|x+1|}{n+1} = 0 < 1$: la serie converge para todo x. No hay extremos que analizar.
3. **Intervalo de convergencia:** $(-\infty, \infty)$**; radio** $R = \infty$**.**
4. Comprobación: con $u = 3(x+1)$ es la serie de e^u sin su primer término, así que suma $e^{3(x+1)} - 1$ para todo x.

Ejercicio 5.5.4 · Criterio del cociente con factorial

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 1.

Emplee el criterio del cociente o de D'Alembert para determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n-1)!}.$$

Resolución.

1. El término siguiente es $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{n!}$. Cociente, con $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{4^n} = \frac{4}{n}.$$

2. $L = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$.
3. **La serie converge.**
4. Comprobación: con $m = n-1$, $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^{m+1}}{m!} = 4e^4$, un número finito.

Ejercicio 5.5.5 · Suma de una diferencia de geométricas

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 1.

Determine el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k+1} - \frac{3}{7^{k+1}}\right].$$

Si no es posible, indique por qué es divergente.

Resolución.

1. Son dos geométricas. Como $e < \pi$, la razón $\frac{e}{\pi}$ es menor que 1; la otra razón es $\frac{1}{7}$. Las dos convergen, así que la suma se separa.
2. Primera: empieza en $k = 1$ con $a = \left(\frac{e}{\pi}\right)^2$ y $r = \frac{e}{\pi}$:

$$\frac{e^2/\pi^2}{1 - e/\pi} = \frac{e^2}{\pi(\pi - e)}.$$

3. Segunda: $a = \frac{3}{49}$, $r = \frac{1}{7}$:
$$\frac{3/49}{1 - 1/7} = \frac{3}{49} \cdot \frac{7}{6} = \frac{1}{14}.$$
4. **La serie converge y su suma es** $\dfrac{e^2}{\pi(\pi - e)} - \dfrac{1}{14}$ (≈ 5.485).

Ejercicio 5.5.6 · Maclaurin de senh $2x$ e intervalo

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.

Obtenga el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{senh} 2x$, determine su intervalo de convergencia y haga el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Derivadas: $f = \operatorname{senh} 2x$, $f' = 2\cosh 2x$, $f'' = 4\operatorname{senh} 2x$, $f''' = 8\cosh 2x$, y así sucesivamente. En $x = 0$: $0, 2, 0, 8, 0, 32, \ldots$ Las de orden par valen 0 y la de orden impar n vale 2^n.
2. Términos no nulos, con $n = 2k + 1$:
$$\operatorname{senh} 2x = 2x + \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \ldots$$
$$\operatorname{senh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Es la serie de $\operatorname{senh} u$ con $u = 2x$: $2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \ldots$
3. Cociente entre términos no nulos consecutivos:
$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{4x^2}{(2k+2)(2k+3)} \to 0.$$
4. El límite es $0 < 1$ para todo x: no hay extremos.
5. $\operatorname{senh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$**, convergente en** $(-\infty, \infty)$**.**

Ejercicio 5.5.7 · Taylor de e^{2x} alrededor de 1

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 1.

Obtenga la serie de Taylor de $f(x) = e^{2x}$ alrededor de $a = 1$.

Resolución.

1. Derivadas: $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, así que $f^{(n)}(1) = 2^n e^2$: $e^2, 2e^2, 4e^2, 8e^2, \ldots$
2. Coeficientes $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$: $e^2,\ 2e^2,\ \frac{4e^2}{2!} = 2e^2,\ \frac{8e^2}{3!} = \frac{4}{3}e^2$.
3. **Serie:**
$$e^{2x} = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^2(x-1)^3 + \ldots$$
$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$
4. Comprobación: $e^{2x} = e^2\, e^{2(x-1)}$, y con $u = 2(x-1)$ en $e^u = \sum \frac{u^n}{n!}$ sale la misma serie, válida para todo x.

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n(n+1)^2}.$$

Resultado: $[1, 7]$: converge en los dos extremos.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo C, problema 1.

Determine el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{7}}$$

empleando el criterio de Leibniz.

Resultado: Diverge: $b_n = 7^{-1/(n+1)} \to 1 \neq 0$, así que no se cumple Leibniz y falla el criterio del término n-ésimo.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 1.

Escriba el número decimal periódico infinito $0.7777\ldots$ como una serie y determine su carácter. Si es convergente, calcule su suma.

Resultado: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, geométrica convergente con suma $\frac{7}{9}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de $f(x) = \ln \sqrt[3]{1+x}$.

Resultado: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{3n} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{9} - \ldots$, en $(-1, 1]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de la función

$$g(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

Resultado: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \ldots$, para $|x| < 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

5.7 Errores frecuentes

- **Concluir convergencia porque $a_n \to 0$.** El término n-ésimo solo sirve para probar divergencia: $\frac{1}{n} \to 0$ y la armónica diverge.
- **Aplicar Leibniz sin revisar el límite.** Si b_n no tiende a cero, la serie diverge aunque alterne, como $\sum(-1)^{n+1}7^{-1/(n+1)}$.
- **Olvidar el análisis de los extremos.** El cociente da $L = 1$ en ellos y no decide; hay que sustituir cada extremo en la serie y estudiarla con otro criterio.
- **Sustituir el extremo mal.** Con $x = 0$ en $(-1)^n(x-4)^n$ queda $(-1)^n(-4)^n = 4^n$: los signos se cancelan. Escribe las potencias completas.
- **Equivocar el primer término de una geométrica.** En $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n+1}}$ el primer término es $\frac{4}{9}$; la suma es $\frac{a}{1-r} = \frac{4/9}{2/3} = \frac{2}{3}$, no $\frac{4}{1-1/3}$.
- **Perder el término constante o el índice.** En una serie de Maclaurin, el término $n = 0$ es $f(0)$; revisa que el índice inicial del término general reproduzca el primer término de la tabla.
- **Olvidar el $n!$ del denominador.** El coeficiente es $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$; sin el factorial, la serie de e^x se convierte en la de $\frac{1}{1-x}$.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.
- Cociente: $L = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Leibniz: $\sum(-1)^{n+1}b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; Maclaurin con $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.

- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, en $(-1, 1]$.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Si la serie no tiene x: término n-ésimo primero; después geométrica, serie p, cociente o Leibniz, según su forma.
2. Si tiene x: cociente con valor absoluto, despeja $|x - a| < R$ y sustituye cada extremo en la serie original.
3. Si piden Maclaurin o Taylor: busca primero una serie conocida con sustitución; si no la hay, haz la tabla de cuatro o cinco derivadas y busca el patrón.
4. Escribe el resultado completo: carácter con el criterio usado, suma exacta, intervalo con corchetes o paréntesis, término general con su índice.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Las fórmulas de todas las unidades, en el orden del cuaderno. El examen no permite formulario: este apéndice es para escribirlo de memoria y comprobar.

A.1 Unidad 1 · Integrales definida e indefinida

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

A.2 Unidad 2 · Logaritmo, exponencial, L'Hôpital e impropia

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^r = r\ln a$; $e^{\ln x} = x$; $\ln e^x = x$.
- $a^x = e^{x\ln a}$; $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $(e^u)' = e^u u'$; $(a^u)' = a^u \ln a\, u'$; $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$.
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\displaystyle\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C$; $\displaystyle\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
- $y = f^{\,g}$: $y' = f^{\,g}\big(g'\ln f + g\frac{f'}{f}\big)$.
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$; $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.
- $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u'$; $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- $\operatorname{ang\,senh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$; $\operatorname{ang\,cosh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)$; $\operatorname{ang\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim\frac{f}{g} = \lim\frac{f'}{g'}$.
- $y = f^{\,g}$: $\lim y = e^{\lim g\ln f}$; $\lim_{x\to\infty}\big(1 + \frac{a}{x}\big)^{bx} = e^{ab}$.
- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f$. $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, si $p < 1$.

A.3 Unidad 3A · Métodos de integración

- Partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$; elección de u con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,dx = x\operatorname{ang\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$; $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x|$.
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$; $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.
- $\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\big(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta$; $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec\theta$.
- $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a}$; $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a}$; $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\frac{u}{a}$.
- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$.
- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,dx}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,dx}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+q)$.

A.4 Unidad 3B · Aplicaciones

- Área en x: $A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,dx$, con f arriba.
- Área en y: $A = \int_c^d \big[x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}\big]\,dy$.
- Área en polares SOLO PLAN 2010 : $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$.
- Arco, cartesianas: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.
- Arco, paramétricas: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$.
- Arco, polares: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta$.
- Discos y arandelas: $V = \pi\int_a^b \big(R^2 - r^2\big)dx$ (o dy).
- Capas: $V = 2\pi\int_a^b \rho\, h\, dx$, con ρ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

A.5 Unidad 4 · Varias variables

- Dominio: raíz par ≥ 0; logaritmo > 0; denominador $\neq 0$.
- Curva de nivel k: $f(x,y) = k$, con k en el recorrido.
- Límite doble: si por $y = mx$ depende de m, no existe.
- Plano tangente a $F(x,y,z) = 0$ en P_0, con $\nabla F(P_0) = (a,b,c)$:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$$

- Recta normal: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$.
- Plano tangente a $z = f(x,y)$:

$$z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0).$$

- Mixtas continuas: $f_{xy} = f_{yx}$. Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- Diferencial total: $\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y \approx \Delta z$.
- Cadena: $z_x = z_u\,u_x + z_v\,v_x$; $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z_x\,x'(t) + z_y\,y'(t)$.
- Implícita: $z_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$.
- $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$; $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$ con $\|\mathbf{u}\| = 1$.
- Máximo aumento: dirección ∇f, razón $\|\nabla f\|$. Máximo descenso: $-\nabla f$. Sin cambio: $\mathbf{u} \perp \nabla f$.
- Volúmenes que salen: cilindro $V = \pi r^2 h$; cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

A.6 Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.
- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Leibniz: $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; Maclaurin con $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, en $(-1, 1]$.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 112 finales y extraordinarios publicados, en orden cronológico. Cada columna numerada es un problema del examen, con el tema en clave; la última columna dice en qué ejercicio del cuaderno se trabaja (problema: número del ejercicio). Las versiones del mismo examen suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta, la otra se practica con el mismo procedimiento.

Exámenes: 1F y 2F, primer y segundo final; 1E, 2E y 3E, primer, segundo y tercer extraordinario; la letra es el tipo.

Temas:

- Unidad 1: VM, valor medio y teorema del valor medio; Ri, sumas de Riemann; TFC, teorema fundamental; Par, integral con parámetro.
- Unidad 2: LH, regla de L'Hôpital; Imp, integral impropia; Der, derivada de logaritmos y exponenciales.
- Unidad 3: Int, integrales por método (Parte A); Área, Vol, Arc y ÁP, área, volumen, longitud de arco y área en polares (Parte B).
- Unidad 4: Dom, dominio y región; CN, curvas de nivel; Lím, límite doble; PS, derivadas parciales sucesivas; PT, plano tangente y recta normal; Dif, diferencial total; RC, regla de la cadena y razón de cambio; Impl, derivación implícita; Dir, gradiente y derivada direccional.
- Unidad 5: Ser, sucesiones y series; Mac, serie de Maclaurin o Taylor.

En la última columna, «ej. 1.4» es un ejemplo de la sección 1.4; los demás números son ejercicios resueltos (sección 5 de cada unidad) o propuestos (sección 6).

