| Función | Derivada | Función | Derivada |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen} u$ | $\cos u\, u'$ | $\cos u$ | $-\operatorname{sen} u\, u'$ |
| $\tan u$ | $\sec^2 u\, u'$ | $\cot u$ | $-\csc^2 u\, u'$ |
| $\sec u$ | $\sec u \tan u\, u'$ | $\csc u$ | $-\csc u \cot u\, u'$ |

**Trigonométricas inversas.** Los exámenes escriben ang sen $x$, ang tan $x$ (en otros textos, «arc sen» o $\operatorname{sen}^{-1} x$).

| Función | Derivada | Función | Derivada |
|---|---|---|---|
| ang sen $u$ | $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | ang cos $u$ | $-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| ang tan $u$ | $\frac{u'}{1+u^2}$ | ang cot $u$ | $-\frac{u'}{1+u^2}$ |
| ang sec $u$ | $\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$ | ang csc $u$ | $-\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$ |

El valor absoluto de ang sec y ang csc corresponde al recorrido $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de ang sec.

Muchos libros eligen otro recorrido y escriben $u\sqrt{u^2-1}$ sin valor absoluto; para $u > 1$ las dos fórmulas coinciden.

**Derivada de la función inversa.** Si $f$ es derivable e invertible y $f'(x) \neq 0$, la inversa es derivable y

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Por ejemplo, para $f(x) = x^3 + x$ se tiene $f(1) = 2$ y $f'(1) = 4$, así que $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{4}$ sin despejar la inversa. Así se obtienen las fórmulas de las inversas: si $y = \text{ang sen } x$, entonces $x = \operatorname{sen} y$, $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Derivación implícita.** Si $y$ está definida por una ecuación $F(x, y) = 0$ sin despejar, se deriva cada término respecto a $x$ tratando $y$ como función de $x$: $\frac{d}{dx} y^2 = 2y\, y'$, $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} y = \cos y\, y'$. Después se despeja $y'$.

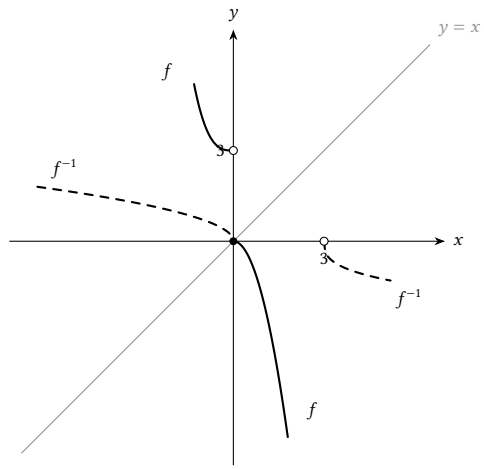
**Derivación paramétrica.** Si $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

La segunda derivada **no** es $\frac{y''(t)}{x''(t)}$: se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a $t$ y se divide otra vez entre $\frac{dx}{dt}$.








**Resultado:** $f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{x}{2}}$ si $x \leq 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3-x}$ si $x > 3$; $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ y $R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.

### Ejercicio 2.5.6 · Paramétricas a forma explícita

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.*

Sea la función

$$f: \begin{cases} x = 3 + 2\operatorname{sen}\theta \\ y = 4\cos^2\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

a) Determine la forma explícita de su regla de correspondencia. b) Obtenga el dominio y el rango de $f$. c) Trace la gráfica de $f$.

**Resolución.**

1. **Eliminar el parámetro:** $\operatorname{sen}\theta = \frac{x-3}{2}$ y $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, así que
$$y = 4\left[1 - \frac{(x-3)^2}{4}\right] = 4 - (x-3)^2.$$
2. **Dominio:** en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen}\theta$ va de 0 a 1, así que $x$ va de 3 a 5: $D_f = [3, 5]$.
3. **Rango:** $\cos^2\theta$ va de 1 a 0, así que $y$ va de 4 a 0: $R_f = [0, 4]$.
4. **Gráfica:** arco de la parábola de vértice $(3, 4)$ que abre hacia abajo, de $(3, 4)$ $(\theta = 0)$ a $(5, 0)$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$.

# Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

↑ Volver al índice

**Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno aplicará el concepto de la derivada y sus interpretaciones física y geométrica, en la resolución de problemas.

**Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 4).** El alumno aplicará la derivada de una función real de variable real en la resolución de problemas.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia:** es la unidad que más sale. Plan 2010: 20 problemas en los 10 finales revisados, de uno a tres por examen: cálculo de derivadas (implícita, paramétrica, orden superior) 8, recta tangente y normal 5, razón de cambio 4, derivabilidad de una función por partes 2 y ángulo entre curvas 1. Plan 2016: 44 problemas en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (2016-1 a 2026-2): tangente y normal 16, cálculo de derivadas 14, razón de cambio 9, ángulo entre curvas 3 y derivabilidad 2; además, 17 problemas en los 5 segundos parciales revisados (ahí aparece la derivada por definición).
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Aprende las tablas de derivadas de la sección 4.1 (30 min): sin ellas no sale nada.
  2. Lee las plantillas 4.3.4 (implícita) y 4.3.6 (tangente y normal) y sigue el ejemplo 1 tapando la resolución.
  3. Lee la plantilla de razón de cambio (4.3.8) y sigue el ejemplo 2.
  4. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro: 15 min cada uno. Si llevas el Plan 2016, agrega la sección 4.3.10.

## 4.1 Conceptos y expresiones

**Definición.** La derivada de $f$ en $x$ es el límite del cociente de incrementos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

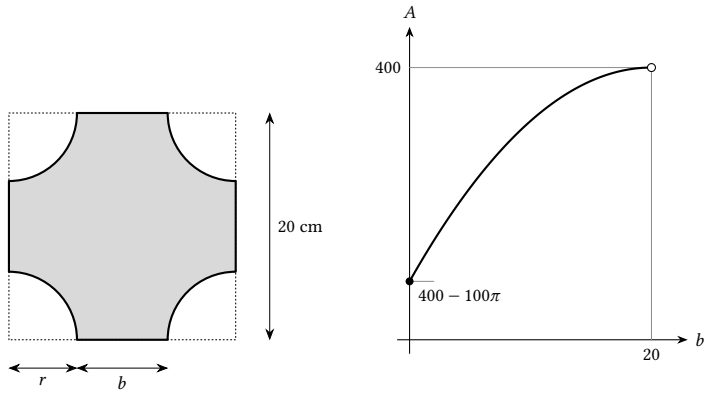
si existe. Otras notaciones: $y'$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $D_x f$. Si el límite existe en $x_0$, se dice que $f$ es *derivable* en $x_0$.

