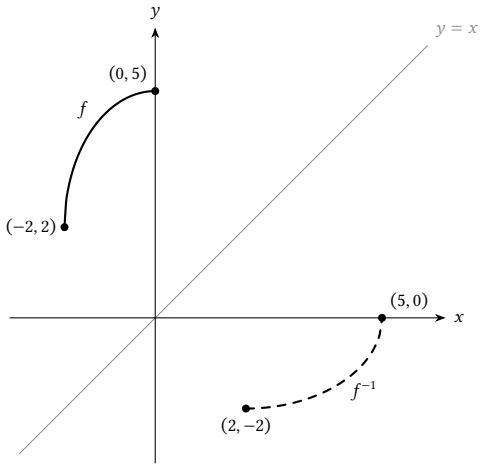


Resultado: $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2}$, $x \in [2,5]$, con recorrido $[-2,0]$.

Ejercicio 2.5.5 · Inversa de una función por partes

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 1.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 3 - x^3 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

determine la regla de correspondencia de f^{-1}, el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Rama $x \geq 0$:** $-2x^2$ es decreciente y vale 0 en $x = 0$; su recorrido es $(-\infty, 0]$.
2. **Rama $x < 0$:** $-x^3$ es decreciente y positiva; $3 - x^3$ toma todos los valores mayores que 3 (el 3 se alcanzaría en $x = 0$, que no es de esta rama). Recorrido: $(3, \infty)$.
3. **Inyectividad:** cada rama es decreciente y los recorridos $(-\infty, 0]$ y $(3, \infty)$ no se traslapan: f es inyectiva. $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.
4. **Despeje por ramas:** de $y = -2x^2$ con $x \geq 0$, $x = \sqrt{-\frac{y}{2}}$ (con $y \leq 0$). De $y = 3 - x^3$, $x = \sqrt[3]{3-y}$ (con $y > 3$, que da $x < 0$).
5. **Inversa:**

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-\dfrac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{3-x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

   $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$ y $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
6. **Gráfica:** f tiene un punto vacío en $(0, 3)$ y uno lleno en $(0, 0)$; en f^{-1} pasan a $(3, 0)$ vacío y $(0, 0)$ lleno.

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cálculo Diferencial

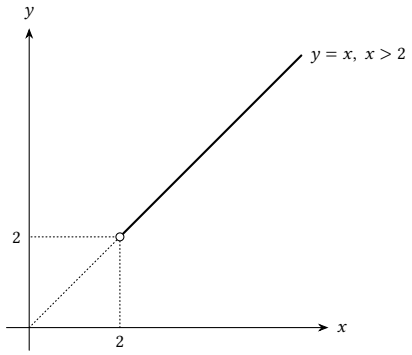
Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.2.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Resolución.

1. **Dominio:** $D_g = \{x \mid x - 2 > 0\} = (2, \infty)$; $D_f = \mathbb{R}$, así que todo valor de g está en D_f. Entonces $D_{f\circ g} = (2, \infty)$.
2. **Regla:** $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} + 2 = (x - 2) + 2 = x$, porque $e^{\ln u} = u$ para $u > 0$.
3. **Recorrido:** $y = x$ con $x > 2$ toma todos los valores mayores que 2: $(2, \infty)$.
4. **Gráfica:** la parte de la recta $y = x$ con $x > 2$, con punto vacío en $(2, 2)$. La regla simplificada es x, pero la función *no* es la identidad en $\mathbb{R}$.



Resultado: $(f \circ g)(x) = x$, con dominio $(2, \infty)$ y recorrido $(2, \infty)$.

Ejercicio 2.5.3 · Función por partes con arcos de cónicas

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 1.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{9 - (x+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ -4 + \sqrt{(x+3)^2 - 4} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Determine el dominio y el recorrido y trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Primera rama:** $9 - (x+1)^2 \geq 0 \iff |x+1| \leq 3 \iff -4 \leq x \leq 2$. Con $x < -1$ queda $[-4, -1)$. Es la circunferencia $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ (centro $(-1, -2)$, radio 3), mitad inferior, cuarto izquierdo: de $(-4, -2)$ (lleno) a $(-1, -5)$ (vacío). Recorrido: $(-5, -2]$.
2. **Segunda rama:** $(x+3)^2 \geq 4 \iff x \geq -1$ o $x \leq -5$. Con $x \geq -1$ queda $[-1, \infty)$. Es la hipérbola $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$ (centro $(-3, -4)$), parte superior de la rama derecha: empieza en el vértice $(-1, -4)$ y sube acercándose a la asíntota $y = x - 1$. Recorrido: $[-4, \infty)$.
3. **Dominio:** $[-4, -1) \cup [-1, \infty) = [-4, \infty)$.
4. **Recorrido:** $(-5, -2] \cup [-4, \infty) = (-5, \infty)$.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Diferencial** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sirve a los dos planes de estudio de la Facultad:

- **Plan 2010:** la asignatura *Cálculo Diferencial*, con el programa aprobado en 2008. Seis temas: introducción, funciones, límites y continuidad, la derivada, variación de funciones, y sucesiones y series.
- **Plan 2016:** no hay una asignatura con ese nombre. Las funciones, los límites, la derivada y la variación son los temas 2 a 5 de *Cálculo y Geometría Analítica*, con casi las mismas palabras, y agregan el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas. Las sucesiones y series pasaron al tema 1 de *Cálculo Integral*: para el Plan 2016 están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5, no en este.