Plan 2010

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1F 2010-1 A	VM	Imp	Int	Dom	PS	Vol	Dir	
1F 2010-1 C	VM	Der	Int	Arc	Lím	PT		2: 2.5.1; 3: 3A.5.4
2F 2010-1 A	VM	LH	Int	Área	PS	Dir		
2E 2010-1 A	VM	Imp	Int	Arc	Dom	PT		2: 2.6.4; 3: 3A.6.1
1F 2010-2 A	Ri	Der	LH	Int	Arc	Dom	Dir	4: 3A.5.1
1F 2010-2 C	VM	Der	Imp	Int	Vol	PT	Dom	1: ej. 1.4; 2: 2.5.2
2F 2010-2 A	VM	LH	Int	Vol	Dom	Dir	RC	2: ej. 2.4
1E 2010-2 A	Ri	VM	LH	Int	Área	Dom	Dir	7: ej. 4.4
2E 2010-2 A	VM	LH	Int	Arc	Dif	PS	Dir	
1F 2011-1 A	VM	LH	Int	Vol	RC	PS		1: 1.5.1
1F 2011-1 C	Ri	LH	Int	Área	Dir	RC		1: ej. 1.4
2F 2011-1 A	VM	Imp	Int	Área	Dom	CN	Dir	3: 3A.5.5; 3: 3A.6.8
1E 2011-1 A	VM	Imp	Int	Arc	CN	Dif	Dir	6: 4.5.6
2E 2011-1	VM	Imp	LH	Int	Arc	Dir		3: 2.5.3; 4: 3A.5.8; 5: 3B.5.7
1F 2011-2 A	Ri	LH	Int	Área	PT	PS	Dom	
1F 2011-2 C	VM	LH	Int	Vol	Dom	PT	PS	2: ej. 2.4
1F 2011-2 D	VM	LH	Int	Vol	Dom	PT	PS	
2F 2011-2 A	Par	Imp	Int	Vol	Arc	RC	Dir	3: ej. 3A.4
1E 2011-2	Ri	Imp	Int	Área	Impl	Dir		1: 1.5.2
2E 2011-2	VM	LH	Int	Área	PT	PS		2: 2.6.3
3E 2011-2	VM	LH	Int	Vol	Arc	RC	Dir	4: ej. 3B.4; 5: 3B.6.4

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1F 2012-1 A	VM	Imp	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2012-1 C	TFC	LH	Int	Vol	RC	PS		
1E 2012-1	Ri	LH	Int	Área	Dom	PS	Dif	5: 4.5.1
1F 2012-2 A	VM	Der	Int	Arc	Dir	RC		
1F 2012-2 C	VM	Imp	Int	Vol	Dom	PT		
2E 2012-2	VM	Imp	Int	Arc	PS	Dir		1: 1.6.5; 3: 3A.6.5
1F 2013-1 A	VM	LH	Int	Área	PT	RC		4: 3B.5.8
1F 2013-1 C	TFC	Imp	Int	Vol	Dir	Dom		4: 3B.5.4
1F 2013-2 A	VM	LH	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2014-1 A	VM	Der	Int	Arc	RC	PT		
1F 2014-2 A	VM	LH	Int	Vol	PT	RC		
1F 2015-1 C	Ri	Imp	Int	Área	Dir	PS		
2F 2015-1 A	VM	Imp	Int	Área	Dir	PT		
1E 2015-1	VM	LH	Int	Área	RC	Impl		3: 3A.5.9; 3: 3A.6.2
2E 2015-1	TFC	Imp	Int	Área	Dom	PT		1: 1.5.3; 2: 2.5.6; 4: 3B.5.1
3E 2015-1	VM	Imp	Int	Área	Dir	PT		4: 3B.6.5
1F 2015-2 A	VM	LH	Int	Vol	PS	PT		
1F 2015-2 C	TFC	Imp	Int	Arc	PT	RC		
2F 2015-2 B	VM	Imp	Int	Área	Dom	Dir		1: 1.5.4; 2: ej. 2.4; 3: 3A.6.3; 5: ej. 4.4
1E 2015-2	VM	LH	Int	Área	PS	Dir		1: 1.6.4; 5: 4.5.4; 6: 4.6.6
2E 2015-2	VM	LH	Int	Área	Dom	Dir		
3E 2015-2	VM	Imp	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2016-1 A	VM	LH	Int	Área	CN	PT		2: 2.5.4; 4: ej. 3B.4; 6: 4.6.4
1F 2016-1 C	VM	Imp	Int	Arc	Dom	PT		
2F 2016-1 A	VM	Der	Int	Vol	RC	Dir		2: 2.6.5; 4: 3B.6.2; 5: 4.5.7
1E 2016-1	VM	LH	Int	Vol	RC	Dir		
2E 2016-1	VM	Imp	Int	Área	Dom	PS		
3E 2016-1	VM	LH	Int	Vol	PS	Dir		
1E 2016-2	VM	LH	Int	Área	Dom	PS		2: 2.6.6
2E 2016-2	VM	LH	Int	Área	PS	PT		6: 4.5.5
3E 2016-2	VM	LH	Int	Área	PS	Dir		