**Interpretación geométrica.** El cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la pendiente de la recta *secante* que pasa por $P(x, f(x))$ y $Q(x+h, f(x+h))$. Cuando $h \to 0$, $Q$ se acerca a $P$ y la secante gira hasta la recta *tangente*: $f'(x)$ es la pendiente de la tangente en $P$.





1. **Variables:** $r$, radio de los cuartos de círculo, y $b$. Cada lado mide $r + b + r = 20$, así que $r = \frac{20-b}{2}$.
2. **Área:** el cuadrado menos cuatro cuartos de círculo (un círculo completo): $A = 400 - \pi r^2$.
3. **Sustitución:**
$$f(b) = 400 - \pi \left(\frac{20-b}{2}\right)^2 = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2.$$
4. **Dominio:** $b \geq 0$ y $r > 0$ (si $r = 0$ no hay recorte ni cruz), es decir, $0 \leq b < 20$. Con $b = 0$ los cuartos de círculo se tocan en el punto medio de cada lado.
5. **Recorrido:** $f$ es creciente en $[0, 20)$ ($(20-b)^2$ decrece). $f(0) = 400 - 100\pi \approx 85.8$ y $f(b) \to 400$ cuando $b \to 20$: $R_f = [400 - 100\pi, 400)$.
6. **Gráfica:** arco de parábola que abre hacia abajo con vértice en $(20, 400)$, punto lleno en $(0, 400 - 100\pi)$ y vacío en $(20, 400)$.




**Resultado:** $f(b) = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2$ cm$^2$, con $D_f = [0, 20)$ y $R_f = [400 - 100\pi, 400)$. Si se admite $b = 20$ (el cuadrado sin recortes), el dominio es $[0, 20]$ y el recorrido $[400 - 100\pi, 400]$.

## 2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

### Ejercicio propuesto 2.6.1

*Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 1.*

Obtenga el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ y trace su gráfica.

**Resultado:** $D_f = (1, \infty)$, $R_f = (0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

### Ejercicio propuesto 3.6.4

*Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{2x-2}}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x}, \quad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+8x+6}{x^2+4x-9}.$$

**Resultado:** a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

### Ejercicio propuesto 3.6.5

*Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

**Resultado:** a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

### Ejercicio propuesto 3.6.6

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 2.*

Sea $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-x}$.

a) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontal y vertical de la gráfica de $g$.
b) Calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.
c) Trace la gráfica de $g$.

**Resultado:** a) horizontal $y = 1$, vertical $x = 0$; b) 0; c) la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ con un hueco en $(1, 0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

## 3.7 Errores frecuentes

1. **No sustituir primero.** Varios incisos se resuelven por sustitución directa; factorizar o racionalizar ahí es tiempo perdido.
2. **Escribir $\frac{0}{0} = 1$ o $\frac{0}{0} = 0$.** $\frac{0}{0}$ es una forma indeterminada: indica que hay que transformar, no es un resultado.
3. **Cancelar antes de factorizar.** Solo se cancelan factores: en $\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ no se «tacha» $\sqrt{x}$.
4. **Olvidar el signo al racionalizar.** $4 - x = -(x - 4)$: el signo menos llega al resultado (como en $-3$ y $-\frac{2}{3}$ de los propuestos).
5. **Armar mal el límite notable.** $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ no tiende a 1, sino a 3: el denominador debe ser $3x$.





### Ejercicio propuesto 2.6.6

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.*

De un tronco de sección circular de diámetro $D$ se cortará una viga de sección rectangular de ancho $x$. Exprese el área de la sección de la viga en función del ancho $x$.

**Resultado:** $A(x) = x\sqrt{D^2 - x^2}$, con $0 < x < D$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

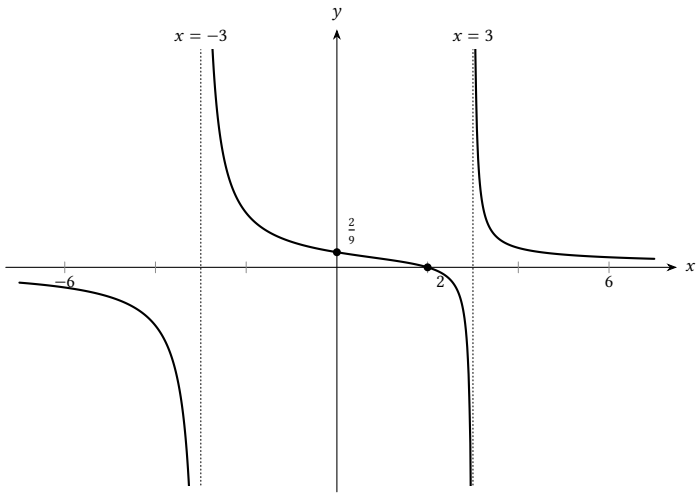
## 2.7 Errores frecuentes

1. **Dominio de $f^{-1}$ con su fórmula.** $\sqrt{3-x}$ existe para $x \le 3$, pero en el ejercicio 2.5.7 el dominio de $f^{-1}$ es $(0, 3]$: es el recorrido de $f$.
2. **Signo de la raíz al despejar.** Al despejar $x$ de $x^2 = \ldots$ aparece $\pm$; el signo lo decide el dominio de $f$, no la costumbre de tomar el positivo.
3. **Dominio de la composición con la fórmula simplificada.** $e^{\ln(x-2)} + 2 = x$ solo para $x > 2$. Se escribe primero $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$.
4. **Confundir $f \circ g$ con $g \circ f$** o con el producto $fg$.
5. **Olvidar la condición estricta del denominador.** $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ pide $x > 1$, no $x \ge 1$.
6. **Extremos mal marcados.** En la gráfica de $f^{-1}$, cada punto lleno o vacío de $f$ pasa con el mismo tipo a la posición $(b, a)$.
7. **Paramétricas sin el intervalo del parámetro.** La forma cartesiana sola ($y = 3 - x^2$) no dice qué arco es; el dominio y el recorrido salen de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ en el intervalo dado.
8. **Recorrido de una función por partes como el de una sola regla.** Cada rama se evalúa *solo* en su intervalo y luego se unen los recorridos.
9. **Modelo con dos variables.** El resultado debe depender solo de la variable pedida; la otra se elimina con la relación del enunciado. Y siempre lleva dominio.

