CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cálculo Diferencial

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.2.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 6

Unidad 1 · Introducción al Cálculo (solo Plan 2010) 10

Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos 12

Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes 31

Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio 46

Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio 64

Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010) 80

Apéndice A · Formulario 91

Apéndice B · Exámenes 94

Apéndice C · Fe de erratas 102

Apéndice D · Fuentes 104

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 106

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Diferencial** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sirve a los dos planes de estudio de la Facultad:

- **Plan 2010:** la asignatura *Cálculo Diferencial*, con el programa aprobado en 2008. Seis temas: introducción, funciones, límites y continuidad, la derivada, variación de funciones, y sucesiones y series.
- **Plan 2016:** no hay una asignatura con ese nombre. Las funciones, los límites, la derivada y la variación son los temas 2 a 5 de *Cálculo y Geometría Analítica*, con casi las mismas palabras, y agregan el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas. Las sucesiones y series pasaron al tema 1 de *Cálculo Integral*: para el Plan 2016 están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5, no en este.

El cuaderno sigue el orden del programa de 2010 y marca lo que es de un solo plan:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y **qué plan es el tuyo**.
1. Introducción al Cálculo (solo Plan 2010).
2. Funciones.
3. Límites y continuidad.
4. La derivada.
5. Variación de funciones.
6. Sucesiones y series (solo Plan 2010).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Lo que este cuaderno no cubre. Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) tiene además tres temas de geometría: secciones cónicas, álgebra vectorial, y recta y plano. No están aquí: están en *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*, que trabaja los problemas 5 (vectores) y 6 (recta y plano) del final en sus Unidades 3 y 4, y las cónicas del primer parcial en su Unidad 1, Parte B. Entre los dos cuadernos cubren el examen completo. La sección 0.1 dice cuánto pesan en el examen y cómo organizar el estudio con ellos.

Objetivo de la asignatura (programa).

- *Plan 2010, Cálculo Diferencial:* «El alumno aplicará los conceptos del cálculo diferencial de funciones reales de variable real, en la formulación de modelos matemáticos y para resolver problemas físicos y geométricos.»
- *Plan 2016, Cálculo y Geometría Analítica:* «El alumno analizará los conceptos fundamentales del cálculo diferencial de funciones reales de variable real y del álgebra vectorial, y los aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos.»

De dónde salen los ejercicios.

- Plan 2010: los **10 exámenes finales publicados** de Cálculo Diferencial, de 2001-2 a 2013-2 (cinco son de la versión anterior del programa, con los mismos temas). Ninguno tiene resolución publicada.

- Plan 2016: los **39 exámenes finales** y **17 exámenes parciales** publicados de Cálculo y Geometría Analítica, de 2016-1 a 2026-2, para las unidades 2 a 5. Ninguno tiene resolución publicada.
- **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó; los del Plan 2016 dicen también la asignatura. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora y sin L'Hôpital. Ningún examen permite calculadora: las resoluciones usan valores exactos (fracciones, radicales, π, ángulos notables). Los límites se calculan sin la regla de L'Hôpital, que se enseña en Cálculo Integral.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen de cada plan, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Marcas de plan. Una unidad de un solo plan lo dice en su título. Dentro de una unidad compartida, lo que es de un solo plan lleva el rótulo SOLO PLAN 2016 : por ejemplo, el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas, que en el Plan 2010 se estudian en Cálculo Integral.

Formato de cada resolución. Planteamiento ⟶ pasos numerados ⟶ **resultado** en negritas. En los problemas de «¿es continua?» o «¿se cumple el teorema?», cada condición se revisa por separado, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 dice qué estudiar según tu plan y propone, para cada plan, una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué plan es el tuyo, qué unidades estudiar y en qué orden.
- Si eres de la Generación 2027 o posterior, tu plan es el 2026: usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial e Integral*.

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

El cálculo diferencial de una variable se enseña con dos planes de estudio, y en cada uno con otra organización:

- **Plan 2010:** es una materia propia, *Cálculo Diferencial*, de primer semestre. Su examen trae funciones, límites, derivadas, variación y series.
- **Plan 2016:** la materia de primer semestre es *Cálculo y Geometría Analítica*. Sus temas 2 a 5 son los de este cuaderno; los temas 1, 6 y 7 son de geometría. Las sucesiones y series son el primer tema de *Cálculo Integral*, de segundo semestre, y se estudian en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5.
- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera y el nombre de la materia que debes. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

	Plan 2010: Cálculo Diferencial	Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica
Estudia	Unidades 2 a 6; lee la 1 (dos páginas)	Unidades 2 a 5, con las secciones marcadas SOLO PLAN 2016
No estudies	—	Unidades 1 y 6 (solo Plan 2010); las series están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5
El examen trae	funciones, límites o continuidad, una o dos de derivadas, variación y series	funciones, límites o continuidad, derivadas, variación, **vectores** y **recta y plano**
Este cuaderno cubre	todo el examen	**4 de los 6 problemas**

Si tu plan es el 2016: lo que falta. Los problemas de geometría de Cálculo y Geometría Analítica (secciones cónicas, álgebra vectorial, y recta y plano) no están en este cuaderno. En los 39 finales revisados son 81 de 238 problemas: casi siempre el problema 5 (vectores: producto escalar y vectorial, componente vectorial, área, volumen) y el problema 6 (recta y plano: ecuaciones, distancias, ángulos, intersecciones). Las cónicas salen sobre todo en

el primer examen parcial. Esos temas están en *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*: los problemas 5 y 6, en sus Unidades 3 (álgebra vectorial) y 4 (recta y plano), y las cónicas, en su Unidad 1, Parte B. Entre los dos cuadernos cubren el examen completo.

Las unidades de un solo plan lo dicen en su título, y las secciones de un solo plan llevan el rótulo SOLO PLAN 2016 . En el Plan 2010, el logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas son de Cálculo Integral: si tu plan es el 2010, sáltalas.

0.2 Cómo es el examen

Según los 10 finales del Plan 2010 (de 2001-2 a 2013-2) y los 39 finales del Plan 2016 (de 2016-1 a 2026-2):

- **Duración:** 2 horas (2.5 horas en los finales del Plan 2010 hasta 2012-2).
- **Problemas:** 6 (7 en algunos finales anteriores a 2007), con puntos impresos que suman 100.
- **Material:** ninguno. Los exámenes del Plan 2016 dicen «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\sqrt[3]{2}$. No hace falta sacar decimales.
- **Sin L'Hôpital:** los enunciados de límites del Plan 2010 lo prohíben («sin utilizar la regla de L'Hôpital») y en el Plan 2016 la regla no está en el programa. Este cuaderno nunca la usa.
- **Plantilla fija:** un problema por unidad, siempre en el mismo orden.
  - Plan 2010: (1) funciones, (2) límites, (3) derivadas o continuidad, (4) tangente o razón de cambio, (5) variación, (6) series.
  - Plan 2016: (1) funciones, (2) límites o continuidad, (3) derivadas, tangente o razón de cambio, (4) variación, (5) vectores, (6) recta y plano.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Unidad	Tema	Plan 2010 (10 finales)	Plan 2016 (39 finales)
1	Introducción al Cálculo	0	—
2	Funciones	**10 de 10**	**39 de 39**
3	Límites y continuidad	**10 de 10** (12 problemas)	**38 de 39**
4	La derivada	**10 de 10** (20 problemas)	**38 de 39** (44 problemas)
5	Variación de funciones	**10 de 10** (11 problemas)	**35 de 39**
6	Sucesiones y series (solo Plan 2010)	**10 de 10**	— (en Cálculo Integral)
—	Vectores, recta y plano (cuaderno de Geometría Analítica)	—	39 de 39 (81 problemas)

Observaciones:

- Cada unidad de tu plan sale en casi todos los exámenes, una vez cada una; la Unidad 4 sale una o dos veces. No hay unidades que se puedan saltar: la diferencia está en los subtemas.
- Lo que más sale dentro de cada unidad:
  - Unidad 2: la **función inversa** con dominio, recorrido y gráfica (la mitad de los problemas en los dos planes), muchas veces de una función dada en forma paramétrica o por partes; después, la composición y los modelos geométricos.
  - Unidad 3: dos o tres límites sin L'Hôpital, con radicales, trigonométricos y al infinito; o la continuidad de una función por partes con constantes.
  - Unidad 4: derivación implícita y paramétrica, recta tangente y normal, y razón de cambio.
  - Unidad 5: un problema de optimación o un análisis completo de la gráfica; a veces el teorema del valor medio o el de Rolle.
  - Unidad 6 (Plan 2010): serie de Maclaurin o de Taylor, o intervalo de convergencia con el análisis de los extremos.
- Del programa casi no se evalúan: la historia, el límite y la derivada por definición (salvo en algún parcial), la diferencial y las sucesiones solas. Se mencionan, pero no se desarrollan.

0.4 Orden de estudio

Como todas las unidades pesan casi lo mismo, el orden va por peso y por dependencia: la Unidad 4 pesa más y la usan las Unidades 5 y 6; los límites (Unidad 3) se necesitan para la continuidad y para las series. El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar así:

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	Unidad 0 y Unidad 4	Unidad 0 y Unidad 4
2	Unidades 3 y 5	Unidades 3 y 5
3	Unidad 6	Unidad 2, con logaritmo, exponencial e hiperbólicas
4	Unidad 2	Vectores, recta y plano (cuaderno de Geometría Analítica, Unidades 3 y 4)
5	Simulacro (Apéndice B)	Simulacro completo: problemas 1 a 4 de este cuaderno y 5 y 6 del de Geometría Analítica (Apéndice B de cada uno)

Ruta de 2 semanas.

- **Plan 2010.** Primera semana: Unidades 4, 3 y 5. Segunda semana: Unidades 6 y 2 y un simulacro. La Unidad 6 es casi mecánica (derivar n veces y aplicar el criterio del cociente) y vale un sexto del examen.

- **Plan 2016.** Primera semana: Unidades 4, 3, 5 y 2. Segunda semana: vectores, recta y plano (cuaderno de Geometría Analítica, Unidades 3 y 4) y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

1. la historia (Unidad 1) y las demostraciones de los teoremas;
2. la derivada por definición y la diferencial (Unidad 4);
3. las sucesiones y las series numéricas solas (Unidad 6), salvo las que se usan en los extremos del intervalo de convergencia.

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por lo mecánico: las derivadas, la serie de Maclaurin y el análisis de la variación. Deja para después la inversa con gráficas y el modelo de optimación, que piden más planteamiento.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: la función por optimizar con su restricción, las variables de la razón de cambio con sus unidades, el término general de la serie.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.
5. Comprueba al final: sustituye el punto de tangencia en la curva, revisa que el dominio de f^{-1} sea el recorrido de f, evalúa la función en los extremos del intervalo.

0.6 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

Unidad 1 · Introducción al Cálculo (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

> **Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010).** El alumno conocerá el desarrollo histórico del Cálculo y valorará la importancia de éste a través de sus aplicaciones.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016, el tema 1 de Cálculo y Geometría Analítica es «Secciones cónicas», que está en el cuaderno de Geometría Analítica, Unidad 1, Parte B (sección 0.1): salta a la Unidad 2.
- **Frecuencia:** no aparece en ninguno de los 10 finales revisados.
- **Tiempo:** 10 minutos de lectura. No tiene ejercicios.

1.1 Qué quiere decir «cálculo»

Calculus, en latín, es una piedrecilla: las que se usaban para contar en el ábaco. De ahí «calcular». Hoy, «el Cálculo» es el nombre corto del *cálculo infinitesimal*: el estudio de cómo cambian las cantidades, con dos ramas.

- El **cálculo diferencial** (este cuaderno) mide la rapidez del cambio: la pendiente de una curva, la velocidad de un móvil, la razón de cambio de una cantidad respecto a otra.
- El **cálculo integral** (la materia siguiente) acumula el cambio: áreas, volúmenes, longitudes de arco, trabajo.

Las dos ramas están unidas por el teorema fundamental del cálculo: derivar e integrar son operaciones inversas.

1.2 Reseña histórica

- **Antigüedad.** Arquímedes (siglo III a. C.) calculó el área de un segmento de parábola llenándolo con triángulos cada vez más pequeños: la idea de *límite*, sin el nombre.
- **Siglo XVII: los dos problemas.** Fermat y Descartes buscaban la *recta tangente* a una curva; Galileo y Kepler estudiaban la *velocidad* de los cuerpos y de los planetas. Son el mismo problema: la pendiente de la tangente a la gráfica de la posición es la velocidad.
- **Newton y Leibniz.** Entre 1665 y 1684, cada uno por su lado, dieron reglas generales para derivar e integrar y descubrieron que son operaciones inversas. La notación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y el signo de la integral son de Leibniz; Newton hablaba de «fluxiones».
- **Siglo XVIII.** Los Bernoulli, Euler y Lagrange extendieron el cálculo a las series, las ecuaciones diferenciales y la mecánica. Taylor y Maclaurin dieron los desarrollos en serie de la Unidad 6.
- **Siglo XIX: el rigor.** Cauchy y Weierstrass definieron el límite con precisión (la definición con ε y δ) y, con él, la continuidad y la derivada. Bolzano y Weierstrass dan nombre a dos teoremas de la Unidad 5.

1.3 Para qué sirve en ingeniería

Cada unidad de este cuaderno es una herramienta que se usa después:

- las **funciones** (Unidad 2), para escribir un fenómeno como un modelo: el área de una sección en función del ancho, el costo en función de la producción;
- los **límites** (Unidad 3), para el comportamiento cerca de un punto o a largo plazo, y para definir la derivada;
- la **derivada** (Unidad 4), para velocidades, aceleraciones y razones de cambio relacionadas: cómo cambia el nivel de un tanque cuando cambia el caudal;
- la **variación** (Unidad 5), para optimizar: el diseño con menos material, la máxima área, el mínimo costo;
- las **series** (Unidad 6), para aproximar funciones con polinomios: así calculan una calculadora y una computadora $\operatorname{sen} x$ o $\sqrt{x}$.

Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno utilizará el concepto de función y sus características principales para aplicarlos en la formulación de modelos matemáticos.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 2). El alumno analizará las características principales de las funciones reales de variable real y formulará modelos matemáticos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, un problema en cada uno de los 10 finales revisados: función inversa en 5 (dos dadas en paramétricas y una por partes), composición en 2 (una con producto), modelo geométrico en 2 y dominio y recorrido en 1. En el Plan 2016, un problema en cada uno de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica: función inversa en 19 (tres de ellas dadas en paramétricas), paramétricas a forma cartesiana en 9, composición, producto o cociente en 6, función por partes en 3, modelo en 1 y dominio y recorrido de una función dada por una ecuación en 1. En los 12 primeros parciales revisados hay 38 problemas de esta unidad (tres en casi todos): 12 modelos, 8 paramétricas, 8 inversas, 7 composiciones o productos y 3 funciones por partes.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.5 (25 min): dominio, gráficas básicas e inversa.
  2. Aprende los procedimientos 2.3.6 (inversa) y 2.3.8 (paramétricas): juntos son más de la mitad de los problemas.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 2.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro: 15 min cada uno, con gráfica.
  5. Plan 2016: agrega las secciones 2.1.8 y 2.1.9, el ejercicio 2.5.2 y el propuesto 2.6.5.

2.1 Conceptos y expresiones

2.1.1 Función, dominio y recorrido

Una *función* f de A en B es una regla que asigna a *cada* elemento x de A *un único* elemento $y = f(x)$ de B. También se describe como un conjunto de pares, $f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A\}$, donde no hay dos pares con el mismo primer elemento. En una gráfica, esto se reconoce con la **prueba de la recta vertical**: toda recta vertical corta a la gráfica a lo más una vez.

- **Dominio** D_f: los valores de x para los que la regla da un número real (o los que el enunciado indique, como «$x \in [-2, 0]$»).
- **Recorrido** (también *rango* o *imagen*) R_f: los valores y que efectivamente toma la función, $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$. El *codominio* es el conjunto de llegada, que puede ser

mayor.

- **Regla de correspondencia**: la fórmula $y = f(x)$. En forma *explícita* es $y = \ldots$; en forma *implícita*, una ecuación como $x^2 + y^2 = 4$ más una restricción.

Cuando el enunciado no da el dominio, se toma el *dominio natural*: todos los reales donde la regla tiene sentido. Las restricciones vienen de cuatro fuentes:

- **Raíz de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$. Las raíces de índice impar ($\sqrt[3]{u}$) no restringen.
- **Cociente:** $\frac{N}{D}$ exige $D \neq 0$; si el denominador es una raíz par, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$.
- **Trigonométricas inversas:** ang sen u y ang cos u exigen $-1 \leq u \leq 1$; ang sec u exige $|u| \geq 1$.
- **Logaritmo:** $\ln u$ exige $u > 0$.

2.1.2 Gráficas básicas y transformaciones

Las gráficas que más aparecen en los exámenes son las de esta tabla. Casi todas las raíces de los enunciados son arcos de circunferencia, elipse o hipérbola: se reconocen al completar el cuadrado y elevar al cuadrado.

Regla	Dominio	Recorrido
$y = x^2$ (parábola)	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$ (hipérbola)	$x \neq 0$	$y \neq 0$
$y = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (semicircunferencia)	$[-a, a]$	$[0, a]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (semielipse)	$[-a, a]$	$[0, b]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (hipérbola horizontal)	$\lvert x \rvert \geq a$	$[0, \infty)$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$ (hipérbola vertical)	$\mathbb{R}$	$[b, \infty)$

Las dos últimas son las mitades superiores de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y de $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Transformaciones. A partir de la gráfica de $y = f(x)$:

- $y = f(x - h) + k$: se traslada h unidades a la derecha y k hacia arriba (h, k con su signo);
- $y = -f(x)$: se refleja respecto al eje x; $y = f(-x)$: respecto al eje y;
- $y = a\, f(x)$ con $a > 0$: se estira ($a > 1$) o se comprime ($a < 1$) verticalmente.

Así, $y = -4 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - (x - 3)^2}$ es la semicircunferencia $\sqrt{16 - x^2}$ comprimida a la mitad (una semielipse), reflejada hacia abajo y con centro en $(3, -4)$.

2.1.3 Funciones por partes

Una función por partes usa reglas distintas en intervalos distintos del dominio:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in I_1, \\ f_2(x) & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Su dominio es la unión $I_1 \cup I_2$ (cada I_k recortado al dominio de su regla) y su recorrido es la unión de los recorridos de cada rama, *cada una en su intervalo*. En la gráfica, los extremos incluidos se marcan con punto lleno y los excluidos con punto vacío.

2.1.4 Operaciones con funciones y composición

Para f y g se definen

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)\,g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

con dominio $D_f \cap D_g$ (y, en el cociente, sin los ceros de g). La **composición** es

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

Primero se aplica g y luego f. El dominio de la composición **no** se lee de la fórmula simplificada: $e^{\ln(x-2)}+2$ se simplifica a x, pero solo existe para $x > 2$. En general $f\circ g \neq g\circ f$.

2.1.5 Inyectividad y función inversa

f es **inyectiva** (uno a uno) si valores distintos de x dan valores distintos de y: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. En la gráfica: toda recta *horizontal* la corta a lo más una vez (**prueba de la recta horizontal**). Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en su dominio es inyectiva. Es **biyectiva** si además su codominio es su recorrido.

Solo una función inyectiva tiene **inversa** f^{-1}, definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \qquad D_{f^{-1}} = R_f, \qquad R_{f^{-1}} = D_f.$$

Se cumple $\big(f \circ f^{-1}\big)(x) = x$ en R_f y $\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x$ en D_f. La gráfica de f^{-1} es la de f **reflejada respecto a la recta** $y = x$: el punto (a, b) de f pasa a (b, a).

Si f no es inyectiva (por ejemplo $y = x^2$), se **restringe** su dominio a un intervalo donde sí lo sea: $y = x^2$ con $x \geq 0$ tiene inversa $\sqrt{x}$; con $x \leq 0$, $-\sqrt{x}$. El signo de la raíz al despejar lo decide la restricción.

Inversa de una función por partes. Si cada rama es inyectiva y los recorridos de las ramas no se traslapan, la función es inyectiva y su inversa es por partes: en cada rama se despeja por separado, y el intervalo de cada rama de f^{-1} es el *recorrido* de la rama correspondiente de f.

2.1.6 Funciones en forma paramétrica

Una función puede darse con un parámetro:

$$f:\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Cada t da un punto (x, y) de la gráfica. Para la forma cartesiana se **elimina el parámetro**: se despeja t (o una función de t, como $\operatorname{sen} t$) de una ecuación y se sustituye en la otra, o se usa una identidad ($\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$). El dominio es el conjunto de valores de $x(t)$ con $t \in I$, y el recorrido el de $y(t)$. Si no se da el intervalo de t, lo imponen las raíces o las restricciones sobre x y y.

2.1.7 Funciones trigonométricas directas e inversas

$\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[-1, 1]$; $\tan x$ y $\sec x$ excluyen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot x$ y $\csc x$ excluyen $x = k\pi$. Ninguna es inyectiva: para invertirlas se restringen a un intervalo principal.

Inversa	Dominio	Recorrido (valor principal)
$\operatorname{ang\,sen} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\operatorname{ang\,cos} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{ang\,tan} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ang\,cot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\operatorname{ang\,sec} x$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y = \operatorname{ang\,sen} x$ significa $\operatorname{sen} y = x$ con y en el intervalo principal. Por eso $\operatorname{ang\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ solo si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (Para ang sec algunos textos usan otro intervalo principal; aquí se usa el de la tabla.)