Plan 2016

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1F 2016-2 A	Ser	Imp	Int	Área	PS	Dir		
1F 2016-2 C	Mac	LH	Int	Vol	RC	PT		1: ej. 5.4
2F 2016-2	Ser	VM	Int	Área	PS	Dir		1: ej. 5.4; 4: 3B.6.1; 5: 4.6.2
1F 2017-1 A	Ser	LH	Int	Vol	Dom	Dir		1: 5.5.4
1F 2017-1 C	Ser	LH	Int	Vol	Dom	Dir		4: 3B.5.5
2F 2017-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	Dir		2: 2.6.2
1E 2017-1	Mac	VM	Int	Área	PT	Dir		
2E 2017-1	Ser	LH	Int	Vol	Dom	Dir		
3E 2017-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2017-2 A	Mac	VM	Int	Int	Int	Vol	Dir	1: 5.6.5
1F 2017-2 C	Ser	VM	Int	Arc	PT	Dom		
2F 2017-2	Ser	VM	Int	Área	PT	RC		1: 5.6.1; 2: 1.5.6
1E 2017-2	Ser	LH	Int	Arc	PS	PT		1: 5.6.3; 4: 3B.6.6
3E 2017-2	Ser	VM	Int	Área	PT	RC		
1F 2018-1 A	Ser	Par	Int	Área	Dom	RC		5: 4.5.2; 6: 4.5.8
1F 2018-1 C	Mac	LH	Int	Vol	Dom	PS		3: 3A.5.3; 4: 3B.5.3
2F 2018-1	Mac	Par	Int	Arc	Dom	PT		1: 5.6.4; 3: 3A.5.6
1E 2018-1	Ser	VM	Imp	Int	Arc	Dir		
2E 2018-1	Ser	VM	Int	Área	PS	Dir		5: 4.6.1
3E 2018-1	Mac	Par	Int	Arc	Dom	PT		
1F 2018-2 A	Ser	Imp	Int	Área	Dom	Dir		3: 3A.6.7
1F 2018-2 C	Mac	LH	Int	Área	Dom	PS		2: 2.5.5
2F 2018-2	Ser	VM	Int	Área	PT	Dom		4: 3B.5.2; 5: 4.5.3
1E 2018-2	Ser	VM	Área	Int	Dom	PS		
2E 2018-2	Ser	VM	Int	Área	PS	Dir		
3E 2018-2	Ser	VM	Int	Área	PT	Dom		
1F 2019-1 A	Ser	Imp	Int	Área	Dom	Dir		2: 2.5.8
1F 2019-1 C	Ser	LH	Int	Área	Dom	PS		1: 5.6.2
2F 2019-1	Mac	VM	Int	Vol	Dom	PT		

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1E 2019-1	Ser	VM	Int	Área	Dom	Dir		
2E 2019-1	Ser	VM	Int	Vol	Dom	PS		3: 3A.5.2; 3: 3A.6.6
3E 2019-1	Mac	VM	Int	Vol	Dom	PT		
1F 2019-2 A	Ser	VM	Int	Área	Dom	RC		
1F 2019-2 C	Ser	TFC	Int	Área	CN	Dir		
2F 2019-2	Mac	Imp	Int	Arc	RC	PT		1: 5.5.7; 3: 3A.5.10; 4: 3B.5.6; 5: 4.6.5
1E 2019-2	Mac	VM	Int	Área	Dom	Dir		3: 3A.5.7; 6: 4.5.9
2E 2019-2	Mac	VM	Int	Área	PS	Dir		
3E 2019-2	Mac	Imp	Int	Arc	RC	PT		
1F 2020-1 A	Ser	Imp	Int	Área	Dom	Dir		1: 5.5.1; 2: 2.5.7
1F 2020-1 C	Ser	Par	Int	Área	Dir	RC		2: 1.6.3
2F 2020-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	PT		2: 2.6.1; 3: 3A.6.4
1E 2020-1	Mac	LH	Int	Vol	Dom	PS		4: 3B.6.3
2E 2020-1	Ser	Ri	Int	Área	RC			2: 1.6.1
3E 2020-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	PT		6: 4.6.3
1F 2024-1 A	Ser	Mac	LH	Int	Vol	Dir	PS	1: 5.5.2
2F 2024-1	Ser	VM	Int	Arc	PS	Dir		
1E 2024-1	Mac	LH	Int	Área	PT	Dif		
1F 2024-2	Mac	Imp	Int	Área	Dom	Dir		1: 5.5.6
2F 2024-2	Mac	Par	Int	Área	RC	Dir		2: 1.5.5
1E 2024-2	Ser	LH	Int	Área	PT	Dir		1: 5.5.5
2E 2024-2	VM	LH	Int	Área	Dom	RC		
3E 2024-2	Mac	Par	Int	Área	RC	Dir		
1F 2025-1 A	Ser	Mac	TFC	Int	Área	PT		1: 5.5.3; 3: 1.6.2
3E 2025-1	Ser	VM						
1F 2025-2 A	Mac	Int	Imp	Int	PT	Dir		
2F 2025-2 A	Mac	VM	Imp	Int	PS	Dir		
1F 2026-1 A	Mac	Imp	Int	Área	PT	Dir		
2F 2026-1 A	Mac	VM	Imp	Int	PS	Dir		
2E 2026-1 A	Mac	Imp	Int	Área	Dir			
3E 2026-1	Mac	VM	Imp	Int	PS	Dir		

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del examen de tu plan: seis problemas, el tercero con tres integrales. Resuélvelo en **2 horas**, sin calculadora, sin formulario y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

Problema	Plan 2010, I	Plan 2010, II	Plan 2016, I	Plan 2016, II
1	1.6.4	1.6.5	5.6.1	5.6.4
2	2.6.3	2.6.5	1.6.3	2.6.1
3	3A.6.1, 3A.6.3, 3A.6.5	3A.6.2, 3A.6.6, 3A.6.8	3A.6.4, 3A.6.6, 3A.6.7	3A.6.2, 3A.6.4, 3A.6.8
4	3B.6.2	3B.6.5	3B.6.1	3B.6.3
5	4.6.4	4.6.2	4.6.1	4.6.5
6	4.6.6	4.6.5	4.6.3	4.6.6

Los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). Con calificación de 60 o más en dos simulacros seguidos, estás listo para el examen; si un problema falla, vuelve a la unidad y resuelve otra vez sus ejercicios de la sección 5.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Todas las resoluciones de este cuaderno son propias. Muchos exámenes de la asignatura traen una resolución publicada; para cada problema usado en el cuaderno que la tiene, se comparó con la resolución propia, verificada con álgebra computacional. Aquí se registran las diferencias: resultados distintos, pasos que cambian el resultado y enunciados con datos incompatibles. No se registran las formas equivalentes de un mismo resultado (otra constante de integración, otra forma algebraica).

C.1 · Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia

2º final 2010-2, tipo A, problema 2: En la resolución publicada, al aplicar la regla de L'Hôpital a $\ln\cosh x / \operatorname{senh} x$ se escribe la derivada del denominador como $\operatorname{senh} x$ (es $\cosh x$); con eso se obtiene $\lim \ln y = 1$ y el resultado e. El límite verificado de $\ln y$ es 0 y el valor verificado del límite es 1.