## 2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \ge 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \ne 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \le 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot D_{fg} = D_f \cap D_g \cdot$ en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \ne 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro $(h, k)$; $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2 + a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h) + k$: traslación $(h, k) \cdot -f(x)$: reflejo en el eje $x \cdot f(-x)$: en el eje $y$.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cdot \operatorname{ang\,cos} : [-1, 1] \to [0, \pi] \cdot \operatorname{ang\,tan} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{\ln x} = x\ (x > 0)$, $\ln e^x = x \cdot \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot a^x = e^{x \ln a}$.
- SOLO PLAN 2016 $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

4. **Intersecciones:** con el eje $x$, en $(2,0)$; con el eje $y$, $f(0)=\frac{2}{9}$.
5. **Signos:** $f<0$ en $(-\infty,-3)$ y en $(2,3)$; $f>0$ en $(-3,2)$ y en $(3,\infty)$.




**Resultado:** asíntotas verticales $x=-3$ y $x=3$; asíntota horizontal $y=0$; la gráfica es la de la figura.

### Ejercicio 3.5.8 · Dos constantes para que una función de tres reglas sea continua

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo A, problema 6.*

Calcule los valores de $m$ y $n$ para que la función sea continua en los reales, y trace su gráfica con esos valores:

$$g(x)=\begin{cases}-x^3+m & \text{si } x\le 0,\\ -\frac{x}{2}+1 & \text{si } 0<x\le 2,\\ \sqrt{x-n} & \text{si } x>2.\end{cases}$$

**Resolución.**

1. Las dos primeras reglas son polinomios. La raíz está definida y es continua para $x>2$ si $n\le 2$. Los puntos de cambio son $x=0$ y $x=2$.
2. **En $x=0$.** Condición 1: $g(0)=m$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 0^-}(-x^3+m)=m$ y $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{2}+1\right)=1$; el límite existe si $m=1$. Condición 3: $1=g(0)$; se cumple.
3. **En $x=2$.** Condición 1: $g(2)=-1+1=0$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 2^-}g(x)=0$ y $\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-n}=\sqrt{2-n}$; el límite existe si $\sqrt{2-n}=0$, es decir, $n=2$. Condición 3: $0=g(2)$; se cumple.
4. **Gráfica:** $1-x^3$ para $x\le 0$ (pasa por $(-1,2)$), el segmento de $(0,1)$ a $(2,0)$ y la media parábola $\sqrt{x-2}$ desde $(2,0)$ (pasa por $(6,2)$).





# Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes

↑ Volver al índice

**Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno aplicará el concepto de límite para calcular el límite de una función y para determinar su continuidad.

**Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 3).** El alumno calculará el límite de una función real de variable real y analizará la continuidad de la misma.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia:** Plan 2010: sale en los 10 finales revisados, con 12 problemas (9 de límites y 3 de continuidad); casi siempre es el problema 2, con dos o tres incisos. Plan 2016: en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (2016-1 a 2026-2) hay un problema de esta unidad: 28 de límites, 8 de continuidad y 2 de asíntotas con gráfica. En el primer parcial salen dos problemas (20 en 10 parciales): límites, continuidad con constantes y asíntotas.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y la tabla de la sección 3.2 (20 min).
  2. Aprende las técnicas de la sección 3.3: factorizar, racionalizar, cambio de variable, $\frac{\operatorname{sen} u}{u}\to 1$ y dividir entre la mayor potencia.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 3.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro: 5 minutos por inciso de límite y 12 minutos por problema de continuidad o de asíntotas.
- **Sin L'Hôpital:** los enunciados de los dos planes dicen «sin emplear la regla de L'Hôpital». Esa regla se enseña en Cálculo Integral y en este cuaderno no se usa.

## 3.1 Conceptos y expresiones

**Límite.** $\lim_{x\to a}f(x)=L$ significa que $f(x)$ se acerca tanto como se quiera a $L$ cuando $x$ se acerca a $a$ sin llegar a $a$. Lo que pasa *en* $x=a$ no importa: $f(a)$ puede valer otra cosa o no existir. En la definición formal, para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<|x-a|<\delta$ implica $|f(x)-L|<\varepsilon$. Los exámenes no piden demostraciones con $\varepsilon$ y $\delta$; piden *calcular* límites.

**Límites laterales.** $\lim_{x\to a^-}f(x)$ usa solo valores $x<a$, y $\lim_{x\to a^+}f(x)$ solo valores $x>a$. El límite existe si y solo si los dos laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L \iff \lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=L.$$

### Ejercicio 3.5.4 · Valor absoluto, cambio de variable al infinito y factorización

*Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule, si existe, cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\left(x - x\cos\frac{1}{x}\right), \qquad \text{c) } \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}.$$

**Resolución.**

**a)** Laterales (sección 3.3.8):

1. Si $x \to 1^+$, $|x-1| = x-1$ y el cociente vale 1.
2. Si $x \to 1^-$, $|x-1| = -(x-1)$ y el cociente vale $-1$.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe.

**b)** Forma $\infty\cdot 0$: $x - x\cos\frac{1}{x} = x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

1. Cambio de variable $u = \frac{1}{x}$: si $x\to+\infty$, $u\to 0^+$, y $x = \frac{1}{u}$.
2. $\frac{1-\cos u}{u} = u\cdot\frac{1-\cos u}{u^2} \to 0\cdot\frac{1}{2} = 0$.

**c)** Forma $\frac{0}{0}$. Suma de cubos: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Se cancela $x+1$ y se sustituye: $(-1)^2-(-1)+1 = 3$.