El cuaderno sigue el orden del programa de 2010 y marca lo que es de un solo plan:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y **qué plan es el tuyo**.
1. Introducción al Cálculo (solo Plan 2010).
2. Funciones.
3. Límites y continuidad.
4. La derivada.
5. Variación de funciones.
6. Sucesiones y series (solo Plan 2010).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

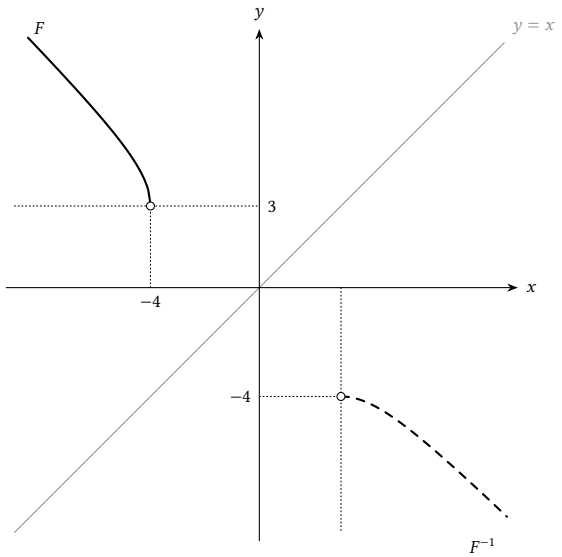
Lo que este cuaderno no cubre. Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) tiene además tres temas de geometría: secciones cónicas, álgebra vectorial, y recta y plano. No están aquí: están en *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*, que trabaja los problemas 5 (vectores) y 6 (recta y plano) del final en sus Unidades 3 y 4, y las cónicas del primer parcial en su Unidad 1, Parte B. Entre los dos cuadernos cubren el examen completo. La sección 0.1 dice cuánto pesan en el examen y cómo organizar el estudio con ellos.

Objetivo de la asignatura (programa).

- *Plan 2010, Cálculo Diferencial:* «El alumno aplicará los conceptos del cálculo diferencial de funciones reales de variable real, en la formulación de modelos matemáticos y para resolver problemas físicos y geométricos.»
- *Plan 2016, Cálculo y Geometría Analítica:* «El alumno analizará los conceptos fundamentales del cálculo diferencial de funciones reales de variable real y del álgebra vectorial, y los aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos.»

De dónde salen los ejercicios.

- Plan 2010: los **10 exámenes finales publicados** de Cálculo Diferencial, de 2001-2 a 2013-2 (cinco son de la versión anterior del programa, con los mismos temas). Ninguno tiene resolución publicada.

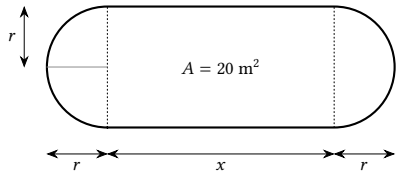


Resultado: $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x-3)^2 + 4}$, con $D_{F^{-1}} = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = (-\infty, -4)$.

Ejemplo resuelto · Perímetro de un terreno en función del radio

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 1.

Un terreno está formado por tres partes alineadas: la central es un rectángulo y los extremos son semicírculos de radio r (figura). Si el área del terreno es 20 m^2, determine su perímetro en función exclusivamente del radio de los semicírculos.



Resolución.

1. **Variables:** r, radio de los semicírculos, y x, largo del rectángulo; su alto es $2r$.
2. **Cantidad pedida:** el perímetro son los dos lados largos del rectángulo y los dos semicírculos (una circunferencia completa): $P = 2x + 2\pi r$.
3. **Relación:** el área es la del rectángulo más la de un círculo: $2rx + \pi r^2 = 20$, de donde $x = \frac{20 - \pi r^2}{2r}$.

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

2.3.3 Gráficas de raíces: arcos de cónicas

1. Completa el cuadrado dentro de la raíz: $8-2x-x^2 = 9-(x+1)^2$, $x^2+4x = (x+2)^2-4$.
2. Aísla la raíz y eleva al cuadrado: de $y = k \pm c\sqrt{\dots}$ sale $(y-k)^2 = c^2(\dots)$. Identifica la cónica: circunferencia, elipse o hipérbola, con su centro.
3. El signo de la raíz decide la mitad: $y = k + c\sqrt{\dots}$ es la mitad con $y \geq k$; $y = k - c\sqrt{\dots}$, la de $y \leq k$.
4. El intervalo de x decide el arco. Marca extremos (llenos o vacíos) y traza.

2.3.4 Funciones por partes

1. Para cada rama: recorta su intervalo al dominio de su regla. El dominio es la unión.
2. Para cada rama: su recorrido en su intervalo (2.3.2). El recorrido de f es la unión.
3. Traza cada rama solo en su intervalo; evalúa la regla en los extremos y marca punto lleno si el extremo pertenece a la rama y vacío si no.

2.3.5 Composición, producto y cociente

1. Regla: en $f \circ g$ sustituye $g(x)$ en lugar de x en f. Simplifica.
2. Dominio de $f \circ g$: $x \in D_g$ **y** $g(x) \in D_f$. Escribe las dos condiciones antes de simplificar.
3. Dominio de fg, $f \pm g$: $D_f \cap D_g$; de $\frac{f}{g}$: además $g(x) \neq 0$.
4. Recorrido y gráfica de la función resultante con 2.3.2 y 2.3.3.

