- (1) composición, dominio y recorrido [U2]; (2) límites (radical de cociente, trigonométrico) [U3]; (3) derivada de cociente con radical menos logaritmo [U4]; (4) teorema de Rolle [U5; ejercicio 5.5.2]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-1, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) inversa de función paramétrica [U2]; (3) continuidad y derivabilidad de función por partes (parámetros) [U4]; (4) derivada evaluada (radical y angsen) [U4]; (5) razón de cambio (esfera) [U4]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-1, tipo C

- (1) inversa explícita de función con radical; dominio, recorrido y gráficas [U2]; (2) dominio, recorrido y límites leídos de una gráfica [U3]; (3) ángulo de intersección entre circunferencia y elipse [U4]; (4) monotonía, extremos, inflexión y concavidad de racional [U5; ejercicio 5.5.5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-2, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) inversa de parábola restringida [U2]; (3) continuidad de una racional en los reales [U3]; (4) ángulo de intersección entre hipérbolas [U4; ejercicio 4.5.7]; (5) optimación: rectángulo inscrito en elipse [U5]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-2, tipo C

- (1) modelo: área de una cruz en función de su base [U2; ejercicio 2.5.8]; (2) límites (radical, al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) razón de cambio: puente levadizo [U4]; (4) teorema de Rolle [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2018-1, tipo A

- (1) inversa de función paramétrica (rama de hipérbola) [U2]; (2) límites (racional al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas (implícita, radical, trigonométricas) [U4]; (4) razón de cambio (área de un círculo) [U4; propuesto 4.6.6]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2018-1, tipo C

- (1) función por partes con radicales (arcos de cónicas): dominio, recorrido, gráfica [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) continuidad de función por partes (parámetros) [U3]; (3) derivadas (angtan de radical, implícita con ln) [U4]; (4) valores críticos, inflexión y monotonía de racional [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

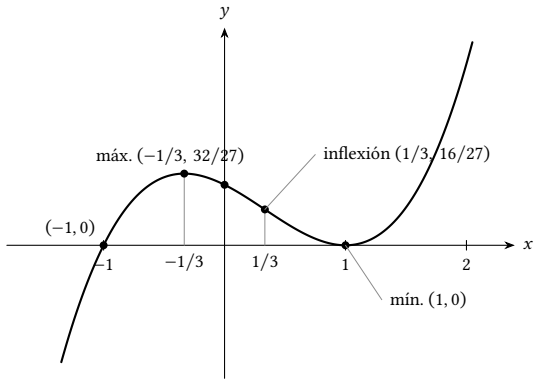
1er final 2018-2, tipo A

- (1) inversa de función paramétrica (arco de circunferencia) [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (radical, racional al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas evaluadas (segunda derivada, paramétrica, logaritmo) [U4]; (4) tangente y normal a curva implícita [U4]; (5) optimación: página de un libro con márgenes [U5]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2018-2, tipo C

- (1) dominio, rango, inversa y composición con la inversa [U2]; (2) límites (radical, a menos infinito, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas (logaritmo, angtan, implícita, paramétrica) [U4]; (4) extremos, monotonía y gráfica de polinomio de grado 4 [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2016-1, tipo A



Resultado: a) creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ y $(1, \infty)$, decreciente en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; b) máximo relativo $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$, mínimo relativo $f(1) = 0$; c) en $[-1, 1]$, máximo absoluto $\frac{32}{27}$ en $x = -\frac{1}{3}$ y mínimo absoluto 0, en $x = -1$ y en $x = 1$.

Ejercicio 5.5.5 · Función racional

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.

Dada $f(x) = \frac{8x}{(x-2)^2}$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) los puntos de inflexión y la concavidad de su gráfica.

Resolución.

1. Dominio: $x \neq 2$. En $x = 2$ hay asíntota vertical y, como el grado del denominador es mayor, $y = 0$ es asíntota horizontal.
2. Primera derivada (se simplifica un factor $x - 2$):

$$f'(x) = \frac{8(x-2)^2 - 16x(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8(x-2) - 16x}{(x-2)^3} = -\frac{8(x+2)}{(x-2)^3}.$$

   Crítico: $x = -2$ ($x = 2$ no está en el dominio, pero sí separa intervalos).
3. Signos (valores de prueba -3, 0, 3):

	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$-8(x+2)$	+	−	−
$(x-2)^3$	−	−	+
f'	−	+	−

4. b) En $x = -2$, f' pasa de − a +: mínimo relativo $f(-2) = \frac{-16}{16} = -1$. No hay máximo relativo.
5. c) Derivando $-8(x+2)(x-2)^{-3}$:

$$f''(x) = -8\,\frac{(x-2) - 3(x+2)}{(x-2)^4} = \frac{16(x+4)}{(x-2)^4}.$$

   El denominador es positivo: $f'' < 0$ si $x < -4$ y $f'' > 0$ si $-4 < x < 2$ o $x > 2$.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 10 finales del Plan 2010 y los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016), en orden. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad y, si está en este cuaderno, el ejemplo, el ejercicio resuelto o el ejercicio propuesto donde se trabaja. Al final, los exámenes parciales que se citan en el cuaderno. Las versiones del mismo examen (tipos A, C, D) suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta, la otra se practica con el mismo procedimiento.

Plan 2010: Cálculo Diferencial

1er final 2012-2, tipo A

- (1) inversa de una función paramétrica; dominio y recorrido [U2; ejercicio 2.5.7]; (2) límites con radicales y trigonométrico [U3; ejercicio 3.5.1]; (3) continuidad y derivabilidad de una función por partes (constantes *a*, *b*) [U4; ejercicio 4.5.2]; (4) recta tangente y normal, derivación implícita [U4; ejemplo 4.4]; (5) optimación: alambre en triángulo equilátero y cuadrado, área mínima [U5; ejemplo 5.4]; (6) intervalo de convergencia con extremos [U6; ejemplo 6.4].

1er final 2013-1, tipo C

- (1) composición: dominio, recorrido y gráfica [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) continuidad de una función por partes (constante *a*) [U3; propuesto 3.6.1]; (3) derivada implícita y paramétrica [U4]; (4) razón de cambio: globo esférico [U4; ejemplo 4.4]; (5) optimación: sector circular de perímetro mínimo [U5; ejercicio 5.5.6]; (6) serie de Taylor, tres términos no nulos [U6; ejemplo 6.4].