2.1.8 Logaritmo natural y exponencial SOLO PLAN 2016

SOLO PLAN 2016 El **logaritmo natural** $\ln x$ tiene dominio $(0, \infty)$ y recorrido $\mathbb{R}$; es creciente, $\ln 1 = 0$ y $\ln e = 1$. Su inversa es la **exponencial** e^x, con dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, \infty)$:

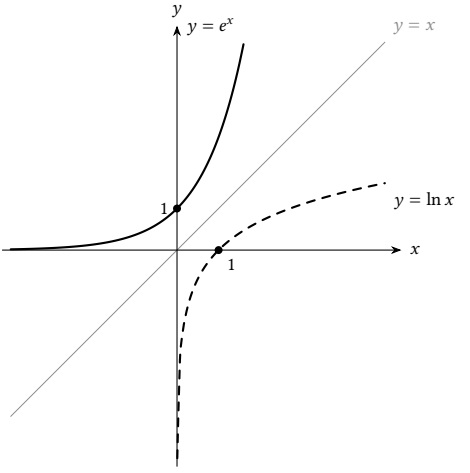
$$e^{\ln x} = x \ \ (x > 0), \qquad \ln e^x = x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Sus gráficas son simétricas respecto a $y = x$ (figura). Propiedades, con $a, b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^r = r \ln a,$$

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad \left(e^x\right)^r = e^{rx}.$$

Cambio de base: para $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ y $a^x = e^{x \ln a}$.



2.1.9 *Funciones hiperbólicas* SOLO PLAN 2016

SOLO PLAN 2016 Se definen con la exponencial:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x},$$

y $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$. La identidad fundamental es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

por eso $x = a\cosh t$, $y = b\operatorname{senh} t$ recorre la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gráficas: $\operatorname{senh} x$ es impar, creciente, con recorrido $\mathbb{R}$; $\cosh x$ es par, con mínimo $\cosh 0 = 1$ y recorrido $[1, \infty)$ (la forma de una cadena colgante); $\tanh x$ es creciente, con recorrido $(-1, 1)$ y asíntotas $y = \pm 1$.

Las inversas tienen forma logarítmica (se obtienen despejando e^y de una ecuación de segundo grado):

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1,$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Para $\cosh^{-1}$ se restringe $\cosh x$ a $x \geq 0$, donde es inyectiva. En algunos exámenes se escriben «ang senh», «ang cosh», «ang tanh».

2.1.10 *Modelos geométricos*

Formular un modelo es escribir una cantidad (área, perímetro, volumen, costo) como función de *una sola* variable, con su dominio. Casi siempre hay dos variables relacionadas

por un dato fijo (un área, un perímetro, un material) o por una figura (Pitágoras, triángulos semejantes, un punto sobre una curva). Esa relación se usa para eliminar la variable que sobra. El dominio lo dan las condiciones físicas: longitudes positivas (o no negativas), la figura cabe en la otra. Estos modelos son el primer paso de los problemas de optimación de la Unidad 5.

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar el dominio y el recorrido» de una regla con raíces, cocientes, ln o ang sen	dominio natural y recorrido	2.3.1, 2.3.2
$\sqrt{a^2-(x-h)^2}$, $\sqrt{x^2+4x}$, «trazar la gráfica»	reconocer la cónica y trazar el arco	2.3.3
una regla con llaves y varios intervalos	función por partes	2.3.4
$f\circ g$, $g\circ f$, fg, $\frac{g}{f}$ «indicando su dominio»	composición u operación	2.3.5
«determinar si tiene inversa», «obtener f^{-1}», «biyectiva»	inversa y su gráfica	2.3.6
la función con inversa pedida está dada por partes	inversa rama por rama	2.3.7
$x=x(t)$, $y=y(t)$: «forma cartesiana», «forma explícita», «$y=f(x)$»	eliminar el parámetro	2.3.8
«en función de», «en términos únicamente de», con figura	modelo de una variable	2.3.9

2.3 Procedimientos

2.3.1 Dominio

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es el dominio (revisa que la regla exista en todo él).
2. Si no, anota una condición por cada restricción: radicando par ≥ 0, denominador $\neq 0$, argumento de ln > 0, argumento de ang sen o ang cos entre -1 y 1.
3. Resuelve cada desigualdad (completa el cuadrado o factoriza; tabla de signos si hace falta) e intersecta los conjuntos.
4. Escribe el dominio con intervalos.

2.3.2 Recorrido

1. **Por monotonía:** si f es continua y creciente (o decreciente) en su dominio, el recorrido va de un extremo al otro. Evalúa en los extremos incluidos y toma el valor al que se acerca f en los excluidos y en $\pm\infty$.
2. **Despejando x:** de $y=f(x)$ despeja x en términos de y; los y para los que el despeje existe (y da x en el dominio) forman el recorrido. Es el mismo trabajo que la inversa.
3. **Por la gráfica:** si la regla es un arco de cónica (2.3.3), el recorrido se lee del arco.

2.3.3 Gráficas de raíces: arcos de cónicas

1. Completa el cuadrado dentro de la raíz: $8-2x-x^2 = 9-(x+1)^2$, $x^2+4x = (x+2)^2-4$.
2. Aísla la raíz y eleva al cuadrado: de $y = k \pm c\sqrt{\dots}$ sale $(y-k)^2 = c^2(\dots)$. Identifica la cónica: circunferencia, elipse o hipérbola, con su centro.
3. El signo de la raíz decide la mitad: $y = k + c\sqrt{\dots}$ es la mitad con $y \geq k$; $y = k - c\sqrt{\dots}$, la de $y \leq k$.
4. El intervalo de x decide el arco. Marca extremos (llenos o vacíos) y traza.

2.3.4 Funciones por partes

1. Para cada rama: recorta su intervalo al dominio de su regla. El dominio es la unión.
2. Para cada rama: su recorrido en su intervalo (2.3.2). El recorrido de f es la unión.
3. Traza cada rama solo en su intervalo; evalúa la regla en los extremos y marca punto lleno si el extremo pertenece a la rama y vacío si no.

2.3.5 Composición, producto y cociente

1. Regla: en $f \circ g$ sustituye $g(x)$ en lugar de x en f. Simplifica.
2. Dominio de $f \circ g$: $x \in D_g$ **y** $g(x) \in D_f$. Escribe las dos condiciones antes de simplificar.
3. Dominio de fg, $f \pm g$: $D_f \cap D_g$; de $\frac{f}{g}$: además $g(x) \neq 0$.
4. Recorrido y gráfica de la función resultante con 2.3.2 y 2.3.3.

2.3.6 Función inversa

1. **Dominio y recorrido de** f (2.3.1, 2.3.2).
2. **Inyectividad:** muestra que f es creciente o decreciente en su dominio (por la forma de la gráfica o porque la parte que depende de x lo es). Si no lo es, no hay inversa: dilo y explica por qué (dos x con el mismo y).
3. **Despeja** x de $y = f(x)$. Al sacar raíz cuadrada aparece $\pm$: el signo lo decide el dominio de f (si $x \leq -1$, entonces $x+1 \leq 0$ y se toma $-$).
4. **Intercambia** x y y: $y = f^{-1}(x)$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$. No calcules el dominio de f^{-1} con su fórmula: la fórmula puede existir en un conjunto mayor.
6. **Gráfica:** traza f, la recta $y = x$ y el reflejo; los puntos extremos (a, b) pasan a (b, a) con el mismo tipo de punto (lleno o vacío).
7. Comprueba con un punto: si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

2.3.7 Inversa de una función por partes

1. Calcula el recorrido de cada rama en su intervalo.
2. Si cada rama es inyectiva y los recorridos no se traslapan, f es inyectiva.
3. Despeja x en cada rama por separado (2.3.6).
4. Arma f^{-1} por partes: la rama que viene de f_k vale en el *recorrido* de f_k.

2.3.8 Funciones en forma paramétrica

1. Con el intervalo de t, obtén el intervalo de $x(t)$ (dominio) y el de $y(t)$ (recorrido). En las trigonométricas, usa los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ en ese intervalo.

2. Elimina el parámetro: despeja $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$ (o t) y usa la identidad que corresponda. Si hay $\operatorname{sen}^2 t$ o $\cos^2 t$, la parábola sale directo de $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
3. Escribe $y = f(x)$ explícita, eligiendo el signo de la raíz con el recorrido.
4. Traza el arco marcando los puntos de los extremos del intervalo de t.
5. Si piden la inversa, aplica 2.3.6 a la forma cartesiana.

2.3.9 Modelos geométricos

1. Dibuja la figura y nombra todas las variables (la que pide el enunciado y las auxiliares).
2. Escribe la cantidad pedida con todas sus variables (área, perímetro, volumen, costo).
3. Escribe la relación entre variables: el dato fijo (área, material, perímetro) o la geometría (Pitágoras, semejanza, el punto sobre la curva).
4. Despeja la variable auxiliar y sustituye: la cantidad queda en función de una sola variable.
5. Dominio: exige que todas las longitudes sean positivas y que la figura quepa.

2.4 Ejemplo resuelto

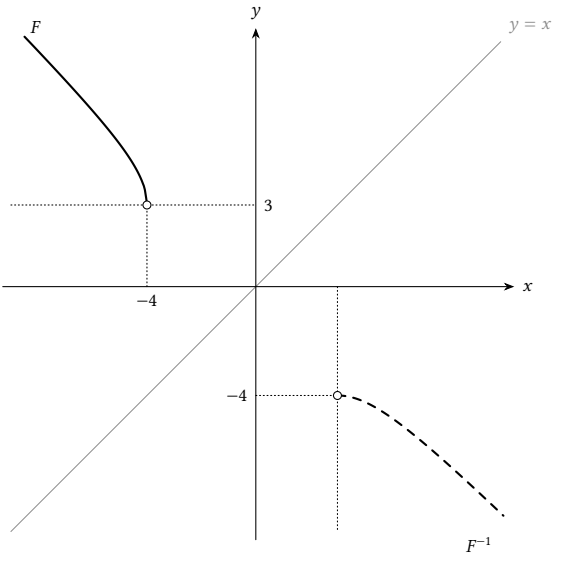
Ejemplo resuelto · Inversa de una función con radical

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 1.

Para la función $F = \left\{(x, y) \;\middle|\; y = 3 + \sqrt{x^2 + 4x}\,;\; x < -4\right\}$ obtenga su función inversa, así como el dominio y el recorrido de ésta, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Dominio de F:** el dado, $x < -4$. Ahí $x^2 + 4x = x(x+4) > 0$ (producto de dos negativos), así que la raíz existe.
2. **Inyectividad:** se completa el cuadrado, $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$. Para $x < -4$ se tiene $x + 2 < -2$; al disminuir x, $(x+2)^2$ crece. Entonces F es decreciente y tiene inversa.
3. **Recorrido de F:** cuando $x \to -4^-$, la raíz tiende a 0 y $y \to 3$ (sin alcanzarlo, porque -4 no está en el dominio); cuando $x \to -\infty$, $y \to \infty$. Entonces $R_F = (3, \infty)$.
4. **Despeje:**
$$y - 3 = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$$
$$(y-3)^2 + 4 = (x+2)^2$$
$$x + 2 = -\sqrt{(y-3)^2 + 4}.$$
Se toma el signo negativo porque $x + 2 < -2 < 0$.
5. **Intercambio:** $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x-3)^2 + 4}$.
6. $D_{F^{-1}} = R_F = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = D_F = (-\infty, -4)$. Comprobación: $F(-5) = 3 + \sqrt{5}$ y $F^{-1}\left(3 + \sqrt{5}\right) = -2 - \sqrt{5+4} = -5$.
7. **Gráfica:** de $(y-3)^2 = (x+2)^2 - 4$ sale la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, de centro $(-2, 3)$. F es la parte de la rama izquierda con $y > 3$; F^{-1} es su reflejo respecto a $y = x$, con punto vacío en $(3, -4)$.

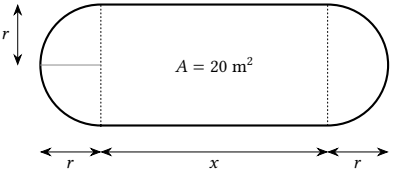


Resultado: $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x-3)^2 + 4}$, con $D_{F^{-1}} = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = (-\infty, -4)$.

Ejemplo resuelto · Perímetro de un terreno en función del radio

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 1.

Un terreno está formado por tres partes alineadas: la central es un rectángulo y los extremos son semicírculos de radio r (figura). Si el área del terreno es 20 m^2, determine su perímetro en función exclusivamente del radio de los semicírculos.



Resolución.

1. **Variables:** r, radio de los semicírculos, y x, largo del rectángulo; su alto es $2r$.
2. **Cantidad pedida:** el perímetro son los dos lados largos del rectángulo y los dos semicírculos (una circunferencia completa): $P = 2x + 2\pi r$.
3. **Relación:** el área es la del rectángulo más la de un círculo: $2rx + \pi r^2 = 20$, de donde $x = \frac{20 - \pi r^2}{2r}$.

4. **Sustitución:**

$$P = 2 \cdot \frac{20 - \pi r^2}{2r} + 2\pi r = \frac{20}{r} - \pi r + 2\pi r = \frac{20}{r} + \pi r.$$

5. **Dominio:** $r > 0$ y $x > 0$, es decir, $20 - \pi r^2 > 0$: $r < \sqrt{\frac{20}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}} \approx 2.52$.

Resultado: $P(r) = \frac{20}{r} + \pi r$ m, con $0 < r < 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

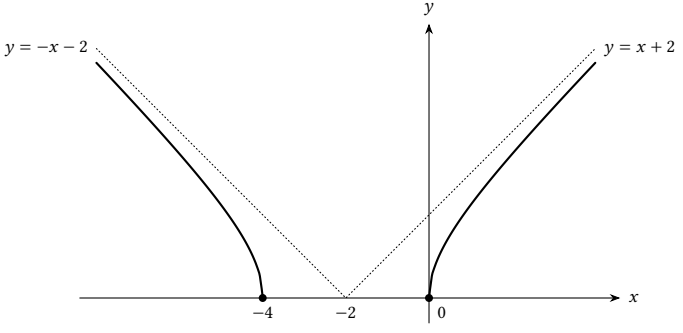
Ejercicio 2.5.1 · Composición con dominio, recorrido y gráfica

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 1.

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = x + 2$, determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **Regla:** $(f \circ g)(x) = f(x + 2) = \sqrt{(x + 2)^2 - 4} = \sqrt{x^2 + 4x}$.
2. **Dominio:** $D_g = \mathbb{R}$ y $D_f = \{x \mid |x| \geq 2\}$. Se pide $|x + 2| \geq 2$: $x + 2 \geq 2$ o $x + 2 \leq -2$, es decir, $x \geq 0$ o $x \leq -4$. (Lo mismo da $x(x + 4) \geq 0$.)
3. **Recorrido:** la raíz vale 0 en $x = 0$ y en $x = -4$ y crece sin límite cuando $|x| \to \infty$; toma todos los valores $y \geq 0$.
4. **Gráfica:** $y^2 = (x+2)^2 - 4$, es decir, $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$: hipérbola de centro $(-2, 0)$, vértices $(-4, 0)$ y $(0, 0)$ y asíntotas $y = \pm(x + 2)$. La función es la mitad superior ($y \geq 0$) de sus dos ramas.



Resultado: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$, con dominio $(-\infty, -4] \cup [0, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

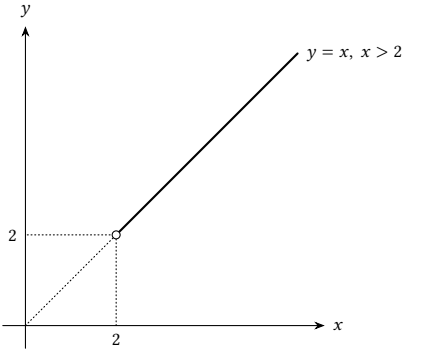
Ejercicio 2.5.2 · Composición de exponencial y logaritmo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 3.

SOLO PLAN 2016 Sean las funciones $f(x) = e^x + 2$ y $g(x) = \ln(x - 2)$. Determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y trace su gráfica.

Resolución.

1. **Dominio:** $D_g = \{x \mid x - 2 > 0\} = (2, \infty)$; $D_f = \mathbb{R}$, así que todo valor de g está en D_f. Entonces $D_{f\circ g} = (2, \infty)$.
2. **Regla:** $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} + 2 = (x - 2) + 2 = x$, porque $e^{\ln u} = u$ para $u > 0$.
3. **Recorrido:** $y = x$ con $x > 2$ toma todos los valores mayores que 2: $(2, \infty)$.
4. **Gráfica:** la parte de la recta $y = x$ con $x > 2$, con punto vacío en $(2, 2)$. La regla simplificada es x, pero la función *no* es la identidad en $\mathbb{R}$.



Resultado: $(f \circ g)(x) = x$, con dominio $(2, \infty)$ y recorrido $(2, \infty)$.

Ejercicio 2.5.3 · Función por partes con arcos de cónicas

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 1.

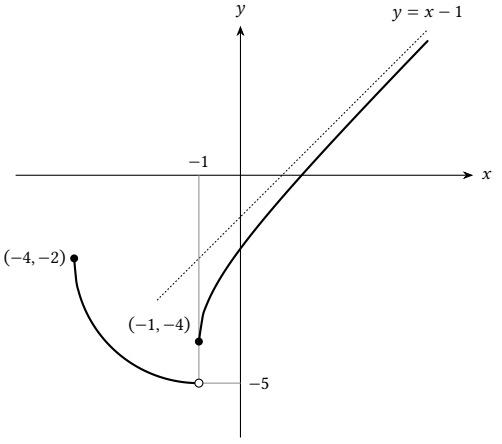
Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{9 - (x+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ -4 + \sqrt{(x+3)^2 - 4} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Determine el dominio y el recorrido y trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Primera rama:** $9 - (x+1)^2 \geq 0 \iff |x+1| \leq 3 \iff -4 \leq x \leq 2$. Con $x < -1$ queda $[-4, -1)$. Es la circunferencia $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ (centro $(-1, -2)$, radio 3), mitad inferior, cuarto izquierdo: de $(-4, -2)$ (lleno) a $(-1, -5)$ (vacío). Recorrido: $(-5, -2]$.
2. **Segunda rama:** $(x+3)^2 \geq 4 \iff x \geq -1$ o $x \leq -5$. Con $x \geq -1$ queda $[-1, \infty)$. Es la hipérbola $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$ (centro $(-3, -4)$), parte superior de la rama derecha: empieza en el vértice $(-1, -4)$ y sube acercándose a la asíntota $y = x - 1$. Recorrido: $[-4, \infty)$.
3. **Dominio:** $[-4, -1) \cup [-1, \infty) = [-4, \infty)$.
4. **Recorrido:** $(-5, -2] \cup [-4, \infty) = (-5, \infty)$.



Resultado: $D_f = [-4, \infty)$ y $R_f = (-5, \infty)$.

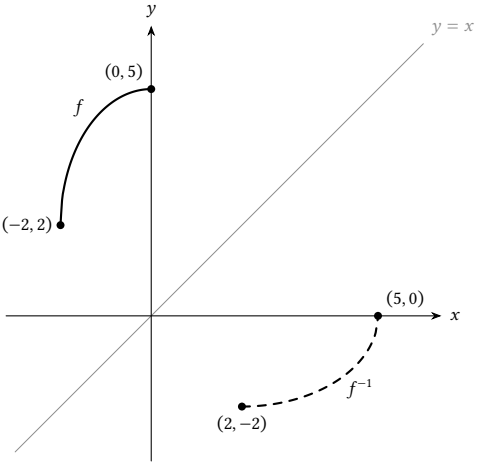
Ejercicio 2.5.4 · Inversa de un arco de elipse

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 1.

Para la función $f = \left\{(x, y) \;\middle|\; y = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 0]\right\}$, obtenga su inversa y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Inyectividad y recorrido:** en $[-2, 0]$, $4 - x^2$ crece de 0 a 4, así que f es creciente: $f(-2) = 2$ y $f(0) = 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 5$. Entonces $R_f = [2, 5]$.
2. **Despeje:**
$$\frac{2}{3}(y - 2) = \sqrt{4 - x^2}$$
$$x^2 = 4 - \frac{4}{9}(y - 2)^2 = \frac{4}{9}\left[9 - (y - 2)^2\right]$$
$$x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (y - 2)^2}.$$
Se toma el signo negativo porque $x \in [-2, 0]$.
3. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (x - 2)^2}$, con $D_{f^{-1}} = [2, 5]$ y $R_{f^{-1}} = [-2, 0]$.
4. **Gráfica:** f es el cuarto superior izquierdo de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, de $(-2, 2)$ a $(0, 5)$; f^{-1} es su reflejo, de $(2, -2)$ a $(5, 0)$.



Resultado: $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2}$, $x \in [2,5]$, con recorrido $[-2,0]$.

Ejercicio 2.5.5 · Inversa de una función por partes

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 1.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 3 - x^3 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

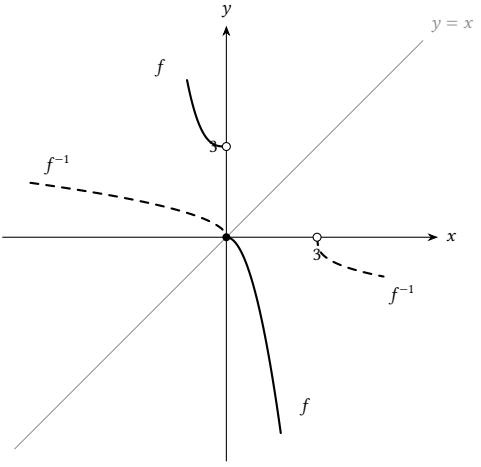
determine la regla de correspondencia de f^{-1}, el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Rama $x \geq 0$:** $-2x^2$ es decreciente y vale 0 en $x = 0$; su recorrido es $(-\infty, 0]$.
2. **Rama $x < 0$:** $-x^3$ es decreciente y positiva; $3 - x^3$ toma todos los valores mayores que 3 (el 3 se alcanzaría en $x = 0$, que no es de esta rama). Recorrido: $(3, \infty)$.
3. **Inyectividad:** cada rama es decreciente y los recorridos $(-\infty, 0]$ y $(3, \infty)$ no se traslapan: f es inyectiva. $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.
4. **Despeje por ramas:** de $y = -2x^2$ con $x \geq 0$, $x = \sqrt{-\frac{y}{2}}$ (con $y \leq 0$). De $y = 3 - x^3$, $x = \sqrt[3]{3-y}$ (con $y > 3$, que da $x < 0$).
5. **Inversa:**

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-\dfrac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{3-x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

   $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$ y $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
6. **Gráfica:** f tiene un punto vacío en $(0, 3)$ y uno lleno en $(0, 0)$; en f^{-1} pasan a $(3, 0)$ vacío y $(0, 0)$ lleno.



