Ejercicio 6.6.2 ← volver

1. Derivadas: $f = \cos 2x$, $f' = -2\operatorname{sen} 2x$, $f'' = -4\cos 2x$, $f''' = 8\operatorname{sen} 2x$, $f^{(4)} = 16\cos 2x$.
2. En 0: $1,\ 0,\ -4,\ 0,\ 16$. Los no nulos son los de $n = 0, 2, 4$.
3. Términos: 1, $\frac{-4}{2!}x^2 = -2x^2$, $\frac{16}{4!}x^4 = \frac{2}{3}x^4$.
4. Comprobación: en $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \cdots$ con $u = 2x$ queda $1 - 2x^2 + \frac{16x^4}{24}$.
5. Resultado: $1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$.

Ejercicio 6.6.3 ← volver

1. $f = (4-x)^{1/2}$; $f' = -\frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}$; $f'' = -\frac{1}{4}(4-x)^{-3/2}$ (por la regla de la cadena, cada derivada multiplica por -1).
2. En 0: $f(0) = 2$; $f'(0) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $f''(0) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{32}$.
3. Términos: 2, $-\frac{1}{4}x$, $\frac{-1/32}{2!}x^2 = -\frac{x^2}{64}$.
4. Comprobación con la binomial: $2\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{1/2} = 2\left(1 - \frac{x}{8} - \frac{x^2}{128} - \cdots\right)$.
5. Resultado: $2 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64}$.

Ejercicio 6.6.4 ← volver

1. Derivadas: $f' = 3\cos 3x$, $f'' = -9\operatorname{sen} 3x$, $f''' = -27\cos 3x$, $f^{(4)} = 81\operatorname{sen} 3x$, $f^{(5)} = 243\cos 3x$.
2. En 0: $0,\ 3,\ 0,\ -27,\ 0,\ 243$. Las pares se anulan; las impares son $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n 3^{2n+1}$.
3. Término general: $\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.
4. Primeros términos: $3x - \frac{27}{6}x^3 + \frac{243}{120}x^5 = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5$.
5. Comprobación: en la serie de $\operatorname{sen} u$ se sustituye $u = 3x$. El cociente da $L = \lim \frac{9x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0$: vale para todo x.

- (1) función por partes: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (2) límites (diferencia de fracciones, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas implícita y paramétrica hiperbólica [U4]; (4) razón de cambio (cilindro con altura igual al radio) [U4]; (5) curva en el espacio (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2016-2

- (1) dominio, recorrido y gráfica (radical y paramétrica) [U2]; (2) límites (trigonométrico, exponenciales al infinito, racional) [U3; ejercicio 3.5.6]; (3) razón de cambio (tanque cilíndrico) [U4]; (4) teorema de Rolle [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2017-1, tipo A

- (1) dominio, recorrido y composición [U2]; (2) discontinuidades de una racional y límites en ellas [U3]; (3) tangente y normal a curva con radical [U4]; (4) razón de cambio (tanque cilíndrico) [U4]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2017-2

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) cociente y composición de funciones con dominios restringidos [U2]; (3) límites (trigonométrico, al infinito con exponentes negativos) [U3]; (4) continuidad y derivabilidad de función por partes [U4]; (5) optimación: ventana normanda [U5]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2018-1

- (1) biyectividad e inversa de arco de circunferencia [U2]; (2) límites (radical, al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) normal y tangente a curva implícita [U4]; (4) valores críticos, monotonía, extremos, inflexión y gráfica de cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2018-2

- (1) composición y su dominio [U2]; (2) continuidad de función por partes (seno y logaritmo) [U3]; (3) optimación: cerca de terreno dividido en dos [U5]; (4) derivadas paramétrica hiperbólica e implícita [U4]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-1, tipo A

- (1) función inversa de raíz, dominio y recorrido [U2]; (2) límites (por partes, trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) recta tangente y normal [U4]; (4) extremos, monotonía, inflexión y gráfica de un polinomio [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-1, tipo C

- (1) gráfica, rango, biyectividad e inversa (semicircunferencia) [U2]; (2) límites (racionalización, trigonométrico, al infinito con raíces) [U3]; (3) derivadas (trigonométrica inversa, implícita, paramétrica) [U4]; (4) optimación: triángulo equilátero y cuadrado [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-2, tipo A

- (1) dominio, recorrido e inversa (cuarto de circunferencia) [U2]; (2) límites (racional, trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) derivadas (exponencial, implícita, paramétrica) [U4]; (4) extremos absolutos en intervalo cerrado [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-2, tipo C

- (1) función por partes con valor absoluto: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (2) límites (racionalización, al infinito con raíz, trigonométrico) [U3]; (3) rectas tangente y normal a una parábola (implícita) [U4]; (4) máximos y mínimos relativos [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1. **Restricción.** Volumen: área del triángulo por la longitud, $\frac{L^2}{2}h = 3 \;\Rightarrow\; h = \frac{6}{L^2}$.
2. **Función objetivo.** Dos triángulos de área $\frac{L^2}{2}$; dos rectángulos $L \times h$ (los catetos) y uno $\sqrt{2}L \times h$ (la hipotenusa):