2º final 2013-1, tipo A

- (1) modelo: perímetro de un terreno en función del radio [U2; ejemplo 2.4]; (2) límites trigonométrico y con radical [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) derivada implícita y regla de la cadena [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) recta tangente a una curva paramétrica [U4; propuesto 4.6.1]; (5) crecimiento, extremos relativos y concavidad [U5; ejemplo 5.4]; (6) serie de Maclaurin [U6; ejercicio 6.5.3].

1er final 2013-2, tipo A

- (1) modelo: área de una viga cortada de un tronco [U2; propuesto 2.6.6]; (2) límites: radicales, valor absoluto, al infinito [U3; ejemplo 3.4]; (3) continuidad de una función de tres reglas (constantes *A*, *B*) [U3; ejemplo 3.4]; (4) derivada implícita (ang cos) y segunda derivada [U4]; (5) teorema del valor medio [U5; ejercicio 5.5.1]; (6) serie de Maclaurin, tres términos no nulos [U6; propuesto 6.6.2].

2º final 2013-2, tipo A

- (1) inversa de una función por partes; dominio, recorrido y gráficas [U2; ejercicio 2.5.5]; (2) límites: laterales con valor absoluto, al infinito, factorización [U3; ejercicio 3.5.4]; (3) tangentes horizontales, derivación implícita [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) razón de cambio: esquiador en una rampa [U4; ejercicio 4.5.8]; (5) análisis de $\sqrt[3]{x-1}$ y gráfica [U5; ejercicio 5.5.3]; (6) intervalo de convergencia con extremos [U6; ejercicio 6.5.1].

2º final 2001-2, tipo A

- (1) inversa de una función paramétrica (primer cuadrante) y gráficas [U2; propuesto 2.6.4]; (2) límites: trigonométrico, al infinito, radicales [U3; ejercicio 3.5.3]; (3) segunda derivada con ang

4. **Crítico:** $P'(r) = 2 - \frac{16}{r^2} = 0 \Rightarrow r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$ (la raíz negativa no tiene sentido).
5. **Justificación:** $P''(r) = \frac{32}{r^3} > 0$ para $r > 0$: mínimo, y absoluto, pues es el único crítico.
6. Arco: $l = \frac{16}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Ángulo central: $\theta = \frac{l}{r} = 2$ rad. Perímetro: $P = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

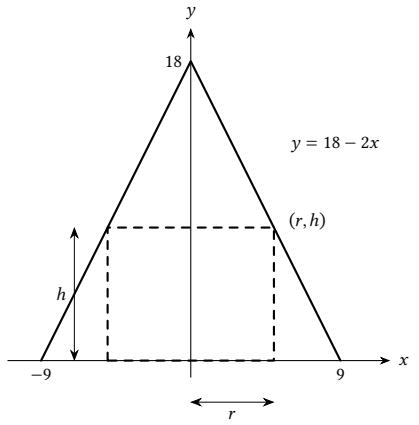
Resultado: $r = 2\sqrt{2}$ m ≈ 2.83 m y $l = 4\sqrt{2}$ m (ángulo central de 2 rad); perímetro mínimo $8\sqrt{2}$ m.

Ejercicio 5.5.7 · Cilindro inscrito en un cono

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 6.

Calcule las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en un cono de radio $R = 9$ cm y altura $H = 18$ cm.

Resolución.



1. **Variables.** Radio r y altura h del cilindro. En el corte vertical, la generatriz del cono es la recta por $(9, 0)$ y $(0, 18)$: $y = 18 - 2x$.
2. **Restricción.** La esquina (r, h) del cilindro toca la generatriz: $h = 18 - 2r$ (o, con triángulos semejantes, $\frac{h}{18} = \frac{9-r}{9}$).
3. **Función objetivo:** $V = \pi r^2 h = \pi r^2(18 - 2r) = \pi(18r^2 - 2r^3)$, con $0 < r < 9$.
4. **Crítico:** $V'(r) = \pi(36r - 6r^2) = 6\pi r(6 - r) = 0 \Rightarrow r = 6$.
5. **Justificación:** $V''(r) = \pi(36 - 12r)$, $V''(6) = -36\pi < 0$: máximo.
6. $h = 18 - 12 = 6$ y $V = \pi \cdot 36 \cdot 6 = 216\pi$.

Resultado: radio 6 cm y altura 6 cm; volumen máximo 216π cm^3.

Ejercicio 5.5.8 · Envase cilíndrico sin tapa

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2019-2, problema 4.

Se quiere construir un envase de 1500 cm^3 con forma de cilindro circular recto sin tapa. Calcule el radio y la altura del envase que emplean la menor cantidad de material.

- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u\, u' \cdot (\cos u)' = -\operatorname{sen} u\, u' \cdot (\tan u)' = \sec^2 u\, u' \cdot (\sec u)' = \sec u \tan u\, u'$.
- $(\cot u)' = -\csc^2 u\, u' \cdot (\csc u)' = -\csc u \cot u\, u'$.
- $(\operatorname{ang\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (\operatorname{ang\,tan} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \cdot (\operatorname{ang\,sec} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y - y_0 = m(x - x_0) \cdot$ normal con $-\frac{1}{m} \cdot Ax + By + C = 0$ tiene $m = -\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \cdot m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \varphi = 90°$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a t, sustituir al final.
- Esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2 \cdot$ cilindro $V = \pi r^2 h \cdot$ cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot$ círculo $A = \pi r^2$.
- Diferencial: $dy = f'(x)\,dx \cdot f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.
- SOLO PLAN 2016 $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \cdot (e^u)' = e^u u' \cdot (a^u)' = a^u \ln a\, u' \cdot (\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u' \cdot (\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u' \cdot (\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- SOLO PLAN 2016 $y = f^g$: $\ln y = g \ln f$, $y' = f^g \left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$.

A.4 Variación de funciones (Unidad 5)

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a,b)$.
- Valor medio: f continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a,b)$.
- Weierstrass: continua en $[a,b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a,b)$.
- $f' > 0$: crece · $f' < 0$: decrece · $f'' > 0$: cóncava $\cup$ · $f'' < 0$: cóncava $\cap$.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a,b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 \cdot$ sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}, l = r\theta \cdot$ cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi rh \cdot$ cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

A.5 Sucesiones y series, solo Plan 2010 (Unidad 6)

- Sucesión: $\lim \frac{c}{n^p} = 0$ $(p > 0)$; $r^n \to 0$ si $|r| < 1 \cdot$ monótona y acotada $\Rightarrow$ converge.
- Término enésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1 \cdot$ serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge $\iff p > 1$.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.