Resultado: $f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{x}{2}}$ si $x \leq 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3-x}$ si $x > 3$; $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ y $R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.

Ejercicio 2.5.6 · Paramétricas a forma explícita

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Sea la función

$$f: \begin{cases} x = 3 + 2\operatorname{sen}\theta \\ y = 4\cos^2\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

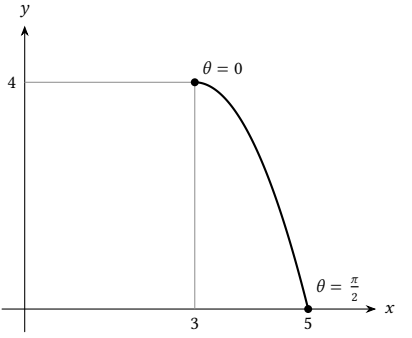
a) Determine la forma explícita de su regla de correspondencia. b) Obtenga el dominio y el rango de f. c) Trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Eliminar el parámetro:** $\operatorname{sen}\theta = \frac{x-3}{2}$ y $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, así que

$$y = 4\left[1 - \frac{(x-3)^2}{4}\right] = 4 - (x-3)^2.$$

2. **Dominio:** en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen}\theta$ va de 0 a 1, así que x va de 3 a 5: $D_f = [3, 5]$.
3. **Rango:** $\cos^2\theta$ va de 1 a 0, así que y va de 4 a 0: $R_f = [0, 4]$.
4. **Gráfica:** arco de la parábola de vértice $(3, 4)$ que abre hacia abajo, de $(3, 4)$ ($\theta = 0$) a $(5, 0)$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$).



Resultado: $y = 4 - (x-3)^2$, con dominio $[3, 5]$ y rango $[0, 4]$.

Ejercicio 2.5.7 · Inversa de una función en paramétricas

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 1.

Dada la función en forma paramétrica

$$f: \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = 3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

determine su función inversa $f^{-1}(x)$ en forma cartesiana y el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}.

Resolución.

1. **Dominio de f:** en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha$ toma los valores de $[0, 1)$ (el 1 corresponde a $\alpha = 0$, excluido). Entonces $x \in \left[0, \sqrt{3}\right)$.
2. **Recorrido de f:** $\mathrm{sen}^2\,\alpha$ toma los valores de $(0, 1]$, así que $y \in (0, 3]$.
3. **Forma cartesiana:** $\cos^2\alpha = \frac{x^2}{3}$ y $y = 3\left(1 - \cos^2\alpha\right) = 3 - x^2$. Es decreciente en $\left[0, \sqrt{3}\right)$: tiene inversa.
4. **Despeje:** $x^2 = 3 - y$ y, como $x \geq 0$, $x = \sqrt{3-y}$. Intercambio: $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f = (0, 3]$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

Resultado: $f(x) = 3 - x^2$ con $D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$, $R_f = (0, 3]$; $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$ con $D_{f^{-1}} = (0, 3]$, $R_{f^{-1}} = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

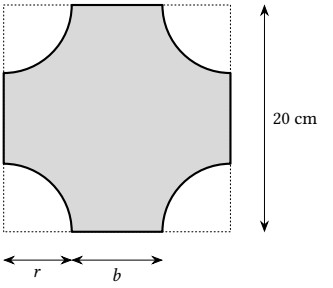
Ejercicio 2.5.8 · Área de una cruz en función de su base

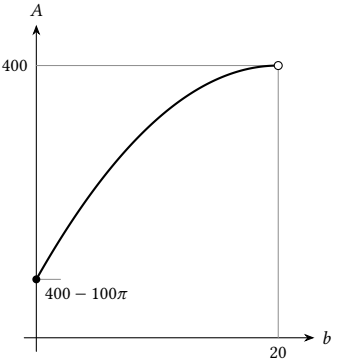
Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 1.

Una cruz se forma recortando cuartos de círculo iguales en las cuatro esquinas de un cuadrado de 20 cm de lado; la base b de la cruz es el tramo recto que queda de cada lado (figura). a) Determine la regla de correspondencia de la función f que da el área de la cruz en términos de su base b. b) Obtenga el dominio y el recorrido de f. c) Trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Variables:** r, radio de los cuartos de círculo, y b. Cada lado mide $r + b + r = 20$, así que $r = \frac{20-b}{2}$.
2. **Área:** el cuadrado menos cuatro cuartos de círculo (un círculo completo): $A = 400 - \pi r^2$.
3. **Sustitución:**
$$f(b) = 400 - \pi\left(\frac{20-b}{2}\right)^2 = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2.$$
4. **Dominio:** $b \geq 0$ y $r > 0$ (si $r = 0$ no hay recorte ni cruz), es decir, $0 \leq b < 20$. Con $b = 0$ los cuartos de círculo se tocan en el punto medio de cada lado.
5. **Recorrido:** f es creciente en $[0, 20)$ ($(20-b)^2$ decrece). $f(0) = 400 - 100\pi \approx 85.8$ y $f(b) \to 400$ cuando $b \to 20$: $R_f = [400 - 100\pi, 400)$.
6. **Gráfica:** arco de parábola que abre hacia abajo con vértice en $(20, 400)$, punto lleno en $(0, 400 - 100\pi)$ y vacío en $(20, 400)$.





Resultado: $f(b) = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2$ cm^2, con $D_f = [0, 20)$ y $R_f = [400 - 100\pi, 400)$. Si se admite $b = 20$ (el cuadrado sin recortes), el dominio es $[0, 20]$ y el recorrido $[400 - 100\pi, 400]$.

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 1.

Obtenga el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ y trace su gráfica.

Resultado: $D_f = (1, \infty)$, $R_f = (0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 1.

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Obtenga las funciones $f \circ g$ y $f \cdot g$ y determine el dominio y el recorrido de cada una.

Resultado: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$, dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[1, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}\,(x^2+1)$, dominio $[0, \infty)$, recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 2.

Obtenga el dominio, el recorrido y la regla de correspondencia de la función inversa de $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+2}$.

Resultado: $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-3x}$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ y recorrido $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 1.

Dada la función en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 3\cos t, & x \geq 0, \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t, & y \geq 0, \end{cases}$$

determine su función inversa, si es que tiene, su dominio y su recorrido, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resultado: $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$; $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, con dominio $[0,4]$ y recorrido $[0,3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Obtenga el dominio y el recorrido y trace la gráfica de la función

$$f: \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2\,\mathrm{senh}\, t \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

Resultado: $y = 2\sqrt{x^2-1}$, con dominio $[1, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

De un tronco de sección circular de diámetro D se cortará una viga de sección rectangular de ancho x. Exprese el área de la sección de la viga en función del ancho x.

Resultado: $A(x) = x\sqrt{D^2 - x^2}$, con $0 < x < D$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

2.7 Errores frecuentes

1. **Dominio de f^{-1} con su fórmula.** $\sqrt{3-x}$ existe para $x \leq 3$, pero en el ejercicio 2.5.7 el dominio de f^{-1} es $(0, 3]$: es el recorrido de f.
2. **Signo de la raíz al despejar.** Al despejar x de $x^2 = \ldots$ aparece $\pm$; el signo lo decide el dominio de f, no la costumbre de tomar el positivo.
3. **Dominio de la composición con la fórmula simplificada.** $e^{\ln(x-2)} + 2 = x$ solo para $x > 2$. Se escribe primero $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$.
4. **Confundir $f \circ g$ con $g \circ f$** o con el producto fg.
5. **Olvidar la condición estricta del denominador.** $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ pide $x > 1$, no $x \geq 1$.
6. **Extremos mal marcados.** En la gráfica de f^{-1}, cada punto lleno o vacío de f pasa con el mismo tipo a la posición (b, a).
7. **Paramétricas sin el intervalo del parámetro.** La forma cartesiana sola ($y = 3 - x^2$) no dice qué arco es; el dominio y el recorrido salen de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ en el intervalo dado.
8. **Recorrido de una función por partes como el de una sola regla.** Cada rama se evalúa *solo* en su intervalo y luego se unen los recorridos.
9. **Modelo con dos variables.** El resultado debe depender solo de la variable pedida; la otra se elimina con la relación del enunciado. Y siempre lleva dominio.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \leq 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ · $D_{fg} = D_f \cap D_g$ · en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \neq 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro (h, k); $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2 + a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h) + k$: traslación (h, k) · $-f(x)$: reflejo en el eje x · $f(-x)$: en el eje y.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ · $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ · $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ · $\operatorname{ang\,cos}: [-1, 1] \to [0, \pi]$ · $\operatorname{ang\,tan}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{\ln x} = x\ (x > 0)$, $\ln e^x = x$ · $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ · $a^x = e^{x \ln a}$.
- SOLO PLAN 2016 $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ · $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ · $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ · $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe primero el dominio y el recorrido de la función dada: casi todos los problemas los piden y la inversa sale de ellos.
2. Completa el cuadrado en cada raíz y nombra la cónica: la gráfica y el recorrido salen de ahí.
3. Inversa: inyectividad (una frase), despeje con el signo justificado, intercambio, $D_{f^{-1}} = R_f$.
4. Dibuja f, la recta $y = x$ y f^{-1} en los mismos ejes, con los extremos marcados.
5. Comprueba con un punto: $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$.
6. Modelo: figura, variables, relación, sustitución y dominio, en ese orden.

Si no se termina el despeje, el dominio, el recorrido y la gráfica de f ya valen buena parte del problema.

Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el concepto de límite para calcular el límite de una función y para determinar su continuidad.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 3). El alumno calculará el límite de una función real de variable real y analizará la continuidad de la misma.

Instrucciones de emergencia

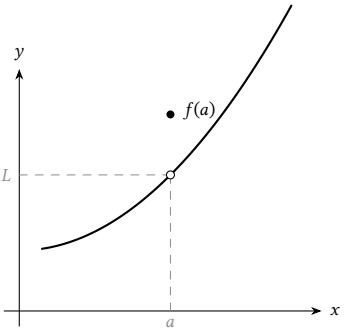
- **Frecuencia:** Plan 2010: sale en los 10 finales revisados, con 12 problemas (9 de límites y 3 de continuidad); casi siempre es el problema 2, con dos o tres incisos. Plan 2016: en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (2016-1 a 2026-2) hay un problema de esta unidad: 28 de límites, 8 de continuidad y 2 de asíntotas con gráfica. En el primer parcial salen dos problemas (20 en 10 parciales): límites, continuidad con constantes y asíntotas.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y la tabla de la sección 3.2 (20 min).
  2. Aprende las técnicas de la sección 3.3: factorizar, racionalizar, cambio de variable, $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1$ y dividir entre la mayor potencia.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 3.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro: 5 minutos por inciso de límite y 12 minutos por problema de continuidad o de asíntotas.
- **Sin L'Hôpital:** los enunciados de los dos planes dicen «sin emplear la regla de L'Hôpital». Esa regla se enseña en Cálculo Integral y en este cuaderno no se usa.

3.1 Conceptos y expresiones

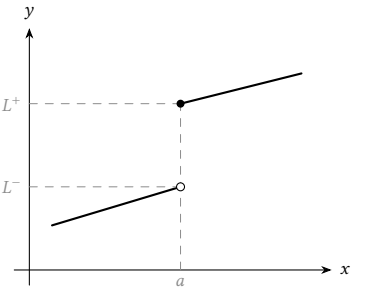
Límite. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca tanto como se quiera a L cuando x se acerca a a sin llegar a a. Lo que pasa *en* $x = a$ no importa: $f(a)$ puede valer otra cosa o no existir. En la definición formal, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Los exámenes no piden demostraciones con ε y δ; piden *calcular* límites.

Límites laterales. $\lim_{x\to a^-} f(x)$ usa solo valores $x < a$, y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ solo valores $x > a$. El límite existe si y solo si los dos laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$



$\lim_{x\to a} f(x) = L$



$L^- \neq L^+$: no existe

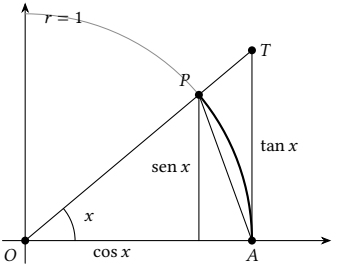
Teoremas sobre límites. Si $\lim f = L$ y $\lim g = M$, entonces el límite de la suma, la diferencia y el producto es $L+M$, $L-M$ y LM; el del cociente es $\frac{L}{M}$ si $M \neq 0$; y $\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{L}$ (con $L \geq 0$ si n es par). En consecuencia, los polinomios, las racionales en los puntos de su dominio, las raíces, las trigonométricas, la exponencial y el logaritmo se resuelven por **sustitución directa**.

Formas indeterminadas. Cuando la sustitución da $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$, el resultado no se conoce todavía: hay que transformar la expresión (factorizar, racionalizar, cambiar de variable, usar un límite notable) hasta que la sustitución dé un número. En cambio, $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ *no* es indeterminada: el límite es infinito (o no existe), y se estudia con los laterales.

El límite trigonométrico fundamental. Con x en radianes,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

En el círculo unitario, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, el triángulo OAP, el sector OAP y el triángulo OAT están uno dentro del otro, así que sus áreas cumplen $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$. Al dividir entre $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ e invertir, $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$; como $\cos x \to 1$, el cociente queda atrapado y tiende a 1 (teorema del emparedado).



De ese límite salen los demás (todos con $u \to 0$):

$$\frac{\tan u}{u} \to 1, \qquad \frac{u}{\operatorname{sen} u} \to 1, \qquad \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2}, \qquad \frac{1-\cos u}{u} \to 0.$$

El tercero se obtiene multiplicando por $1 + \cos u$:

$$\frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1-\cos^2 u}{u^2(1+\cos u)} = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^2 \frac{1}{1+\cos u} \to 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

La variable u puede ser cualquier expresión que tienda a cero: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 1$ y $\frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3} \to 1$ si $x \to 3$. El argumento del seno y el denominador deben ser *iguales*.

Límites al infinito. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca a L cuando x crece sin cota. Lo básico es $\frac{k}{x^n} \to 0$ $(n > 0)$. Cuidado con las raíces: $\sqrt{x^2} = |x|$, que vale x si $x \to \infty$ y $-x$ si $x \to -\infty$.

Límites infinitos y asíntotas. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ significa que $f(x)$ crece sin cota cuando x se acerca a a por la derecha. Entonces:

- la recta $x = a$ es **asíntota vertical** si al menos un límite lateral en a es ∞ o $-\infty$ (en una racional simplificada, donde se anula el denominador y no el numerador);
- la recta $y = L$ es **asíntota horizontal** si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

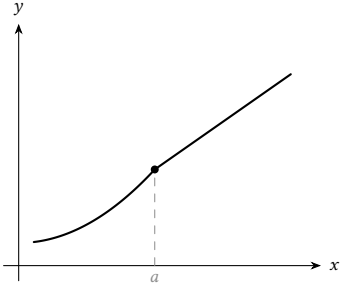
Decir que un límite «es ∞» es decir que no existe como número, pero describe cómo crece la función.

Continuidad en un punto. f es continua en $x = a$ si se cumplen las tres condiciones:

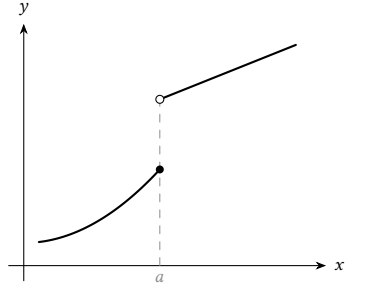
1. $f(a)$ está definida;
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (los dos laterales son iguales);
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si falla alguna, f es discontinua en a. La discontinuidad es *evitable* si el límite existe pero $f(a)$ no está definida o vale otra cosa (un hueco en la gráfica); *de salto* si los laterales son finitos y distintos; *infinita* si un lateral es $\pm\infty$ (asíntota vertical). Una función es continua en un intervalo si lo es en cada punto; en un extremo cerrado basta el límite lateral de adentro.

Funciones por partes. Cada regla (polinomio, raíz, trigonométrica) es continua en su propio tramo. Los únicos puntos en duda son aquellos donde *cambia la regla*. Ahí se igualan los laterales y el valor de la función; si la función tiene constantes, esas igualdades son las ecuaciones que las determinan.



continua en a



discontinua en a (salto)

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
cualquier límite	sustituir primero	3.3.1
cociente de polinomios que da $\frac{0}{0}$: $\frac{x^3+1}{x+1}$	factorizar y cancelar	3.3.2
$\frac{0}{0}$ con raíces cuadradas: $\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}$	racionalizar	3.3.3
raíces de distinto índice: $\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$	cambio de variable $x = t^m$	3.3.4
sen, tan, csc, cot o $1-\cos$ con $x \to 0$	límites notables	3.3.5
$x \to \infty$ o $x \to -\infty$	dividir entre la mayor potencia	3.3.6
$\frac{k}{0}$, «límites infinitos», «asíntotas», «trazar la gráfica»	laterales y signos	3.3.7
$\lvert x-a\rvert$, $x \to a^+$, función por partes en el punto de cambio	límites laterales	3.3.8
«continua», «valor de a y b»	tres condiciones en cada punto de cambio	3.3.9
e^x, senh, cosh, ln SOLO PLAN 2016	sustitución o dividir entre e^x	3.3.10

3.3 Procedimientos

3.3.1 Sustitución directa (siempre primero)

1. Sustituye el valor de x. Si sale un número, ese es el límite: escribe «sustitución directa» y termina.
2. Si sale $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ o $0\cdot\infty$, es una forma indeterminada: elige la técnica con la tabla de la sección 3.2.
3. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, el límite es infinito o no existe: sección 3.3.7.

3.3.2 Factorizar

1. Si $x = a$ anula numerador y denominador, los dos tienen el factor $(x-a)$.
2. Factoriza con productos notables: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$, o con división sintética entre $x-a$.
3. Cancela $(x-a)$ (vale porque $x \neq a$ dentro del límite) y sustituye.
4. Con una resta de fracciones ($\infty-\infty$), primero el denominador común; luego factoriza.

3.3.3 Racionalizar

1. Multiplica numerador y denominador por el **conjugado** de la expresión con raíz: $(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=A-B^2$.
2. Si hay raíces arriba y abajo, multiplica por los dos conjugados (doble racionalización).
3. Aparece el factor $(x-a)$ arriba y abajo, quizá como $(a-x)=-(x-a)$: cancélalo y sustituye. Los conjugados que quedan se evalúan al final.

3.3.4 Raíces de distinto índice: cambio de variable

1. Si aparecen $\sqrt[p]{x}$ y $\sqrt[q]{x}$, sea m el mínimo común múltiplo de p y q, y haz $x = t^m$. Entonces $\sqrt[p]{x} = t^{m/p}$ y $\sqrt[q]{x} = t^{m/q}$ son potencias enteras de t.
2. Cambia también el valor al que tiende: si $x \to a$, entonces $t \to \sqrt[m]{a}$.
3. Queda un cociente de polinomios en t: factoriza (sección 3.3.2).

3.3.5 Límites trigonométricos

1. Escribe todo en senos y cosenos: $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$, $\csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$, $\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$, $\sec u = \frac{1}{\cos u}$.
2. Arma cada factor $\frac{\operatorname{sen}(ku)}{ku}$, multiplicando y dividiendo por la constante que falte: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 3$.
3. Con $1 - \cos(ku)$, arma $\frac{1-\cos(ku)}{(ku)^2} \to \frac{1}{2}$, o multiplica por $1 + \cos(ku)$.
4. Si $x \to a \neq 0$ o $x \to \infty$, cambia de variable para que la nueva tienda a cero: $u = x - a$, o $u = \frac{1}{x}$.
5. Los cosenos que quedan sueltos se sustituyen: $\cos 0 = 1$.

3.3.6 Límites al infinito

1. Divide numerador y denominador entre la mayor potencia de x del *denominador*; usa $\frac{k}{x^n} \to 0$.
2. Atajo para cociente de polinomios de grados n (arriba) y m (abajo): si $n < m$, el límite es 0; si $n = m$, es el cociente de los coeficientes principales; si $n > m$, es $\pm\infty$.
3. Con raíces, saca la potencia de la raíz: $\sqrt{9x^2 + 2} = |x|\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}$. Si $x \to \infty$, $|x| = x$; si $x \to -\infty$, $|x| = -x$ y el signo cambia.
4. Con $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ (forma $\infty - \infty$), racionaliza primero.

3.3.7 Límites infinitos y asíntotas

1. **Dominio:** factoriza el denominador y anota dónde se anula. Simplifica los factores comunes.
2. **Asíntotas verticales:** en cada cero del denominador que no anula el numerador (después de simplificar), calcula los dos laterales. Cada uno da $+\infty$ o $-\infty$ según el signo de $\frac{k}{0^{\pm}}$: determina el signo de cada factor con un valor cercano (por ejemplo $x = 3.1$ y $x = 2.9$).
3. Si el factor se canceló, no hay asíntota: hay un *hueco* (discontinuidad evitable), y su altura es el límite de la función simplificada.
4. **Asíntota horizontal:** calcula $\lim_{x\to\infty}$ y $\lim_{x\to-\infty}$ (sección 3.3.6).
5. **Gráfica:** dibuja las asíntotas punteadas, las intersecciones con los ejes y los signos de f entre los ceros; une con los límites como guía.