C.3A · Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a): En la resolución publicada se integra $e^x \operatorname{sen} x$ en lugar de $e^{2x} \operatorname{sen} x$ y aparece $-\frac{e^x}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x) + C$; para el integrando del enunciado, el valor verificado es $\frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$.

2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada se toma $v = x^2$ para $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ y aparece $x^2 \operatorname{ang\,sec} x - \sqrt{x^2-1} + C$, el doble del resultado; con $v = \frac{x^2}{2}$, el valor verificado es $\frac{x^2}{2} \operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada, con las constantes correctas $A = 1$, $B = -1$, $D = 1$, el resultado aparece como $\ln(x-1) + \ln(x-2) + \frac{1}{x-2} + C$; el valor verificado es $\ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a): En la resolución publicada el resultado aparece como $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$; el segundo término verificado es $-\frac{1}{2}x^2 \ln x$.

C.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución

2º extraordinario 2015-1, problema 4: En la resolución publicada la curva de la derecha aparece como $x = y^2 - 2y$ en lugar de $x = 2y - y^2$, y el integrando queda $(y^2 - 2y) - (y^2 -$

$4y) = 2y$; el área coincide por casualidad, $9\,[u^2]$, pero el integrando verificado es $6y - 2y^2$. La ecuación de los cortes aparece como $2y^2 - 6 = 0$; la verificada es $2y^2 - 6y = 0$.

C.4 · Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional

1er extraordinario 2010-2, tipo A, problema 7: La resolución publicada del problema 7 corresponde a otro enunciado (el plano tangente a la superficie $z - x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 0$) y no da la razón de cambio ni la dirección pedidas. Los valores verificados son $D_{\mathbf{u}}T = \frac{208}{3}e^3$ °C/m y la dirección de $\nabla T(-1, 2, 2) = e^3\langle 4, -64, 72\rangle$.

1er final 2018-1, tipo A, problema 5: El enunciado pide las curvas de nivel $z = 1$ y $z = 2$, pero la función solo toma valores negativos y esos niveles no tienen ningún punto. En la resolución publicada aparecen las elipses $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y $x^2 + \frac{y^2}{1/4} = 1$ para $z = 1$ y $z = 2$; son las curvas de nivel $z = -1$ y $z = -2$.

C.5 · Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

2º final 2018-1, problema 1: En la resolución publicada la derivada de orden n aparece como $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{3}\frac{(-1)^n}{(1+x)^n}$; el signo verificado es $(-1)^{n+1}$ (por ejemplo, $f'(0) = \frac{1}{3} > 0$). La serie final publicada sí es la correcta.

1er final 2017-2, tipo A, problema 1: En la resolución publicada el resultado enmarcado es $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, que omite el término constante $\frac{1}{2}$; el resultado verificado empieza en $n = 0$: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, como en el renglón anterior de la misma resolución.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de la asignatura

- Programa de estudio de *Cálculo Integral* del Plan 2010 (segundo semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Cuatro temas: las integrales definida e indefinida; funciones logaritmo y exponencial; métodos de integración; derivación y diferenciación de funciones escalares de dos o más variables.
- Programa de estudio de *Cálculo Integral* del Plan 2016 (segundo semestre, 8 créditos, 64 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Cuatro temas: sucesiones y series; las integrales definida e indefinida; métodos de integración; derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Exámenes finales colegiados y extraordinarios de la asignatura: 52 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2016-2) y 60 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), con sus versiones (tipos A, C, D) entre paréntesis. Para la Unidad 5 se usaron también los exámenes parciales del Plan 2016 (2024-2 a 2026-2). En cada ejercicio de este cuaderno se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2011-2, tipo A, problema 3». Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias; las resoluciones publicadas solo se usaron para cotejar (Apéndice C).

Plan 2010.

- Primer final (23): 2010-1 (A, C), 2010-2 (A, C), 2011-1 (A, C), 2011-2 (A, C, D), 2012-1 (A, C), 2012-2 (A, C), 2013-1 (A, C), 2013-2, 2014-1, 2014-2, 2015-1, 2015-2 (A, C), 2016-1 (A, C).
- Segundo final (7): 2010-1, 2010-2, 2011-1, 2011-2, 2015-1, 2015-2, 2016-1.
- Primer extraordinario (8): 2010-2, 2011-1, 2011-2, 2012-1, 2015-1, 2015-2, 2016-1, 2016-2.
- Segundo extraordinario (9): 2010-1, 2010-2, 2011-1, 2011-2, 2012-2, 2015-1, 2015-2, 2016-1, 2016-2.
- Tercer extraordinario (5): 2011-2, 2015-1, 2015-2, 2016-1, 2016-2.

Plan 2016.

- Primer final (21): 2016-2 (A, C), 2017-1 (A, C), 2017-2 (A, C), 2018-1 (A, C), 2018-2 (A, C), 2019-1 (A, C), 2019-2 (A, C), 2020-1 (A, C), 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2, 2026-1.
- Segundo final (12): 2016-2, 2017-1, 2017-2, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-1, 2024-2, 2025-2, 2026-1.
- Primer extraordinario (9): 2017-1, 2017-2, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-1, 2024-2.
- Segundo extraordinario (8): 2017-1, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-2, 2026-1.

- Tercer extraordinario (10): 2017-1, 2017-2, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-2, 2025-1, 2026-1.

Duración: dos horas (dos horas y media en algunos exámenes de 2010 y 2011). Desde 2024 las instrucciones prohíben cualquier dispositivo electrónico y el formulario.

Bibliografía de los programas

Plan 2010. Básica

- Larson, R. E., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. *Cálculo I* y *Cálculo II*, 8.ª ed. México: McGraw-Hill, 2006.
- Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. E. *Cálculo*, 9.ª ed. México: Pearson Educación, 2007.
- Stewart, J. *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.
- Stewart, J. *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.