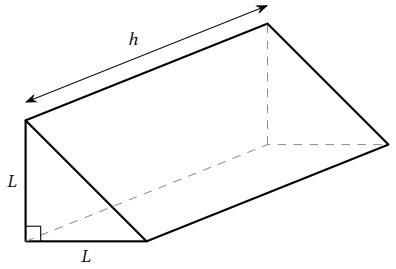
Resultado: 24 unidades de área (rectángulo de $4\sqrt{2}$ por $3\sqrt{2}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 6.

Se fabricará un recipiente con forma de prisma triangular recto. Su sección es un triángulo rectángulo isósceles de catetos L y su longitud es h, como en la figura. Calcule el valor de L que hace mínima la cantidad de material, si el recipiente debe tener una capacidad de 3 m^3. Considere el prisma cerrado: dos caras triangulares y tres rectangulares.



Resultado: $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}}$ m ≈ 2.17 m (con $h = (2 - \sqrt{2})L \approx 1.27$ m).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 5.

Un triángulo rectángulo está formado, en el primer cuadrante, por los ejes coordenados y una recta que pasa por el punto $(2, 3)$. Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo de área mínima.

Resultado: $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,6)$; área mínima 12.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo A, problema 4.

Obtenga el valor de a y el de b tales que la gráfica de $g(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un punto de inflexión en $A(1, 2)$.

Resultado: $a = -1$, $b = 3$: $g(x) = -x^3 + 3x^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 5.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 4.

Para $m(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$: a) obtenga sus valores críticos; b) calcule sus valores extremos absolutos; c) obtenga su punto de inflexión; d) trace su gráfica.

- Término enésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ · serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge $\iff p > 1$.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$: $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide · raíz: $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.
- Leibniz: b_n decreciente y $b_n \to 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ converge · absoluta si $\sum |a_n|$ converge.
- Intervalo: $L = k|x-a| < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{k}$; extremos $a \pm R$ aparte.
- Taylor: $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ · Maclaurin: $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ $(|x| < 1)$ · $\operatorname{sen} x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ · $\cos x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$ $(|x| < 1)$ · $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Serie numérica:** primero el término enésimo; luego geométrica o p; con factoriales o c^n, cociente; con $(-1)^n$, Leibniz y después convergencia absoluta.
2. **Intervalo:** cociente con valor absoluto, despeja $|x-a| < R$, sustituye cada extremo en la serie original y escribe corchetes o paréntesis.
3. **Maclaurin o Taylor:** tabla de derivadas con cuatro o cinco renglones, coeficientes sin simplificar, patrón comprobado con $n = 0, 1, 2$ y término general con $\sum$.
4. Comprueba con el atajo de la serie conocida (sustituir $u = kx$ o la binomial).
5. Escribe el resultado con la serie en $\sum$ y sus primeros términos, y el intervalo si se pidió.

Si no se termina el patrón general, la tabla de derivadas y los primeros términos bien calculados ya valen parte del problema.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Análisis de la gráfica:** dominio, f' factorizada, críticos, f'' factorizada, candidatos a inflexión; todo en una sola tabla de variación.
2. Contesta cada inciso con intervalos y con valores $f(c)$ o coordenadas, en el orden del enunciado.
3. Para la gráfica, marca extremos, inflexiones, $f(0)$ y asíntotas antes de unir con la curva.
4. **Rolle o valor medio:** tres (o dos) renglones de hipótesis con «se cumple» y después la ecuación para c.
5. **Optimación:** dibujo con variables, escribe la plantilla completa y no olvides justificar y dar unidades.

Si no se llega al final, la tabla de signos bien hecha o la función objetivo en una variable ya valen buena parte del problema.

Resultado:

$$3\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3\cdot 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$
$$= 3 - 6x^2 + 2x^4 - \frac{4}{15}x^6 + \cdots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6.5.4 · Serie de Maclaurin de una potencia negativa

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 5.

Obtenga la serie de Maclaurin que representa a $f(x) = -\frac{1}{(x+3)^3}$.

Resolución.

1. Se escribe $f(x) = -(x+3)^{-3}$ y se deriva:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$-(x+3)^{-3}$	$-\frac{1}{3^3}$
1	$3(x+3)^{-4}$	$\frac{3}{3^4}$
2	$-12(x+3)^{-5}$	$-\frac{12}{3^5}$
3	$60(x+3)^{-6}$	$\frac{60}{3^6}$

2. Patrón: los coeficientes $1, 3, 12, 60$ son $\frac{2!}{2}, \frac{3!}{2}, \frac{4!}{2}, \frac{5!}{2}$, es decir, $\frac{(n+2)!}{2}$; el signo es $(-1)^{n+1}$:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)!}{2\cdot 3^{n+3}}.$$

3. Término general, con $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2\cdot 3^{n+3}}x^n.$$

4. Primeros términos: $-\frac{1}{27} + \frac{x}{27} - \frac{2x^2}{81} + \frac{10x^3}{729} - \cdots$

5. Convergencia: el cociente da $\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{|x|}{3} \to \frac{|x|}{3}$; vale para $|x| < 3$. Coincide con la serie binomial de $-\frac{1}{27}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-3}$.

Resultado:

$$-\frac{1}{(x+3)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2\cdot 3^{n+3}}x^n, \quad |x| < 3.$$

6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.6**.

Ejercicio propuesto 6.6.1

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 6.

Determine el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5k}(x-1)^k$.

toda sucesión monótona y acotada es convergente. Para decidir la monotonía se compara a_n con a_{n+1}, o se deriva la función $f(x)$ que da $a_n = f(n)$: si $f'(x) < 0$ para $x \geq 1$, la sucesión es decreciente.

Serie y convergencia. Una *serie* es la suma de los términos de una sucesión: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ Su *suma parcial* n-ésima es $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. La serie es *convergente* y su suma es S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$; si el límite no existe o es infinito, es *divergente*.