3.3.8 Límites laterales y valor absoluto

1. Quita el valor absoluto según el lado: si $x \to a^+$, $|x - a| = x - a$; si $x \to a^-$, $|x - a| = -(x - a)$.
2. En una función por partes, el lateral izquierdo usa la regla de los $x < a$ y el derecho la de los $x > a$.
3. Si los dos laterales son iguales, ese es el límite; si son distintos, el límite no existe.

3.3.9 Continuidad de funciones por partes con constantes

1. Señala los puntos donde cambia la regla y revisa que cada regla sea continua en su tramo (polinomio, raíz con radicando no negativo, denominador distinto de cero).
2. En cada punto de cambio $x = c$, revisa las tres condiciones **una por una**: $f(c)$ (con la regla que incluye a c, la del $\leq$ o el $\geq$); los dos laterales; y su igualdad con $f(c)$. Escribe «se cumple» o «no se cumple» en cada una.
3. Si hay constantes, la igualdad de los laterales y $f(c)$ da una ecuación por punto de cambio. Resuelve el sistema.
4. Sustituye los valores en las tres condiciones para comprobar.

3.3.10 Exponencial, logaritmo e hiperbólicas SOLO PLAN 2016

1. e^x, $\ln x$ (con $x > 0$), $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ son continuas: casi siempre basta la sustitución directa. En Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 2, inciso c), $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} 4x - \cosh x}{x+1} = \frac{0-1}{1} = -1$ sale por sustitución directa.
2. Al infinito: $e^x \to \infty$ y $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$. Con un cociente de exponenciales, divide entre la exponencial de mayor exponente. Así, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \to 1$ si $x \to \infty$ y $\to -1$ si $x \to -\infty$.
3. Con logaritmos, junta en uno solo antes de sustituir: $\ln|x^2 - 1| - \ln|x - 1| = \ln|x + 1| \to \ln 2$ si $x \to 1$ (así se resuelve el inciso b del problema 2 del 2º final 2026-2 de Cálculo y Geometría Analítica).

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíces de distinto índice, sustitución directa y raíz al infinito

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 32} \frac{\sqrt[10]{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[5]{x} - 2}, \qquad \text{b) } \lim_{\theta\to 0} |\theta - 1| \operatorname{sen}\theta, \qquad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2}}{3 - 4x}.$$

Resolución.

a) Al sustituir: $\sqrt[10]{32} = \sqrt{2}$ y $\sqrt[5]{32} = 2$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Índices 10 y 5: $m = 10$. Se hace $x = t^{10}$, con lo que $\sqrt[10]{x} = t$, $\sqrt[5]{x} = t^2$, y $t \to \sqrt[10]{32} = \sqrt{2}$.
2. Diferencia de cuadrados en el denominador:

$$\frac{t - \sqrt{2}}{t^2 - 2} = \frac{t - \sqrt{2}}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} = \frac{1}{t + \sqrt{2}}.$$

3. Se sustituye $t = \sqrt{2}$: $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) No es forma indeterminada: por sustitución directa, $|0 - 1| \operatorname{sen} 0 = 1 \cdot 0 = 0$.

c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$.

1. Como $x \to \infty$, $x > 0$ y $\sqrt{x^2} = x$. Se divide entre x arriba y abajo:

$$\frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x} = \frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{\frac{3}{x}-4}.$$

2. Con $\frac{2}{x^2} \to 0$ y $\frac{3}{x} \to 0$, el límite es $\frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$.
3. Si fuera $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$ y el resultado sería $\frac{3}{4}$.

Resultado: a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) 0; c) $-\frac{3}{4}$.

Ejemplo resuelto · Continuidad de una función de tres reglas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax & \text{si } 1 < x < 3, \\ A & \text{si } 3 \le x \le 5, \\ Bx - 5 & \text{si } 5 < x < 8. \end{cases}$$

Determine los valores de A y B para que f sea continua en todo su dominio.

Resolución.

1. El dominio es $(1, 8)$. Cada regla es un polinomio o una constante, continua en su tramo. Los puntos de cambio son $x = 3$ y $x = 5$.
2. **En $x = 3$.** Condición 1: $f(3) = A$ (segunda regla); se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 3^-}(x^2 - Ax) = 9 - 3A, \qquad \lim_{x\to 3^+} A = A.$$

   El límite existe si $9 - 3A = A$, es decir, $A = \frac{9}{4}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(3)$; se cumple.
3. **En $x = 5$.** Condición 1: $f(5) = A = \frac{9}{4}$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 5^-} A = \frac{9}{4}, \qquad \lim_{x\to 5^+}(Bx - 5) = 5B - 5.$$

   El límite existe si $5B - 5 = \frac{9}{4}$, es decir, $5B = \frac{29}{4}$ y $B = \frac{29}{20}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(5)$; se cumple.

Resultado: $A = \frac{9}{4}$, $B = \frac{29}{20}$.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Doble racionalización y un trigonométrico

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 2.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x\tan(2x)}.$$

Resolución.

a) Al sustituir: $3-\sqrt{9}=0$ y $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Se multiplica arriba y abajo por los dos conjugados, $3+\sqrt{2x+1}$ y $\sqrt{2}+\sqrt{x-2}$:

$$(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1}) = 9-(2x+1) = -2(x-4),$$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}) = 2-(x-2) = -(x-4).$$

2. Se cancela $-(x-4)$:

$$\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}} = \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}\right)}{3+\sqrt{2x+1}}.$$

3. Se sustituye $x=4$: $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{3+3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se escribe $\tan 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$ y se cancela un $\operatorname{sen} 2x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x\tan 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x}{x\operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\cos 2x.$$

2. Se arma el límite notable: $\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \to 2$, y $\cos 2x \to 1$.

Resultado: a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) 2.

Ejercicio 3.5.2 · Cociente de trigonométricas y resta de fracciones

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan(3\theta)}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right).$$

Resolución.

a) Forma $\frac{0}{0}$. Se multiplica y divide por 3θ y por θ:

$$\frac{\tan 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 3\cdot\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\cdot\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 3\cdot 1\cdot 1 = 3.$$

b) Cada fracción tiende a infinito: forma $\infty-\infty$.

1. Se factoriza $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$, que es el denominador común.
2. Una sola fracción:

$$\frac{\sqrt{x}+2-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

3. Se sustituye $x=4$: $\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$.

Resultado: a) 3; b) $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 3.5.3 · Uno menos coseno, raíz al infinito y raíces de distinto índice

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 2.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos 4x}{x^3}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}.$$

Resolución.

a) Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se saca x de factor común y se cancela: $\frac{x(1-\cos 4x)}{x^3}=\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.
2. Se arma $\frac{1-\cos u}{u^2}$ con $u=4x$, multiplicando y dividiendo por 16:

$$\frac{1-\cos 4x}{x^2}=16\cdot\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\to 16\cdot\frac{1}{2}=8.$$

b) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Con $x>0$, $\sqrt{x^2-9}=x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$:

$$\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\to 1.$$

c) Forma $\frac{0}{0}$. Índices 2 y 3: $m=6$.

1. Con $x=t^6$: $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, y $t\to\sqrt[6]{64}=2$.
2. Diferencia de cubos y de cuadrados:

$$\frac{t^3-8}{t^2-4}=\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\frac{t^2+2t+4}{t+2}.$$

3. Se sustituye $t=2$: $\frac{4+4+4}{4}=3$.

Resultado: a) 8; b) 1; c) 3.

En b) el enunciado escribe $x\to\infty$ sin signo; se toma $x\to+\infty$. Con $x\to-\infty$ el resultado sería -1.

Ejercicio 3.5.4 · Valor absoluto, cambio de variable al infinito y factorización

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule, si existe, cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\left(x - x\cos\frac{1}{x}\right), \qquad \text{c) } \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}.$$

Resolución.

a) Laterales (sección 3.3.8):

1. Si $x \to 1^+$, $|x-1| = x-1$ y el cociente vale 1.
2. Si $x \to 1^-$, $|x-1| = -(x-1)$ y el cociente vale -1.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe.

b) Forma $\infty \cdot 0$: $x - x\cos\frac{1}{x} = x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

1. Cambio de variable $u = \frac{1}{x}$: si $x \to +\infty$, $u \to 0^+$, y $x = \frac{1}{u}$.
2. $\frac{1-\cos u}{u} = u \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

c) Forma $\frac{0}{0}$. Suma de cubos: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Se cancela $x+1$ y se sustituye: $(-1)^2-(-1)+1 = 3$.

Resultado: a) no existe (laterales -1 y 1); b) 0; c) 3.

Ejercicio 3.5.5 · Continuidad de una función con valor absoluto

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 2.

Determine si la función f es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2-|x| & \text{si } x \in (-2,2), \\ x^2-4 & \text{si } x \notin (-2,2). \end{cases}$$

Resolución.

1. Dominio: todos los reales. En $(-2,2)$, $2-|x|$ es continua (el valor absoluto lo es); fuera, x^2-4 es un polinomio. Los puntos de cambio son $x=2$ y $x=-2$.
2. **En $x=2$.** Condición 1: $2 \notin (-2,2)$, así que $f(2) = 2^2-4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 2^-}(2-|x|) = 2-2 = 0, \qquad \lim_{x\to 2^+}(x^2-4) = 0;$$

   el límite existe y vale 0; se cumple. Condición 3: $0 = f(2)$; se cumple.
3. **En $x=-2$.** Condición 1: $f(-2) = (-2)^2-4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2-4) = 0, \qquad \lim_{x\to -2^+}(2-|x|) = 2-2 = 0;$$

   se cumple. Condición 3: $0 = f(-2)$; se cumple.

Resultado: f es continua en todos los reales.

Ejercicio 3.5.6 · Cosecante entre cotangente, exponenciales y un límite infinito

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, problema 2.

Determine, si existe, el valor de cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\csc 2x}{\cot 3x}, \quad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}.$$

Resolución.

a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 2x}{\cot 3x}=\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x\cos 3x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\to\frac{3}{2}.$$

b) SOLO PLAN 2016 Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre e^{2x}, la exponencial de mayor exponente:

$$\frac{1-e^{-4x}}{1+e^{-4x}}\to\frac{1-0}{1+0}=1.$$

La expresión es $\tanh 2x$, que tiende a 1.

c) Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se factoriza: $\frac{x(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{x}{x-3}$ si $x\neq 3$. Al sustituir queda $\frac{3}{0}$: límite infinito.
2. Si $x\to 3^+$, $x-3\to 0^+$ y el cociente tiende a $+\infty$. Si $x\to 3^-$, $x-3\to 0^-$ y tiende a $-\infty$.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe (la recta $x=3$ es asíntota vertical).

Resultado: a) $\frac{3}{2}$; b) 1; c) no existe ($+\infty$ por la derecha, $-\infty$ por la izquierda).

Ejercicio 3.5.7 · Asíntotas y gráfica con límites

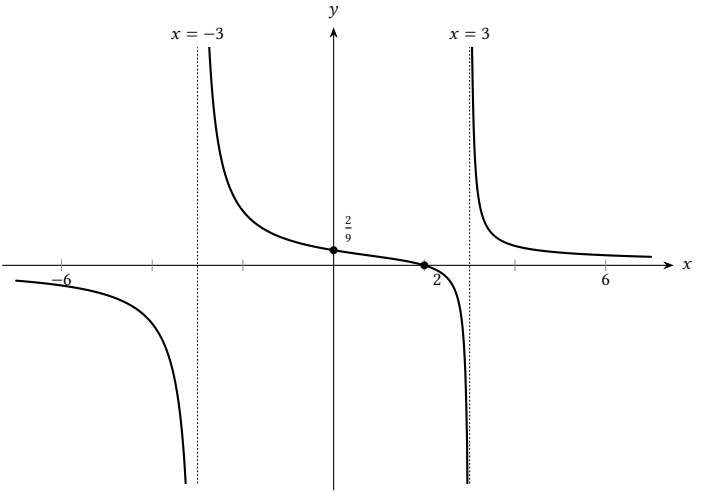
Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo A, problema 5.

Mediante los límites infinitos y los límites al infinito, trace la gráfica de $f(x)=\frac{x-2}{x^2-9}$, con sus asíntotas.

Resolución.

1. **Dominio:** $x^2-9=(x-3)(x+3)$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. No hay factores comunes.
2. **Asíntotas verticales.** En $x=3$ el numerador vale 1; en $x=-3$ vale -5. Signos de los laterales:
$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\frac{1}{(0^+)(6)}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-}f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to -3^+}f(x)=\frac{-5}{(-6)(0^+)}=+\infty, \qquad \lim_{x\to -3^-}f(x)=-\infty.$$
Las rectas $x=3$ y $x=-3$ son asíntotas verticales.
3. **Asíntota horizontal.** Se divide entre x^2:
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=0.$$
La recta $y=0$ (el eje x) es asíntota horizontal en los dos lados.

4. **Intersecciones:** con el eje x, en $(2, 0)$; con el eje y, $f(0) = \frac{2}{9}$.
5. **Signos:** $f < 0$ en $(-\infty, -3)$ y en $(2, 3)$; $f > 0$ en $(-3, 2)$ y en $(3, \infty)$.



Resultado: asíntotas verticales $x = -3$ y $x = 3$; asíntota horizontal $y = 0$; la gráfica es la de la figura.

Ejercicio 3.5.8 · Dos constantes para que una función de tres reglas sea continua

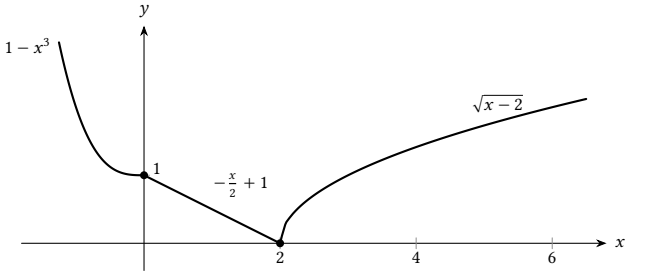
Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo A, problema 6.

Calcule los valores de m y n para que la función sea continua en los reales, y trace su gráfica con esos valores:

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + m & \text{si } x \le 0, \\ -\frac{x}{2} + 1 & \text{si } 0 < x \le 2, \\ \sqrt{x - n} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Resolución.

1. Las dos primeras reglas son polinomios. La raíz está definida y es continua para $x > 2$ si $n \le 2$. Los puntos de cambio son $x = 0$ y $x = 2$.
2. **En $x = 0$.** Condición 1: $g(0) = m$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 0^-}(-x^3 + m) = m$ y $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{2} + 1\right) = 1$; el límite existe si $m = 1$. Condición 3: $1 = g(0)$; se cumple.
3. **En $x = 2$.** Condición 1: $g(2) = -1 + 1 = 0$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x - n} = \sqrt{2 - n}$; el límite existe si $\sqrt{2 - n} = 0$, es decir, $n = 2$. Condición 3: $0 = g(2)$; se cumple.
4. **Gráfica:** $1 - x^3$ para $x \le 0$ (pasa por $(-1, 2)$), el segmento de $(0, 1)$ a $(2, 0)$ y la media parábola $\sqrt{x - 2}$ desde $(2, 0)$ (pasa por $(6, 2)$).



Resultado: $m = 1, n = 2$.

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 2.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq a, \\ (x-2)^2 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Determine el valor de la constante a que hace que f sea continua.

Resultado: $a = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2° final 2003-2, tipo A, problema 4.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\csc 4x}{\cot 3x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{2x - 16}.$$

Resultado: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 3.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule, si existen,

$$\text{a) } \lim_{x\to 4} \frac{1 - \sqrt{5 - x}}{3 - \sqrt{5 + x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x}.$$

Resultado: a) -3; b) 1.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{2x-2}}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x}, \quad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+8x+6}{x^2+4x-9}.$$

Resultado: a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Resultado: a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 2.

Sea $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-x}$.

a) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontal y vertical de la gráfica de g.
b) Calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.
c) Trace la gráfica de g.

Resultado: a) horizontal $y = 1$, vertical $x = 0$; b) 0; c) la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ con un hueco en $(1, 0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

3.7 Errores frecuentes

1. **No sustituir primero.** Varios incisos se resuelven por sustitución directa; factorizar o racionalizar ahí es tiempo perdido.
2. **Escribir $\frac{0}{0} = 1$ o $\frac{0}{0} = 0$.** $\frac{0}{0}$ es una forma indeterminada: indica que hay que transformar, no es un resultado.
3. **Cancelar antes de factorizar.** Solo se cancelan factores: en $\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ no se «tacha» $\sqrt{x}$.
4. **Olvidar el signo al racionalizar.** $4 - x = -(x - 4)$: el signo menos llega al resultado (como en -3 y $-\frac{2}{3}$ de los propuestos).
5. **Armar mal el límite notable.** $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ no tiende a 1, sino a 3: el denominador debe ser $3x$.

6. **Usar grados.** $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ solo con x en radianes.
7. $\sqrt{x^2} = x$ **con** $x \to -\infty$**.** Es $|x| = -x$; el signo del resultado cambia.
8. **Un solo lateral en un límite infinito.** Con $\frac{k}{0}$ hay que revisar los dos lados; si dan $+\infty$ y $-\infty$, el límite no existe.
9. **Asíntota donde hay un hueco.** Si el factor que anula el denominador se cancela, no hay asíntota vertical: hay discontinuidad evitable.
10. **Continuidad con una sola condición.** Igualar los laterales no basta: hay que revisar también que $f(c)$ esté definida y coincida.
11. **Usar L'Hôpital.** El enunciado lo prohíbe; un límite resuelto así no cuenta.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \cdot (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \operatorname{mcm}(p, q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1 \cdot \frac{\tan u}{u} \to 1 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\operatorname{sen} ku}{u} \to k \cdot \frac{\operatorname{sen} au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en c: $f(c)$ definida · $\lim_{x\to c} f(x)$ existe · $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$ · $\tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty$ · $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Sustituye y escribe la forma que sale ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{k}{0}$ o un número).
2. Elige la técnica por el aspecto: polinomios, factorizar; raíces cuadradas, racionalizar; raíces de distinto índice, $x = t^m$; trigonométricas, $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$; infinito, mayor potencia.
3. Al cancelar el factor $(x - a)$, sustituye otra vez y simplifica el radical al final.
4. Con valor absoluto, función por partes o $\frac{k}{0}$, calcula los dos laterales por separado.
5. En continuidad, escribe las tres condiciones en cada punto de cambio, con «se cumple» o «no se cumple», y despeja las constantes.
6. Si piden la gráfica, dibuja primero asíntotas e intersecciones y después la curva.

Un inciso con la forma indeterminada identificada y la técnica correcta planteada ya vale parte del problema aunque no se termine el álgebra.

Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el concepto de la derivada y sus interpretaciones física y geométrica, en la resolución de problemas.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 4). El alumno aplicará la derivada de una función real de variable real en la resolución de problemas.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** es la unidad que más sale. Plan 2010: 20 problemas en los 10 finales revisados, de uno a tres por examen: cálculo de derivadas (implícita, paramétrica, orden superior) 8, recta tangente y normal 5, razón de cambio 4, derivabilidad de una función por partes 2 y ángulo entre curvas 1. Plan 2016: 44 problemas en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (2016-1 a 2026-2): tangente y normal 16, cálculo de derivadas 14, razón de cambio 9, ángulo entre curvas 3 y derivabilidad 2; además, 17 problemas en los 5 segundos parciales revisados (ahí aparece la derivada por definición).
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Aprende las tablas de derivadas de la sección 4.1 (30 min): sin ellas no sale nada.
  2. Lee las plantillas 4.3.4 (implícita) y 4.3.6 (tangente y normal) y sigue el ejemplo 1 tapando la resolución.
  3. Lee la plantilla de razón de cambio (4.3.8) y sigue el ejemplo 2.
  4. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro: 15 min cada uno. Si llevas el Plan 2016, agrega la sección 4.3.10.

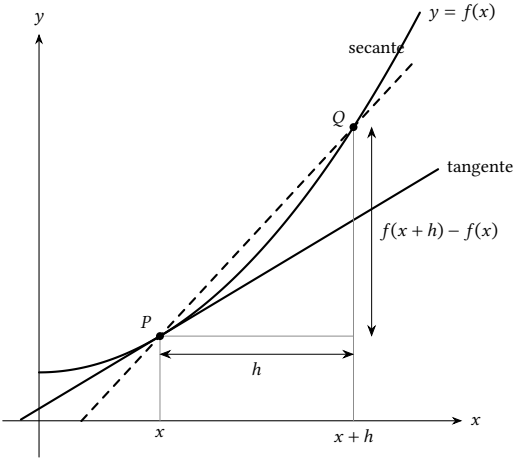
4.1 Conceptos y expresiones

Definición. La derivada de f en x es el límite del cociente de incrementos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si existe. Otras notaciones: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $D_x f$. Si el límite existe en x_0, se dice que f es *derivable* en x_0.

Interpretación geométrica. El cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la pendiente de la recta *secante* que pasa por $P(x, f(x))$ y $Q(x+h, f(x+h))$. Cuando $h \to 0$, Q se acerca a P y la secante gira hasta la recta *tangente*: $f'(x)$ es la pendiente de la tangente en P.



Interpretación física. Si $s(t)$ es la posición de un móvil, $s'(t)$ es su velocidad y $s''(t)$ su aceleración. En general, $\frac{dy}{dt}$ es la *razón de cambio* (rapidez de variación) de y respecto al tiempo: positiva si y aumenta y negativa si disminuye.

Derivable implica continua. Si f es derivable en x_0, es continua en x_0. Lo contrario es falso: $|x|$ es continua en 0 y no es derivable ahí (tiene un pico).