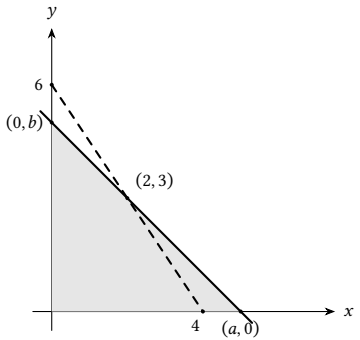
$$S = L^2 + (2+\sqrt{2})Lh = L^2 + \frac{6(2+\sqrt{2})}{L}, \qquad L > 0.$$

3. **Crítico:**

$$S'(L) = 2L - \frac{6(2+\sqrt{2})}{L^2} = 0 \;\Rightarrow\; L^3 = 3(2+\sqrt{2}) = 6 + 3\sqrt{2}.$$

4. **Justificación:** $S''(L) = 2 + \frac{12(2+\sqrt{2})}{L^3} > 0$: mínimo.
5. $L = \sqrt[3]{6+3\sqrt{2}} \approx 2.17$ m. Como $L^3 = 3(2+\sqrt{2})$, $h = \frac{6}{L^2} = \frac{6L}{L^3} = \frac{2L}{2+\sqrt{2}} = (2-\sqrt{2})L \approx 1.27$ m.
6. Si la cara de la hipotenusa quedara abierta, $S = L^2 + \frac{12}{L}$ y el mínimo estaría en $L = \sqrt[3]{6}$ m.

Ejercicio 5.6.4 ← volver



1. **Variables.** La recta corta los ejes en $(a,0)$ y $(0,b)$, con $a, b > 0$; su ecuación es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
2. **Restricción.** Pasa por $(2,3)$: $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{3a}{a-2}$, con $a > 2$ para que $b > 0$.
3. **Función objetivo:** $A = \frac{ab}{2} = \frac{3a^2}{2(a-2)}$, $a > 2$.
4. **Crítico:**

$$A'(a) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a(a-2) - a^2}{(a-2)^2} = \frac{3a(a-4)}{2(a-2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; a = 4.$$

5. **Justificación:** para $2 < a < 4$, $A' < 0$; para $a > 4$, $A' > 0$: mínimo.
6. $b = \frac{12}{2} = 6$ y $A = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$. La recta es $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, y $(2,3)$ es el punto medio del segmento entre los ejes.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. A está en la gráfica: $g(1) = a + b = 2$.
2. Inflexión en $x = 1$: $g''(x) = 6ax + 2b$ y $g''(1) = 6a + 2b = 0$, es decir, $b = -3a$.

2º final 2019-1

- (1) inversa de un arco de circunferencia: dominio, recorrido, regla, gráficas [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico por sustitución, racional, al infinito) [U3]; (3) derivadas (producto con hiperbólica pidiendo dx/dy, implícita con ln, paramétrica) [U4]; (4) valores críticos, monotonía, inflexión y gráfica de una cuártica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2019-2

- (1) inversa de una rama de hipérbola, dominio y recorrido [U2]; (2) límites (trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) recta tangente (producto con exponencial y logaritmo) [U4]; (4) optimación: cilindro sin tapa de volumen dado, material mínimo [U5; ejercicio 5.5.8]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2020-1

- (1) inversa de un arco de circunferencia en intervalo abierto [U2]; (2) límites (lateral con raíz, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas (implícita con exponencial y ln, paramétrica hiperbólica) [U4; propuesto 4.6.4]; (4) optimación: rectángulo inscrito entre dos parábolas [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2024-2, tipo A

- (1) inversa de un arco de circunferencia y su gráfica [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico lateral con raíz, racionalización) [U3]; (3) recta tangente [U4]; (4) optimación: rectángulo inscrito en una circunferencia [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2025-1, tipo A

- (1) inversa en forma explícita (rama de hipérbola) y gráficas [U2]; (2) asíntotas, límite en discontinuidad removible y gráfica de función racional [U3; propuesto 3.6.6]; (3) derivadas (implícita, logarítmica) [U4; ejercicio 4.5.9]; (4) optimación: cilindro sin tapa con costos distintos de base y pared [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2025-2, tipo A

- (1) producto de funciones con raíces: dominio, recorrido, regla, gráfica [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico con cosecante, al infinito) [U3]; (3) recta tangente a curva paramétrica (circunferencia) [U4]; (4) optimación: rectángulo inscrito en un triángulo [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2026-1, tipo A

- (1) función en paramétricas con raíces: dominio, recorrido, regla y = f(x), gráfica [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetros a, b) [U3]; (3) recta tangente, derivación implícita (elipse rotada) [U4]; (4) valores críticos, extremos absolutos, inflexión y gráfica en intervalo cerrado [U5; propuesto 5.6.6]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2026-2

- (1) función en paramétricas (arco de elipse): dominio, recorrido, regla, gráfica [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (racionalización, logaritmos) [U3]; (3) razón de cambio: volumen de un cilindro [U4]; (4) optimación: perímetro máximo de rectángulo bajo una parábola [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

Plan 2016: exámenes parciales citados

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo C

5. Área: $\frac{1}{2}(4)(1) = 2$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. $A = \pi r^2$, así que $dA = 2\pi r\, dr$.
2. Con $r = 20$ y $dr = 0.02$: $dA = 2\pi(20)(0.02) = 0.8\pi$ cm^2.
3. Exacto: $\Delta A = \pi\left(20.02^2 - 20^2\right) = \pi(0.8004)$ cm^2.
4. La diferencia, $0.0004\pi = \pi(dr)^2$, es despreciable frente a dA.