Condición necesaria (criterio del término enésimo). Si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La recíproca es **falsa**: $\frac{1}{n} \to 0$ y la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Lo que sí se usa es la contrarrecíproca: **si** $\lim a_n \neq 0$ **(o no existe), la serie diverge**. Con $\lim a_n = 0$, el criterio no decide.

Serie geométrica. Cada término es el anterior por la misma razón r:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1,$$

y diverge si $|r| \geq 1$. En la fórmula, a es el **primer término**, sin importar desde qué índice empieza la suma. Un decimal periódico es una serie geométrica: $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots = \frac{7/10}{1-1/10} = \frac{7}{9}$.

Serie p. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. Con $p = 1$ es la *armónica*. Por ejemplo, $\sum \sqrt[3]{\frac{64}{n^4}} = \sum \frac{4}{n^{4/3}}$ converge, porque $p = \frac{4}{3} > 1$; $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($p = \frac{1}{2}$).

Criterios para series de términos positivos.

- *Comparación directa.* Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge. Si $a_n \geq b_n \geq 0$ y $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ diverge.
- *Comparación en el límite.* Si $a_n, b_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ con $0 < c < \infty$, las dos series tienen el mismo carácter. Se compara con una serie p: se toma $b_n = \frac{1}{n^p}$, con p igual al grado del denominador menos el del numerador.
- *Cociente (D'Alembert).* Sea $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Si $L < 1$, la serie converge (absolutamente); si $L > 1$ o $L = \infty$, diverge; si $L = 1$, el criterio no decide. Es el criterio para factoriales y potencias c^n.
- *Raíz.* Sea $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; se concluye igual que con el cociente. Conviene cuando todo el término está elevado a la n.

Con factoriales: $(n+1)! = (n+1)\,n!$, así que $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

Series alternadas. En $\sum(-1)^n b_n$ con $b_n > 0$, el signo alterna. *Criterio de Leibniz:* si $b_{n+1} \leq b_n$ (decreciente) y $\lim b_n = 0$, la serie converge. La serie es *absolutamente convergente* si $\sum |a_n|$ converge, y *condicionalmente convergente* si converge pero $\sum |a_n|$ diverge. Toda serie absolutamente convergente es convergente. Ejemplo: la armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente.

Serie de potencias. Es una serie con la variable x: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, centrada en a. Converge en un *intervalo de convergencia* centrado en a, de *radio* R: converge absolutamente si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$. En los **extremos** $x = a - R$ y $x = a + R$ puede pasar cualquier cosa, así que el intervalo puede ser $(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$ o

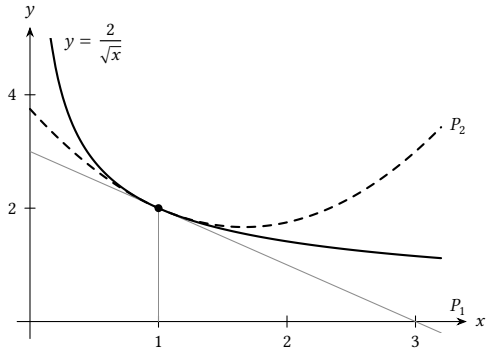
1. Se escribe $f(x) = 2x^{-1/2}$ y se hace la tabla de derivadas, evaluadas en $a = 1$:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$
0	$2x^{-1/2}$	2	2
1	$-x^{-3/2}$	-1	-1
2	$\frac{3}{2}x^{-5/2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$

2. Ningún coeficiente es cero, así que los tres primeros términos no nulos son los de $n = 0, 1, 2$:

$$f(1) = 2, \quad f'(1)(x-1) = -(x-1), \quad \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{3}{4}(x-1)^2.$$

3. En la figura, la recta P_1 (la tangente) y la parábola P_2 se pegan a la curva cerca de $x = 1$.



Resultado: $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2 - (x-1) + \frac{3}{4}(x-1)^2 - \cdots$

6.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 6.5.1 · Intervalo con un extremo abierto

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 6.

Obtenga el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$, incluyendo el análisis de los extremos.

Resolución.

1. $a_n = \frac{(x+1)^n}{n+1}$. Cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+1|^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{|x+1|^n} = |x+1|\,\frac{n+1}{n+2} \;\to\; |x+1|.$$

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge», «monótona», «acotada», «término enésimo»	límite, monotonía o regla de a_n	6.3.1
un decimal periódico, o «calcular su suma» de una serie con r^n	serie geométrica y $\frac{a}{1-r}$	6.3.2
«carácter», «converge o diverge» de $\sum a_n$ sin x; «criterio del cociente»	término enésimo, p, comparación o cociente	6.3.3
un $(-1)^n$ en una serie sin x; «criterio de Leibniz»	Leibniz y convergencia absoluta	6.3.4
«intervalo de convergencia», «análisis de los extremos» de $\sum c_n(x-a)^n$	radio por el cociente y los dos extremos	6.3.5
«serie de Maclaurin», «serie de Taylor en $x = a$», «primeros términos no nulos»	tabla de derivadas y patrón	6.3.6
$\operatorname{sen}(kx)$, $\cos(kx)$, $\frac{1}{(c+x)^m}$, $\sqrt{c-x}$	sustituir en una serie conocida	6.3.7

6.3 Procedimientos

6.3.1 Límite, monotonía y término enésimo de una sucesión

1. **Límite:** si a_n es un cociente de polinomios, divide entre la mayor potencia de n del denominador. Grados iguales: el límite es el cociente de los coeficientes principales; numerador de mayor grado: diverge; de menor grado: 0.
2. Con potencias r^n: saca como factor la de mayor base; $r^n \to 0$ si $|r| < 1$.
3. **Monotonía:** escribe a_n como constante más un resto ($a_n = c + r_n$) y estudia el resto, o deriva $f(x)$ con $a_n = f(n)$; calcula los primeros términos para confirmar.
4. **Acotada:** si es decreciente, a_1 es cota superior y el límite (si existe) es cota inferior.
5. **Término enésimo:** separa signo, numerador y denominador; busca en cada uno una progresión (n, $2n-1$, 2^n, $n!$) y comprueba con $n = 1, 2, 3$.