2.3.6 Función inversa

1. **Dominio y recorrido de** f (2.3.1, 2.3.2).
2. **Inyectividad:** muestra que f es creciente o decreciente en su dominio (por la forma de la gráfica o porque la parte que depende de x lo es). Si no lo es, no hay inversa: dilo y explica por qué (dos x con el mismo y).
3. **Despeja** x de $y = f(x)$. Al sacar raíz cuadrada aparece $\pm$: el signo lo decide el dominio de f (si $x \leq -1$, entonces $x+1 \leq 0$ y se toma $-$).
4. **Intercambia** x y y: $y = f^{-1}(x)$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$. No calcules el dominio de f^{-1} con su fórmula: la fórmula puede existir en un conjunto mayor.
6. **Gráfica:** traza f, la recta $y = x$ y el reflejo; los puntos extremos (a, b) pasan a (b, a) con el mismo tipo de punto (lleno o vacío).
7. Comprueba con un punto: si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

2.3.7 Inversa de una función por partes

1. Calcula el recorrido de cada rama en su intervalo.
2. Si cada rama es inyectiva y los recorridos no se traslapan, f es inyectiva.
3. Despeja x en cada rama por separado (2.3.6).
4. Arma f^{-1} por partes: la rama que viene de f_k vale en el *recorrido* de f_k.

2.3.8 Funciones en forma paramétrica

1. Con el intervalo de t, obtén el intervalo de $x(t)$ (dominio) y el de $y(t)$ (recorrido). En las trigonométricas, usa los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ en ese intervalo.

el primer examen parcial. Esos temas están en *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*: los problemas 5 y 6, en sus Unidades 3 (álgebra vectorial) y 4 (recta y plano), y las cónicas, en su Unidad 1, Parte B. Entre los dos cuadernos cubren el examen completo.

Las unidades de un solo plan lo dicen en su título, y las secciones de un solo plan llevan el rótulo SOLO PLAN 2016 . En el Plan 2010, el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas son de Cálculo Integral: si tu plan es el 2010, sáltalas.

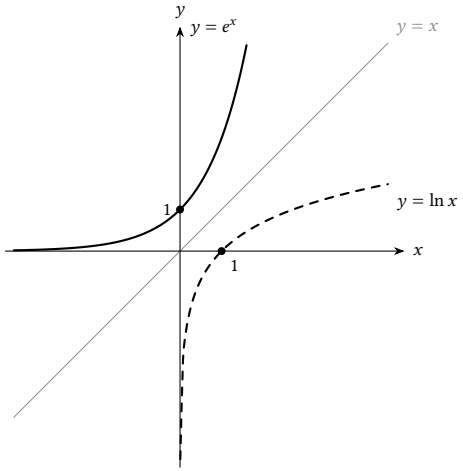
0.2 Cómo es el examen

Según los 10 finales del Plan 2010 (de 2001-2 a 2013-2) y los 39 finales del Plan 2016 (de 2016-1 a 2026-2):

- **Duración:** 2 horas (2.5 horas en los finales del Plan 2010 hasta 2012-2).
- **Problemas:** 6 (7 en algunos finales anteriores a 2007), con puntos impresos que suman 100.
- **Material:** ninguno. Los exámenes del Plan 2016 dicen «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\sqrt[3]{2}$. No hace falta sacar decimales.
- **Sin L'Hôpital:** los enunciados de límites del Plan 2010 lo prohíben («sin utilizar la regla de L'Hôpital») y en el Plan 2016 la regla no está en el programa. Este cuaderno nunca la usa.
- **Plantilla fija:** un problema por unidad, siempre en el mismo orden.
  - Plan 2010: (1) funciones, (2) límites, (3) derivadas o continuidad, (4) tangente o razón de cambio, (5) variación, (6) series.
  - Plan 2016: (1) funciones, (2) límites o continuidad, (3) derivadas, tangente o razón de cambio, (4) variación, (5) vectores, (6) recta y plano.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Unidad	Tema	Plan 2010 (10 finales)	Plan 2016 (39 finales)
1	Introducción al Cálculo	0	—
2	Funciones	**10 de 10**	**39 de 39**
3	Límites y continuidad	**10 de 10** (12 problemas)	**38 de 39**
4	La derivada	**10 de 10** (20 problemas)	**38 de 39** (44 problemas)
5	Variación de funciones	**10 de 10** (11 problemas)	**35 de 39**
6	Sucesiones y series (solo Plan 2010)	**10 de 10**	— (en Cálculo Integral)
—	Vectores, recta y plano (cuaderno de Geometría Analítica)	—	39 de 39 (81 problemas)



2.1.9 *Funciones hiperbólicas* SOLO PLAN 2016

SOLO PLAN 2016 Se definen con la exponencial:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x},$$

y $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$. La identidad fundamental es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

por eso $x = a\cosh t$, $y = b\operatorname{senh} t$ recorre la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gráficas: $\operatorname{senh} x$ es impar, creciente, con recorrido $\mathbb{R}$; $\cosh x$ es par, con mínimo $\cosh 0 = 1$ y recorrido $[1, \infty)$ (la forma de una cadena colgante); $\tanh x$ es creciente, con recorrido $(-1, 1)$ y asíntotas $y = \pm 1$.

Las inversas tienen forma logarítmica (se obtienen despejando e^y de una ecuación de segundo grado):

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1,$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \qquad |x| < 1.$$

Para $\cosh^{-1}$ se restringe $\cosh x$ a $x \geq 0$, donde es inyectiva. En algunos exámenes se escriben «ang senh», «ang cosh», «ang tanh».

2.1.10 *Modelos geométricos*

Formular un modelo es escribir una cantidad (área, perímetro, volumen, costo) como función de *una sola* variable, con su dominio. Casi siempre hay dos variables relacionadas

- **Plan 2016.** Primera semana: Unidades 4, 3, 5 y 2. Segunda semana: vectores, recta y plano (cuaderno de Geometría Analítica, Unidades 3 y 4) y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

1. la historia (Unidad 1) y las demostraciones de los teoremas;
2. la derivada por definición y la diferencial (Unidad 4);
3. las sucesiones y las series numéricas solas (Unidad 6), salvo las que se usan en los extremos del intervalo de convergencia.