Se cambió la pregunta del original, que pide la rapidez con que aumenta el área si el radio crece a razón de 0.02 cm/s: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} = 0.8\pi$ cm^2/s, el mismo número.

Ejercicio 4.6.7 ← volver

1. $y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ (único en el intervalo). Punto $(0, 1)$.
2. $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ y $\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\,(-\operatorname{sen} 2t)(2) = -4\operatorname{sen} 2t\cos 2t$. En $t = \frac{\pi}{4}$ las dos valen 0: la fórmula da $\frac{0}{0}$.
3. Se simplifica antes de evaluar (para $\cos 2t \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2t}{-4\operatorname{sen} 2t\cos 2t} = -\frac{1}{2\operatorname{sen} 2t}.$$

   Cuando $t \to \frac{\pi}{4}$, el cociente tiende a $-\frac{1}{2}$.
4. Otra forma, sin el parámetro: $x = \cos^2 2t = 1 - \operatorname{sen}^2 2t = 1 - y^2$. Entonces $\frac{dx}{dy} = -2y$ y $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2}$ en $y = 1$.

E.5 · Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. Dominio $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2 - x - x^2 = -(x^2 + x - 2) = -(x + 2)(x - 1)$. Críticos: $x = -2$ y $x = 1$.
2. a) $-(x+2)(x-1)$ es positivo entre las raíces y negativo fuera: decreciente en $(-\infty, -2)$, creciente en $(-2, 1)$, decreciente en $(1, \infty)$.
3. b) $f''(x) = -1 - 2x$, cero en $x = -\frac{1}{2}$: $f'' > 0$ si $x < -\frac{1}{2}$ (cóncava hacia arriba) y $f'' < 0$ si $x > -\frac{1}{2}$ (hacia abajo). Inflexión: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = -\frac{25}{12}$.
4. c) En $x = -2$, f' pasa de − a + y $f''(-2) = 3 > 0$: mínimo relativo $f(-2) = -1 - 4 - 2 + \frac{8}{3} = -\frac{13}{3}$. En $x = 1$, de + a − y $f''(1) = -3 < 0$: máximo relativo $f(1) = -1 + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
5. Para la gráfica: $f(0) = -1$, $f(-4) = \frac{13}{3}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx -4.33$.

Simulacro	1	2	3	4	5	6
Plan 2010, 1	2.6.6	3.6.1	4.6.1	4.6.2	5.6.2	6.6.2
Plan 2010, 2	2.6.4	3.6.4	4.6.7	4.6.6	5.6.1	6.6.3
Plan 2016, 1	2.6.3	3.6.6	4.6.3	5.6.5	—	—
Plan 2016, 2	2.6.5	3.6.2	4.6.4	5.6.6	—	—

Las columnas 1 a 6 son los problemas del examen; los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). En el Plan 2010, la columna 4 es el segundo problema de derivadas (tangente, razón de cambio o diferencial). El segundo simulacro del Plan 2016 incluye logaritmo, exponencial e hiperbólicas (SOLO PLAN 2016).

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^2$ ($\sqrt{x} = t$, $t \to 1$):

$$\frac{t^4 - t}{t - 1} = \frac{t(t-1)(t^2 + t + 1)}{t - 1} = t(t^2 + t + 1) \to 3.$$

2. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \to \frac{2}{3}.$$

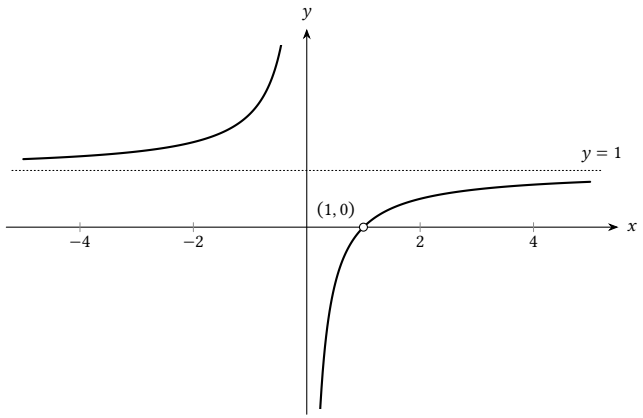
3. Resultado: a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. Dominio: $x^2 - x = x(x-1) \neq 0$, así que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Simplificación:

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \quad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

2. a) Asíntota vertical: en $x = 0$ el numerador simplificado vale -1; $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$. La recta $x = 0$ es asíntota vertical. En $x = 1$ el factor se canceló: no hay asíntota, hay un hueco.
3. Asíntota horizontal: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$; la recta $y = 1$.
4. b) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x} = \frac{0}{1} = 0$. La discontinuidad en $x = 1$ es evitable.
5. c) La gráfica es la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ sin el punto $(1, 0)$.



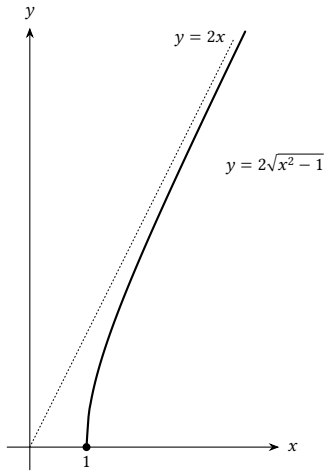
E.4 · Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. Punto: $y = \cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$. Con abscisa positiva, $x = \frac{1}{2}$: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

C.6 · Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010)

Sin erratas registradas en esta unidad.



Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. El rectángulo más grande que se corta del tronco está inscrito en el círculo: su diagonal es el diámetro D.
2. Si h es el alto, por Pitágoras $x^2 + h^2 = D^2$, así que $h = \sqrt{D^2 - x^2}$.
3. Área: $A = xh = x\sqrt{D^2 - x^2}$.
4. Dominio: $x > 0$ y $h > 0$, es decir, $0 < x < D$.

E.3 · Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. Las dos reglas son polinomios; el único punto en duda es $x = a$, con $a \geq -2$.
2. Condición 1: $f(a) = a^2 + 4$ (primera regla); se cumple.
3. Condición 2: $\lim_{x\to a^-} f(x) = a^2 + 4$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = (a-2)^2$. Se igualan: $a^2 + 4 = a^2 - 4a + 4$, de donde $4a = 0$ y $a = 0$.
4. Condición 3: con $a = 0$, el límite vale $4 = f(0)$; se cumple. Además $a = 0 \geq -2$.
5. Resultado: $a = 0$.

En el original la segunda regla se lee $(x-2)^2$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 4x}{\cot 3x} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x \cos 3x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen} 4x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \to \frac{3}{4}.$$

   El lateral por la derecha coincide con el límite bilateral.
2. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^3$, $t \to 2$ y $2x - 16 = 2(t^3 - 8)$.

Cálculo Diferencial (Plan 2010). Complementaria

- Andrade D., A. y otros. *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- Andrade D., A. y Crail, S. C. *Cuaderno de ejercicios de Cálculo I*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- Leithold, L. *El cálculo con geometría analítica*, 7.ª ed. México: Oxford University Press, 1998.
- Purcell, E. J. y Varberg, D. *Calculus with Analytic Geometry*, 8.ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- Spivak, M. *Cálculo infinitesimal*, 2.ª ed. México: Reverté, 1996.
- Swokowski, E. W., Olinick, M. y Pence, D. *Calculus*. EUA: PWS Publishing Company, 1994.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016). Básica

- Andrade, A. y Crail, S. *Cuaderno de ejercicios de Cálculo Diferencial*, 2.ª ed. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2010.
- Castañeda de I. P., É. *Geometría analítica en el espacio*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009.
- De Oteyza, E. y otros. *Geometría analítica y trigonometría*. México: Pearson, 2008.
- Larson, R. y Edwards, B. *Cálculo I de una variable*, 9.ª ed. México: McGraw-Hill, 2010.
- Stewart, J. *Cálculo de una variable*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016). Complementaria

- Lehmann, C. *Geometría analítica*. México: Limusa, 2008.
- Purcell, E. J. y Varberg, D. *Cálculo*, 9.ª ed. México: Prentice Hall, 2007.
- Rogawski, J. *Cálculo de una variable*, 2.ª ed. Barcelona: Reverté, 2012.
- Spivak, M. *Calculus*, 4.ª ed. Cambridge: Publish or Perish, 2008.
- Swokowski, E. W. y Cole, J. A. *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*, 13.ª ed. Belmont: Brooks Cole, 2011.
- Zill, D. G. *Cálculo de una variable*, 4.ª ed. México: McGraw-Hill, 2011.

Para los temas de geometría que este cuaderno no cubre (sección 0.1), los libros indicados por el programa son los de Castañeda, De Oteyza y Lehmann; el cuaderno hermano es *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*.

La notación de este cuaderno (sen, ang tan x en lugar de arctan x, «regla de correspondencia», «recorrido», «optimación») es la de los enunciados de los exámenes.

1er final 2020-1, tipo A

- (1) función en paramétricas: forma explícita, dominio, rango, gráfica [U2; ejercicio 2.5.6]; (2) límites (racional, hiperbólicas, al infinito) [U3]; (3) razón de cambio: dos autos en direcciones perpendiculares [U4; propuesto 4.6.3]; (4) valores críticos, monotonía, concavidad y gráfica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2020-1, tipo C

- (1) dominio, recorrido e inversa (cuarto de circunferencia) [U2]; (2) límites infinitos y al infinito para trazar la gráfica (asíntotas) [U3]; (3) recta normal a una cónica (implícita) [U4]; (4) optimación: caja sin tapa de base cuadrada [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2024-1, tipo C

- (1) función en paramétricas: dominio, recorrido y gráfica [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetros a, b) [U3]; (3) ángulo de intersección entre curvas [U4]; (4) optimación: tanque prismático de base cuadrada con tapa [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2024-2, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) función en paramétricas: dominio, recorrido, forma explícita, gráfica [U2]; (3) límites sin L'Hôpital (trigonométrico lateral, racionalización) [U3]; (4) monotonía, extremos relativos, inflexión y gráfica de una cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2025-1, tipo A

- (1) inversa de una función dada como conjunto (arco de circunferencia) [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico, racionalización) [U3]; (3) razón de cambio: triángulo rectángulo isósceles [U4]; (4) monotonía, extremos relativos, inflexión y gráfica de una cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2025-1, tipo D

- (1) función dada como conjunto (rama de hipérbola): gráfica, dominio, recorrido, forma explícita [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (doble racionalización, trigonométrico lateral) [U3]; (3) regla de la cadena con radicales anidados, derivada en un punto [U4]; (4) optimación: rectángulo de perímetro fijo [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2025-2, tipo A