6.3.2 Suma de una serie geométrica

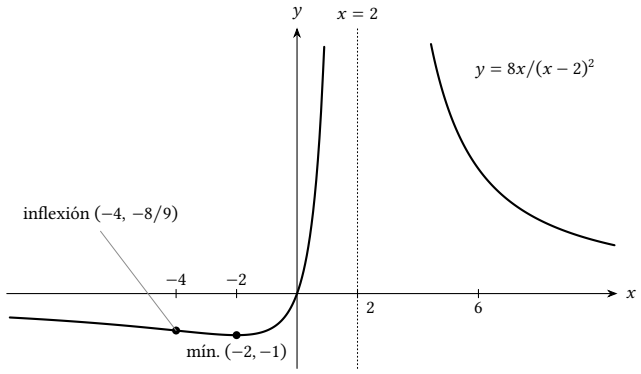
1. Escribe los primeros términos y calcula $r = \frac{a_2}{a_1}$; comprueba con $\frac{a_3}{a_2}$.
2. Si $|r| < 1$, converge; si $|r| \geq 1$, diverge.
3. $S = \frac{\text{primer término}}{1-r}$. En un decimal periódico, cada bloque que se repite es un término.

6.3.3 Carácter de una serie numérica

En este orden:

1. **Término enésimo:** si $\lim a_n \neq 0$, diverge y se acabó.
2. ¿Es geométrica o p? Se decide de inmediato.
3. ¿Hay factoriales o potencias c^n? **Cociente**: simplifica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ antes de tomar el límite.
4. ¿Es un cociente de polinomios o radicales? **Comparación** con la serie p del mismo «grado».

6. Inflexión en $x = -4$: $f(-4) = \frac{-32}{36} = -\frac{8}{9}$. En $x = 2$ no hay inflexión: no está en el dominio y f'' no cambia de signo.

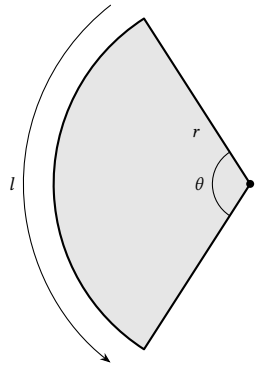


Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, creciente en $(-2, 2)$; b) mínimo relativo $f(-2) = -1$, sin máximos; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$, hacia arriba en $(-4, 2)$ y en $(2, \infty)$; inflexión en $\left(-4, -\frac{8}{9}\right)$.

Ejercicio 5.5.6 · Sector circular de perímetro mínimo

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 5.

Un sector circular de radio r y arco l tiene área 8 m^2. Determine las dimensiones del sector cuyo perímetro es mínimo. (Área del sector: $\frac{rl}{2}$.)



Resolución.

1. **Función objetivo.** El perímetro son dos radios y el arco: $P = 2r + l$.
2. **Restricción.** $\frac{rl}{2} = 8 \;\Rightarrow\; l = \frac{16}{r}$.
3. **Una variable:** $P(r) = 2r + \frac{16}{r}$, con $r > 0$.

tan, evaluada [U4]; (4) razón de cambio: distancia al origen de un punto sobre $y = \operatorname{sen} x$ [U4]; (5) optimación: rectángulo inscrito en una elipse [U5; propuesto 5.6.2]; (6) intervalo de convergencia [U6; propuesto 6.6.1].

2º final 2003-2, tipo A

- (1) inversa de una función con radical; dominio, recorrido y gráficas [U2; ejemplo 2.4]; (2) continuidad de una función por partes con valor absoluto [U3; ejercicio 3.5.5]; (3) segundas derivadas: ang tan y paramétrica [U4; ejercicio 4.5.4]; (4) límites: trigonométrico lateral y radical [U3; propuesto 3.6.2]; (5) serie de Maclaurin [U6; ejercicio 6.5.4]; (6) área del triángulo formado por tangente, normal y eje y [U4]; (7) crecimiento, extremos relativos y absolutos, gráfica [U5; ejercicio 5.5.4].

1er final 2005-2, tipo B

- (1) dominio, recorrido y gráfica [U2; propuesto 2.6.1]; (2) derivada paramétrica evaluada [U4; propuesto 4.6.7]; (3) límites con radicales y trigonométrico [U3; propuesto 3.6.3]; (4) tangentes a $y = 1/x$ perpendiculares a una recta [U4; ejercicio 4.5.5]; (5) razón de cambio: ondas circulares [U4]; (6) optimación: recipiente en forma de prisma triangular, material mínimo [U5; propuesto 5.6.3]; (7) intervalo de convergencia con extremos [U6; ejercicio 6.5.2].

1er final 2006-1, tipo B

- (1) inversa de una función con radical y gráficas [U2; ejercicio 2.5.4]; (2) límites: radicales, trigonométrico, al infinito [U3; propuesto 3.6.4]; (3) continuidad y derivabilidad de una función por partes (constante A) [U4]; (4) derivadas: ang sec y potencias [U4; ejercicio 4.5.1]; (5) crecimiento, concavidad, extremos y gráfica [U5; propuesto 5.6.1]; (6) optimación: cilindro inscrito en un cono [U5; ejercicio 5.5.7]; (7) serie de Maclaurin, tres términos no nulos [U6; propuesto 6.6.3].

2º final 2006-2, tipo A

- (1) composición y producto: dominio y recorrido [U2; propuesto 2.6.2]; (2) límites con radicales y trigonométrico [U3; propuesto 3.6.5]; (3) derivadas: implícita, cadena, paramétrica (cicloide), evaluadas [U4]; (4) tangente a $y = x^2$ que forma 45° con una recta [U4; propuesto 4.6.2]; (5) optimación: triángulo de área mínima por $(2, 3)$ [U5; propuesto 5.6.4]; (6) serie de Maclaurin [U6; propuesto 6.6.4].

Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica, finales

1er final 2016-1, tipo A

- (1) inversa de función con radical en intervalo [U2]; (2) límites (algebraico, al infinito, hiperbólicas) [U3]; (3) recta normal a una parábola [U4]; (4) extremos, monotonía, inflexión y gráfica de cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

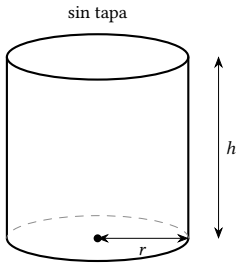
1er final 2016-1, tipo C

- (1) paramétricas a cartesiana (arco de elipse), dominio y recorrido [U2]; (2) límites (al infinito, trigonométrico, función por partes) [U3]; (3) tangente y normal a curva implícita [U4]; (4) extremos, monotonía, inflexión y gráfica de cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2016-2, tipo A

- (1) paramétricas a cartesiana (arco de circunferencia), dominio y recorrido [U2]; (2) límites (radicales, trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) tangentes a curva implícita donde $y = 0$ [U4]; (4) inflexión de un polinomio; extremos de racional con 1a y 2a derivada [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2016-2, tipo D



Resolución.