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por lo mecánico: las derivadas, la serie de Maclaurin y el análisis de la variación. Deja para después la inversa con gráficas y el modelo de optimación, que piden más planteamiento.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: la función por optimizar con su restricción, las variables de la razón de cambio con sus unidades, el término general de la serie.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.
5. Comprueba al final: sustituye el punto de tangencia en la curva, revisa que el dominio de f^{-1} sea el recorrido de f, evalúa la función en los extremos del intervalo.

0.6 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

2.1.3 Funciones por partes

Una función por partes usa reglas distintas en intervalos distintos del dominio:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in I_1, \\ f_2(x) & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Su dominio es la unión $I_1 \cup I_2$ (cada I_k recortado al dominio de su regla) y su recorrido es la unión de los recorridos de cada rama, *cada una en su intervalo*. En la gráfica, los extremos incluidos se marcan con punto lleno y los excluidos con punto vacío.

2.1.4 Operaciones con funciones y composición

Para f y g se definen

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)\,g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

con dominio $D_f \cap D_g$ (y, en el cociente, sin los ceros de g). La **composición** es

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

Primero se aplica g y luego f. El dominio de la composición **no** se lee de la fórmula simplificada: $e^{\ln(x-2)}+2$ se simplifica a x, pero solo existe para $x > 2$. En general $f\circ g \neq g\circ f$.

2.1.5 Inyectividad y función inversa

f es **inyectiva** (uno a uno) si valores distintos de x dan valores distintos de y: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. En la gráfica: toda recta *horizontal* la corta a lo más una vez (**prueba de la recta horizontal**). Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en su dominio es inyectiva. Es **biyectiva** si además su codominio es su recorrido.

Solo una función inyectiva tiene **inversa** f^{-1}, definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \qquad D_{f^{-1}} = R_f, \qquad R_{f^{-1}} = D_f.$$

Se cumple $\big(f \circ f^{-1}\big)(x) = x$ en R_f y $\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x$ en D_f. La gráfica de f^{-1} es la de f **reflejada respecto a la recta** $y = x$: el punto (a, b) de f pasa a (b, a).

Si f no es inyectiva (por ejemplo $y = x^2$), se **restringe** su dominio a un intervalo donde sí lo sea: $y = x^2$ con $x \geq 0$ tiene inversa $\sqrt{x}$; con $x \leq 0$, $-\sqrt{x}$. El signo de la raíz al despejar lo decide la restricción.

Inversa de una función por partes. Si cada rama es inyectiva y los recorridos de las ramas no se traslapan, la función es inyectiva y su inversa es por partes: en cada rama se despeja por separado, y el intervalo de cada rama de f^{-1} es el *recorrido* de la rama correspondiente de f.

1.3 Para qué sirve en ingeniería

Cada unidad de este cuaderno es una herramienta que se usa después:

- las **funciones** (Unidad 2), para escribir un fenómeno como un modelo: el área de una sección en función del ancho, el costo en función de la producción;
- los **límites** (Unidad 3), para el comportamiento cerca de un punto o a largo plazo, y para definir la derivada;
- la **derivada** (Unidad 4), para velocidades, aceleraciones y razones de cambio relacionadas: cómo cambia el nivel de un tanque cuando cambia el caudal;
- la **variación** (Unidad 5), para optimizar: el diseño con menos material, la máxima área, el mínimo costo;
- las **series** (Unidad 6), para aproximar funciones con polinomios: así calculan una calculadora y una computadora $\operatorname{sen} x$ o $\sqrt{x}$.

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 6

Unidad 1 · Introducción al Cálculo (solo Plan 2010) 10

Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos 12

Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes 31

Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio 46

Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio 64

Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010) 80

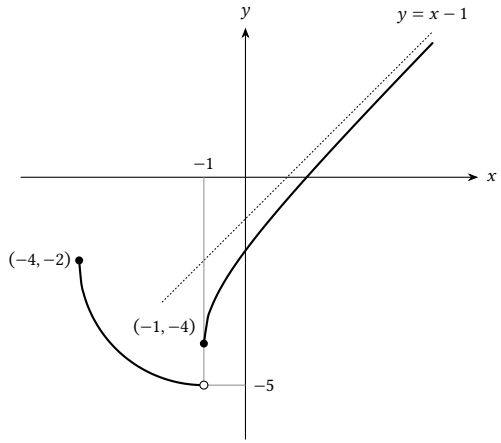
Apéndice A · Formulario 91

Apéndice B · Exámenes 94

Apéndice C · Fe de erratas 102

Apéndice D · Fuentes 104

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 106



Resultado: $D_f = [-4, \infty)$ y $R_f = (-5, \infty)$.

Ejercicio 2.5.4 · Inversa de un arco de elipse

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 1.

Para la función $f = \left\{(x, y) \;\middle|\; y = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 0]\right\}$, obtenga su inversa y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Inyectividad y recorrido:** en $[-2, 0]$, $4 - x^2$ crece de 0 a 4, así que f es creciente: $f(-2) = 2$ y $f(0) = 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 5$. Entonces $R_f = [2, 5]$.
2. **Despeje:**
$$\frac{2}{3}(y-2) = \sqrt{4 - x^2}$$
$$x^2 = 4 - \frac{4}{9}(y-2)^2 = \frac{4}{9}\left[9 - (y-2)^2\right]$$
$$x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (y-2)^2}.$$
Se toma el signo negativo porque $x \in [-2, 0]$.
3. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (x-2)^2}$, con $D_{f^{-1}} = [2, 5]$ y $R_{f^{-1}} = [-2, 0]$.
4. **Gráfica:** f es el cuarto superior izquierdo de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, de $(-2, 2)$ a $(0, 5)$; f^{-1} es su reflejo, de $(2, -2)$ a $(5, 0)$.