Derivadas laterales. $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ son los límites del cociente con $h \to 0^-$ y $h \to 0^+$. f es derivable en x_0 si y solo si las dos existen y son iguales. En una función por partes cuyas reglas son derivables, se calculan derivando cada regla y evaluando en el punto de unión, *siempre que f sea continua ahí.*

Reglas algebraicas. Con u, v funciones de x y c, n constantes (n racional):

$$(c)' = 0, \qquad (u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (cu)' = cu',$$

$$(uv)' = uv' + vu', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}u', \qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Regla de la cadena. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En las tablas siguientes ya está incluida: cada fórmula termina multiplicada por u'.

Trigonométricas.

Función	Derivada	Función	Derivada
$\operatorname{sen} u$	$\cos u\, u'$	$\cos u$	$-\operatorname{sen} u\, u'$
$\tan u$	$\sec^2 u\, u'$	$\cot u$	$-\csc^2 u\, u'$
$\sec u$	$\sec u \tan u\, u'$	$\csc u$	$-\csc u \cot u\, u'$

Trigonométricas inversas. Los exámenes escriben ang sen x, ang tan x (en otros textos, «arc sen» o $\operatorname{sen}^{-1} x$).

Función	Derivada	Función	Derivada
ang sen u	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	ang cos u	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
ang tan u	$\frac{u'}{1+u^2}$	ang cot u	$-\frac{u'}{1+u^2}$
ang sec u	$\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	ang csc u	$-\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$

El valor absoluto de ang sec y ang csc corresponde al recorrido $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de ang sec. Muchos libros eligen otro recorrido y escriben $u\sqrt{u^2-1}$ sin valor absoluto; para $u > 1$ las dos fórmulas coinciden.

Derivada de la función inversa. Si f es derivable e invertible y $f'(x) \neq 0$, la inversa es derivable y

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Por ejemplo, para $f(x) = x^3 + x$ se tiene $f(1) = 2$ y $f'(1) = 4$, así que $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{4}$ sin despejar la inversa. Así se obtienen las fórmulas de las inversas: si $y = \text{ang sen } x$, entonces $x = \operatorname{sen} y$, $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Derivación implícita. Si y está definida por una ecuación $F(x, y) = 0$ sin despejar, se deriva cada término respecto a x tratando y como función de x: $\frac{d}{dx} y^2 = 2y\, y'$, $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} y = \cos y\, y'$. Después se despeja y'.

Derivación paramétrica. Si $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

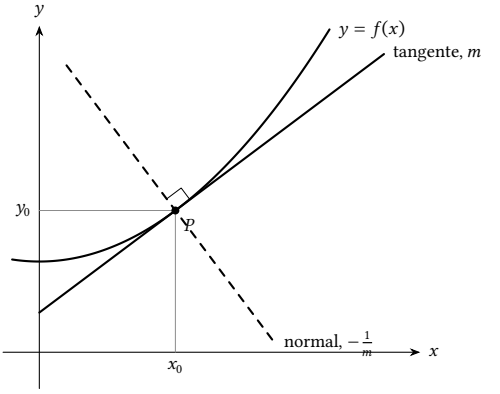
La segunda derivada **no** es $\frac{y''(t)}{x''(t)}$: se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a t y se divide otra vez entre $\frac{dx}{dt}$.

Orden superior. $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ es la derivada de y'; y''', la de y'', y así sucesivamente.

Recta tangente y recta normal. En $P(x_0, y_0)$ de la curva, con $m = y'(x_0)$:

$$\text{tangente: } y - y_0 = m(x - x_0), \qquad \text{normal: } y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

La normal es perpendicular a la tangente. Si $m = 0$, la tangente es horizontal ($y = y_0$) y la normal vertical ($x = x_0$).

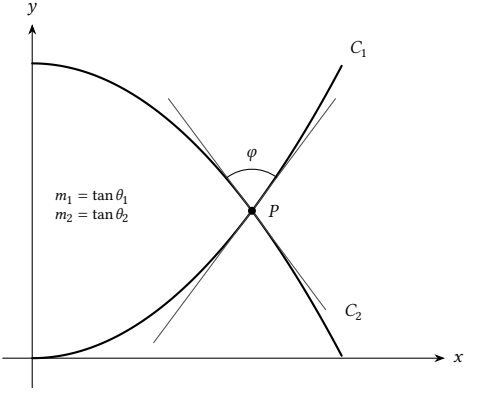


Rectas paralelas y perpendiculares. La recta $Ax + By + C = 0$ tiene pendiente $-\dfrac{A}{B}$. Dos rectas son paralelas si $m_1 = m_2$ y perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.

Ángulo entre dos curvas. En un punto de intersección, es el ángulo agudo φ entre sus tangentes. Con pendientes m_1 y m_2:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

Si $1 + m_1 m_2 = 0$, las curvas se cortan en ángulo recto ($\varphi = 90°$); si $m_1 = m_2$, son tangentes entre sí ($\varphi = 0$).



Diferencial. Para $y = f(x)$, la diferencial es $dy = f'(x)\,dx$, con $dx = \Delta x$. Para Δx pequeño, el incremento verdadero $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ se aproxima con dy:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Es la recta tangente usada como aproximación. Ejemplo: con $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 16$, $\Delta x = 1$: $\sqrt{17} \approx 4 + \frac{1}{2\sqrt{16}}(1) = 4 + \frac{1}{8} = 4.125$ (el valor verdadero es 4.1231…). Cálculo Integral usa esta notación en el cambio de variable: $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$.

Logaritmo, exponencial e hiperbólicas SOLO PLAN 2016 . Con $a > 0$, $a \neq 1$:

Función	Derivada	Función	Derivada
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
e^u	$e^u\,u'$	a^u	$a^u \ln a\; u'$
$\operatorname{senh} u$	$\cosh u\; u'$	$\cosh u$	$\operatorname{senh} u\; u'$
$\tanh u$	$\operatorname{sech}^2 u\; u'$	$\coth u$	$-\operatorname{csch}^2 u\; u'$
$\operatorname{sech} u$	$-\operatorname{sech} u \tanh u\; u'$	$\operatorname{csch} u$	$-\operatorname{csch} u \coth u\; u'$
$\operatorname{senh}^{-1} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\cosh^{-1} u\ (u > 1)$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$\tanh^{-1} u\ (\lvert u\rvert < 1)$	$\frac{u'}{1-u^2}$		

Ojo con los signos: $(\cosh u)' = +\operatorname{senh} u\; u'$, a diferencia de $(\cos u)'$. Útiles al simplificar: $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, $\ln e^u = u$, $e^{\ln u} = u$, $\ln u^n = n \ln u$.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«por definición», «método de los cuatro pasos»	el límite del cociente de incrementos	4.3.1
$y =$ una expresión en x, «obtener $\frac{dy}{dx}$»	reglas y cadena	4.3.2
una segunda derivada evaluada en un punto	derivar dos veces y evaluar	4.3.2
función por partes con constantes, «continua y derivable»	igualar valores y pendientes	4.3.3
una ecuación con x y y mezcladas: $\tan(xy) = 2x + y$	derivación implícita	4.3.4
$x = x(t)$, $y = y(t)$	cociente de derivadas respecto a t	4.3.5

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«recta tangente», «recta normal» en un punto	pendiente y punto-pendiente	4.3.6
tangente «horizontal», «paralela» o «perpendicular» a una recta	igualar y' a la pendiente pedida	4.3.6
«área del triángulo» con los ejes o con la normal	intersecciones de las rectas	4.3.6
«ángulo de intersección» entre curvas o con una recta	$\tan\varphi$ con las dos pendientes	4.3.7
«rapidez», «razón», «a qué ritmo», unidades por segundo o por minuto	razón de cambio relacionada	4.3.8
«aproximar», «estimar», «diferencial»	$dy = f'(x)\,dx$	4.3.9
$y = f(x)^{g(x)}$, productos y cocientes grandes SOLO PLAN 2016	derivación logarítmica	4.3.10

4.3 Procedimientos

4.3.1 Derivada por definición (cuatro pasos)

1. Escribe $f(x+h)$: cambia cada x por $(x+h)$.
2. Calcula el incremento $f(x+h) - f(x)$ y simplifícalo (denominador común, desarrollo de binomios).
3. Divide entre h. Antes de pasar al límite hay que **cancelar el factor** h: factoriza o racionaliza (multiplica por el conjugado).
4. Toma el límite cuando $h \to 0$, sustituyendo $h = 0$.

Ejemplo breve: con $f(x) = x^2$, $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x$.

4.3.2 Derivada con reglas y regla de la cadena

1. Reescribe antes de derivar: raíces como potencias ($\sqrt[4]{x+1} = (x+1)^{1/4}$), $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$.
2. Identifica la operación «de afuera» (potencia, cociente, ang tan, sen…) y aplica su fórmula; multiplica por la derivada de lo de adentro. Repite capa por capa.
3. Simplifica: factor común, denominador común, $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$.
4. Si se pide $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ o una segunda derivada evaluada, sustituye solo al final.

4.3.3 Derivabilidad de una función por partes

1. En cada punto de unión x_0, **continuidad**: el valor de la regla izquierda en x_0 igual al de la regla derecha.
2. **Derivabilidad**: deriva cada regla y exige que las derivadas en x_0 coincidan (derivadas laterales iguales).
3. Resuelve el sistema para las constantes. Si sobran ecuaciones, comprueba que todas se cumplan.
4. Si la función no es continua en x_0, no es derivable ahí, aunque las pendientes coincidan.

4.3.4 Derivación implícita

1. Deriva los dos lados respecto a x. Cada vez que derives algo con y, multiplica por y' (regla de la cadena). Los productos xy, x^2y llevan regla del producto.
2. Pasa al lado izquierdo los términos con y' y al derecho los demás.
3. Factoriza y' y despeja.
4. Para una pendiente en un punto, sustituye x_0 y y_0 en y' (no hace falta despejar y en la curva).

4.3.5 Derivación paramétrica y segunda derivada

1. Calcula $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, y forma $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$. Simplifica.
2. Si se pide en un valor de x (o de y), encuentra el valor del parámetro t que le corresponde; puede haber dos.
3. Segunda derivada: deriva $\frac{dy}{dx}$ *respecto a* t y divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. Si en el punto pedido $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ (forma $\frac{0}{0}$), simplifica el cociente antes de evaluar o elimina el parámetro.

4.3.6 Recta tangente y recta normal

1. **Punto.** Si solo se da una coordenada, obtén la otra con la ecuación de la curva (pueden salir dos puntos; si el enunciado da una condición como $y \geq 0$, úsala).
2. **Pendiente.** $m = y'$ en el punto (directa, implícita o paramétrica).
3. **Rectas.** Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$; normal con pendiente $-\frac{1}{m}$. Escríbelas en forma general $Ax + By + C = 0$ si lo piden.
4. **Tangente con condición.** Horizontal: $y' = 0$. Paralela a $Ax + By + C = 0$: $y' = -\frac{A}{B}$. Perpendicular: $y' = \frac{B}{A}$. Resuelve la ecuación junto con la de la curva para hallar los puntos de tangencia.
5. **Área de un triángulo.** Intersecta las rectas entre sí y con el eje indicado; el área es $\frac{1}{2}$ base · altura con las intersecciones.

4.3.7 Ángulo entre dos curvas

1. Resuelve el sistema de las dos ecuaciones: puntos de intersección.
2. En cada punto, la pendiente de cada curva (m_1, m_2); si una es recta, su pendiente es fija.
3. $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ y $\varphi = \text{ang tan}(\ldots)$. Si $1 + m_1 m_2 = 0$, $\varphi = 90^\circ$. Si una tangente es vertical y la otra tiene pendiente m, $\varphi = 90^\circ - \text{ang tan}\,|m|$.
4. Si se pide la tangente que forma un ángulo dado con una recta, plantea la ecuación con el valor absoluto: salen dos pendientes.

4.3.8 Razón de cambio: plantilla de cinco pasos

1. **Figura y variables.** Dibuja la situación y nombra con letras las cantidades que cambian con el tiempo (r, V, x…). Los datos fijos van con su número.
2. **Datos y pregunta.** Escribe la razón conocida con su signo ($\frac{dV}{dt} = -60$ si disminuye), lo que se pide ($\frac{dA}{dt} = ?$) y el instante ($r = 4$). Uniforma las unidades.
3. **Ecuación.** Relaciona las variables con geometría (volumen, área, Pitágoras, triángulos

semejantes, trigonometría). Si aparece una variable de más, elimínala con un dato fijo o una relación.
4. **Derivar respecto a t.** Cada variable produce su razón por la regla de la cadena: $\frac{d}{dt}r^3 = 3r^2\frac{dr}{dt}$.
5. **Sustituir al final** los valores del instante, despejar y dar el resultado con unidades y sentido (aumenta o disminuye).

No sustituyas el valor del instante antes de derivar: una variable con valor fijo tendría derivada cero.

4.3.9 Diferencial y aproximación

1. Elige f, un valor x donde $f(x)$ sea fácil ($\sqrt{16}$, sen $\frac{\pi}{6}$) y el incremento $dx = \Delta x$.
2. Calcula $dy = f'(x)\,dx$.
3. Aproxima $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$, o el cambio $\Delta y \approx dy$.

4.3.10 Derivación logarítmica y $f(x)^{g(x)}$ SOLO PLAN 2016

1. Si la variable está en la base y en el exponente, $y = f(x)^{g(x)}$, no sirven ni $(u^n)'$ ni $(a^u)'$. Toma logaritmo natural: $\ln y = g(x)\ln f(x)$.
2. Deriva implícitamente: $\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$.
3. Multiplica por y y sustituye $y = f(x)^{g(x)}$.
4. El mismo método simplifica productos y cocientes largos: el logaritmo los vuelve sumas.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Tangente y normal con derivación implícita

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 4.

Obtenga las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en el punto $A(1, 1)$.

Resolución.

1. El punto está en la curva: $1 + 3 + 1 = 5$.
2. Derivación implícita, con regla del producto en $3xy$:

$$2x + 3\,(y + xy') + 2yy' = 0.$$

3. Se agrupan los términos con y' y se despeja:

$$(3x + 2y)\,y' = -(2x + 3y) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

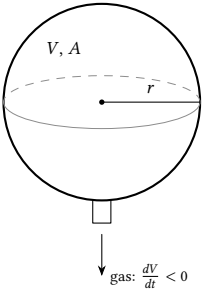
4. Pendiente en $A(1, 1)$: $m = -\frac{2+3}{3+2} = -1$. La normal tiene pendiente $-\frac{1}{m} = 1$.
5. Tangente: $y - 1 = -(x - 1)$, es decir, $x + y - 2 = 0$.
6. Normal: $y - 1 = 1(x - 1)$, es decir, $x - y = 0$.

Resultado: tangente $x + y - 2 = 0$; normal $x - y = 0$.

Ejemplo resuelto · Razón de cambio: el globo que pierde gas

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.

Un globo de forma esférica deja escapar gas a razón de 60 mm^3/min. ¿A qué razón decrece el área del globo en el instante en que el radio es 4 cm?



Resolución.

1. **Variables:** radio r, volumen V y área A de la esfera, funciones del tiempo t (en minutos).
2. **Datos:** el volumen disminuye, así que $\frac{dV}{dt} = -60\ \text{mm}^3/\text{min}$. Se pide $\frac{dA}{dt}$ cuando $r = 4\ \text{cm} = 40\ \text{mm}$ (todo en milímetros).
3. **Ecuaciones:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$.
4. **Derivadas respecto a t:**

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}, \qquad \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

5. **Instante $r = 40$:** de la primera, $\frac{dr}{dt} = \frac{-60}{4\pi(40)^2} = -\frac{3}{320\pi}$ mm/min. En la segunda:

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(40)\left(-\frac{3}{320\pi}\right) = -3\ \text{mm}^2/\text{min}.$$

6. Atajo: al dividir las dos derivadas, $\frac{dA}{dt} = \frac{2}{r}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{40}(-60) = -3$.

Resultado: el área decrece a razón de 3 mm^2/min (0.03 cm^2/min).

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Ang sec y potencias

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 4.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para: a) $y = \operatorname{ang\,sec}(3x)$; b) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Resolución.

1. a) Con $u = 3x$, $u' = 3$, y la fórmula de ang sec u:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}, \qquad |x| > \tfrac{1}{3}.$$

   Con la fórmula sin valor absoluto queda $\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}$, igual para $x > \frac{1}{3}$.
2. b) Se reescribe $y = x^{1/2} - x^{-1/2}$ y se aplica la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$$

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

Ejercicio 4.5.2 · Continua y derivable: tres reglas

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 3.

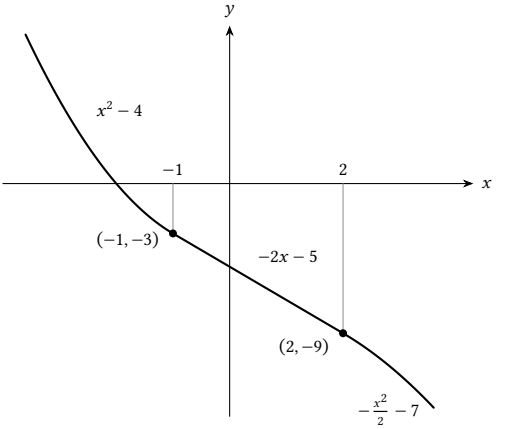
Determine los valores reales de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } -8 \le x < -1, \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 2, \\ -\frac{x^2}{2} - 7 & \text{si } 2 \le x \le 5, \end{cases}$$

sea continua en $[-8, 5]$ y derivable en $(-8, 5)$.

Resolución.

1. Las tres reglas son polinomios: solo hay que revisar las uniones $x = -1$ y $x = 2$. Derivadas de las reglas: $2x$, a y $-x$.
2. En $x = -1$. Continuidad: $(-1)^2 - 4 = -a + b$, es decir, $-a + b = -3$. Derivabilidad: $2(-1) = a$, así que $a = -2$.
3. Entonces $b = -3 + a = -5$.
4. En $x = 2$, con $a = -2$ y $b = -5$. Continuidad: $2a + b = -9$ y $-\frac{4}{2} - 7 = -9$. Se cumple. Derivabilidad: $a = -2$ y $-x\big|_{x=2} = -2$. Se cumple.
5. Las cuatro condiciones se satisfacen con los mismos valores: la recta $y = -2x - 5$ es tangente a las dos parábolas en los puntos de unión.



Resultado: $a=-2$, $b=-5$.

Ejercicio 4.5.3 · Implícita con tangente y cadena con raíz

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2\tan y = x+y$; b) $y=\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}$.

Resolución.

1. a) Derivación implícita (producto a la izquierda):

$$2x\tan y + x^2\sec^2 y\, y' = 1 + y'.$$

2. Se agrupa y se despeja:

$$\left(x^2\sec^2 y - 1\right) y' = 1 - 2x\tan y \;\Rightarrow\; y' = \frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y - 1}.$$

3. b) Con $u=\frac{2x}{2x-1}$, $y=\sqrt{u}$ y $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Regla del cociente:

$$u' = \frac{2(2x-1)-2x(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

4. Entonces

$$y' = -\frac{2}{(2x-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}} = -\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}},$$

válida en $x<0$ o $x>\frac{1}{2}$, donde la raíz existe y la derivada también.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y-1}$; b) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}$.

Ejercicio 4.5.4 · Segundas derivadas: ang tan y paramétrica

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 3.

a) Sea $y = x \operatorname{ang\,tan} x$; calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}$. b) Para $x = t - 1$, $y = 2t^3 - 1$, calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$.

Resolución.

1. a) Regla del producto: $y' = \operatorname{ang\,tan} x + \frac{x}{1+x^2}$.
2. Otra vez, con la regla del cociente en el segundo término:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

3. En $x = \frac{1}{2}$: $1 + x^2 = \frac{5}{4}$ y $y'' = \frac{2}{25/16} = \frac{32}{25}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 6t^2$, así que $\frac{dy}{dx} = 6t^2$.
5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(6t^2)}{dx/dt} = \frac{12t}{1} = 12t$.
6. $x = 1$ corresponde a $t - 1 = 1$, $t = 2$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 24$.

Resultado: a) $\frac{32}{25}$; b) 24.

Ejercicio 4.5.5 · Tangentes perpendiculares a una recta

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 4.

Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{1}{x}$ que sean perpendiculares a la recta $x - 9y = 2$.

Resolución.

1. La recta dada, $y = \frac{x-2}{9}$, tiene pendiente $\frac{1}{9}$. Las perpendiculares tienen pendiente -9.
2. $y' = -\frac{1}{x^2} = -9 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$. Puntos de tangencia: $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$.
3. En $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$: $y - 3 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y - 6 = 0$.
4. En $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$: $y + 3 = -9\left(x + \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y + 6 = 0$.

Resultado: $9x + y - 6 = 0$ y $9x + y + 6 = 0$.

Ejercicio 4.5.6 · Tangentes horizontales a una circunferencia

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine los puntos de la curva $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ en los que las rectas tangentes son paralelas a la recta $y = 0$.

Resolución.

1. Paralela a $y = 0$ quiere decir horizontal: $y' = 0$.
2. Derivación implícita: $2x + 2yy' = 4 + 4y' \Rightarrow (2y - 4)\,y' = 4 - 2x \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y-2}$.
3. $y' = 0$ exige $x = 2$ (con $y \neq 2$). En la curva: $4 + y^2 = 8 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 4 = 0$.
4. $y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Ninguno vale 2, así que el denominador no se anula.

5. Comprobación: la curva es la circunferencia $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, de centro $(2,2)$ y radio $2\sqrt{2}$; las tangentes horizontales están arriba y abajo del centro.

Resultado: $\left(2,\ 2+2\sqrt{2}\right)$ y $\left(2,\ 2-2\sqrt{2}\right)$.