1. **Función objetivo.** Material: base más pared lateral (sin tapa): $S = \pi r^2 + 2\pi rh$.
2. **Restricción.** $\pi r^2 h = 1500 \;\Rightarrow\; h = \frac{1500}{\pi r^2}$.
3. **Una variable:** $S(r) = \pi r^2 + \frac{3000}{r}$, con $r > 0$.
4. **Crítico:**

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{3000}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{1500}{\pi} \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}} = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}.$$

5. **Justificación:** $S''(r) = 2\pi + \frac{6000}{r^3} > 0$: mínimo.
6. **Altura:** como $\pi r^3 = 1500$, $h = \frac{1500}{\pi r^2} = \frac{\pi r^3}{\pi r^2} = r$.

Resultado: $r = h = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}$ cm ≈ 7.82 cm.

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 5.

Para $f(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo; c) sus máximos y mínimos relativos. Trace su gráfica.

Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$, creciente en $(-2, 1)$; b) cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, hacia abajo en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, inflexión en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{12}\right)$; c) mínimo relativo $f(-2) = -\frac{13}{3}$, máximo relativo $f(1) = \frac{1}{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 5.

Calcule el área máxima que puede tener un rectángulo de dimensiones variables inscrito en la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$: $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide · raíz: $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.
- Leibniz: b_n decreciente y $b_n \to 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ converge · absoluta si $\sum |a_n|$ converge.
- Intervalo: $L = k|x - a| < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{k}$; extremos $a \pm R$ aparte.
- Taylor: $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ · Maclaurin: $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ $(|x| < 1)$ · $\operatorname{sen} x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ · $\cos x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$ $(|x| < 1)$ · $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Resultado: a) $x = \frac{\pi}{4}$; b) máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $x = \frac{\pi}{4}$, mínimo absoluto -1 en $x = -\frac{\pi}{2}$; c) $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 115.

5.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar los críticos donde f' no existe.** En $\sqrt[3]{x-1}$ o $x^{2/3}$, el crítico no sale de $f' = 0$, sino del denominador de f'.
2. **Llamar extremo a todo crítico.** Si f' no cambia de signo (x^3 en 0, $\sqrt[3]{x-1}$ en 1) no hay extremo.
3. **Llamar inflexión a todo cero de f''.** Hay que comprobar que f'' cambia de signo: x^4 tiene $f''(0) = 0$ y es cóncava hacia arriba en todas partes.
4. **Inflexión fuera del dominio.** En $\frac{8x}{(x-2)^2}$, $x = 2$ separa intervalos de signo, pero ahí no hay punto de la gráfica.
5. **Dar solo la abscisa.** «Valor máximo» es $f(c)$; «punto de inflexión» son las coordenadas $(c, f(c))$.
6. **Rolle y valor medio sin revisar hipótesis.** Cada hipótesis se escribe y se califica: «se cumple» o «no se cumple». Y c debe estar en el intervalo *abierto*.
7. **Extremos absolutos sin los extremos del intervalo.** En $[a, b]$ siempre se evalúan $f(a)$ y $f(b)$.
8. **Optimación con dos variables.** Si no se usa la restricción para dejar una sola variable, la derivada no tiene sentido.
9. **No justificar el máximo o el mínimo.** Un crítico no basta: segunda derivada, cambio de signo o comparación con los extremos del dominio.
10. **Contar mal las caras o los tramos.** Un envase sin tapa no lleva πr^2 dos veces; el perímetro de un sector lleva dos radios más el arco.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- Valor medio: f continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a, b)$.
- Weierstrass: continua en $[a, b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- $f' > 0$: crece · $f' < 0$: decrece · $f'' > 0$: cóncava $\cup$ · $f'' < 0$: cóncava $\cap$.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a, b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ · sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}, l = r\theta$ · cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi rh$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Las líneas marcadas SOLO PLAN 2016 son solo del Plan 2016; la Unidad 6 es solo del Plan 2010 (en el Plan 2016, las series están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5).

A.1 Funciones (Unidad 2)

- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \leq 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot D_{fg} = D_f \cap D_g \cdot$ en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \neq 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro (h, k); $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2 + a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h) + k$: traslación $(h, k) \cdot -f(x)$: reflejo en el eje $x \cdot f(-x)$: en el eje y.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cdot \operatorname{ang\,cos}: [-1, 1] \to [0, \pi] \cdot \operatorname{ang\,tan}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{\ln x} = x\ (x > 0)$, $\ln e^x = x \cdot \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot a^x = e^{x \ln a}$.
- SOLO PLAN 2016 $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

A.2 Límites y continuidad (Unidad 3)

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \cdot (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[q]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \operatorname{mcm}(p, q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1 \cdot \frac{\tan u}{u} \to 1 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\operatorname{sen} ku}{u} \to k \cdot \frac{\operatorname{sen} au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en c: $f(c)$ definida · $\lim_{x\to c} f(x)$ existe · $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty \cdot \tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty \cdot \operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

A.3 La derivada (Unidad 4)

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot$ derivable $\Rightarrow$ continua.
- $(uv)' = uv' + vu' \cdot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2} \cdot (u^n)' = nu^{n-1}u' \cdot \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno utilizará los conceptos fundamentales de las sucesiones y de las series para determinar su carácter y para representar funciones por medio del desarrollo en series de potencias.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 las sucesiones y series no son de Cálculo y Geometría Analítica: son el tema 1 de *Cálculo Integral* y se estudian en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5. Si tu plan es el 2016, salta esta unidad.
- **Frecuencia:** es el tema 6 de Cálculo Diferencial. Sale un problema en cada uno de los 10 finales revisados: serie de Maclaurin o de Taylor en 6 e intervalo de convergencia en 4.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 6.1 (30 min) y copia en una hoja la tabla de series conocidas.
  2. Aprende los procedimientos 6.3.5 (intervalo con extremos) y 6.3.6 (tabla de derivadas): son los dos problemas del examen.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 6.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 6.5.1 a 6.5.4 con cronómetro: 15 min cada uno.