- (1) gráfica de función en paramétricas (trigonométricas) [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetros a, b) [U3]; (3) pendiente de la tangente, derivación implícita [U4]; (4) optimación: terreno cercado dividido en tres [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2026-1, tipo A

- (1) función inversa (cuarto de circunferencia) y gráfica [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetro a) [U3]; (3) recta tangente, derivación implícita [U4]; (4) optimación: perímetro máximo de rectángulo inscrito en un círculo [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2026-2, tipo A

- (1) composición de funciones: regla, dominio y recorrido [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (factorización, trigonométrico) [U3]; (3) recta tangente, derivación implícita (folium) [U4]; (4) extremos relativos y punto de inflexión de una cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

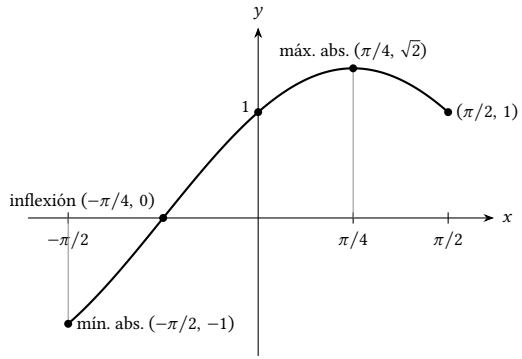
3. Sustituyendo: $a - 3a = 2 \Rightarrow a = -1$ y $b = 3$.
4. Comprobación: $g(x) = -x^3 + 3x^2$, $g''(x) = -6x + 6$ cambia de + a − en $x = 1$, y $g(1) = 2$. Es inflexión.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. a) $m'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$, que existe siempre. $m'(x) = 0 \iff \tan x = 1$; en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la única solución es $x = \frac{\pi}{4}$.
2. b) m es continua en el intervalo cerrado (teorema de Weierstrass). Valores:

$$m\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

   Máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$; mínimo absoluto -1 en $-\frac{\pi}{2}$.
3. c) $m''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x = -m(x)$; se anula donde $\tan x = -1$: $x = -\frac{\pi}{4}$. Para $x < -\frac{\pi}{4}$, $m < 0$ y $m'' > 0$ (cóncava hacia arriba); para $x > -\frac{\pi}{4}$, $m'' < 0$ (hacia abajo). Inflexión en $\left(-\frac{\pi}{4}, m\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.
4. d) Además $m(0) = 1$. La gráfica sube de $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ a $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y baja a $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.



E.6 · Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010)

Ejercicio 6.6.1 ← volver

1. $a_k = \frac{4(x-1)^k}{5k}$. Cociente: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x-1|\frac{k}{k+1} \to |x-1|$.
2. $|x-1| < 1 \iff 0 < x < 2$. Centro 1, radio 1.
3. El enunciado no pide los extremos, pero conviene analizarlos. En $x = 2$: $\frac{4}{5}\sum \frac{1}{k}$, múltiplo de la armónica: diverge.
4. En $x = 0$: $\frac{4}{5}\sum \frac{(-1)^k}{k}$, alternada con $\frac{1}{k}$ decreciente y con límite 0: converge (condicionalmente).
5. Resultado: $0 \le x < 2$, es decir, $[0, 2)$.

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) cónica (fuera del cuaderno); (3) composición $f \circ f$: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (4) modelo: área de terreno rectangular con perímetro fijo [U2]; (5) función paramétrica hiperbólica: dominio, recorrido, gráfica [U2; propuesto 2.6.5]; (6) función por partes: gráfica, dominio, recorrido [U2].

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) paramétricas $\longrightarrow y$ como función de x: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (3) función inversa: regla, dominio, recorrido, gráfica [U2]; (4) modelo: área de rectángulo inscrito en semicírculo [U2]; (5) límites infinitos y al infinito; asíntotas y gráfica [U3; ejercicio 3.5.7]; (6) límites sin L'Hôpital (trigonométrico; raíces) [U3].

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) función inversa de racional: dominio, recorrido, regla [U2; propuesto 2.6.3]; (3) composición $f \circ g$ (exp/ln): dominio, recorrido, gráfica [U2; ejercicio 2.5.2]; (4) modelo: volumen de caja de base cuadrada sin tapa con área fija [U2]; (5) límites sin L'Hôpital (trigonométrico; racionalización) [U3]; (6) continuidad en un punto con parámetro [U3].

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) función paramétrica: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (3) función inversa: dominio, recorrido, regla explícita, gráficas [U2]; (4) modelo: cordón de soldadura de tanque prismático con área fija [U2]; (5) límites sin L'Hôpital (trigonométrico; al infinito) [U3]; (6) continuidad en $\mathbb{R}$ con dos parámetros; gráfica [U3; ejercicio 3.5.8].

Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2024-1, tipo C

- (1) derivada por definición (cuatro pasos) [U4; ejercicio 4.5.10]; (2) ángulo entre curvas (recta y elipse rotada) [U4]; (3) derivada paramétrica e implícita [U4]; (4) derivabilidad de función por partes con parámetro [U4]; (5) optimación: rectángulo inscrito en triángulo rectángulo [U5].

Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo A

- (1) cálculo de derivadas (inversa trig., cociente, implícita) [U4]; (2) recta tangente paralela a una recta dada [U4]; (3) ángulo de intersección entre curvas [U4]; (4) punto de inflexión con parámetros [U5; propuesto 5.6.5]; (5) razón de cambio: diagonal de un cuadrado [U4].