**Resultado:** a) no existe (laterales $-1$ y 1); b) 0; c) 3.

### Ejercicio 3.5.5 · Continuidad de una función con valor absoluto

*Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 2.*

Determine si la función $f$ es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2-|x| & \text{si } x\in(-2,2),\\ x^2-4 & \text{si } x\notin(-2,2).\end{cases}$$

**Resolución.**

1. Dominio: todos los reales. En $(-2,2)$, $2-|x|$ es continua (el valor absoluto lo es); fuera, $x^2-4$ es un polinomio. Los puntos de cambio son $x=2$ y $x=-2$.
2. **En $x=2$.** Condición 1: $2\notin(-2,2)$, así que $f(2) = 2^2-4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 2^-}(2-|x|) = 2-2 = 0, \qquad \lim_{x\to 2^+}(x^2-4) = 0;$$

   el límite existe y vale 0; se cumple. Condición 3: $0 = f(2)$; se cumple.
3. **En $x=-2$.** Condición 1: $f(-2) = (-2)^2-4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2-4) = 0, \qquad \lim_{x\to -2^+}(2-|x|) = 2-2 = 0;$$

   se cumple. Condición 3: $0 = f(-2)$; se cumple.





El tercero se obtiene multiplicando por $1+\cos u$:

$$\frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1-\cos^2 u}{u^2(1+\cos u)} = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^2\frac{1}{1+\cos u} \to 1\cdot\frac{1}{2}.$$

La variable $u$ puede ser cualquier expresión que tienda a cero: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\to 1$ y $\frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}\to 1$ si $x\to 3$. El argumento del seno y el denominador deben ser *iguales*.

**Límites al infinito.** $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca a $L$ cuando $x$ crece sin cota. Lo básico es $\frac{k}{x^n}\to 0$ ($n>0$). Cuidado con las raíces: $\sqrt{x^2} = |x|$, que vale $x$ si $x\to\infty$ y $-x$ si $x\to-\infty$.

**Límites infinitos y asíntotas.** $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ significa que $f(x)$ crece sin cota cuando $x$ se acerca a $a$ por la derecha. Entonces:

- la recta $x=a$ es **asíntota vertical** si al menos un límite lateral en $a$ es $\infty$ o $-\infty$ (en una racional simplificada, donde se anula el denominador y no el numerador);
- la recta $y=L$ es **asíntota horizontal** si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

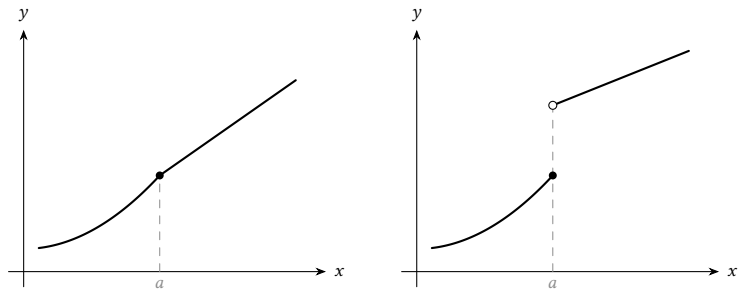
Decir que un límite «es $\infty$» es decir que no existe como número, pero describe cómo crece la función.

**Continuidad en un punto.** $f$ es continua en $x=a$ si se cumplen las tres condiciones:

1. $f(a)$ está definida;
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (los dos laterales son iguales);
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si falla alguna, $f$ es discontinua en $a$. La discontinuidad es *evitable* si el límite existe pero $f(a)$ no está definida o vale otra cosa (un hueco en la gráfica); *de salto* si los laterales son finitos y distintos; *infinita* si un lateral es $\pm\infty$ (asíntota vertical). Una función es continua en un intervalo si lo es en cada punto; en un extremo cerrado basta el límite lateral de adentro.

**Funciones por partes.** Cada regla (polinomio, raíz, trigonométrica) es continua en su propio tramo. Los únicos puntos en duda son aquellos donde *cambia la regla*. Ahí se igualan los laterales y el valor de la función; si la función tiene constantes, esas igualdades son las ecuaciones que las determinan.




continua en $a$ — discontinua en $a$ (salto)

## 3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 3.5.1 · Doble racionalización y un trigonométrico

*Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 2.*

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x\tan(2x)}.$$

**Resolución.**

**a)** Al sustituir: $3-\sqrt{9}=0$ y $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Se multiplica arriba y abajo por los dos conjugados, $3+\sqrt{2x+1}$ y $\sqrt{2}+\sqrt{x-2}$:

$$(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1}) = 9-(2x+1) = -2(x-4),$$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}) = 2-(x-2) = -(x-4).$$

2. Se cancela $-(x-4)$:

$$\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}} = \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}\right)}{3+\sqrt{2x+1}}.$$

3. Se sustituye $x=4$: $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{3+3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**b)** Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se escribe $\tan 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$ y se cancela un $\operatorname{sen} 2x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x\tan 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x}{x\operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\cos 2x.$$

2. Se arma el límite notable: $\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \to 2$, y $\cos 2x \to 1$.

**Resultado:** a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) 2.

### Ejercicio 3.5.2 · Cociente de trigonométricas y resta de fracciones

*Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan(3\theta)}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right).$$

**Resolución.**

**a)** Forma $\frac{0}{0}$. Se multiplica y divide por $3\theta$ y por $\theta$:

$$\frac{\tan 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 3\cdot\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\cdot\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 3\cdot 1\cdot 1 = 3.$$

**b)** Cada fracción tiende a infinito: forma $\infty-\infty$.





*3.3.4 Raíces de distinto índice: cambio de variable*

1. Si aparecen $\sqrt[p]{x}$ y $\sqrt[q]{x}$, sea $m$ el mínimo común múltiplo de $p$ y $q$, y haz $x=t^m$. Entonces $\sqrt[p]{x}=t^{m/p}$ y $\sqrt[q]{x}=t^{m/q}$ son potencias enteras de $t$.
2. Cambia también el valor al que tiende: si $x\to a$, entonces $t\to\sqrt[m]{a}$.
3. Queda un cociente de polinomios en $t$: factoriza (sección 3.3.2).

*3.3.5 Límites trigonométricos*

1. Escribe todo en senos y cosenos: $\tan u=\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$, $\csc u=\frac{1}{\operatorname{sen} u}$, $\cot u=\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$, $\sec u=\frac{1}{\cos u}$.
2. Arma cada factor $\frac{\operatorname{sen}(ku)}{ku}$, multiplicando y dividiendo por la constante que falte: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\to 3$.
3. Con $1-\cos(ku)$, arma $\frac{1-\cos(ku)}{(ku)^2}\to\frac{1}{2}$, o multiplica por $1+\cos(ku)$.
4. Si $x\to a\neq 0$ o $x\to\infty$, cambia de variable para que la nueva tienda a cero: $u=x-a$, o $u=\frac{1}{x}$.
5. Los cosenos que quedan sueltos se sustituyen: $\cos 0=1$.