6.1 Conceptos y expresiones

Sucesión. Una *sucesión* infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$ y cuyos valores son números reales: $a_1, a_2, a_3, \dots$ Se escribe $\{a_n\}$, y la regla a_n es su *término enésimo*. Por ejemplo, $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ tiene término enésimo $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$: el signo alterna y el numerador y el denominador avanzan de uno en uno.

Límite y carácter de una sucesión. Si a_n se acerca tanto como se quiera a un número L cuando n crece, se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y se dice que la sucesión es *convergente* (ese es su *carácter*); si el límite no existe o es infinito, es *divergente*. Los límites se calculan como en la Unidad 3, con $n \to \infty$: se divide entre la mayor potencia de n. Dos límites que se usan siempre:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0 \ \ (p>0), \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r|<1, \\ \infty & \text{si } r>1. \end{cases}$$

Monótona y acotada. La sucesión es *creciente* si $a_n < a_{n+1}$ para todo n (*no decreciente* si $a_n \le a_{n+1}$) y *decreciente* si $a_n > a_{n+1}$ (*no creciente* si $a_n \ge a_{n+1}$); en cualquiera de esos casos es *monótona*. Es *acotada* si existen m y M con $m \le a_n \le M$ para todo n. Por ejemplo, $\left\{n + \frac{1}{n}\right\}$ es creciente y acotada inferiormente por 2, pero no superiormente: diverge. **Teorema:**

Resultado: radio 1; con el análisis de los extremos, $[0, 2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 115.

Ejercicio propuesto 6.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Obtenga los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos 2x$.

Resultado: $\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots$

→ Resolución en el Apéndice E, p. 116.

Ejercicio propuesto 6.6.3

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 7.

Obtenga los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \sqrt{4-x}$.

Resultado: $\sqrt{4-x} = 2 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} - \cdots$

→ Resolución en el Apéndice E, p. 116.

Ejercicio propuesto 6.6.4

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 6.

Obtenga el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen} 3x$.

Resultado: $\operatorname{sen} 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 - \cdots$, para todo x.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 116.

6.7 Errores frecuentes

1. **Leer al revés la condición necesaria.** $\lim a_n = 0$ *no* asegura que la serie converja (la armónica); solo $\lim a_n \neq 0$ asegura que diverge.
2. **Confundir sucesión y serie.** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge (a 0); $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
3. **Primer término equivocado en la geométrica.** En $\frac{a}{1-r}$, a es el primer término que se suma, no el coeficiente de r^n.
4. **Olvidar el valor absoluto en el cociente.** Sin él, $L = x - 3$ no lleva a $|x-3| < 1$.
5. **No analizar los extremos.** Ahí el cociente da $L = 1$ y no decide: se sustituye cada extremo en la serie *original*.
6. **Resolver mal $|x-a| < R$.** Es $a - R < x < a + R$: con $(x+1)^n$ el centro es -1, no 1.
7. **Simplificar mal los factoriales.** $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$ y $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+1)(2n+2)$.
8. **Olvidar el $n!$** al pasar de $f^{(n)}(a)$ al coeficiente, o la regla de la cadena al derivar $\cos 2x$ o $\sqrt{4-x}$.
9. **Contar los ceros como términos.** Los «tres primeros términos no nulos» de $\cos 2x$ son los de grado 0, 2 y 4.
10. **Taylor con x^n.** En $x = a$ la potencia es $(x-a)^n$: en $a = -1$ es $(x+1)^n$.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

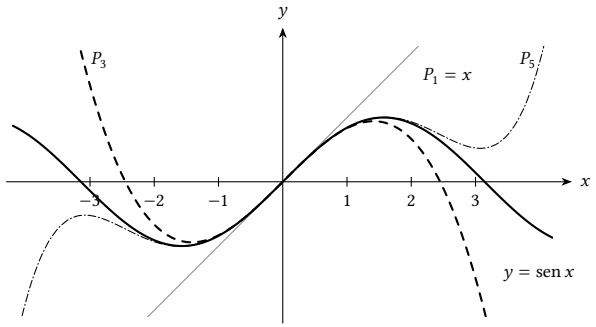
- Sucesión: $\lim \frac{c}{n^p} = 0$ $(p>0)$; $r^n \to 0$ si $|r|<1$ · monótona y acotada ⇒ converge.

$(a-R, a+R]$; por eso los exámenes piden «incluir el análisis de los extremos». Si converge para todo x, $R=\infty$.

Series de Taylor y de Maclaurin. Si f tiene derivadas de todos los órdenes en $x=a$, su *serie de Taylor* en $x=a$ es

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

Con $a=0$ se llama *serie de Maclaurin*: $f(x)=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Cortada en el término n, es el *polinomio de Taylor* P_n, que aproxima a f cerca de a, mejor cuanto más términos tiene (figura). Así calcula una computadora $\operatorname{sen} x$.



Series conocidas. Con R el radio de convergencia:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots, \qquad R=1,$$
$$\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots, \qquad R=\infty,$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots, \qquad R=\infty,$$
$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots, \qquad R=1.$$

La última es la *serie binomial*, para cualquier exponente m (negativo o fraccionario).

6.2 Cómo reconocer el problema

2. $|x+1|<1 \iff -2<x<0$. Centro -1, radio 1.
3. Extremo $x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=1+\frac12+\frac13+\cdots$, la armónica: diverge.
4. Extremo $x=-2$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, alternada con $b_n=\frac{1}{n+1}$ decreciente y con límite 0: converge por Leibniz (condicionalmente).

Resultado: el intervalo de convergencia es $[-2,0)$, es decir, $-2\le x<0$.

Ejercicio 6.5.2 · Intervalo con comparación en los extremos

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 7.

Determine el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+3}$, analizando sus extremos.

Resolución.

1. $a_n=\frac{x^n}{n^2+3}$. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\,\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\ \to\ |x|.$$
2. $|x|<1 \iff -1<x<1$. Centro 0, radio 1.
3. Extremo $x=1$: $\sum\frac{1}{n^2+3}$. Como $0<\frac{1}{n^2+3}<\frac{1}{n^2}$ y $\sum\frac{1}{n^2}$ es una serie p con $p=2>1$, converge por comparación directa.
4. Extremo $x=-1$: $\sum\frac{(-1)^n}{n^2+3}$. La serie de sus valores absolutos es la del paso anterior, convergente: converge absolutamente.