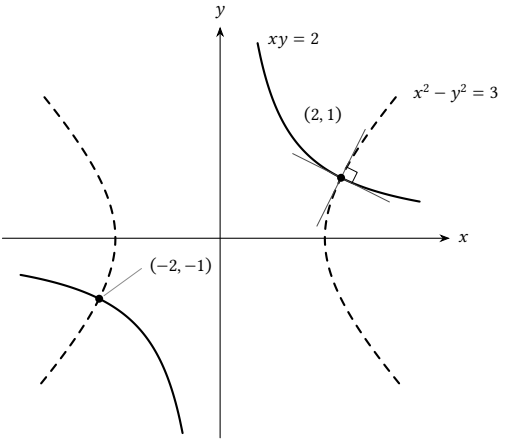
Ejercicio 4.5.7 · Ángulo entre dos hipérbolas

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 4.

Sean las curvas $C_1:\ xy=2$ y $C_2:\ x^2-y^2=3$. Determine el ángulo de intersección entre C_1 y C_2.

Resolución.

1. Intersección: de C_1, $y=\frac{2}{x}$. En C_2: $x^2-\frac{4}{x^2}=3\Rightarrow x^4-3x^2-4=0\Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$. Entonces $x=\pm 2$: puntos $(2,1)$ y $(-2,-1)$.
2. Pendientes por derivación implícita. C_1: $y+xy'=0\Rightarrow m_1=-\frac{y}{x}$. C_2: $2x-2yy'=0\Rightarrow m_2=\frac{x}{y}$.
3. En $(2,1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Entonces $1+m_1m_2=1-1=0$: las tangentes son perpendiculares.
4. En $(-2,-1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Mismo resultado.
5. En general $m_1m_2=-\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=-1$ en cualquier punto común: las dos familias de hipérbolas son ortogonales.

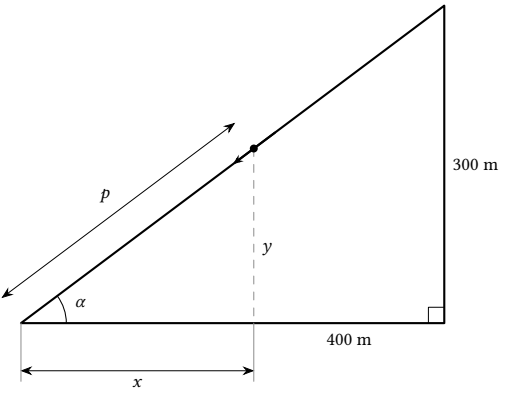


Resultado: $\varphi=90^\circ$ en los dos puntos de intersección, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

Ejercicio 4.5.8 · Razón de cambio: el esquiador en la rampa

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 4.

Un esquiador se desliza a razón de 10 m/s sobre una rampa en forma de plano inclinado, de 400 m de base horizontal y 300 m de altura. Sea p su distancia, medida sobre la rampa, al punto más bajo, y x la proyección horizontal de esa distancia. Determine la rapidez con la que cambia x.



Resolución.

1. **Variables:** p (sobre la rampa), x (horizontal) y y (altura), funciones de t.
2. **Datos:** el esquiador baja hacia el punto más bajo, así que p disminuye: $\frac{dp}{dt} = -10$ m/s. Se pide $\frac{dx}{dt}$.
3. **Ecuación:** la rampa mide $\sqrt{400^2 + 300^2} = 500$ m. Por triángulos semejantes, $\frac{x}{p} = \frac{400}{500}$, es decir, $x = \frac{4}{5}p$.
4. **Derivada:** $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt} = \frac{4}{5}(-10) = -8$ m/s.
5. La razón es constante: no depende de dónde esté el esquiador. (La altura cambia a $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}(-10) = -6$ m/s.)

Resultado: x disminuye a razón de 8 m/s, en cualquier instante.

Nota: el original pide la razón «en el instante en que el esquiador se encuentra a 3 m del punto más bajo»; ese dato no se usa.

Ejercicio 4.5.9 · Implícita y potencia con exponente variable

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 3.

SOLO PLAN 2016 Calcule $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2y + xy^2 = y - x$; b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Resolución.

1. a) Derivación implícita, con regla del producto en los dos términos de la izquierda:

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = y' - 1.$$

2. Se agrupan los términos con y':

$$\left(x^2 + 2xy - 1\right)y' = -1 - 2xy - y^2 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1 + 2xy + y^2}{1 - x^2 - 2xy}.$$

3. b) La variable está en la base y en el exponente: derivación logarítmica (con $x > 0$). $\ln y = \operatorname{sen} x \, \ln x$.

4. Derivando implícitamente:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \, \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

5. Se multiplica por $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2xy+y^2}{1-x^2-2xy}$; b) $\frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

Ejercicio 4.5.10 · Derivada por definición de una raíz

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2024-1, tipo C, problema 1.

Determine la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con el método de los cuatro pasos, es decir, con la definición de derivada.

Resolución.

1. $f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{x+h}}$, con $x > 0$.
2. Incremento, con denominador común:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}.$$

3. Se divide entre h y se racionaliza el numerador (por $\sqrt{x} + \sqrt{x+h}$):

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}. \end{aligned}$$

4. Límite con $h \to 0$:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

5. Comprobación con la regla de la potencia: $\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$.

Resultado: $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$, para $x > 0$.

4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 4.

Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$G: \begin{cases} x^2 = \operatorname{sen}^2 \theta, \\ y = \cos^2 \theta, \end{cases}$$

en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$ y abscisa positiva.

Resultado: $4x + 4y - 5 = 0$, tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 4.

La tangente a la curva $y = x^2$ en un punto P corta a la recta $3x - y + 1 = 0$ formando un ángulo de 45°. Determine las coordenadas de P.

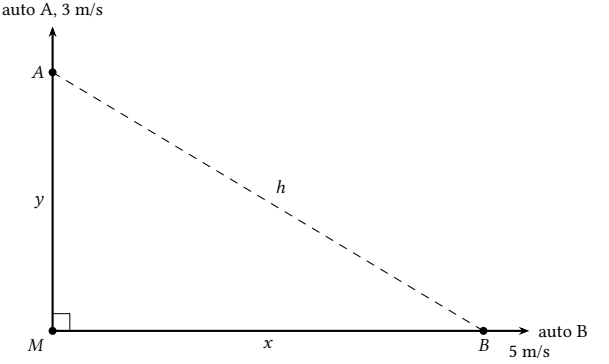
Resultado: $P(-1, 1)$ o $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 3.

Dos autos parten al mismo tiempo de un punto M en direcciones perpendiculares, como en la figura. El auto A va a 3 m/s y el auto B a 5 m/s. Determine la rapidez con que aumenta la distancia h entre ellos en el instante en que el auto A ha recorrido 9 m.



Resultado: $\frac{dh}{dt} = \sqrt{34}$ m/s ≈ 5.83 m/s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2020-1, problema 3.

SOLO PLAN 2016 Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $e^{xy} - x = \ln e^y$; b) $x = 3\,\mathrm{senh}(3t)$, $y = 2\cosh(3t)$.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y\,e^{xy}}{x\,e^{xy} - 1}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo D, problema 2.

Obtenga el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de ordenada $y = \frac{1}{2}$.

Resultado: 2 unidades cuadradas.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo A, problema 4.

Una placa metálica circular de radio 20 cm se calienta y su radio aumenta 0.02 cm. Con la diferencial, estime el aumento del área de la placa y compárelo con el aumento exacto.

Resultado: $dA = 0.8\pi$ cm$^2 \approx 2.513$ cm^2; el aumento exacto es $\Delta A = 0.8004\pi$ cm^2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 4.6.7

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 2.

Calcule $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1}$ para la curva $y = \operatorname{sen} 2t$, $x = \cos^2 2t$, con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Resultado: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1} = -\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

4.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar la regla de la cadena.** $(\operatorname{sen} 3x)' = 3\cos 3x$, no $\cos 3x$; $\left(\operatorname{ang\,tan}\sqrt{x}\right)'$ lleva el factor $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. **Derivar y como constante** en la implícita: $\frac{d}{dx}y^2 = 2y\,y'$, no $2y$; $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, no y'.
3. **Segunda derivada paramétrica como $\frac{y''(t)}{x''(t)}$.** Se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a t y se divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. **Evaluar en x cuando la paramétrica pide t**: primero se halla el t que corresponde al valor de x.
5. **Normal con pendiente $-m$** en lugar de $-\frac{1}{m}$.
6. **Derivable sin continuidad.** En una función por partes, igualar pendientes no basta: primero los valores.
7. **Sustituir el instante antes de derivar** en razón de cambio: el radio «vale 4» solo en ese instante; si se sustituye antes, su derivada sale cero.
8. **Signo de las razones.** Lo que disminuye (gas que escapa, agua que sale) lleva razón negativa.
9. **Unidades mezcladas** (mm^3 con cm, m^3 con cm): uniforma antes de sustituir.
10. **Ángulo entre curvas sin valor absoluto**: $\tan\varphi$ negativa da el ángulo obtuso; el ángulo entre curvas es el agudo.
11. **Confundir** $(\cosh u)'$ **con** $(\cos u)'$ SOLO PLAN 2016 : la derivada de $\cosh u$ es $+\operatorname{senh} u\,u'$.

12. $x^{\operatorname{sen} x}$ **con la regla de la potencia** SOLO PLAN 2016 : con la variable en el exponente se usa derivación logarítmica.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ · derivable ⇒ continua.
- $(uv)' = uv' + vu' \cdot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2} \cdot (u^n)' = nu^{n-1}u' \cdot \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u\, u' \cdot (\cos u)' = -\operatorname{sen} u\, u' \cdot (\tan u)' = \sec^2 u\, u' \cdot (\sec u)' = \sec u \tan u\, u'$.
- $(\cot u)' = -\csc^2 u\, u' \cdot (\csc u)' = -\csc u \cot u\, u'$.
- $(\operatorname{ang\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (\operatorname{ang\,tan} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \cdot (\operatorname{ang\,sec} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$ · normal con $-\frac{1}{m} \cdot Ax + By + C = 0$ tiene $m = -\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right| \cdot m_1m_2 = -1 \Rightarrow \varphi = 90°$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a t, sustituir al final.
- Esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ · cilindro $V = \pi r^2 h$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ · círculo $A = \pi r^2$.
- Diferencial: $dy = f'(x)\,dx \cdot f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.
- SOLO PLAN 2016 $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \cdot (e^u)' = e^u u' \cdot (a^u)' = a^u \ln a\, u' \cdot (\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u' \cdot (\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u' \cdot (\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- SOLO PLAN 2016 $y = f^g$: $\ln y = g \ln f$, $y' = f^g\left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Reconoce el tipo con la tabla 4.2 y escribe la fórmula que vas a usar antes de calcular.
2. En las derivadas, reescribe raíces como potencias y deriva capa por capa; en la implícita, marca cada y'.
3. En tangente y normal: punto completo, pendiente, punto-pendiente; da la forma general si la piden.
4. En razón de cambio, sigue los cinco pasos con su rótulo; sustituye el instante solo al final y di si la cantidad aumenta o disminuye.
5. Comprueba: el punto está en la curva, las pendientes de rectas perpendiculares multiplican -1, las unidades cuadran.

Si no terminas una razón de cambio, la figura, los datos con signo y la ecuación derivada ya valen buena parte del problema.

Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno hará el análisis de la variación de funciones para conocer las características geométricas de la gráfica de una función y lo aplicará en la resolución de problemas de optimación.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 5). El alumno analizará la variación de una función real de variable real para identificar las características geométricas de su gráfica y resolverá problemas de optimación.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** Plan 2010: en los 10 finales revisados hay al menos un problema de esta unidad (11 problemas: optimación 6, análisis de la gráfica 4 y valor medio 1). Plan 2016: en 35 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (2016-1 a 2026-2) hay un problema: optimación 16, análisis de la gráfica 14, teorema de Rolle 3 y extremos absolutos en un intervalo cerrado 2. Además salen 8 problemas en los segundos parciales: valor medio, análisis, optimación y un punto de inflexión con parámetros.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 (20 min): los cuatro teoremas, los criterios de la primera y la segunda derivada y la concavidad.
  2. Aprende la tabla de variación (sección 5.3.4) y la plantilla de optimación (sección 5.3.6): con ellas se resuelve casi todo.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro: 20 min cada uno. La optimación es la mitad de los problemas: no te saltes los ejercicios 5.5.6 a 5.5.8.

5.1 Conceptos y expresiones

Extremos. Una función f tiene un *máximo relativo* en c si $f(c) \geq f(x)$ para toda x cercana a c, y un *mínimo relativo* si $f(c) \leq f(x)$ para toda x cercana a c. Si la desigualdad vale para toda x de un intervalo I, el extremo es *absoluto* en I. El *valor* máximo es $f(c)$; el punto de la gráfica es $(c, f(c))$.

Valor crítico. Un número c del dominio de f es crítico si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe. Los extremos relativos solo pueden estar en valores críticos; pero un valor crítico puede no ser extremo (x^3 en $x = 0$).

Teorema de Weierstrass (de los valores extremos). Si f es continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$, entonces f alcanza en $[a, b]$ un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Están en un valor crítico interior o en un extremo del intervalo.

Teorema de Bolzano. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, existe al menos un $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$. Geométricamente: una curva continua que

pasa de abajo a arriba del eje x lo corta.

Teorema de Rolle. Hipótesis:

1. f es continua en $[a, b]$;
2. f es derivable en (a, b);
3. $f(a) = f(b)$.

Tesis: existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Interpretación: entre dos puntos de la gráfica a la misma altura hay uno con **tangente horizontal**.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial (de Lagrange). Hipótesis: las dos primeras de Rolle. Tesis: existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretación: hay un punto donde la **tangente es paralela a la secante** que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$. Rolle es el caso $f(a) = f(b)$.

Crecimiento. Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, f es creciente ahí; si $f'(x) < 0$, es decreciente. Es consecuencia del teorema del valor medio.

Criterio de la primera derivada. Sea c un valor crítico con f continua en c. Si f' cambia de + a − al pasar por c, en c hay un máximo relativo; si cambia de − a +, un mínimo relativo; si no cambia de signo, no hay extremo.

Concavidad. Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, la gráfica es *cóncava hacia arriba* (∪): queda arriba de sus tangentes. Si $f''(x) < 0$, es *cóncava hacia abajo* (∩). Un *punto de inflexión* es un punto $(c, f(c))$ de la gráfica, con f continua en c, donde la concavidad cambia. Los candidatos son los c con $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ inexistente; hay inflexión solo si f'' cambia de signo (x^4 tiene $f''(0) = 0$ y no tiene inflexión).

Criterio de la segunda derivada. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, en c hay un máximo relativo; si $f''(c) > 0$, un mínimo relativo; si $f''(c) = 0$, el criterio no decide y se usa el de la primera derivada.

Picos y tangentes verticales. Donde f es continua y f' no existe puede haber:

- un *pico*: $|x|$ en $x = 0$; las pendientes laterales son distintas y hay mínimo;
- una *cúspide*: $x^{2/3}$ en $x = 0$; $f' \to \mp\infty$ por cada lado y también hay mínimo;
- una *tangente vertical* sin extremo: $\sqrt[3]{x}$ en $x = 0$; $f' \to +\infty$ por los dos lados, f sigue creciendo y la concavidad cambia: es punto de inflexión.

5.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle» o «del valor medio»	revisar cada hipótesis y hallar c	5.3.1
«intervalos donde es creciente o decreciente», «máximos y mínimos relativos», «valores críticos»	signo de f'	5.3.2

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«cóncava hacia arriba o hacia abajo», «puntos de inflexión», «criterio de la segunda derivada»	signo de f''	5.3.3
«trazar la gráfica», «bosquejar»	tabla de variación	5.3.4
raíces o potencias fraccionarias: $\sqrt[3]{x-1}$, $x^{2/3}$	críticos donde f' no existe	5.3.4
«máximo y mínimo absolutos» en $[a, b]$	críticos y extremos del intervalo	5.3.5
«dimensiones para que el área (volumen) sea máxima», «material mínimo», «costo mínimo»	optimación	5.3.6
«obtener a y b para que haya un punto de inflexión en (x_0, y_0)»	dos ecuaciones	5.3.7

5.3 Procedimientos

5.3.1 Teoremas de Rolle y del valor medio

1. Escribe las hipótesis del teorema que pide el enunciado y revisa **una por una**, terminando cada una con «se cumple» o «no se cumple»:
   - **Continuidad en** $[a, b]$**:** polinomios, sen y cos son continuos siempre; un cociente, donde el denominador no se anula; una raíz par, donde el radicando es ≥ 0.
   - **Derivabilidad en** (a, b)**:** calcula f' y revisa dónde no existe (denominador cero, raíz de cero en el denominador).
   - **Solo Rolle:** $f(a) = f(b)$**.** Evalúa los dos extremos.
2. Si una hipótesis no se cumple, el teorema no se puede aplicar (puede o no existir c): dilo y termina.
3. Si se cumplen, plantea $f'(c) = 0$ (Rolle) o $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (valor medio) y resuelve.
4. Conserva solo las soluciones del intervalo *abierto* (a, b).

5.3.2 Crecimiento y extremos relativos

1. Dominio de f.
2. Deriva y **factoriza** f'. Valores críticos: los ceros de f' y los puntos del dominio donde f' no existe.
3. Los críticos y los puntos fuera del dominio parten la recta en intervalos. Toma un valor de prueba en cada uno y anota el signo de f'.
4. $f' > 0$: creciente; $f' < 0$: decreciente.
5. Criterio de la primera derivada en cada crítico; evalúa f en los extremos: el valor máximo o mínimo es $f(c)$.

5.3.3 Concavidad, inflexión y criterio de la segunda derivada

1. Calcula f'' y factorízala. Candidatos: ceros de f'' y puntos del dominio donde f'' no existe.
2. Signo de f'' en cada intervalo: + es cóncava hacia arriba, − hacia abajo.

3. Hay inflexión en un candidato solo si el signo cambia y c está en el dominio. Da las coordenadas $(c, f(c))$.
4. Si el enunciado pide el criterio de la segunda derivada, evalúa f'' en cada crítico con $f'(c) = 0$: negativo, máximo; positivo, mínimo.

5.3.4 Tabla de variación y gráfica

1. Reúne en una tabla los críticos y los candidatos a inflexión, ordenados, con los signos de f' y f'' entre ellos.
2. Renglón de f: $\nearrow$ (crece) o $\searrow$ (decrece), y los valores de f en los puntos de la tabla.
3. Ubica en la gráfica: extremos, inflexiones, intersecciones con los ejes ($f(0)$ y, si es fácil, los ceros), asíntotas.
4. Une los puntos respetando el crecimiento y la concavidad de cada tramo.
5. Donde f' no existe: si $f' \to \pm\infty$ dibuja una tangente vertical; si las pendientes laterales son distintas, un pico.

5.3.5 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

1. Revisa que f sea continua en $[a, b]$: por el teorema de Weierstrass, existen los dos extremos absolutos.
2. Encuentra los críticos de (a, b).
3. Evalúa f en los críticos y en a y b.
4. El mayor valor es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto. No hace falta ningún criterio.

5.3.6 Optimación: plantilla

1. **Dibujo y variables.** Haz un esquema y nombra cada medida que cambia (x, y, r, h).
2. **Función objetivo.** Lo que se quiere hacer máximo o mínimo, en función de las variables: área, volumen, perímetro, material, costo.
3. **Restricción.** La ecuación que liga las variables: el dato fijo (perímetro, volumen, área) o la condición geométrica (el punto está en la curva, triángulos semejantes).
4. **Una variable.** Despeja de la restricción y sustituye en la función objetivo.
5. **Dominio.** Los valores con sentido físico (longitudes positivas, el punto dentro de la figura).
6. **Crítico.** Deriva, iguala a cero y resuelve en el dominio.
7. **Justifica** que es máximo o mínimo: con la segunda derivada, con el cambio de signo de la primera o comparando con los extremos del dominio.
8. **Responde** lo que se pide: todas las dimensiones, el valor óptimo y las unidades.

5.3.7 Punto de inflexión con parámetros

1. «El punto (x_0, y_0) está en la gráfica»: $g(x_0) = y_0$.
2. «Es punto de inflexión»: $g''(x_0) = 0$.
3. Resuelve el sistema y comprueba que g'' cambia de signo en x_0.

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Análisis completo de una cúbica

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 5.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus valores máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia abajo o hacia arriba.

Resolución.

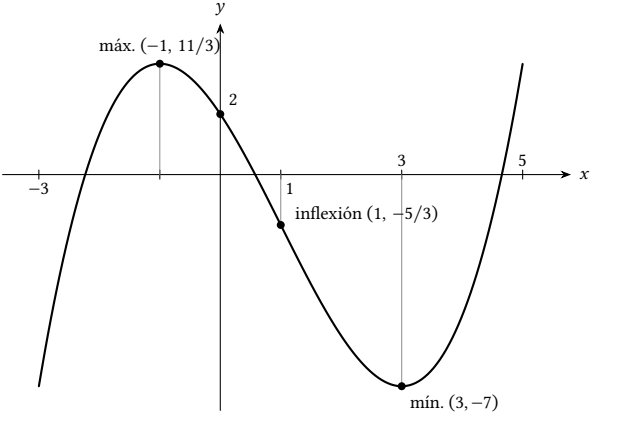
1. Polinomio: dominio $\mathbb{R}$. Primera derivada factorizada:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$$

   Valores críticos: $x = -1$ y $x = 3$.
2. Valores de f: $f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = \frac{11}{3}$ y $f(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7$.
3. Segunda derivada: $f''(x) = 2x - 2$; se anula en $x = 1$, con $f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$.
4. Tabla de variación (valores de prueba -2, 0, 2, 4):

	$x < -1$	-1		1		3	$x > 3$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\frac{11}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$

5. a) $f' > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$; $f' < 0$ en $(-1, 3)$.
6. b) En $x = -1$, f' cambia de + a − (y $f''(-1) = -4 < 0$): máximo relativo. En $x = 3$, de − a + (y $f''(3) = 4 > 0$): mínimo relativo.
7. c) $f'' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y $f'' > 0$ en $(1, \infty)$: la concavidad cambia en $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$, punto de inflexión.
8. Gráfica: además, $f(0) = 2$, $f(-3) = -7$ y $f(5) = \frac{11}{3}$.