*3.3.6 Límites al infinito*

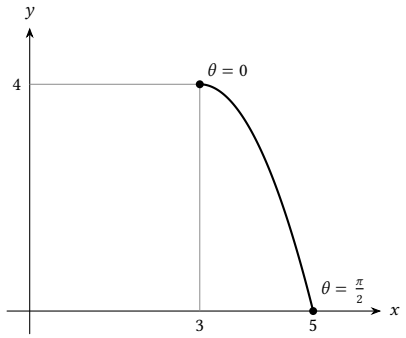
1. Divide numerador y denominador entre la mayor potencia de $x$ del *denominador*; usa $\frac{k}{x^n}\to 0$.
2. Atajo para cociente de polinomios de grados $n$ (arriba) y $m$ (abajo): si $n<m$, el límite es 0; si $n=m$, es el cociente de los coeficientes principales; si $n>m$, es $\pm\infty$.
3. Con raíces, saca la potencia de la raíz: $\sqrt{9x^2+2}=|x|\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}$. Si $x\to\infty$, $|x|=x$; si $x\to-\infty$, $|x|=-x$ y el signo cambia.
4. Con $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ (forma $\infty-\infty$), racionaliza primero.

*3.3.7 Límites infinitos y asíntotas*

1. **Dominio:** factoriza el denominador y anota dónde se anula. Simplifica los factores comunes.
2. **Asíntotas verticales:** en cada cero del denominador que no anula el numerador (después de simplificar), calcula los dos laterales. Cada uno da $+\infty$ o $-\infty$ según el signo de $\frac{k}{0^\pm}$: determina el signo de cada factor con un valor cercano (por ejemplo $x=3.1$ y $x=2.9$).
3. Si el factor se canceló, no hay asíntota: hay un *hueco* (discontinuidad evitable), y su altura es el límite de la función simplificada.
4. **Asíntota horizontal:** calcula $\lim_{x\to\infty}$ y $\lim_{x\to-\infty}$ (sección 3.3.6).
5. **Gráfica:** dibuja las asíntotas punteadas, las intersecciones con los ejes y los signos de $f$ entre los ceros; une con los límites como guía.

*3.3.8 Límites laterales y valor absoluto*

1. Quita el valor absoluto según el lado: si $x\to a^+$, $|x-a|=x-a$; si $x\to a^-$, $|x-a|=-(x-a)$.
2. En una función por partes, el lateral izquierdo usa la regla de los $x<a$ y el derecho la de los $x>a$.
3. Si los dos laterales son iguales, ese es el límite; si son distintos, el límite no existe.




**Resultado:** $y = 4 - (x-3)^2$, con dominio $[3,5]$ y rango $[0,4]$.

### Ejercicio 2.5.7 · Inversa de una función en paramétricas

*Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 1.*

Dada la función en forma paramétrica

$$f: \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = 3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

determine su función inversa $f^{-1}(x)$ en forma cartesiana y el dominio y el recorrido de $f$ y de $f^{-1}$.

**Resolución.**

1. **Dominio de $f$:** en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha$ toma los valores de $[0,1)$ (el 1 corresponde a $\alpha = 0$, excluido). Entonces $x \in \left[0, \sqrt{3}\right)$.
2. **Recorrido de $f$:** $\mathrm{sen}^2\,\alpha$ toma los valores de $(0,1]$, así que $y \in (0,3]$.
3. **Forma cartesiana:** $\cos^2\alpha = \frac{x^2}{3}$ y $y = 3\left(1 - \cos^2\alpha\right) = 3 - x^2$. Es decreciente en $\left[0, \sqrt{3}\right)$: tiene inversa.
4. **Despeje:** $x^2 = 3 - y$ y, como $x \geq 0$, $x = \sqrt{3-y}$. Intercambio: $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f = (0,3]$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

**Resultado:** $f(x) = 3 - x^2$ con $D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$, $R_f = (0,3]$; $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$ con $D_{f^{-1}} = (0,3]$, $R_{f^{-1}} = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

### Ejercicio 2.5.8 · Área de una cruz en función de su base

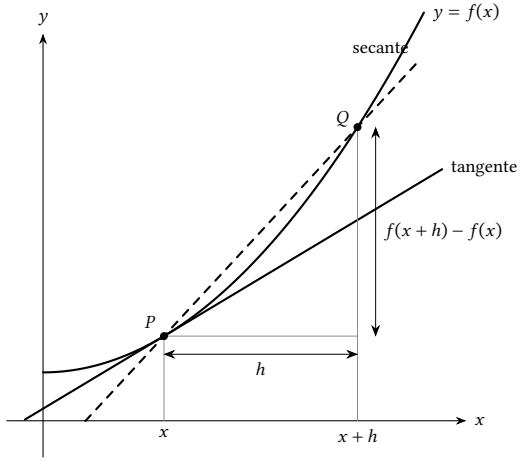
*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 1.*

Una cruz se forma recortando cuartos de círculo iguales en las cuatro esquinas de un cuadrado de 20 cm de lado; la base $b$ de la cruz es el tramo recto que queda de cada lado (figura). a) Determine la regla de correspondencia de la función $f$ que da el área de la cruz en términos de su base $b$. b) Obtenga el dominio y el recorrido de $f$. c) Trace la gráfica de $f$.

**Resolución.**








**Interpretación física.** Si $s(t)$ es la posición de un móvil, $s'(t)$ es su velocidad y $s''(t)$ su aceleración. En general, $\frac{dy}{dt}$ es la *razón de cambio* (rapidez de variación) de $y$ respecto al tiempo: positiva si $y$ aumenta y negativa si disminuye.

**Derivable implica continua.** Si $f$ es derivable en $x_0$, es continua en $x_0$. Lo contrario es falso: $|x|$ es continua en 0 y no es derivable ahí (tiene un pico).

**Derivadas laterales.** $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ son los límites del cociente con $h \to 0^-$ y $h \to 0^+$. $f$ es derivable en $x_0$ si y solo si las dos existen y son iguales. En una función por partes cuyas reglas son derivables, se calculan derivando cada regla y evaluando en el punto de unión, *siempre que $f$ sea continua ahí.*

**Reglas algebraicas.** Con $u$, $v$ funciones de $x$ y $c$, $n$ constantes ($n$ racional):

$$(c)' = 0, \qquad (u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (cu)' = cu',$$
$$(uv)' = uv' + vu', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$
$$(u^n)' = n\,u^{n-1}u', \qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

**Regla de la cadena.** Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En las tablas siguientes ya está incluida: cada fórmula termina multiplicada por $u'$.