- Plan 2016: los **39 exámenes finales** y **17 exámenes parciales** publicados de Cálculo y Geometría Analítica, de 2016-1 a 2026-2, para las unidades 2 a 5. Ninguno tiene resolución publicada.
- **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó; los del Plan 2016 dicen también la asignatura. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora y sin L'Hôpital. Ningún examen permite calculadora: las resoluciones usan valores exactos (fracciones, radicales, π, ángulos notables). Los límites se calculan sin la regla de L'Hôpital, que se enseña en Cálculo Integral.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen de cada plan, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Marcas de plan. Una unidad de un solo plan lo dice en su título. Dentro de una unidad compartida, lo que es de un solo plan lleva el rótulo SOLO PLAN 2016 : por ejemplo, el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas, que en el Plan 2010 se estudian en Cálculo Integral.

Formato de cada resolución. Planteamiento ⟶ pasos numerados ⟶ **resultado** en negritas. En los problemas de «¿es continua?» o «¿se cumple el teorema?», cada condición se revisa por separado, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 dice qué estudiar según tu plan y propone, para cada plan, una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

4. **Sustitución:**

$$P = 2 \cdot \frac{20 - \pi r^2}{2r} + 2\pi r = \frac{20}{r} - \pi r + 2\pi r = \frac{20}{r} + \pi r.$$

5. **Dominio:** $r > 0$ y $x > 0$, es decir, $20 - \pi r^2 > 0$: $r < \sqrt{\frac{20}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}} \approx 2.52$.

Resultado: $P(r) = \frac{20}{r} + \pi r$ m, con $0 < r < 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

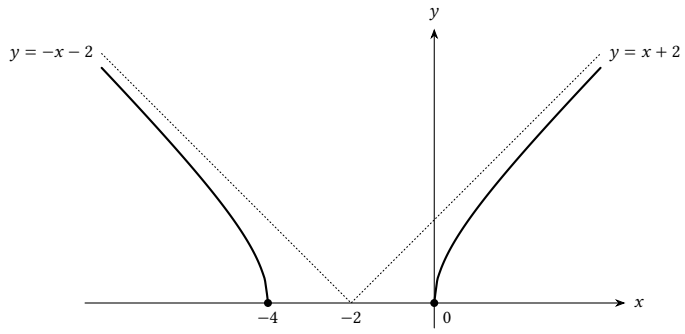
Ejercicio 2.5.1 · Composición con dominio, recorrido y gráfica

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 1.

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = x + 2$, determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **Regla:** $(f \circ g)(x) = f(x+2) = \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{x^2 + 4x}$.
2. **Dominio:** $D_g = \mathbb{R}$ y $D_f = \{x \mid |x| \geq 2\}$. Se pide $|x+2| \geq 2$: $x + 2 \geq 2$ o $x + 2 \leq -2$, es decir, $x \geq 0$ o $x \leq -4$. (Lo mismo da $x(x+4) \geq 0$.)
3. **Recorrido:** la raíz vale 0 en $x = 0$ y en $x = -4$ y crece sin límite cuando $|x| \to \infty$; toma todos los valores $y \geq 0$.
4. **Gráfica:** $y^2 = (x+2)^2 - 4$, es decir, $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$: hipérbola de centro $(-2, 0)$, vértices $(-4, 0)$ y $(0, 0)$ y asíntotas $y = \pm(x + 2)$. La función es la mitad superior ($y \geq 0$) de sus dos ramas.



Resultado: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$, con dominio $(-\infty, -4] \cup [0, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

Ejercicio 2.5.2 · Composición de exponencial y logaritmo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 3.

SOLO PLAN 2016 Sean las funciones $f(x) = e^x + 2$ y $g(x) = \ln(x - 2)$. Determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y trace su gráfica.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué plan es el tuyo, qué unidades estudiar y en qué orden.
- Si eres de la Generación 2027 o posterior, tu plan es el 2026: usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial e Integral.*

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

El cálculo diferencial de una variable se enseña con dos planes de estudio, y en cada uno con otra organización:

- **Plan 2010:** es una materia propia, *Cálculo Diferencial*, de primer semestre. Su examen trae funciones, límites, derivadas, variación y series.
- **Plan 2016:** la materia de primer semestre es *Cálculo y Geometría Analítica*. Sus temas 2 a 5 son los de este cuaderno; los temas 1, 6 y 7 son de geometría. Las sucesiones y series son el primer tema de *Cálculo Integral*, de segundo semestre, y se estudian en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5.
- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera y el nombre de la materia que debes. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

	Plan 2010: Cálculo Diferencial	Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica
Estudia	Unidades 2 a 6; lee la 1 (dos páginas)	Unidades 2 a 5, con las secciones marcadas SOLO PLAN 2016
No estudies	—	Unidades 1 y 6 (solo Plan 2010); las series están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5
El examen trae	funciones, límites o continuidad, una o dos de derivadas, variación y series	funciones, límites o continuidad, derivadas, variación, **vectores** y **recta y plano**
Este cuaderno cubre	todo el examen	**4 de los 6 problemas**