Plan 2010. Complementaria

- Andrade D., A. y otros. *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- García y Colomé, P. *Integrales impropias*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002.
- García y Colomé, P. *Funciones hiperbólicas*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002.
- Spiegel, M. R. *Cálculo superior*. México: McGraw-Hill, 2001.
- Swokowski, E. W., Olinick, M. y Pence, D. *Calculus*. EUA: PWS Publishing Company, 1994.
- Thomas, G. y Finney, R. *Cálculo una variable*, 10.ª ed. México: Pearson Educación, 2005.
- Thomas, G. y Finney, R. *Cálculo varias variables*, 10.ª ed. México: Pearson Educación, 2005.

Plan 2016. Básica (además de Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, y los dos de Stewart, 2008)

- Larson, R. y Edwards, B. *Cálculo 1* y *Cálculo 2*, 9.ª ed. México: McGraw-Hill, 2010.

Plan 2016. Complementaria (además de los dos de García y Colomé, 2002; Spiegel, 2001; y los dos de Thomas y Finney, 2005)

- Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. *Calculus with Analytic Geometry*, 8.ª ed. Boston: Houghton Mifflin, 2006.
- Rogawski, J. *Cálculo. Una variable*, 2.ª ed. Barcelona: Reverté, 2012.
- Rogawski, J. *Cálculo. Varias variables*, 2.ª ed. Barcelona: Reverté, 2012.
- Zill, D. G. y Wright, W. S. *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 4.ª ed. México: McGraw-Hill, 2011.
- Zill, D. G. y Wright, W. S. *Cálculo de varias variables*, 4.ª ed. México: McGraw-Hill, 2011.

La notación de este cuaderno (ang sen x, ang tan x y ang sec x para las trigonométricas inversas; senh x y cosh x; «ordenada media»; $[u^2]$ y $[u^3]$ para las unidades de área y volumen) es la de los enunciados de los exámenes.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1 · Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental

Ejercicio 1.6.1 ← volver

1. $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$, $f(x_i) = 2 + \frac{2i}{n}$.
2. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\, n + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 4 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

3. $\lim_{n\to\infty} S_n = 4 + 2 = 6$.
4. Comprobación: $\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^3 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$.
5. $\int_1^3 (x+1)\,\mathrm{d}x = 6$**.**

Ejercicio 1.6.2 ← volver

1. $f(t) = \cos t$; límite superior $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$; límite inferior $h(x) = x$, $h'(x) = 1$.
2. TFC: $F'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x - \cos x \cdot 1$.
3. Comprobación: $F(x) = \operatorname{sen} t\big|_x^{x^2} = \operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen} x$, cuya derivada es $2x\cos(x^2) - \cos x$.
4. $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$**.**

Ejercicio 1.6.3 ← volver

1. Con $u = 1 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-2\sqrt{1-x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. $\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^b = 2 - 2\sqrt{1-b}$.
3. $2 - 2\sqrt{1-b} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$.
4. $b = \frac{3}{4} < 1$: el integrando es continuo en $[0, \frac{3}{4}]$.
5. $b = \frac{3}{4}$**.**

Ejercicio 1.6.4 ← volver

1. Con $u = \operatorname{sen} x$, $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$: $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{\operatorname{sen} x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$.
2. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{\operatorname{sen}(\pi/2)} - e^{\operatorname{sen} 0} = e - 1$.
3. $\bar{f} = \frac{e-1}{\pi/2} = \frac{2(e-1)}{\pi}$**.**

Ejercicio 1.6.5 ← volver

1. En $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \geq 0$, así que $|\tan x| = \tan x$.
2. Con $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$$

   Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
3. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.
4. **a)** $\bar{f} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln 2}{\pi/4} = \dfrac{2\ln 2}{\pi}$.
5. **b)** $\tan c = \frac{2\ln 2}{\pi} \Rightarrow c = \operatorname{ang}\tan\frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$, que está en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \approx [0,\ 0.785]$.

E.2 · Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. Base $\to 1$, exponente $\csc x \to \infty$: forma 1^∞.
2. $\ln y = \csc x\,\ln(x + \cos x) = \dfrac{\ln(x+\cos x)}{\operatorname{sen} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\operatorname{sen} x}{(x+\cos x)\cos x} = 1.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\cos x)^{\csc x} = e^1 = e$**.**

Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. Forma $\infty - \infty$. Común denominador: $\dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: $\dfrac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x}$, otra vez $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: $\dfrac{-e^x}{2e^x + xe^x} \to \dfrac{-1}{2}$.
4. **El límite vale** $-\frac{1}{2}$**.**

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. Forma $\infty \cdot 0$. Como cociente: $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{4x}}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$; denominador $-\frac{1}{4x^2}$.
3. Cociente: $2\cos\left(\frac{1}{2x}\right) \to 2\cos 0$.
4. **El límite vale** 2**.**

Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. En $x = 5$ el denominador se anula y $\ln(x-5) \to -\infty$: $\displaystyle\int_5^6 = \lim_{t\to 5^+} \int_t^6$.
2. Con $u = \ln(x-5)$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x-5}$:

$$\int \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln^2(x-5) + C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{1}{4}\ln^2(x-5)\right]' = \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}$.
3. Evaluación: $\lim_{t\to 5^+}\left[\frac{1}{4}\ln^2 1 - \frac{1}{4}\ln^2(t-5)\right] = 0 - \infty$.
4. **La integral diverge.**

Ejercicio 2.6.5 ← volver

1. Cambio de base y propiedades: $y = \dfrac{\ln e^{\operatorname{sen} x} - \ln 2}{\ln 2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln 2} - 1$.
2. Derivada: $y' = \dfrac{\cos x}{\ln 2}$ (la constante -1 no cuenta).
3. **En $x = 0$: $y' = \dfrac{1}{\ln 2}$.**

Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. Base $\to 1$, exponente $\coth x \to \infty$: forma 1^∞.
2. $\ln y = \coth x\, \ln(1 - \operatorname{senh} x) = \dfrac{\ln(1-\operatorname{senh} x)}{\tanh x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cosh x/(1-\operatorname{senh} x)}{\operatorname{sech}^2 x} = -1.$$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1-\operatorname{senh} x)^{\coth x} = e^{-1}$.