Resultado: el intervalo de convergencia es $[-1,1]$.

Ejercicio 6.5.3 · Serie de Maclaurin de $3\cos 2x$

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 6.

Determine el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)=3\cos(2x)$.

Resolución.

1. Tabla de derivadas en $a=0$:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$3\cos 2x$	3
1	$-6\operatorname{sen}2x$	0
2	$-12\cos 2x$	$-12=-3\cdot 2^2$
3	$24\operatorname{sen}2x$	0
4	$48\cos 2x$	$48=3\cdot 2^4$

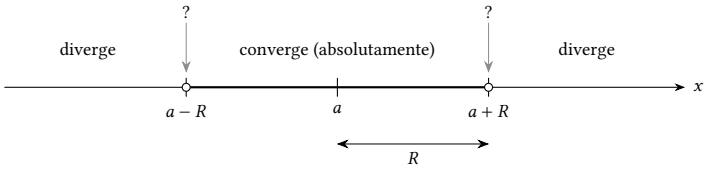
2. Patrón: las derivadas impares se anulan en 0; las pares son $f^{(2n)}(0)=3(-1)^n 2^{2n}$.
3. Término general: $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}=\frac{3(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$.
4. Primeros términos:
$$3-\frac{3\cdot 4}{2}x^2+\frac{3\cdot 16}{24}x^4-\frac{3\cdot 64}{720}x^6+\cdots$$
$$=3-6x^2+2x^4-\frac{4}{15}x^6+\cdots$$
5. Comprobación con el atajo: en $\cos u=\sum\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$ se sustituye $u=2x$ y se multiplica por 3. Vale para todo x.

6.3.4 Serie alternada: Leibniz y convergencia absoluta

1. Escribe la serie como $\sum(-1)^n b_n$ con $b_n > 0$.
2. Comprueba $\lim b_n = 0$. Si no es 0, la serie diverge.
3. Comprueba que b_n decrece: $f'(x) < 0$ con $b_n = f(n)$, o $b_{n+1} \le b_n$ directamente.
4. Con las dos condiciones, converge (Leibniz).
5. Para clasificarla, estudia $\sum b_n$: si converge, la convergencia es absoluta; si diverge, condicional.

6.3.5 Intervalo de convergencia con análisis de los extremos

1. Escribe el término a_n completo, con la x.
2. **Cociente:** $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Los cocientes de potencias de n tienden a 1 y queda $L = k|x-a|$.
3. Impón $L < 1$: $|x-a| < \frac{1}{k} = R$. Despeja: $a - R < x < a + R$. Si $L = 0$ para todo x, el intervalo es $(-\infty, \infty)$.
4. **Extremo derecho:** sustituye $x = a + R$ en la serie original y estudia la serie numérica (casi siempre una p o una armónica).
5. **Extremo izquierdo:** sustituye $x = a - R$; suele quedar alternada: Leibniz, o convergencia absoluta si $\sum|a_n|$ es una p con $p > 1$.
6. Escribe el intervalo con corchete en los extremos que convergen y paréntesis en los que divergen.



en $x = a \pm R$ el cociente da $L = 1$:
cada extremo se sustituye y se analiza aparte

6.3.6 Serie de Maclaurin o de Taylor con la tabla de derivadas

1. Haz una tabla con las columnas n, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(a)$ y $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Deriva hasta $n = 3$ o $n = 4$. Escribe las raíces como exponentes: $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2x^{-1/2}$.
2. Evalúa en $x = a$ (en Maclaurin, $a = 0$) sin simplificar los coeficientes numéricos: así se ve el patrón.
3. Si se piden «los primeros términos no nulos», salta los ceros y sigue derivando hasta tener los que se piden.
4. **Patrón:** identifica el signo ($(-1)^n$ o $(-1)^{n+1}$), los factoriales y las potencias; escribe $f^{(n)}(a)$ en general y compruébalo con $n = 0, 1, 2$.
5. **Término general:** $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; simplifica los factoriales.
6. Escribe la serie con $\sum$ y sus primeros términos. Si se pide el intervalo, aplica 6.3.5 al término general.

6.3.7 Atajos: sustituir en una serie conocida

1. $\operatorname{sen}(kx)$, $\cos(kx)$: sustituye $u = kx$ en la serie de $\operatorname{sen} u$ o $\cos u$: $(kx)^{2n} = k^{2n}x^{2n}$. El intervalo sigue siendo $(-\infty, \infty)$.
2. $\cos^2 x$ o $\operatorname{sen}^2 x$: usa $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ y $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, y después el paso anterior.
3. $\frac{1}{c-x} = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1-x/c} = \sum\frac{x^n}{c^{n+1}}$, válida para $|x| < c$.
4. $(c+x)^m = c^m\left(1+\frac{x}{c}\right)^m$ y la serie binomial con $\frac{x}{c}$ en lugar de x; válida para $|x| < |c|$.
5. El atajo sirve para comprobar el resultado de la tabla de derivadas. Si el enunciado pide la serie «por definición» o con derivadas, entrega la tabla.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Intervalo de convergencia con extremos

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 6.

Obtenga el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^3}$, incluyendo el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Término enésimo: $a_n = \frac{(x-3)^n}{n^3}$; el siguiente es $a_{n+1} = \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3}$.
2. Criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-3|^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{|x-3|^n} = |x-3|\left(\frac{n}{n+1}\right)^3.$$

   Como $\frac{n}{n+1} \to 1$, $L = |x-3|$.
3. Converge absolutamente si $|x-3| < 1$, es decir, $2 < x < 4$. Centro 3 y radio $R = 1$.
4. Extremo $x = 4$: $\sum\frac{1^n}{n^3} = \sum\frac{1}{n^3}$, serie p con $p = 3 > 1$: converge.
5. Extremo $x = 2$: $\sum\frac{(-1)^n}{n^3}$. Sus valores absolutos forman la misma serie p convergente, así que converge absolutamente.
6. Los dos extremos se incluyen.

Resultado: el intervalo de convergencia es $[2, 4]$, es decir, $2 \le x \le 4$.

Ejemplo resuelto · Tres términos de una serie de Taylor

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 6.

Obtenga los tres primeros términos no nulos de la serie de Taylor de $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ en $x = 1$.

Resolución.