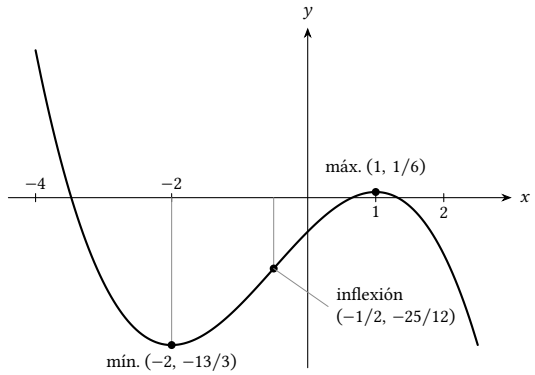
Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo D

- (1) cálculo de derivadas (inversa trig., logaritmo de raíz, implícita) [U4]; (2) recta tangente y área del triángulo con los ejes [U4; propuesto 4.6.5]; (3) teorema del valor medio [U5]; (4) razón de cambio: lado de triángulo equilátero [U4]; (5) monotonía, extremos, inflexión, gráfica de cuártica [U5].

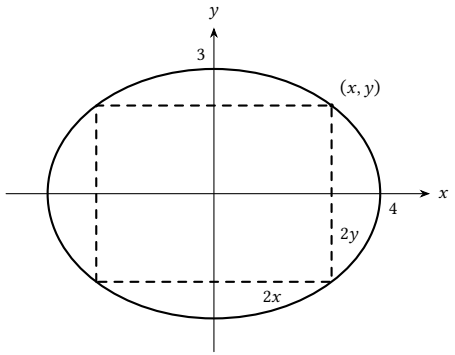
B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del examen de tu plan. Resuélvelo sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

- **Plan 2010:** seis problemas, 2 horas.
- **Plan 2016:** los cuatro problemas de cálculo (1 a 4), 80 minutos. Los problemas 5 y 6 del examen (vectores, recta y plano) están en *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*: sus simulacros de los problemas 5 y 6 (su Apéndice B) completan estos, con el mismo reloj, unos 20 minutos cada uno.



Ejercicio 5.6.2 ← volver



1. **Variables.** Por simetría, el vértice del primer cuadrante es (x, y), con lados $2x$ y $2y$.
2. **Función objetivo:** $A = 4xy$. **Restricción:** el vértice está en la elipse, $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.
3. **Una variable:** $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$, con $0 < x < 4$.
4. **Crítico:**

$$A'(x) = 3\sqrt{16 - x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{3(16 - 2x^2)}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{2}.$$

5. **Justificación:** el numerador $3(16 - 2x^2)$ pasa de positivo a negativo en $x = 2\sqrt{2}$: máximo. (Además $A \to 0$ en los extremos $x = 0$ y $x = 4$.)
6. $y = \frac{3}{4}\sqrt{8} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Lados: $2x = 4\sqrt{2}$ y $2y = 3\sqrt{2}$.
7. Resultado: $A = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$ unidades de área (en general, $2ab$).

Ejercicio 5.6.3 ← volver

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen usado en este cuaderno tiene resolución publicada: todas las resoluciones son propias. Este apéndice solo registra erratas o rarezas de los *enunciados* (datos que sobran o faltan, dos respuestas donde se pide una) y cómo se trataron.

C.2 · Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4 · Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

2º final 2013-2, tipo A, problema 4: El enunciado pide la razón «en el instante en el cual el esquiador se encuentra a una distancia de 3 m del punto más bajo de la rampa». Como la rampa es recta y la rapidez es constante, $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt}$ no depende del instante y ese dato sobra; en este cuaderno se omite.

2º final 2013-1, tipo A, problema 4: El enunciado pide «una ecuación de la recta tangente» en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$, pero la curva ($y = 1 - x^2$) tiene dos puntos con esa ordenada, $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, con tangentes distintas. En este cuaderno se fija el de abscisa positiva y se da también la otra tangente.

2º final 2006-2, tipo A, problema 4: El enunciado habla de «el punto P», pero hay dos tangentes a $y = x^2$ que forman 45° con la recta $3x - y + 1 = 0$: en $(-1, 1)$ y en $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. En este cuaderno se dan los dos.

1er final 2005-2, tipo B, problema 2: El enunciado pide $\frac{dy}{dx}$ en $y = 1$, donde $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se anulan a la vez y la fórmula paramétrica da $\frac{0}{0}$. En este cuaderno se simplifica el cociente antes de evaluar o se elimina el parámetro ($x = 1 - y^2$); las dos vías dan $-\frac{1}{2}$.

C.5 · Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio

1er final 2005-2, tipo B, problema 6: El enunciado no dice qué caras tiene el recipiente; la figura dibuja todas las aristas del prisma. En este cuaderno se toma el prisma cerrado (dos triángulos y tres rectángulos), con $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}}$ m; si la cara de la hipotenusa fuera abierta, resultaría $L = \sqrt[3]{6}$ m.

2. Derivadas respecto a θ: $2x\frac{dx}{d\theta} = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\frac{dy}{d\theta} = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$.
3. Cociente: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta/x} = -2x$. (Lo mismo sale al eliminar el parámetro: $y = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - x^2$.)
4. En $x = \frac{1}{2}$: $m = -1$. Tangente: $y - \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4x + 4y - 5 = 0$.
5. En el otro punto de ordenada $\frac{3}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, la pendiente es 1 y la tangente es $4x-4y+5 = 0$.