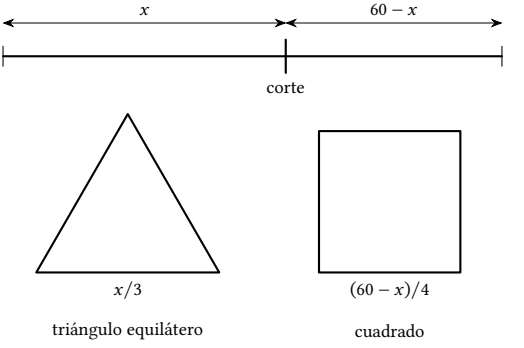
Resultado: a) creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(3,\infty)$, decreciente en $(-1,3)$; b) máximo relativo $f(-1)=\frac{11}{3}$, mínimo relativo $f(3)=-7$; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)$, hacia arriba en $(1,\infty)$, con inflexión en $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$.

Ejemplo resuelto · Alambre cortado en dos

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 5.

Un alambre de 60 cm se corta en dos partes; con una se forma un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado. ¿Qué longitud debe tener cada parte para que la suma de las áreas sea mínima?

Resolución.



1. **Variables.** x: tramo del triángulo, de lado $\frac{x}{3}$; $60-x$: tramo del cuadrado, de lado $\frac{60-x}{4}$.
2. **Función objetivo.** Con el área del triángulo equilátero de lado ℓ, $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$:

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{60-x}{4}\right)^2,$$

es decir,

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{36}x^2+\frac{(60-x)^2}{16}.$$

3. **Dominio.** $0\le x\le 60$ (en los extremos todo el alambre va a una sola figura).
4. **Crítico.**

$$A'(x)=\frac{\sqrt{3}}{18}x-\frac{60-x}{8}=0\ \Rightarrow\ 8\sqrt{3}\,x=18(60-x),$$

de donde $x=\frac{1080}{18+8\sqrt{3}}=\frac{540}{9+4\sqrt{3}}$. Racionalizando:

$$x=\frac{540(9-4\sqrt{3})}{81-48}=\frac{540(9-4\sqrt{3})}{33}=\frac{180(9-4\sqrt{3})}{11}.$$

5. **Justificación.** $A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8} > 0$ para toda x: el crítico es mínimo y, como es el único, es el mínimo absoluto en $[0, 60]$. (Comprobación: $A(0) = 225$ y $A(60) = 100\sqrt{3} \approx 173.2$, mayores que $A \approx 97.9$ en el crítico.)
6. **Otra parte:** $60 - x = \frac{660-1620+720\sqrt{3}}{11} = \frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11}$.

Resultado: para el triángulo, $\frac{180(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 33.90$ cm; para el cuadrado, $\frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11} \approx 26.10$ cm.

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Valor medio con una raíz cuadrada

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

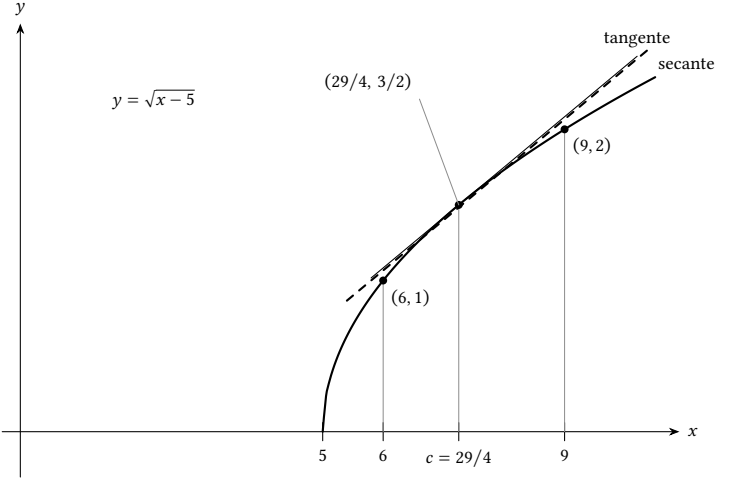
Sea $f(x) = \sqrt{x-5}$ en el intervalo $[6, 9]$. Determine si se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial y, en caso afirmativo, obtenga el o los valores de x donde se cumple la tesis.

Resolución.

1. **Continuidad en** $[6, 9]$**.** La raíz está definida y es continua para $x \geq 5$, y $[6, 9]$ está contenido ahí. Se cumple.
2. **Derivabilidad en** $(6, 9)$**.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$ existe para $x > 5$. Se cumple.
3. **Pendiente de la secante:** $f(6) = 1$, $f(9) = 2$:

$$\frac{f(9) - f(6)}{9 - 6} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. **Tesis:** $\frac{1}{2\sqrt{c-5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{c-5} = \frac{3}{2} \Rightarrow c - 5 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{29}{4} = 7.25$, que está en $(6, 9)$.



Resultado: se cumplen las dos hipótesis y la tesis se cumple en $c = \frac{29}{4}$; la tangente en $\left(\frac{29}{4}, \frac{3}{2}\right)$ es paralela a la secante.

Ejercicio 5.5.2 · Rolle con un polinomio de grado 4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 4.

Sea $f(x) = 2 - 4x^2 + x^4$. Determine si f satisface el teorema de Rolle en el intervalo $\left[1, \sqrt{3}\right]$ y, en caso afirmativo, obtenga los valores del intervalo en los que se cumple.

Resolución.

1. **Continuidad en $\left[1, \sqrt{3}\right]$.** Es un polinomio. Se cumple.
2. **Derivabilidad en $\left(1, \sqrt{3}\right)$.** $f'(x) = 4x^3 - 8x$ existe para toda x. Se cumple.
3. **Valores en los extremos.** $f(1) = 2 - 4 + 1 = -1$ y $f(\sqrt{3}) = 2 - 12 + 9 = -1$. Son iguales: se cumple.
4. **Tesis:** $f'(c) = 4c(c^2 - 2) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0, c = \pm\sqrt{2}$. Solo $\sqrt{2} \approx 1.41$ está en $\left(1, \sqrt{3}\right) \approx (1, 1.73)$.
5. En $c = \sqrt{2}$ la tangente es horizontal: $f(\sqrt{2}) = 2 - 8 + 4 = -2$.

Resultado: se cumplen las tres hipótesis y el teorema se verifica en $c = \sqrt{2}$.

Ejercicio 5.5.3 · Raíz cúbica: tangente vertical

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 5.

Para $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ obtenga, si existen: a) los intervalos donde f es creciente o decreciente; b) los máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Trace la gráfica de f.

Resolución.

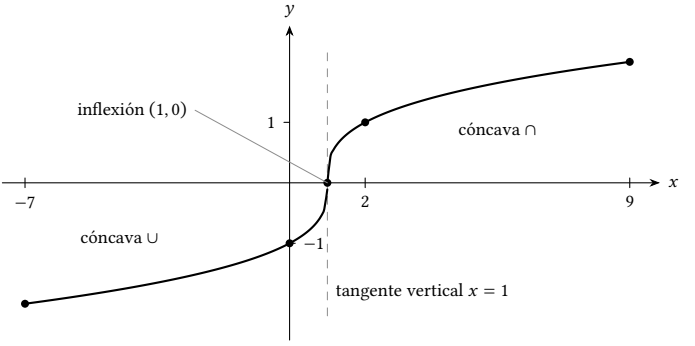
1. La raíz cúbica está definida para todo real: dominio $\mathbb{R}$, y f es continua.
2. $f(x) = (x - 1)^{1/3}$, así que

$$f'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

   No se anula nunca y no existe en $x = 1$: único valor crítico, $x = 1$.
3. a) El denominador es positivo (raíz cúbica de un cuadrado): $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$. Como f es continua en $x = 1$, es creciente en todo $\mathbb{R}$.
4. b) f' no cambia de signo en $x = 1$: no hay máximos ni mínimos relativos. Como $f'(x) \to +\infty$ cuando $x \to 1$, en $(1, 0)$ la tangente es vertical.
5. c) Segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

   Para $x < 1$, $(x - 1)^5 < 0$ y su raíz cúbica también: $f'' > 0$, cóncava hacia arriba. Para $x > 1$: $f'' < 0$, cóncava hacia abajo.
6. La concavidad cambia en $x = 1$ y f es continua ahí: $(1, 0)$ es punto de inflexión, con tangente vertical.
7. Puntos para la gráfica: $f(-7) = -2$, $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, $f(9) = 2$.



Resultado: a) creciente en $(-\infty, \infty)$, nunca decreciente; b) no tiene extremos relativos ($x = 1$ es crítico, con tangente vertical); c) cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1)$ y hacia abajo en $(1, \infty)$; inflexión en $(1, 0)$.

Ejercicio 5.5.4 · Extremos relativos y absolutos

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 7.

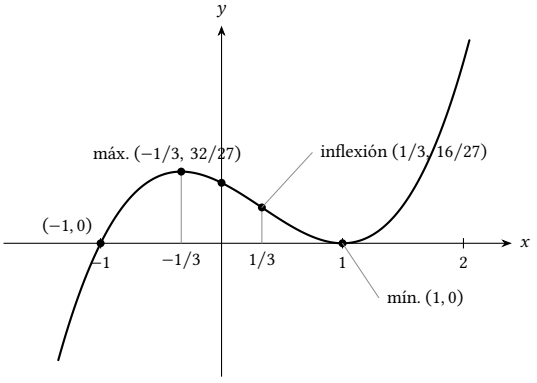
Para $f(x) = (1 + x)(x - 1)^2$ obtenga: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) el máximo y el mínimo absolutos en $[-1, 1]$. Trace la gráfica.

Resolución.

1. Desarrollando, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$; dominio $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$. Críticos: $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$.
3. Signo de f': positivo en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, negativo en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, positivo en $(1, \infty)$.
4. Valores: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$ y $f(1) = 2 \cdot 0 = 0$.
5. b) En $-\frac{1}{3}$, f' pasa de + a −: máximo relativo. En 1, de − a +: mínimo relativo. (Con la segunda derivada, $f''(x) = 6x - 2$: $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ y $f''(1) = 4 > 0$.)
6. c) f es continua en $[-1, 1]$. Valores en los críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(-1) = 0, \qquad f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{32}{27}, \qquad f(1) = 0.$$

7. Para la gráfica: inflexión en $x = \frac{1}{3}$ (f'' cambia de signo), con $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$; $f(0) = 1$, $f(2) = 3$.



Resultado: a) creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ y $(1, \infty)$, decreciente en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; b) máximo relativo $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$, mínimo relativo $f(1) = 0$; c) en $[-1, 1]$, máximo absoluto $\frac{32}{27}$ en $x = -\frac{1}{3}$ y mínimo absoluto 0, en $x = -1$ y en $x = 1$.

Ejercicio 5.5.5 · Función racional

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.

Dada $f(x) = \frac{8x}{(x-2)^2}$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) los puntos de inflexión y la concavidad de su gráfica.

Resolución.

1. Dominio: $x \neq 2$. En $x = 2$ hay asíntota vertical y, como el grado del denominador es mayor, $y = 0$ es asíntota horizontal.
2. Primera derivada (se simplifica un factor $x - 2$):

$$f'(x) = \frac{8(x-2)^2 - 16x(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8(x-2) - 16x}{(x-2)^3} = -\frac{8(x+2)}{(x-2)^3}.$$

   Crítico: $x = -2$ ($x = 2$ no está en el dominio, pero sí separa intervalos).
3. Signos (valores de prueba -3, 0, 3):

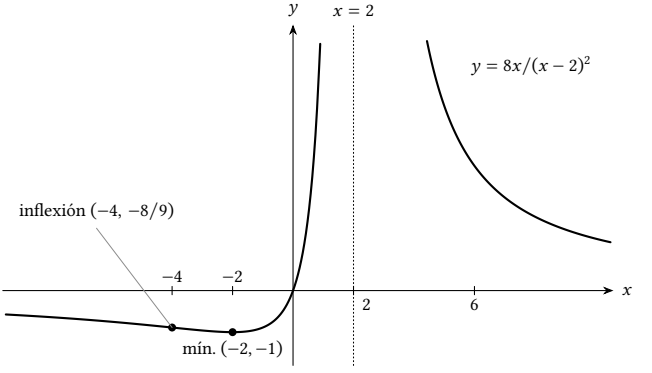
	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$-8(x+2)$	+	−	−
$(x-2)^3$	−	−	+
f'	−	+	−

4. b) En $x = -2$, f' pasa de − a +: mínimo relativo $f(-2) = \frac{-16}{16} = -1$. No hay máximo relativo.
5. c) Derivando $-8(x+2)(x-2)^{-3}$:

$$f''(x) = -8\,\frac{(x-2) - 3(x+2)}{(x-2)^4} = \frac{16(x+4)}{(x-2)^4}.$$

   El denominador es positivo: $f'' < 0$ si $x < -4$ y $f'' > 0$ si $-4 < x < 2$ o $x > 2$.

6. Inflexión en $x = -4$: $f(-4) = \frac{-32}{36} = -\frac{8}{9}$. En $x = 2$ no hay inflexión: no está en el dominio y f'' no cambia de signo.

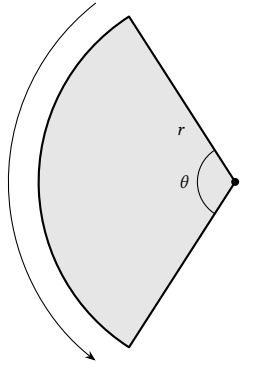


Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, creciente en $(-2, 2)$; b) mínimo relativo $f(-2) = -1$, sin máximos; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$, hacia arriba en $(-4, 2)$ y en $(2, \infty)$; inflexión en $\left(-4, -\frac{8}{9}\right)$.

Ejercicio 5.5.6 · Sector circular de perímetro mínimo

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 5.

Un sector circular de radio r y arco l tiene área 8 m^2. Determine las dimensiones del sector cuyo perímetro es mínimo. (Área del sector: $\frac{rl}{2}$.)



Resolución.

1. **Función objetivo.** El perímetro son dos radios y el arco: $P = 2r + l$.
2. **Restricción.** $\frac{rl}{2} = 8 \;\Rightarrow\; l = \frac{16}{r}$.
3. **Una variable:** $P(r) = 2r + \frac{16}{r}$, con $r > 0$.

4. **Crítico:** $P'(r) = 2 - \frac{16}{r^2} = 0 \Rightarrow r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$ (la raíz negativa no tiene sentido).
5. **Justificación:** $P''(r) = \frac{32}{r^3} > 0$ para $r > 0$: mínimo, y absoluto, pues es el único crítico.
6. Arco: $l = \frac{16}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Ángulo central: $\theta = \frac{l}{r} = 2$ rad. Perímetro: $P = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

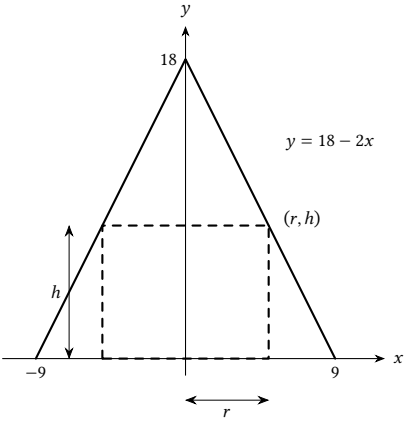
Resultado: $r = 2\sqrt{2}$ m ≈ 2.83 m y $l = 4\sqrt{2}$ m (ángulo central de 2 rad); perímetro mínimo $8\sqrt{2}$ m.

Ejercicio 5.5.7 · Cilindro inscrito en un cono

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 6.

Calcule las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en un cono de radio $R = 9$ cm y altura $H = 18$ cm.

Resolución.



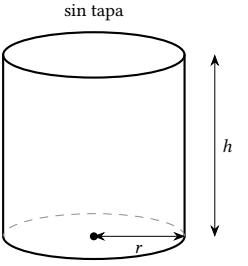
1. **Variables.** Radio r y altura h del cilindro. En el corte vertical, la generatriz del cono es la recta por $(9, 0)$ y $(0, 18)$: $y = 18 - 2x$.
2. **Restricción.** La esquina (r, h) del cilindro toca la generatriz: $h = 18 - 2r$ (o, con triángulos semejantes, $\frac{h}{18} = \frac{9-r}{9}$).
3. **Función objetivo:** $V = \pi r^2 h = \pi r^2(18 - 2r) = \pi(18r^2 - 2r^3)$, con $0 < r < 9$.
4. **Crítico:** $V'(r) = \pi(36r - 6r^2) = 6\pi r(6 - r) = 0 \Rightarrow r = 6$.
5. **Justificación:** $V''(r) = \pi(36 - 12r)$, $V''(6) = -36\pi < 0$: máximo.
6. $h = 18 - 12 = 6$ y $V = \pi \cdot 36 \cdot 6 = 216\pi$.

Resultado: radio 6 cm y altura 6 cm; volumen máximo 216π cm^3.

Ejercicio 5.5.8 · Envase cilíndrico sin tapa

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2019-2, problema 4.

Se quiere construir un envase de 1500 cm^3 con forma de cilindro circular recto sin tapa. Calcule el radio y la altura del envase que emplean la menor cantidad de material.



Resolución.

1. **Función objetivo.** Material: base más pared lateral (sin tapa): $S = \pi r^2 + 2\pi rh$.
2. **Restricción.** $\pi r^2 h = 1500 \;\Rightarrow\; h = \frac{1500}{\pi r^2}$.
3. **Una variable:** $S(r) = \pi r^2 + \frac{3000}{r}$, con $r > 0$.
4. **Crítico:**

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{3000}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{1500}{\pi} \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}} = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}.$$

5. **Justificación:** $S''(r) = 2\pi + \frac{6000}{r^3} > 0$: mínimo.
6. **Altura:** como $\pi r^3 = 1500$, $h = \frac{1500}{\pi r^2} = \frac{\pi r^3}{\pi r^2} = r$.

Resultado: $r = h = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}$ cm ≈ 7.82 cm.

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 5.

Para $f(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo; c) sus máximos y mínimos relativos. Trace su gráfica.

Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$, creciente en $(-2, 1)$; b) cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, hacia abajo en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, inflexión en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{12}\right)$; c) mínimo relativo $f(-2) = -\frac{13}{3}$, máximo relativo $f(1) = \frac{1}{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 5.

Calcule el área máxima que puede tener un rectángulo de dimensiones variables inscrito en la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

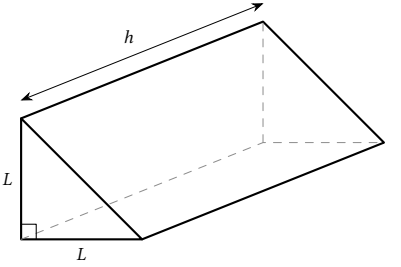
Resultado: 24 unidades de área (rectángulo de $4\sqrt{2}$ por $3\sqrt{2}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 6.

Se fabricará un recipiente con forma de prisma triangular recto. Su sección es un triángulo rectángulo isósceles de catetos L y su longitud es h, como en la figura. Calcule el valor de L que hace mínima la cantidad de material, si el recipiente debe tener una capacidad de 3 m^3. Considere el prisma cerrado: dos caras triangulares y tres rectangulares.



Resultado: $L = \sqrt[3]{6+3\sqrt{2}}$ m ≈ 2.17 m (con $h = (2-\sqrt{2})L \approx 1.27$ m).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 113.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 5.

Un triángulo rectángulo está formado, en el primer cuadrante, por los ejes coordenados y una recta que pasa por el punto $(2, 3)$. Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo de área mínima.

Resultado: $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 6)$; área mínima 12.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo A, problema 4.

Obtenga el valor de a y el de b tales que la gráfica de $g(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un punto de inflexión en $A(1, 2)$.

Resultado: $a = -1$, $b = 3$: $g(x) = -x^3 + 3x^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 114.

Ejercicio propuesto 5.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 4.

Para $m(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$: a) obtenga sus valores críticos; b) calcule sus valores extremos absolutos; c) obtenga su punto de inflexión; d) trace su gráfica.

Resultado: a) $x = \frac{\pi}{4}$; b) máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $x = \frac{\pi}{4}$, mínimo absoluto -1 en $x = -\frac{\pi}{2}$; c) $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 115.