**Trigonométricas.**

### Ejercicio propuesto 2.6.2

*Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 1.*

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Obtenga las funciones $f \circ g$ y $f \cdot g$ y determine el dominio y el recorrido de cada una.

**Resultado:** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$, dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[1, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}\,(x^2+1)$, dominio $[0, \infty)$, recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

### Ejercicio propuesto 2.6.3

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 2.*

Obtenga el dominio, el recorrido y la regla de correspondencia de la función inversa de $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+2}$.

**Resultado:** $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-3x}$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ y recorrido $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

### Ejercicio propuesto 2.6.4

*Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 1.*

Dada la función en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 3\cos t, & x \geq 0, \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t, & y \geq 0, \end{cases}$$

determine su función inversa, si es que tiene, su dominio y su recorrido, y trace la gráfica de ambas funciones.

**Resultado:** $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$; $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, con dominio $[0,4]$ y recorrido $[0,3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

### Ejercicio propuesto 2.6.5

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo C, problema 5.*

SOLO PLAN 2016 Obtenga el dominio y el recorrido y trace la gráfica de la función

$$f: \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2\,\mathrm{senh}\, t \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

**Resultado:** $y = 2\sqrt{x^2-1}$, con dominio $[1, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.





6. **Usar grados.** $\frac{\mathrm{sen}\, x}{x} \to 1$ solo con $x$ en radianes.
7. $\sqrt{x^2} = x$ **con** $x \to -\infty$**.** Es $|x| = -x$; el signo del resultado cambia.
8. **Un solo lateral en un límite infinito.** Con $\frac{k}{0}$ hay que revisar los dos lados; si dan $+\infty$ y $-\infty$, el límite no existe.
9. **Asíntota donde hay un hueco.** Si el factor que anula el denominador se cancela, no hay asíntota vertical: hay discontinuidad evitable.
10. **Continuidad con una sola condición.** Igualar los laterales no basta: hay que revisar también que $f(c)$ esté definida y coincida.
11. **Usar L'Hôpital.** El enunciado lo prohíbe; un límite resuelto así no cuenta.

## 3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \cdot (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \mathrm{mcm}(p,q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\mathrm{sen}\, u}{u} \to 1 \cdot \frac{\tan u}{u} \to 1 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\mathrm{sen}\, ku}{u} \to k \cdot \frac{\mathrm{sen}\, au}{\mathrm{sen}\, bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\mathrm{sen}\, bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en $c$: $f(c)$ definida · $\lim_{x\to c} f(x)$ existe · $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$ · $\tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty$ · $\mathrm{senh}\, 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

## 3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Sustituye y escribe la forma que sale ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{k}{0}$ o un número).
2. Elige la técnica por el aspecto: polinomios, factorizar; raíces cuadradas, racionalizar; raíces de distinto índice, $x = t^m$; trigonométricas, $\frac{\mathrm{sen}\, u}{u}$; infinito, mayor potencia.
3. Al cancelar el factor $(x - a)$, sustituye otra vez y simplifica el radical al final.
4. Con valor absoluto, función por partes o $\frac{k}{0}$, calcula los dos laterales por separado.
5. En continuidad, escribe las tres condiciones en cada punto de cambio, con «se cumple» o «no se cumple», y despeja las constantes.
6. Si piden la gráfica, dibuja primero asíntotas e intersecciones y después la curva.

Un inciso con la forma indeterminada identificada y la técnica correcta planteada ya vale parte del problema aunque no se termine el álgebra.

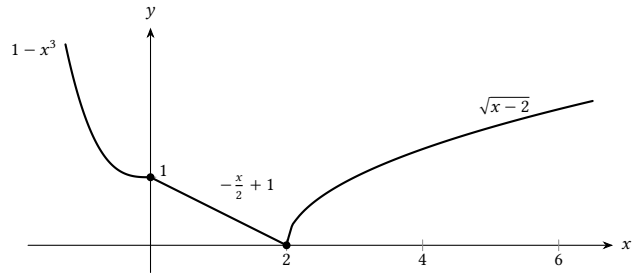
### 2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe primero el dominio y el recorrido de la función dada: casi todos los problemas los piden y la inversa sale de ellos.
2. Completa el cuadrado en cada raíz y nombra la cónica: la gráfica y el recorrido salen de ahí.
3. Inversa: inyectividad (una frase), despeje con el signo justificado, intercambio, $D_{f^{-1}} = R_f$.
4. Dibuja $f$, la recta $y = x$ y $f^{-1}$ en los mismos ejes, con los extremos marcados.
5. Comprueba con un punto: $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$.
6. Modelo: figura, variables, relación, sustitución y dominio, en ese orden.

Si no se termina el despeje, el dominio, el recorrido y la gráfica de $f$ ya valen buena parte del problema.








**Resultado:** $m = 1$, $n = 2$.

### 3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

#### Ejercicio propuesto 3.6.1

*Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 2.*

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le a, \\ (x-2)^2 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Determine el valor de la constante $a$ que hace que $f$ sea continua.

**Resultado:** $a = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

#### Ejercicio propuesto 3.6.2

*Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 4.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x \to 0^+} \frac{\csc 4x}{\cot 3x}, \qquad \text{b) } \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{2x - 16}.$$

**Resultado:** a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

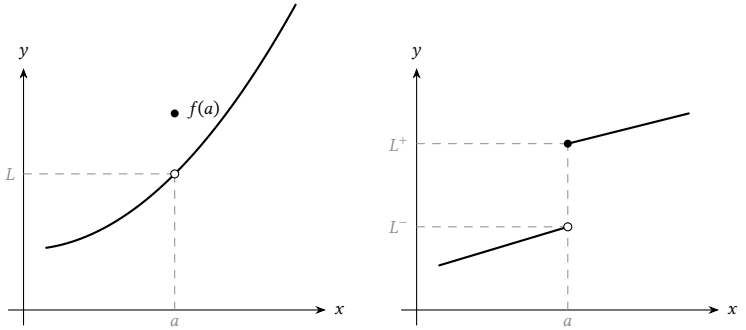
#### Ejercicio propuesto 3.6.3

*Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 3.*

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule, si existen,

$$\text{a) } \lim_{x \to 4} \frac{1 - \sqrt{5 - x}}{3 - \sqrt{5 + x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x}.$$