E.3A · Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

Ejercicio 3A.6.1 ← volver

1. Partes con $u = \operatorname{sen}(\ln x)$, $\mathrm{d}u = \frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$:

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

2. Otra vez partes, con $u = \cos(\ln x)$, $v = x$:

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I$$

3. Integral cíclica: $I = x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$, de donde $2I = x\left[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right]$.
4. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$**.** Comprobación:

$$\tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)\right] = \operatorname{sen}(\ln x)$$

Ejercicio 3A.6.2 ← volver

1. Partes con $u = (\ln x)^2$, $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$I = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x\,\mathrm{d}x$$

2. Partes otra vez, con $u = \ln x$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

3. $\int x(\ln x)^2\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$. Comprobación: $x(\ln x)^2 + x\ln x - x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x(\ln x)^2$.

Ejercicio 3A.6.3 ← volver

1. Se desarrolla el cuadrado y se usa $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$(\tan x - \sec x)^2 = 2\sec^2 x - 1 - 2\sec x \tan x$$

2. Las tres son inmediatas: $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x$, $\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x$.
3. $\int(\tan x - \sec x)^2\mathrm{d}x = 2\tan x - 2\sec x - x + C$. Comprobación: $2\sec^2 x - 2\sec x\tan x - 1 = \tan^2 x - 2\sec x\tan x + \sec^2 x$.

Ejercicio 3A.6.4 ← volver

1. $\frac{1}{\sec(x^2)} = \cos(x^2)$. Con $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$:

$$I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 u \cos u\,\mathrm{d}u$$

2. Potencia impar del coseno (exponente 1): $w = \operatorname{sen} u$, $\mathrm{d}w = \cos u\,\mathrm{d}u$; $\frac{1}{2}\int w^2\mathrm{d}w = \frac{1}{6}w^3$.
3. $\int \frac{x\operatorname{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(x^2) + C$. Comprobación: $\frac{1}{6}\cdot 3\operatorname{sen}^2(x^2)\cos(x^2)\cdot 2x = x\operatorname{sen}^2(x^2)\cos(x^2)$.

Ejercicio 3A.6.5 ← volver

1. El cuadrado ya está completo: $u = x + 3$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, y queda $\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+9)^{3/2}}$.
2. Raíz de $u^2 + a^2$ con $a = 3$: $u = 3\tan\theta$, $\mathrm{d}u = 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{u^2+9} = 3\sec\theta$.

$$I = \int \frac{3\sec^2\theta}{27\sec^3\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta + C$$

3. Triángulo: opuesto u, adyacente 3, hipotenusa $\sqrt{u^2+9}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+9}}$.
4. $I = \frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$. Comprobación (en u): $\frac{1}{9}\cdot\frac{(u^2+9)-u^2}{(u^2+9)^{3/2}} = \frac{1}{(u^2+9)^{3/2}}$.

Ejercicio 3A.6.6 ← volver

1. $u = e^x$, $\mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x$: $I = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(u-1)}$, racional.
2. $\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$, es decir, $1 = A(u^2+1) + (Bu+C)(u-1)$.
3. Con $u = 1$: $A = \frac{1}{2}$. Coeficiente de u^2: $A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Término independiente: $A - C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.
4. Integrando: $\frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln(u^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} u$.
5. $I = \frac{1}{2}\ln|e^x - 1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} e^x + C$. Comprobación (en u):

$$\frac{1}{2(u-1)} - \frac{u+1}{2(u^2+1)} = \frac{(u^2+1)-(u^2-1)}{2(u-1)(u^2+1)} = \frac{1}{(u-1)(u^2+1)}$$

Ejercicio 3A.6.7 ← volver

1. Raíz de $x^2 + a^2$ con $a = 2$: $x = 2\tan\theta$, $\mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{x^2+4} = 2\sec\theta$.
2. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C \end{aligned}$$

3. Triángulo: opuesto x, adyacente 2, hipotenusa $\sqrt{x^2+4}$; $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$. Comprobación:

$$-\frac{1}{4x^2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

Ejercicio 3A.6.8 ← volver

1. Se cambia toda la raíz: $u = \sqrt{e^{2x}-1}$, $u^2 = e^{2x} - 1$, $2u\,\mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x$, así que $\mathrm{d}x = \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1}$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \operatorname{ang\,tan} u + C$$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1} + C$. Comprobación: $\frac{1}{1+(e^{2x}-1)} \cdot \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

E.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución

Ejercicio 3B.6.1 ← volver

1. Cortes: $4x^3 = 8x^2 \Rightarrow 4x^2(x-2) = 0$, así que $x = 0$ (raíz doble: las curvas se tocan) y $x = 2$.
2. En $x = 1$: $8x^2 = 8 > 4 = 4x^3$; arriba está la parábola.

3. $A = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\mathrm{d}x = \left(\frac{8}{3}x^3 - x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{64}{3} - 16.$
4. $A = \frac{16}{3}\,[u^2]$.

Ejercicio 3B.6.2 ← volver

1. Región: entre el eje y y la curva $x = y^3$, para $0 \le y \le 1$. Toca el eje de giro.
2. Discos horizontales de radio $R = y^3$: $V = \pi \int_0^1 y^6 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{7}$.
3. Comprobación con capas: $2\pi \int_0^1 x\left(1 - x^{1/3}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.
4. $V = \frac{\pi}{7}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.3 ← volver

1. El sólido es como un tronco de cono curvo: radio 1 en $x = 0$ y $\frac{1}{2}$ en $x = \ln 2$. Discos verticales de radio $R = e^{-x}$.
2. $V = \pi \int_0^{\ln 2} e^{-2x}\mathrm{d}x = \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$.
3. $V = \frac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.4 ← volver

1. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 6\theta$; $r^2 + (r')^2 = 9\theta^4 + 36\theta^2 = 9\theta^2(\theta^2 + 4)$.
2. Con $\theta \ge 0$, la raíz es $3\theta\sqrt{\theta^2 + 4}$: $L = \int_0^{\pi} 3\theta\sqrt{\theta^2 + 4}\,\mathrm{d}\theta$.
3. Con $u = \theta^2 + 4$, $\mathrm{d}u = 2\theta\mathrm{d}\theta$: $L = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big|_4^{\pi^2+4} = (\pi^2 + 4)^{3/2} - 8$.
4. $L = (\pi^2 + 4)^{3/2} - 8\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\theta^2 + 4)^{3/2} = 3\theta\sqrt{\theta^2 + 4}$.