Se agregó «y abscisa positiva» al original.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. Sea $P(a, a^2)$. La tangente tiene pendiente $m = 2a$; la recta, $m_2 = 3$.
2. $\tan 45^\circ = 1 = \left|\frac{3-2a}{1+6a}\right|$: dos casos.
3. $\frac{3-2a}{1+6a} = 1 \Rightarrow 3 - 2a = 1 + 6a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$, con $m = \frac{1}{2}$.
4. $\frac{3-2a}{1+6a} = -1 \Rightarrow 3 - 2a = -1 - 6a \Rightarrow a = -1$, con $m = -2$.
5. Comprobación: con $m = -2$, $\frac{3-(-2)}{1-6} = -1$; con $m = \frac{1}{2}$, $\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = 1$. En los dos el ángulo agudo es de 45°.
6. Puntos: $P(-1, 1)$ y $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. Variables: y (recorrido de A), x (de B), h (distancia entre ellos). Datos: $\frac{dy}{dt} = 3$, $\frac{dx}{dt} = 5$ (m/s).
2. Instante: $y = 9$ a los $t = 3$ s; entonces $x = 5(3) = 15$ y $h = \sqrt{81 + 225} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$.
3. Ecuación: $h^2 = x^2 + y^2$. Derivando: $2h\frac{dh}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$.
4. Sustitución:
$$\frac{dh}{dt} = \frac{15(5) + 9(3)}{3\sqrt{34}} = \frac{102}{3\sqrt{34}} = \frac{34}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}\text{ m/s}.$$
5. Comprobación: $h = \sqrt{(3t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{34}\,t$, que crece siempre a $\sqrt{34}$ m/s.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. a) Se simplifica primero: $\ln e^y = y$. La ecuación es $e^{xy} - x = y$.
2. Derivación implícita: $e^{xy}(y + xy') - 1 = y'$.
3. Se agrupa: $(x\,e^{xy} - 1)\,y' = 1 - y\,e^{xy} \Rightarrow y' = \frac{1 - y\,e^{xy}}{x\,e^{xy} - 1}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 9\cosh(3t)$ y $\frac{dy}{dt} = 6\operatorname{senh}(3t)$ (sin cambio de signo: $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\,u'$).
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{6\operatorname{senh}(3t)}{9\cosh(3t)} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. Punto: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$; $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
2. Pendiente: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $m = -\frac{1}{4}$.
3. Tangente: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{x}{4} + 1$, o $x + 4y - 4 = 0$.
4. Intersecciones: con el eje x ($y = 0$), $x = 4$; con el eje y ($x = 0$), $y = 1$.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de las asignaturas

- Programa de estudio de *Cálculo Diferencial* del Plan 2010 (primer semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Seis temas: introducción al Cálculo, funciones, límites y continuidad, la derivada, variación de funciones, y sucesiones y series.
- Programa de estudio de *Cálculo y Geometría Analítica* del Plan 2016 (primer semestre, 12 créditos, 96 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Siete temas: secciones cónicas, funciones, límites y continuidad, la derivada y aplicaciones, variación de funciones, álgebra vectorial, y recta y plano. Este cuaderno cubre los temas 2 a 5. Las sucesiones y series del Plan 2016 son el tema 1 de *Cálculo Integral* y están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Ningún examen usado en las unidades tiene resolución publicada: las resoluciones de este cuaderno son propias. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó; los del Plan 2016 llevan el nombre de la asignatura.

- **Cálculo Diferencial, Plan 2010:** 10 exámenes finales colegiados de 2001-2 a 2013-2. Cinco son de 2012-2 a 2013-2, con el programa de 2008; los otros cinco (2001-2, 2003-2, 2005-2, 2006-1 y 2006-2) son de la versión anterior de la misma materia de primer semestre, con los mismos temas.
- **Cálculo y Geometría Analítica, Plan 2016:** 39 exámenes finales (25 primeros y 14 segundos finales, de 2016-1 a 2020-1 y de 2024-1 a 2026-2) y 17 exámenes parciales (2024-1 a 2026-2).

Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Series de ejercicios. Las series de ejercicios de funciones, límites, derivada y variación de funciones que acompañan al programa de Cálculo y Geometría Analítica se revisaron para la notación y el orden de los temas; ningún ejercicio de este cuaderno sale de ellas.

Bibliografía de los programas

Cálculo Diferencial (Plan 2010). Básica

- Larson, R. E., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. *Cálculo I*, 8.ª ed. Madrid: McGraw-Hill, 2006.
- Solar G., E. y Speziale de G., L. *Álgebra I.* México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1997.
- Stewart, J. *Cálculo*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.