Si tu plan es el 2016: lo que falta. Los problemas de geometría de Cálculo y Geometría Analítica (secciones cónicas, álgebra vectorial, y recta y plano) no están en este cuaderno. En los 39 finales revisados son 81 de 238 problemas: casi siempre el problema 5 (vectores: producto escalar y vectorial, componente vectorial, área, volumen) y el problema 6 (recta y plano: ecuaciones, distancias, ángulos, intersecciones). Las cónicas salen sobre todo en

2. Elimina el parámetro: despeja $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$ (o t) y usa la identidad que corresponda. Si hay $\operatorname{sen}^2 t$ o $\cos^2 t$, la parábola sale directo de $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
3. Escribe $y = f(x)$ explícita, eligiendo el signo de la raíz con el recorrido.
4. Traza el arco marcando los puntos de los extremos del intervalo de t.
5. Si piden la inversa, aplica 2.3.6 a la forma cartesiana.

2.3.9 Modelos geométricos

1. Dibuja la figura y nombra todas las variables (la que pide el enunciado y las auxiliares).
2. Escribe la cantidad pedida con todas sus variables (área, perímetro, volumen, costo).
3. Escribe la relación entre variables: el dato fijo (área, material, perímetro) o la geometría (Pitágoras, semejanza, el punto sobre la curva).
4. Despeja la variable auxiliar y sustituye: la cantidad queda en función de una sola variable.
5. Dominio: exige que todas las longitudes sean positivas y que la figura quepa.

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Inversa de una función con radical

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 1.

Para la función $F = \left\{(x,y) \;\middle|\; y = 3 + \sqrt{x^2+4x}\,;\ x < -4\right\}$ obtenga su función inversa, así como el dominio y el recorrido de ésta, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Dominio de F:** el dado, $x < -4$. Ahí $x^2 + 4x = x(x+4) > 0$ (producto de dos negativos), así que la raíz existe.
2. **Inyectividad:** se completa el cuadrado, $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$. Para $x < -4$ se tiene $x + 2 < -2$; al disminuir x, $(x+2)^2$ crece. Entonces F es decreciente y tiene inversa.
3. **Recorrido de F:** cuando $x \to -4^-$, la raíz tiende a 0 y $y \to 3$ (sin alcanzarlo, porque -4 no está en el dominio); cuando $x \to -\infty$, $y \to \infty$. Entonces $R_F = (3, \infty)$.
4. **Despeje:**
$$y - 3 = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$$
$$(y-3)^2 + 4 = (x+2)^2$$
$$x + 2 = -\sqrt{(y-3)^2 + 4}.$$
Se toma el signo negativo porque $x + 2 < -2 < 0$.
5. **Intercambio:** $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x-3)^2 + 4}$.
6. $D_{F^{-1}} = R_F = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = D_F = (-\infty, -4)$. Comprobación: $F(-5) = 3 + \sqrt{5}$ y $F^{-1}\left(3 + \sqrt{5}\right) = -2 - \sqrt{5+4} = -5$.
7. **Gráfica:** de $(y-3)^2 = (x+2)^2 - 4$ sale la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, de centro $(-2, 3)$. F es la parte de la rama izquierda con $y > 3$; F^{-1} es su reflejo respecto a $y = x$, con punto vacío en $(3, -4)$.

Observaciones:

- Cada unidad de tu plan sale en casi todos los exámenes, una vez cada una; la Unidad 4 sale una o dos veces. No hay unidades que se puedan saltar: la diferencia está en los subtemas.
- Lo que más sale dentro de cada unidad:
  - Unidad 2: la **función inversa** con dominio, recorrido y gráfica (la mitad de los problemas en los dos planes), muchas veces de una función dada en forma paramétrica o por partes; después, la composición y los modelos geométricos.
  - Unidad 3: dos o tres límites sin L'Hôpital, con radicales, trigonométricos y al infinito; o la continuidad de una función por partes con constantes.
  - Unidad 4: derivación implícita y paramétrica, recta tangente y normal, y razón de cambio.
  - Unidad 5: un problema de optimación o un análisis completo de la gráfica; a veces el teorema del valor medio o el de Rolle.
  - Unidad 6 (Plan 2010): serie de Maclaurin o de Taylor, o intervalo de convergencia con el análisis de los extremos.
- Del programa casi no se evalúan: la historia, el límite y la derivada por definición (salvo en algún parcial), la diferencial y las sucesiones solas. Se mencionan, pero no se desarrollan.

0.4 Orden de estudio

Como todas las unidades pesan casi lo mismo, el orden va por peso y por dependencia: la Unidad 4 pesa más y la usan las Unidades 5 y 6; los límites (Unidad 3) se necesitan para la continuidad y para las series. El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar así:

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	Unidad 0 y Unidad 4	Unidad 0 y Unidad 4
2	Unidades 3 y 5	Unidades 3 y 5
3	Unidad 6	Unidad 2, con logaritmo, exponencial e hiperbólicas
4	Unidad 2	Vectores, recta y plano (cuaderno de Geometría Analítica, Unidades 3 y 4)
5	Simulacro (Apéndice B)	Simulacro completo: problemas 1 a 4 de este cuaderno y 5 y 6 del de Geometría Analítica (Apéndice B de cada uno)

Ruta de 2 semanas.

- **Plan 2010.** Primera semana: Unidades 4, 3 y 5. Segunda semana: Unidades 6 y 2 y un simulacro. La Unidad 6 es casi mecánica (derivar n veces y aplicar el criterio del cociente) y vale un sexto del examen.

por un dato fijo (un área, un perímetro, un material) o por una figura (Pitágoras, triángulos semejantes, un punto sobre una curva). Esa relación se usa para eliminar la variable que sobra. El dominio lo dan las condiciones físicas: longitudes positivas (o no negativas), la figura cabe en la otra. Estos modelos son el primer paso de los problemas de optimación de la Unidad 5.