**Resultado:** a) $-3$; b) 1.




$\lim_{x\to a} f(x) = L$ $\qquad$ $L^- \neq L^+$: no existe

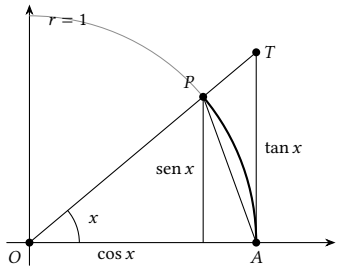
**Teoremas sobre límites.** Si $\lim f = L$ y $\lim g = M$, entonces el límite de la suma, la diferencia y el producto es $L+M$, $L-M$ y $LM$; el del cociente es $\frac{L}{M}$ si $M \neq 0$; y $\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{L}$ (con $L \geq 0$ si $n$ es par). En consecuencia, los polinomios, las racionales en los puntos de su dominio, las raíces, las trigonométricas, la exponencial y el logaritmo se resuelven por **sustitución directa**.

**Formas indeterminadas.** Cuando la sustitución da $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$, el resultado no se conoce todavía: hay que transformar la expresión (factorizar, racionalizar, cambiar de variable, usar un límite notable) hasta que la sustitución dé un número. En cambio, $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ *no* es indeterminada: el límite es infinito (o no existe), y se estudia con los laterales.

**El límite trigonométrico fundamental.** Con $x$ en radianes,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

En el círculo unitario, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, el triángulo $OAP$, el sector $OAP$ y el triángulo $OAT$ están uno dentro del otro, así que sus áreas cumplen $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$. Al dividir entre $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ e invertir, $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$; como $\cos x \to 1$, el cociente queda atrapado y tiende a 1 (teorema del emparedado).




De ese límite salen los demás (todos con $u \to 0$):

$$\frac{\tan u}{u} \to 1, \qquad \frac{u}{\operatorname{sen} u} \to 1, \qquad \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2}, \qquad \frac{1-\cos u}{u} \to 0.$$





**Resultado:** $f$ es continua en todos los reales.

### Ejercicio 3.5.6 · Cosecante entre cotangente, exponenciales y un límite infinito

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, problema 2.*

Determine, si existe, el valor de cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\csc 2x}{\cot 3x}, \quad \text{b) } \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}.$$

**Resolución.**

**a)** Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 2x}{\cot 3x} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x \cos 3x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}\cdot\frac{1}{\cos 3x} \to \frac{3}{2}.$$

**b)** SOLO PLAN 2016 Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre $e^{2x}$, la exponencial de mayor exponente:

$$\frac{1-e^{-4x}}{1+e^{-4x}} \to \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

La expresión es $\tanh 2x$, que tiende a 1.

**c)** Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se factoriza: $\frac{x(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x}{x-3}$ si $x \neq 3$. Al sustituir queda $\frac{3}{0}$: límite infinito.
2. Si $x \to 3^+$, $x-3 \to 0^+$ y el cociente tiende a $+\infty$. Si $x \to 3^-$, $x-3 \to 0^-$ y tiende a $-\infty$.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe (la recta $x = 3$ es asíntota vertical).

**Resultado:** a) $\frac{3}{2}$; b) 1; c) no existe ($+\infty$ por la derecha, $-\infty$ por la izquierda).

### Ejercicio 3.5.7 · Asíntotas y gráfica con límites

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo A, problema 5.*

Mediante los límites infinitos y los límites al infinito, trace la gráfica de $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$, con sus asíntotas.

**Resolución.**

1. **Dominio:** $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. No hay factores comunes.
2. **Asíntotas verticales.** En $x = 3$ el numerador vale 1; en $x = -3$ vale $-5$. Signos de los laterales:
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{(0^+)(6)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \frac{-5}{(-6)(0^+)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty.$$
Las rectas $x = 3$ y $x = -3$ son asíntotas verticales.
3. **Asíntota horizontal.** Se divide entre $x^2$:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0.$$
La recta $y = 0$ (el eje $x$) es asíntota horizontal en los dos lados.

## 3.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| cualquier límite | sustituir primero | 3.3.1 |
| cociente de polinomios que da $\frac{0}{0}$: $\frac{x^3+1}{x+1}$ | factorizar y cancelar | 3.3.2 |
| $\frac{0}{0}$ con raíces cuadradas: $\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}$ | racionalizar | 3.3.3 |
| raíces de distinto índice: $\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ | cambio de variable $x = t^m$ | 3.3.4 |
| sen, tan, csc, cot o $1-\cos$ con $x \to 0$ | límites notables | 3.3.5 |
| $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ | dividir entre la mayor potencia | 3.3.6 |
| $\frac{k}{0}$, «límites infinitos», «asíntotas», «trazar la gráfica» | laterales y signos | 3.3.7 |
| $\lvert x-a\rvert$, $x \to a^+$, función por partes en el punto de cambio | límites laterales | 3.3.8 |
| «continua», «valor de $a$ y $b$» | tres condiciones en cada punto de cambio | 3.3.9 |
| $e^x$, senh, cosh, ln SOLO PLAN 2016 | sustitución o dividir entre $e^x$ | 3.3.10 |

## 3.3 Procedimientos

### *3.3.1 Sustitución directa (siempre primero)*

1. Sustituye el valor de $x$. Si sale un número, ese es el límite: escribe «sustitución directa» y termina.
2. Si sale $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ o $0\cdot\infty$, es una forma indeterminada: elige la técnica con la tabla de la sección 3.2.
3. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, el límite es infinito o no existe: sección 3.3.7.

### *3.3.2 Factorizar*

1. Si $x = a$ anula numerador y denominador, los dos tienen el factor $(x-a)$.
2. Factoriza con productos notables: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$, o con división sintética entre $x-a$.
3. Cancela $(x-a)$ (vale porque $x \neq a$ dentro del límite) y sustituye.
4. Con una resta de fracciones ($\infty-\infty$), primero el denominador común; luego factoriza.

### *3.3.3 Racionalizar*

1. Multiplica numerador y denominador por el **conjugado** de la expresión con raíz: $(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=A-B^2$.
2. Si hay raíces arriba y abajo, multiplica por los dos conjugados (doble racionalización).
3. Aparece el factor $(x-a)$ arriba y abajo, quizá como $(a-x)=-(x-a)$: cancélalo y sustituye. Los conjugados que quedan se evalúan al final.