3. Diferencia de cubos:

$$\frac{t-2}{2(t-2)(t^2+2t+4)} = \frac{1}{2(t^2+2t+4)} \to \frac{1}{2\cdot 12} = \frac{1}{24}.$$

4. Resultado: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x}) = 1-(5-x) = x-4,$$
$$(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x}) = 9-(5+x) = -(x-4).$$

2. Se cancela $x-4$:

$$\frac{1-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{5+x}} = -\frac{3+\sqrt{5+x}}{1+\sqrt{5-x}} \to -\frac{3+3}{1+1} = -3.$$

3. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x} = \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 \cos x \to 1\cdot 1 = 1.$$

4. Resultado: a) -3; b) 1.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) = x-9,$$
$$(4-\sqrt{2x-2})(4+\sqrt{2x-2}) = 18-2x = -2(x-9).$$

2. Se cancela $x-9$:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{2x-2}} = -\frac{4+\sqrt{2x-2}}{2(\sqrt{x}+3)} \to -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

3. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\frac{2x}{3x} \to \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

4. c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre x^2:

$$\frac{6+\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}} \to 6.$$

5. Resultado: a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

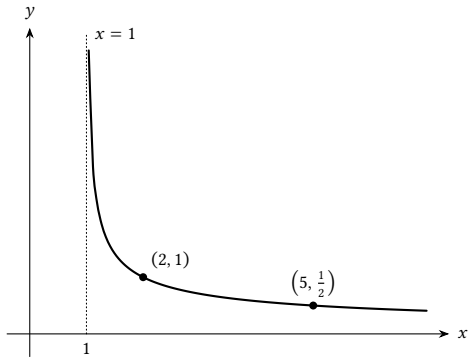
↑ Volver al índice

E.2 · Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos

Ejercicio 2.6.1

← volver

1. **Dominio:** la raíz está en el denominador: $x - 1 > 0$, es decir, $D_f = (1, \infty)$.
2. **Recorrido:** $\sqrt{x-1}$ toma todos los valores positivos, y su recíproco también: cuando $x \to 1^+$, $f(x) \to \infty$; cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$. Como f es continua y decreciente, $R_f = (0, \infty)$.
3. **Gráfica:** la de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ trasladada una unidad a la derecha; asíntota vertical $x = 1$ y horizontal $y = 0$. Pasa por $(2, 1)$ y $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.



Ejercicio 2.6.2

← volver

1. $f \circ g$: $f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$. Como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo x, $g(x) \in D_f$ siempre: dominio $\mathbb{R}$.
2. Recorrido de $f \circ g$: $x^2 + 1$ toma todos los valores de $[1, \infty)$, y su raíz, los de $[1, \infty)$. El mínimo es 1, en $x = 0$.
3. $f \cdot g$: $\sqrt{x}\,(x^2+1)$, con dominio $D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.
4. Recorrido de $f \cdot g$: es producto de dos funciones no negativas y crecientes en $[0, \infty)$, así que es creciente; vale 0 en $x = 0$ y crece sin límite: $[0, \infty)$.

Ejercicio 2.6.3

← volver

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ (denominador $\neq 0$).
2. **Despeje:** $y(3x+2) = x - 1 \Rightarrow 3xy - x = -1 - 2y \Rightarrow x(3y-1) = -(2y+1)$, y si $y \neq \frac{1}{3}$,

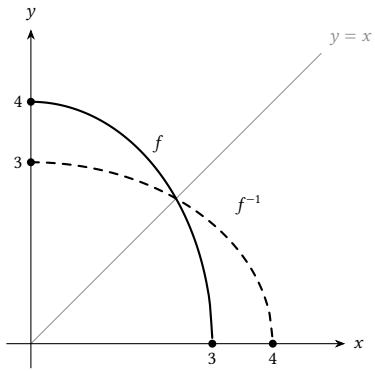
$$x = \frac{2y+1}{1-3y}.$$

3. Con $y = \frac{1}{3}$ la ecuación queda $0 = -\frac{5}{3}$: no hay x. Entonces $R_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, y para cada otro y hay un único x: f es inyectiva.
4. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$, con $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.
5. Comprobación: $f(0) = -\frac{1}{2}$ y $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{5/2} = 0$.

Ejercicio 2.6.4

← volver

1. **Forma cartesiana:** $\cos t = \frac{x}{3}$, $\operatorname{sen} t = \frac{y}{4}$ y $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Con $x \geq 0$, $y \geq 0$ es el cuarto de elipse del primer cuadrante: $y = \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [0, 3]$, con recorrido $[0, 4]$.
2. **Inyectividad:** en $[0, 3]$, $9 - x^2$ decrece, así que f es decreciente: tiene inversa.
3. **Despeje:** $x^2 = 9 - \frac{9y^2}{16} = \frac{9}{16}\left(16 - y^2\right)$ y, como $x \geq 0$, $x = \frac{3}{4}\sqrt{16 - y^2}$.
4. **Inversa:** $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, con $D_{f^{-1}} = [0, 4]$ y $R_{f^{-1}} = [0, 3]$.
5. **Gráficas:** f va de $(0, 4)$ a $(3, 0)$; f^{-1}, de $(0, 3)$ a $(4, 0)$: el cuarto de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Ejercicio 2.6.5

← volver

1. **Dominio:** $\cosh t$ es creciente para $t \geq 0$, con $\cosh 0 = 1$ y sin cota superior: $x \in [1, \infty)$.
2. **Recorrido:** $\operatorname{senh} t$ es creciente, $\operatorname{senh} 0 = 0$ y sin cota: $y \in [0, \infty)$.
3. **Forma cartesiana:** con $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Como $y \geq 0$, $y = 2\sqrt{x^2 - 1}$.
4. **Gráfica:** mitad superior de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$: empieza en el vértice $(1, 0)$ y se acerca a la asíntota $y = 2x$.