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar el dominio y el recorrido» de una regla con raíces, cocientes, ln o ang sen	dominio natural y recorrido	2.3.1, 2.3.2
$\sqrt{a^2-(x-h)^2}$, $\sqrt{x^2+4x}$, «trazar la gráfica»	reconocer la cónica y trazar el arco	2.3.3
una regla con llaves y varios intervalos	función por partes	2.3.4
$f\circ g$, $g\circ f$, fg, $\frac{g}{f}$ «indicando su dominio»	composición u operación	2.3.5
«determinar si tiene inversa», «obtener f^{-1}», «biyectiva»	inversa y su gráfica	2.3.6
la función con inversa pedida está dada por partes	inversa rama por rama	2.3.7
$x=x(t)$, $y=y(t)$: «forma cartesiana», «forma explícita», «$y=f(x)$»	eliminar el parámetro	2.3.8
«en función de», «en términos únicamente de», con figura	modelo de una variable	2.3.9

2.3 Procedimientos

2.3.1 Dominio

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es el dominio (revisa que la regla exista en todo él).
2. Si no, anota una condición por cada restricción: radicando par ≥ 0, denominador $\neq 0$, argumento de ln > 0, argumento de ang sen o ang cos entre -1 y 1.
3. Resuelve cada desigualdad (completa el cuadrado o factoriza; tabla de signos si hace falta) e intersecta los conjuntos.
4. Escribe el dominio con intervalos.

2.3.2 Recorrido

1. **Por monotonía:** si f es continua y creciente (o decreciente) en su dominio, el recorrido va de un extremo al otro. Evalúa en los extremos incluidos y toma el valor al que se acerca f en los excluidos y en $\pm\infty$.
2. **Despejando x:** de $y=f(x)$ despeja x en términos de y; los y para los que el despeje existe (y da x en el dominio) forman el recorrido. Es el mismo trabajo que la inversa.
3. **Por la gráfica:** si la regla es un arco de cónica (2.3.3), el recorrido se lee del arco.

Unidad 1 · Introducción al Cálculo (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno conocerá el desarrollo histórico del Cálculo y valorará la importancia de éste a través de sus aplicaciones.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016, el tema 1 de Cálculo y Geometría Analítica es «Secciones cónicas», que está en el cuaderno de Geometría Analítica, Unidad 1, Parte B (sección 0.1): salta a la Unidad 2.
- **Frecuencia:** no aparece en ninguno de los 10 finales revisados.
- **Tiempo:** 10 minutos de lectura. No tiene ejercicios.

1.1 Qué quiere decir «cálculo»

Calculus, en latín, es una piedrecilla: las que se usaban para contar en el ábaco. De ahí «calcular». Hoy, «el Cálculo» es el nombre corto del *cálculo infinitesimal*: el estudio de cómo cambian las cantidades, con dos ramas.

- El **cálculo diferencial** (este cuaderno) mide la rapidez del cambio: la pendiente de una curva, la velocidad de un móvil, la razón de cambio de una cantidad respecto a otra.
- El **cálculo integral** (la materia siguiente) acumula el cambio: áreas, volúmenes, longitudes de arco, trabajo.

Las dos ramas están unidas por el teorema fundamental del cálculo: derivar e integrar son operaciones inversas.

1.2 Reseña histórica

- **Antigüedad.** Arquímedes (siglo III a. C.) calculó el área de un segmento de parábola llenándolo con triángulos cada vez más pequeños: la idea de *límite*, sin el nombre.
- **Siglo XVII: los dos problemas.** Fermat y Descartes buscaban la *recta tangente* a una curva; Galileo y Kepler estudiaban la *velocidad* de los cuerpos y de los planetas. Son el mismo problema: la pendiente de la tangente a la gráfica de la posición es la velocidad.
- **Newton y Leibniz.** Entre 1665 y 1684, cada uno por su lado, dieron reglas generales para derivar e integrar y descubrieron que son operaciones inversas. La notación $\frac{dy}{dx}$ y el signo de la integral son de Leibniz; Newton hablaba de «fluxiones».
- **Siglo XVIII.** Los Bernoulli, Euler y Lagrange extendieron el cálculo a las series, las ecuaciones diferenciales y la mecánica. Taylor y Maclaurin dieron los desarrollos en serie de la Unidad 6.
- **Siglo XIX: el rigor.** Cauchy y Weierstrass definieron el límite con precisión (la definición con ε y δ) y, con él, la continuidad y la derivada. Bolzano y Weierstrass dan nombre a dos teoremas de la Unidad 5.

2.1.6 Funciones en forma paramétrica

Una función puede darse con un parámetro:

$$f:\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Cada t da un punto (x, y) de la gráfica. Para la forma cartesiana se **elimina el parámetro**: se despeja t (o una función de t, como $\operatorname{sen} t$) de una ecuación y se sustituye en la otra, o se usa una identidad ($\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$). El dominio es el conjunto de valores de $x(t)$ con $t \in I$, y el recorrido el de $y(t)$. Si no se da el intervalo de t, lo imponen las raíces o las restricciones sobre x y y.

2.1.7 Funciones trigonométricas directas e inversas

$\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[-1, 1]$; $\tan x$ y $\sec x$ excluyen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot x$ y $\csc x$ excluyen $x = k\pi$. Ninguna es inyectiva: para invertirlas se restringen a un intervalo principal.