1. Se factoriza $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$, que es el denominador común.
2. Una sola fracción:

$$\frac{\sqrt{x}+2-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

3. Se sustituye $x=4$: $\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$.

**Resultado:** a) 3; b) $\frac{1}{4}$.

### Ejercicio 3.5.3 · Uno menos coseno, raíz al infinito y raíces de distinto índice

*Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 2.*

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos 4x}{x^3}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}.$$

**Resolución.**

**a)** Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se saca $x$ de factor común y se cancela: $\frac{x(1-\cos 4x)}{x^3}=\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.
2. Se arma $\frac{1-\cos u}{u^2}$ con $u=4x$, multiplicando y dividiendo por 16:

$$\frac{1-\cos 4x}{x^2}=16\cdot\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\to 16\cdot\frac{1}{2}=8.$$

**b)** Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Con $x>0$, $\sqrt{x^2-9}=x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$:

$$\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\to 1.$$

**c)** Forma $\frac{0}{0}$. Índices 2 y 3: $m=6$.

1. Con $x=t^6$: $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, y $t\to\sqrt[6]{64}=2$.
2. Diferencia de cubos y de cuadrados:

$$\frac{t^3-8}{t^2-4}=\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\frac{t^2+2t+4}{t+2}.$$

3. Se sustituye $t=2$: $\frac{4+4+4}{4}=3$.

**Resultado:** a) 8; b) 1; c) 3.

En b) el enunciado escribe $x\to\infty$ sin signo; se toma $x\to+\infty$. Con $x\to-\infty$ el resultado sería $-1$.

*3.3.9 Continuidad de funciones por partes con constantes*

1. Señala los puntos donde cambia la regla y revisa que cada regla sea continua en su tramo (polinomio, raíz con radicando no negativo, denominador distinto de cero).
2. En cada punto de cambio $x = c$, revisa las tres condiciones **una por una**: $f(c)$ (con la regla que incluye a $c$, la del $\leq$ o el $\geq$); los dos laterales; y su igualdad con $f(c)$. Escribe «se cumple» o «no se cumple» en cada una.
3. Si hay constantes, la igualdad de los laterales y $f(c)$ da una ecuación por punto de cambio. Resuelve el sistema.
4. Sustituye los valores en las tres condiciones para comprobar.

*3.3.10 Exponencial, logaritmo e hiperbólicas* SOLO PLAN 2016

1. $e^x$, $\ln x$ (con $x > 0$), $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ son continuas: casi siempre basta la sustitución directa. En Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 2, inciso c), $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} 4x - \cosh x}{x+1} = \frac{0-1}{1} = -1$ sale por sustitución directa.
2. Al infinito: $e^x \to \infty$ y $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$. Con un cociente de exponenciales, divide entre la exponencial de mayor exponente. Así, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \to 1$ si $x \to \infty$ y $\to -1$ si $x \to -\infty$.
3. Con logaritmos, junta en uno solo antes de sustituir: $\ln|x^2-1| - \ln|x-1| = \ln|x+1| \to \ln 2$ si $x \to 1$ (así se resuelve el inciso b del problema 2 del 2º final 2026-2 de Cálculo y Geometría Analítica).

## 3.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Raíces de distinto índice, sustitución directa y raíz al infinito**

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.*

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 32} \frac{\sqrt[10]{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[5]{x} - 2}, \qquad \text{b) } \lim_{\theta\to 0} |\theta - 1| \operatorname{sen}\theta, \qquad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x}.$$

**Resolución.**

**a)** Al sustituir: $\sqrt[10]{32} = \sqrt{2}$ y $\sqrt[5]{32} = 2$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Índices 10 y 5: $m = 10$. Se hace $x = t^{10}$, con lo que $\sqrt[10]{x} = t$, $\sqrt[5]{x} = t^2$, y $t \to \sqrt[10]{32} = \sqrt{2}$.
2. Diferencia de cuadrados en el denominador:

$$\frac{t - \sqrt{2}}{t^2 - 2} = \frac{t - \sqrt{2}}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} = \frac{1}{t + \sqrt{2}}.$$

3. Se sustituye $t = \sqrt{2}$: $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

**b)** No es forma indeterminada: por sustitución directa, $|0 - 1| \operatorname{sen} 0 = 1 \cdot 0 = 0$.

**c)** Forma $\frac{\infty}{\infty}$.





1. Como $x \to \infty$, $x > 0$ y $\sqrt{x^2} = x$. Se divide entre $x$ arriba y abajo:

$$\frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x} = \frac{\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}}{\frac{3}{x} - 4}.$$

2. Con $\frac{2}{x^2} \to 0$ y $\frac{3}{x} \to 0$, el límite es $\frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$.
3. Si fuera $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$ y el resultado sería $\frac{3}{4}$.

**Resultado:** a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) 0; c) $-\frac{3}{4}$.

**Ejemplo resuelto · Continuidad de una función de tres reglas**

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.*

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax & \text{si } 1 < x < 3, \\ A & \text{si } 3 \leq x \leq 5, \\ Bx - 5 & \text{si } 5 < x < 8. \end{cases}$$

Determine los valores de $A$ y $B$ para que $f$ sea continua en todo su dominio.

**Resolución.**

1. El dominio es $(1, 8)$. Cada regla es un polinomio o una constante, continua en su tramo. Los puntos de cambio son $x = 3$ y $x = 5$.
2. **En $x = 3$.** Condición 1: $f(3) = A$ (segunda regla); se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 3^-} (x^2 - Ax) = 9 - 3A, \qquad \lim_{x\to 3^+} A = A.$$

   El límite existe si $9 - 3A = A$, es decir, $A = \frac{9}{4}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(3)$; se cumple.
3. **En $x = 5$.** Condición 1: $f(5) = A = \frac{9}{4}$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 5^-} A = \frac{9}{4}, \qquad \lim_{x\to 5^+} (Bx - 5) = 5B - 5.$$

   El límite existe si $5B - 5 = \frac{9}{4}$, es decir, $5B = \frac{29}{4}$ y $B = \frac{29}{20}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(5)$; se cumple.

**Resultado:** $A = \frac{9}{4}$, $B = \frac{29}{20}$.