Ejercicio 3B.6.5 ← volver

1. Es una cardioide simétrica respecto al eje y: $r = 4$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $r = 0$ en $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Una vuelta completa barre la región una vez.
2. $(2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 4 + 8\,\mathrm{sen}\,\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 6 + 8\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\cos 2\theta$.
3. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(6 + 8\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(12\pi + 0 - 0)$.
4. $A = 6\pi\,[u^2]$.

Ejercicio 3B.6.6 ← volver

1. $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{x}$; $[f'(x)]^2 = 4x$.
2. $L = \int_0^{1/4} \sqrt{1 + 4x}\,\mathrm{d}x$. Con $u = 1 + 4x$: $L = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.
3. $L = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{6}(1 + 4x)^{3/2} = \sqrt{1 + 4x}$.

E.4 · Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. Primero respecto a x (producto): $f_x = y\ln(xy) + xy \cdot \dfrac{y}{xy} = y\ln(xy) + y$.

2. Luego respecto a y: $f_{xy} = \ln(xy) + y \cdot \dfrac{x}{xy} + 1 = \ln(xy) + 2$.
3. **En (e, e):** $\ln e^2 + 2 = 2 + 2 = 4$.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. $u_x = -e^{-x}\cos y + e^{-y}\operatorname{sen} x$; $u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$.
2. $u_y = -e^{-x}\operatorname{sen} y + e^{-y}\cos x$; $u_{yy} = -e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.
3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$**: la ecuación se cumple en todo el plano.**

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. Tercera coordenada: $z_0 = g(2,2) = \sqrt{9-4-4} = 1$; el punto es $(2, 2, 1)$.
2. $g_x = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, $g_y = \dfrac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$; en $(2,2)$: $g_x = g_y = -2$.
3. Plano $z - z_0 = g_x(x - x_0) + g_y(y - y_0)$: $z - 1 = -2(x-2) - 2(y-2)$.
4. $2x + 2y + z = 9$**.** Comprobación: $(2, 2, 1)$ da $4 + 4 + 1 = 9$.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. $F(x, y, z) = 2xy - z + z^4 + 4$. El punto cumple: $-4 - 1 + 1 + 4 = 0$.
2. $\nabla F = (2y,\ 2x,\ 4z^3 - 1)$; en A: $(-4,\ 2,\ 3)$.
3. **Recta normal:** $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, o $(x, y, z) = (1 - 4t,\ -2 + 2t,\ 1 + 3t)$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. $f_u = 2u$, $f_v = -1$, $u_y = -e^{2x-y}$, $v_y = \dfrac{x}{xy} = \dfrac{1}{y}$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2u\left(-e^{2x-y}\right) - \dfrac{1}{y} = -2e^{2(2x-y)} - \dfrac{1}{y}$.
3. **En $(1, 1)$:** $-2e^2 - 1$**.**

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. $\nabla f = \left(\dfrac{2x}{y},\ -\dfrac{x^2}{y^2}\right)$; en P: $(4, -4)$.
2. Con $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, f no cambia si $D_{\mathbf{u}} f = 4\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir, $\tan\theta = 1$.
3. Soluciones en $[0, 2\pi)$: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$. **En $[\pi, 2\pi]$:** $\theta = \frac{5\pi}{4}$, la dirección de $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, perpendicular a $\nabla f(P)$.

E.5 · Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{3}.$$
2. $|x - 4| < 3 \Rightarrow 1 < x < 7$. Centro 4, radio 3.
3. $x = 7$: $\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$, serie p con $p = 2$: converge.

4. $x = 1$: $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, que converge absolutamente por el paso anterior.
5. **Intervalo de convergencia:** $1 \le x \le 7$**.**

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. Es alternada con $b_n = \frac{1}{n+\sqrt[1]{7}} = 7^{-1/(n+1)} > 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 7^0 = 1 \neq 0$: no se cumple la segunda condición de Leibniz.
3. Además b_n crece (el exponente $-\frac{1}{n+1}$ aumenta hacia 0), así que tampoco decrece.
4. Los términos $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ oscilan cerca de 1 y -1: $\lim a_n$ no existe.
5. **La serie diverge por el criterio del término *n*-ésimo.**

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.
2. Geométrica con $a = \frac{7}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$; como $|r| < 1$, converge.
3. Suma: $\dfrac{7/10}{1 - 1/10} = \dfrac{7/10}{9/10} = \dfrac{7}{9}$.
4. **Converge y** $0.777\ldots = \frac{7}{9}$**.** Comprobación: $9 \cdot 0.777\ldots = 7.000\ldots$

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. Simplifica: $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1 + x)$.
2. Derivadas: $f' = \frac{1}{3}(1+x)^{-1}$, $f'' = -\frac{1}{3}(1+x)^{-2}$, $f''' = \frac{2}{3}(1+x)^{-3}$. En general,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3(1+x)^n},$$

   y $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3}$, con $f(0) = 0$.
3. Coeficiente: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$.
4. $\ln \sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{3n} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{9} - \ldots$, que es un tercio de la serie de $\ln(1 + x)$ (sección 5.4) y converge en $(-1, 1]$.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. Como $(x-1)^2 = (1-x)^2$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. Serie conocida: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$. Derivando término a término:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

3. Por derivadas da lo mismo: $g^{(n)}(0) = \frac{(n+1)!}{2}$, y $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n+1}{2}$.
4. $g(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \ldots$, para $-1 < x < 1$. Comprobación: $g(0) = \frac{1}{2}$, que es el primer término.