Inversa	Dominio	Recorrido (valor principal)
$\operatorname{ang\,sen} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\operatorname{ang\,cos} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{ang\,tan} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ang\,cot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\operatorname{ang\,sec} x$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y = \operatorname{ang\,sen} x$ significa $\operatorname{sen} y = x$ con y en el intervalo principal. Por eso $\operatorname{ang\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ solo si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (Para ang sec algunos textos usan otro intervalo principal; aquí se usa el de la tabla.)

2.1.8 Logaritmo natural y exponencial SOLO PLAN 2016

SOLO PLAN 2016 El **logaritmo natural** $\ln x$ tiene dominio $(0, \infty)$ y recorrido $\mathbb{R}$; es creciente, $\ln 1 = 0$ y $\ln e = 1$. Su inversa es la **exponencial** e^x, con dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, \infty)$:

$$e^{\ln x} = x \ \ (x > 0), \qquad \ln e^x = x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Sus gráficas son simétricas respecto a $y = x$ (figura). Propiedades, con $a, b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^r = r \ln a,$$
$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad \left(e^x\right)^r = e^{rx}.$$

Cambio de base: para $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ y $a^x = e^{x \ln a}$.

Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno utilizará el concepto de función y sus características principales para aplicarlos en la formulación de modelos matemáticos.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 2). El alumno analizará las características principales de las funciones reales de variable real y formulará modelos matemáticos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, un problema en cada uno de los 10 finales revisados: función inversa en 5 (dos dadas en paramétricas y una por partes), composición en 2 (una con producto), modelo geométrico en 2 y dominio y recorrido en 1. En el Plan 2016, un problema en cada uno de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica: función inversa en 19 (tres de ellas dadas en paramétricas), paramétricas a forma cartesiana en 9, composición, producto o cociente en 6, función por partes en 3, modelo en 1 y dominio y recorrido de una función dada por una ecuación en 1. En los 12 primeros parciales revisados hay 38 problemas de esta unidad (tres en casi todos): 12 modelos, 8 paramétricas, 8 inversas, 7 composiciones o productos y 3 funciones por partes.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.5 (25 min): dominio, gráficas básicas e inversa.
  2. Aprende los procedimientos 2.3.6 (inversa) y 2.3.8 (paramétricas): juntos son más de la mitad de los problemas.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 2.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro: 15 min cada uno, con gráfica.
  5. Plan 2016: agrega las secciones 2.1.8 y 2.1.9, el ejercicio 2.5.2 y el propuesto 2.6.5.

2.1 Conceptos y expresiones

2.1.1 Función, dominio y recorrido

Una *función* f de A en B es una regla que asigna a *cada* elemento x de A *un único* elemento $y = f(x)$ de B. También se describe como un conjunto de pares, $f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A\}$, donde no hay dos pares con el mismo primer elemento. En una gráfica, esto se reconoce con la **prueba de la recta vertical**: toda recta vertical corta a la gráfica a lo más una vez.

- **Dominio** D_f: los valores de x para los que la regla da un número real (o los que el enunciado indique, como «$x \in [-2, 0]$»).
- **Recorrido** (también *rango* o *imagen*) R_f: los valores y que efectivamente toma la función, $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$. El *codominio* es el conjunto de llegada, que puede ser mayor.
- **Regla de correspondencia**: la fórmula $y = f(x)$. En forma *explícita* es $y = \ldots$; en forma *implícita*, una ecuación como $x^2 + y^2 = 4$ más una restricción.

Cuando el enunciado no da el dominio, se toma el *dominio natural*: todos los reales donde la regla tiene sentido. Las restricciones vienen de cuatro fuentes:

- **Raíz de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$. Las raíces de índice impar ($\sqrt[3]{u}$) no restringen.
- **Cociente:** $\frac{N}{D}$ exige $D \neq 0$; si el denominador es una raíz par, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$.
- **Trigonométricas inversas:** $\operatorname{ang\,sen} u$ y $\operatorname{ang\,cos} u$ exigen $-1 \leq u \leq 1$; $\operatorname{ang\,sec} u$ exige $|u| \geq 1$.
- **Logaritmo:** $\ln u$ exige $u > 0$.

2.1.2 Gráficas básicas y transformaciones

Las gráficas que más aparecen en los exámenes son las de esta tabla. Casi todas las raíces de los enunciados son arcos de circunferencia, elipse o hipérbola: se reconocen al completar el cuadrado y elevar al cuadrado.

Regla	Dominio	Recorrido
$y = x^2$ (parábola)	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$ (hipérbola)	$x \neq 0$	$y \neq 0$
$y = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (semicircunferencia)	$[-a, a]$	$[0, a]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (semielipse)	$[-a, a]$	$[0, b]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (hipérbola horizontal)	$\lvert x \rvert \geq a$	$[0, \infty)$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$ (hipérbola vertical)	$\mathbb{R}$	$[b, \infty)$

Las dos últimas son las mitades superiores de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y de $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Transformaciones. A partir de la gráfica de $y = f(x)$:

- $y = f(x - h) + k$: se traslada h unidades a la derecha y k hacia arriba (h, k con su signo);
- $y = -f(x)$: se refleja respecto al eje x; $y = f(-x)$: respecto al eje y;
- $y = a\,f(x)$ con $a > 0$: se estira ($a > 1$) o se comprime ($a < 1$) verticalmente.

Así, $y = -4 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - (x - 3)^2}$ es la semicircunferencia $\sqrt{16 - x^2}$ comprimida a la mitad (una semielipse), reflejada hacia abajo y con centro en $(3, -4)$.