5.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar los críticos donde f' no existe.** En $\sqrt[3]{x-1}$ o $x^{2/3}$, el crítico no sale de $f' = 0$, sino del denominador de f'.
2. **Llamar extremo a todo crítico.** Si f' no cambia de signo (x^3 en 0, $\sqrt[3]{x-1}$ en 1) no hay extremo.
3. **Llamar inflexión a todo cero de f''.** Hay que comprobar que f'' cambia de signo: x^4 tiene $f''(0) = 0$ y es cóncava hacia arriba en todas partes.
4. **Inflexión fuera del dominio.** En $\frac{8x}{(x-2)^2}$, $x = 2$ separa intervalos de signo, pero ahí no hay punto de la gráfica.
5. **Dar solo la abscisa.** «Valor máximo» es $f(c)$; «punto de inflexión» son las coordenadas $(c, f(c))$.
6. **Rolle y valor medio sin revisar hipótesis.** Cada hipótesis se escribe y se califica: «se cumple» o «no se cumple». Y c debe estar en el intervalo *abierto*.
7. **Extremos absolutos sin los extremos del intervalo.** En $[a, b]$ siempre se evalúan $f(a)$ y $f(b)$.
8. **Optimación con dos variables.** Si no se usa la restricción para dejar una sola variable, la derivada no tiene sentido.
9. **No justificar el máximo o el mínimo.** Un crítico no basta: segunda derivada, cambio de signo o comparación con los extremos del dominio.
10. **Contar mal las caras o los tramos.** Un envase sin tapa no lleva πr^2 dos veces; el perímetro de un sector lleva dos radios más el arco.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- Valor medio: f continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a, b)$.
- Weierstrass: continua en $[a, b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- $f' > 0$: crece $\cdot$ $f' < 0$: decrece $\cdot$ $f'' > 0$: cóncava $\cup$ $\cdot$ $f'' < 0$: cóncava $\cap$.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a, b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ $\cdot$ sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}, l = r\theta$ $\cdot$ cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi rh$ $\cdot$ cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Análisis de la gráfica:** dominio, f' factorizada, críticos, f'' factorizada, candidatos a inflexión; todo en una sola tabla de variación.
2. Contesta cada inciso con intervalos y con valores $f(c)$ o coordenadas, en el orden del enunciado.
3. Para la gráfica, marca extremos, inflexiones, $f(0)$ y asíntotas antes de unir con la curva.
4. **Rolle o valor medio:** tres (o dos) renglones de hipótesis con «se cumple» y después la ecuación para c.
5. **Optimación:** dibujo con variables, escribe la plantilla completa y no olvides justificar y dar unidades.

Si no se llega al final, la tabla de signos bien hecha o la función objetivo en una variable ya valen buena parte del problema.

Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno utilizará los conceptos fundamentales de las sucesiones y de las series para determinar su carácter y para representar funciones por medio del desarrollo en series de potencias.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 las sucesiones y series no son de Cálculo y Geometría Analítica: son el tema 1 de *Cálculo Integral* y se estudian en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5. Si tu plan es el 2016, salta esta unidad.
- **Frecuencia:** es el tema 6 de Cálculo Diferencial. Sale un problema en cada uno de los 10 finales revisados: serie de Maclaurin o de Taylor en 6 e intervalo de convergencia en 4.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 6.1 (30 min) y copia en una hoja la tabla de series conocidas.
  2. Aprende los procedimientos 6.3.5 (intervalo con extremos) y 6.3.6 (tabla de derivadas): son los dos problemas del examen.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 6.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 6.5.1 a 6.5.4 con cronómetro: 15 min cada uno.

6.1 Conceptos y expresiones

Sucesión. Una *sucesión* infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$ y cuyos valores son números reales: $a_1, a_2, a_3, \dots$ Se escribe $\{a_n\}$, y la regla a_n es su *término enésimo*. Por ejemplo, $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ tiene término enésimo $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$: el signo alterna y el numerador y el denominador avanzan de uno en uno.

Límite y carácter de una sucesión. Si a_n se acerca tanto como se quiera a un número L cuando n crece, se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y se dice que la sucesión es *convergente* (ese es su *carácter*); si el límite no existe o es infinito, es *divergente*. Los límites se calculan como en la Unidad 3, con $n \to \infty$: se divide entre la mayor potencia de n. Dos límites que se usan siempre:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0 \ \ (p > 0), \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1, \\ \infty & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Monótona y acotada. La sucesión es *creciente* si $a_n < a_{n+1}$ para todo n (*no decreciente* si $a_n \le a_{n+1}$) y *decreciente* si $a_n > a_{n+1}$ (*no creciente* si $a_n \ge a_{n+1}$); en cualquiera de esos casos es *monótona*. Es *acotada* si existen m y M con $m \le a_n \le M$ para todo n. Por ejemplo, $\left\{n + \frac{1}{n}\right\}$ es creciente y acotada inferiormente por 2, pero no superiormente: diverge. **Teorema:**

toda sucesión monótona y acotada es convergente. Para decidir la monotonía se compara a_n con a_{n+1}, o se deriva la función $f(x)$ que da $a_n = f(n)$: si $f'(x) < 0$ para $x \geq 1$, la sucesión es decreciente.

Serie y convergencia. Una *serie* es la suma de los términos de una sucesión: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ Su *suma parcial n*-ésima es $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. La serie es *convergente* y su suma es S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$; si el límite no existe o es infinito, es *divergente*.

Condición necesaria (criterio del término enésimo). Si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La recíproca es **falsa**: $\frac{1}{n} \to 0$ y la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Lo que sí se usa es la contrarrecíproca: **si** $\lim a_n \neq 0$ **(o no existe), la serie diverge**. Con $\lim a_n = 0$, el criterio no decide.

Serie geométrica. Cada término es el anterior por la misma razón r:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1,$$

y diverge si $|r| \geq 1$. En la fórmula, a es el **primer término**, sin importar desde qué índice empieza la suma. Un decimal periódico es una serie geométrica: $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots = \frac{7/10}{1-1/10} = \frac{7}{9}$.

Serie p. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. Con $p = 1$ es la *armónica*. Por ejemplo, $\sum \sqrt[3]{\frac{64}{n^4}} = \sum \frac{4}{n^{4/3}}$ converge, porque $p = \frac{4}{3} > 1$; $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($p = \frac{1}{2}$).

Criterios para series de términos positivos.

- *Comparación directa.* Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge. Si $a_n \geq b_n \geq 0$ y $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ diverge.
- *Comparación en el límite.* Si $a_n, b_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ con $0 < c < \infty$, las dos series tienen el mismo carácter. Se compara con una serie p: se toma $b_n = \frac{1}{n^p}$, con p igual al grado del denominador menos el del numerador.
- *Cociente (D'Alembert).* Sea $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Si $L < 1$, la serie converge (absolutamente); si $L > 1$ o $L = \infty$, diverge; si $L = 1$, el criterio no decide. Es el criterio para factoriales y potencias c^n.
- *Raíz.* Sea $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; se concluye igual que con el cociente. Conviene cuando todo el término está elevado a la n.

Con factoriales: $(n+1)! = (n+1)\,n!$, así que $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

Series alternadas. En $\sum (-1)^n b_n$ con $b_n > 0$, el signo alterna. *Criterio de Leibniz:* si $b_{n+1} \leq b_n$ (decreciente) y $\lim b_n = 0$, la serie converge. La serie es *absolutamente convergente* si $\sum |a_n|$ converge, y *condicionalmente convergente* si converge pero $\sum |a_n|$ diverge. Toda serie absolutamente convergente es convergente. Ejemplo: la armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente.

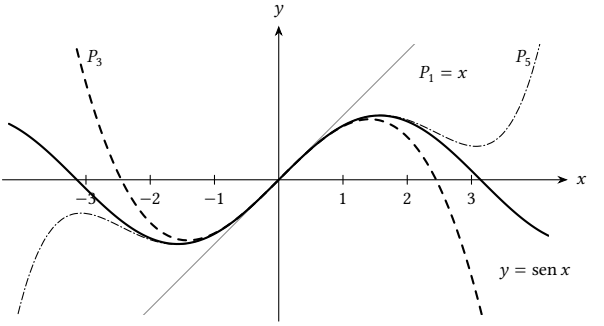
Serie de potencias. Es una serie con la variable x: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, centrada en a. Converge en un *intervalo de convergencia* centrado en a, de *radio* R: converge absolutamente si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$. En los **extremos** $x = a - R$ y $x = a + R$ puede pasar cualquier cosa, así que el intervalo puede ser $(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$ o

$(a-R, a+R]$; por eso los exámenes piden «incluir el análisis de los extremos». Si converge para todo x, $R=\infty$.

Series de Taylor y de Maclaurin. Si f tiene derivadas de todos los órdenes en $x=a$, su *serie de Taylor* en $x=a$ es

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

Con $a=0$ se llama *serie de Maclaurin*: $f(x)=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Cortada en el término n, es el *polinomio de Taylor* P_n, que aproxima a f cerca de a, mejor cuanto más términos tiene (figura). Así calcula una computadora sen x.



Series conocidas. Con R el radio de convergencia:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots, \qquad R=1,$$
$$\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots, \qquad R=\infty,$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots, \qquad R=\infty,$$
$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots, \qquad R=1.$$

La última es la *serie binomial*, para cualquier exponente m (negativo o fraccionario).

6.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge», «monótona», «acotada», «término enésimo»	límite, monotonía o regla de a_n	6.3.1
un decimal periódico, o «calcular su suma» de una serie con r^n	serie geométrica y $\frac{a}{1-r}$	6.3.2
«carácter», «converge o diverge» de $\sum a_n$ sin x; «criterio del cociente»	término enésimo, p, comparación o cociente	6.3.3
un $(-1)^n$ en una serie sin x; «criterio de Leibniz»	Leibniz y convergencia absoluta	6.3.4
«intervalo de convergencia», «análisis de los extremos» de $\sum c_n(x-a)^n$	radio por el cociente y los dos extremos	6.3.5
«serie de Maclaurin», «serie de Taylor en $x = a$», «primeros términos no nulos»	tabla de derivadas y patrón	6.3.6
$\operatorname{sen}(kx)$, $\cos(kx)$, $\frac{1}{(c+x)^m}$, $\sqrt{c-x}$	sustituir en una serie conocida	6.3.7

6.3 Procedimientos

6.3.1 Límite, monotonía y término enésimo de una sucesión

1. **Límite:** si a_n es un cociente de polinomios, divide entre la mayor potencia de n del denominador. Grados iguales: el límite es el cociente de los coeficientes principales; numerador de mayor grado: diverge; de menor grado: 0.
2. Con potencias r^n: saca como factor la de mayor base; $r^n \to 0$ si $|r| < 1$.
3. **Monotonía:** escribe a_n como constante más un resto ($a_n = c + r_n$) y estudia el resto, o deriva $f(x)$ con $a_n = f(n)$; calcula los primeros términos para confirmar.
4. **Acotada:** si es decreciente, a_1 es cota superior y el límite (si existe) es cota inferior.
5. **Término enésimo:** separa signo, numerador y denominador; busca en cada uno una progresión (n, $2n-1$, 2^n, $n!$) y comprueba con $n = 1, 2, 3$.

6.3.2 Suma de una serie geométrica

1. Escribe los primeros términos y calcula $r = \frac{a_2}{a_1}$; comprueba con $\frac{a_3}{a_2}$.
2. Si $|r| < 1$, converge; si $|r| \geq 1$, diverge.
3. $S = \frac{\text{primer término}}{1-r}$. En un decimal periódico, cada bloque que se repite es un término.

6.3.3 Carácter de una serie numérica

En este orden:

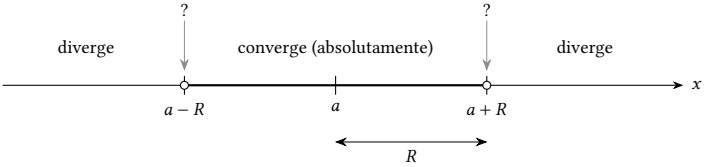
1. **Término enésimo:** si $\lim a_n \neq 0$, diverge y se acabó.
2. ¿Es geométrica o p? Se decide de inmediato.
3. ¿Hay factoriales o potencias c^n? **Cociente**: simplifica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ antes de tomar el límite.
4. ¿Es un cociente de polinomios o radicales? **Comparación** con la serie p del mismo «grado».

6.3.4 Serie alternada: Leibniz y convergencia absoluta

1. Escribe la serie como $\sum(-1)^n b_n$ con $b_n > 0$.
2. Comprueba $\lim b_n = 0$. Si no es 0, la serie diverge.
3. Comprueba que b_n decrece: $f'(x) < 0$ con $b_n = f(n)$, o $b_{n+1} \le b_n$ directamente.
4. Con las dos condiciones, converge (Leibniz).
5. Para clasificarla, estudia $\sum b_n$: si converge, la convergencia es absoluta; si diverge, condicional.

6.3.5 Intervalo de convergencia con análisis de los extremos

1. Escribe el término a_n completo, con la x.
2. **Cociente:** $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Los cocientes de potencias de n tienden a 1 y queda $L = k|x-a|$.
3. Impón $L < 1$: $|x-a| < \frac{1}{k} = R$. Despeja: $a - R < x < a + R$. Si $L = 0$ para todo x, el intervalo es $(-\infty, \infty)$.
4. **Extremo derecho:** sustituye $x = a + R$ en la serie original y estudia la serie numérica (casi siempre una p o una armónica).
5. **Extremo izquierdo:** sustituye $x = a - R$; suele quedar alternada: Leibniz, o convergencia absoluta si $\sum |a_n|$ es una p con $p > 1$.
6. Escribe el intervalo con corchete en los extremos que convergen y paréntesis en los que divergen.



en $x = a \pm R$ el cociente da $L = 1$:
cada extremo se sustituye y se analiza aparte

6.3.6 Serie de Maclaurin o de Taylor con la tabla de derivadas

1. Haz una tabla con las columnas n, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(a)$ y $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Deriva hasta $n = 3$ o $n = 4$. Escribe las raíces como exponentes: $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2x^{-1/2}$.
2. Evalúa en $x = a$ (en Maclaurin, $a = 0$) sin simplificar los coeficientes numéricos: así se ve el patrón.
3. Si se piden «los primeros términos no nulos», salta los ceros y sigue derivando hasta tener los que se piden.
4. **Patrón:** identifica el signo ($(-1)^n$ o $(-1)^{n+1}$), los factoriales y las potencias; escribe $f^{(n)}(a)$ en general y compruébalo con $n = 0, 1, 2$.
5. **Término general:** $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; simplifica los factoriales.
6. Escribe la serie con $\sum$ y sus primeros términos. Si se pide el intervalo, aplica 6.3.5 al término general.

6.3.7 Atajos: sustituir en una serie conocida

1. $\operatorname{sen}(kx)$, $\cos(kx)$: sustituye $u = kx$ en la serie de $\operatorname{sen} u$ o $\cos u$: $(kx)^{2n} = k^{2n}x^{2n}$. El intervalo sigue siendo $(-\infty, \infty)$.
2. $\cos^2 x$ o $\operatorname{sen}^2 x$: usa $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ y $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, y después el paso anterior.
3. $\frac{1}{c-x} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-x/c} = \sum \frac{x^n}{c^{n+1}}$, válida para $|x| < c$.
4. $(c+x)^m = c^m \left(1 + \frac{x}{c}\right)^m$ y la serie binomial con $\frac{x}{c}$ en lugar de x; válida para $|x| < |c|$.
5. El atajo sirve para comprobar el resultado de la tabla de derivadas. Si el enunciado pide la serie «por definición» o con derivadas, entrega la tabla.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Intervalo de convergencia con extremos

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 6.

Obtenga el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$, incluyendo el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Término enésimo: $a_n = \frac{(x-3)^n}{n^3}$; el siguiente es $a_{n+1} = \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3}$.
2. Criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-3|^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{|x-3|^n} = |x-3| \left(\frac{n}{n+1}\right)^3.$$

   Como $\frac{n}{n+1} \to 1$, $L = |x-3|$.
3. Converge absolutamente si $|x-3| < 1$, es decir, $2 < x < 4$. Centro 3 y radio $R = 1$.
4. Extremo $x = 4$: $\sum \frac{1^n}{n^3} = \sum \frac{1}{n^3}$, serie p con $p = 3 > 1$: converge.
5. Extremo $x = 2$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$. Sus valores absolutos forman la misma serie p convergente, así que converge absolutamente.
6. Los dos extremos se incluyen.

Resultado: el intervalo de convergencia es $[2, 4]$, es decir, $2 \le x \le 4$.

Ejemplo resuelto · Tres términos de una serie de Taylor

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 6.

Obtenga los tres primeros términos no nulos de la serie de Taylor de $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ en $x = 1$.

Resolución.

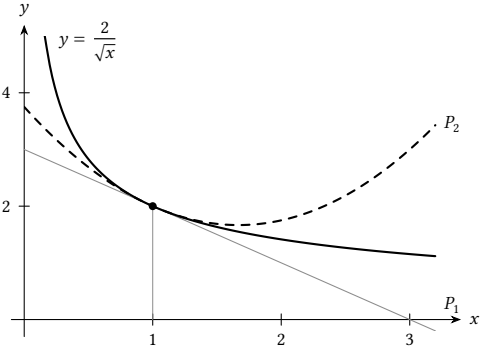
1. Se escribe $f(x) = 2x^{-1/2}$ y se hace la tabla de derivadas, evaluadas en $a = 1$:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$
0	$2x^{-1/2}$	2	2
1	$-x^{-3/2}$	-1	-1
2	$\frac{3}{2}x^{-5/2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$

2. Ningún coeficiente es cero, así que los tres primeros términos no nulos son los de $n = 0, 1, 2$:

$$f(1) = 2, \quad f'(1)(x-1) = -(x-1), \quad \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{3}{4}(x-1)^2.$$

3. En la figura, la recta P_1 (la tangente) y la parábola P_2 se pegan a la curva cerca de $x = 1$.



Resultado: $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2 - (x-1) + \frac{3}{4}(x-1)^2 - \cdots$

6.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 6.5.1 · Intervalo con un extremo abierto

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 6.

Obtenga el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$, incluyendo el análisis de los extremos.

Resolución.

1. $a_n = \frac{(x+1)^n}{n+1}$. Cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+1|^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{|x+1|^n} = |x+1|\,\frac{n+1}{n+2} \;\to\; |x+1|.$$

2. $|x+1|<1 \iff -2<x<0$. Centro -1, radio 1.
3. Extremo $x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$, la armónica: diverge.
4. Extremo $x=-2$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, alternada con $b_n=\frac{1}{n+1}$ decreciente y con límite 0: converge por Leibniz (condicionalmente).

Resultado: el intervalo de convergencia es $[-2,0)$, es decir, $-2\le x<0$.

Ejercicio 6.5.2 · Intervalo con comparación en los extremos

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 7.

Determine el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+3}$, analizando sus extremos.

Resolución.

1. $a_n=\frac{x^n}{n^2+3}$. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\,\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\;\to\;|x|.$$
2. $|x|<1 \iff -1<x<1$. Centro 0, radio 1.
3. Extremo $x=1$: $\sum\frac{1}{n^2+3}$. Como $0<\frac{1}{n^2+3}<\frac{1}{n^2}$ y $\sum\frac{1}{n^2}$ es una serie p con $p=2>1$, converge por comparación directa.
4. Extremo $x=-1$: $\sum\frac{(-1)^n}{n^2+3}$. La serie de sus valores absolutos es la del paso anterior, convergente: converge absolutamente.

Resultado: el intervalo de convergencia es $[-1,1]$.

Ejercicio 6.5.3 · Serie de Maclaurin de $3\cos 2x$

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 6.

Determine el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)=3\cos(2x)$.

Resolución.

1. Tabla de derivadas en $a=0$:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$3\cos 2x$	3
1	$-6\operatorname{sen} 2x$	0
2	$-12\cos 2x$	$-12=-3\cdot 2^2$
3	$24\operatorname{sen} 2x$	0
4	$48\cos 2x$	$48=3\cdot 2^4$

2. Patrón: las derivadas impares se anulan en 0; las pares son $f^{(2n)}(0)=3(-1)^n 2^{2n}$.
3. Término general: $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}=\frac{3(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$.
4. Primeros términos:
$$\begin{aligned}&3-\frac{3\cdot 4}{2}x^2+\frac{3\cdot 16}{24}x^4-\frac{3\cdot 64}{720}x^6+\cdots\\&=3-6x^2+2x^4-\frac{4}{15}x^6+\cdots\end{aligned}$$
5. Comprobación con el atajo: en $\cos u=\sum\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$ se sustituye $u=2x$ y se multiplica por 3. Vale para todo x.

Resultado:

$$3\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3\cdot 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$
$$= 3 - 6x^2 + 2x^4 - \frac{4}{15}x^6 + \cdots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6.5.4 · Serie de Maclaurin de una potencia negativa

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 5.

Obtenga la serie de Maclaurin que representa a $f(x) = -\frac{1}{(x+3)^3}$.

Resolución.

1. Se escribe $f(x) = -(x+3)^{-3}$ y se deriva:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$-(x+3)^{-3}$	$-\frac{1}{3^3}$
1	$3(x+3)^{-4}$	$\frac{3}{3^4}$
2	$-12(x+3)^{-5}$	$-\frac{12}{3^5}$
3	$60(x+3)^{-6}$	$\frac{60}{3^6}$

2. Patrón: los coeficientes $1, 3, 12, 60$ son $\frac{2!}{2}, \frac{3!}{2}, \frac{4!}{2}, \frac{5!}{2}$, es decir, $\frac{(n+2)!}{2}$; el signo es $(-1)^{n+1}$:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)!}{2\cdot 3^{n+3}}.$$

3. Término general, con $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2\cdot 3^{n+3}}x^n.$$

4. Primeros términos: $-\frac{1}{27} + \frac{x}{27} - \frac{2x^2}{81} + \frac{10x^3}{729} - \cdots$
5. Convergencia: el cociente da $\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{|x|}{3} \to \frac{|x|}{3}$; vale para $|x| < 3$. Coincide con la serie binomial de $-\frac{1}{27}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-3}$.

Resultado:

$$-\frac{1}{(x+3)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2\cdot 3^{n+3}}x^n, \quad |x| < 3.$$

6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.6**.

Ejercicio propuesto 6.6.1

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 6.

Determine el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5k}(x-1)^k$.

Resultado: radio 1; con el análisis de los extremos, $[0, 2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 115.

Ejercicio propuesto 6.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Obtenga los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos 2x$.

Resultado: $\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots$

→ Resolución en el Apéndice E, p. 116.

Ejercicio propuesto 6.6.3

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 7.

Obtenga los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \sqrt{4 - x}$.

Resultado: $\sqrt{4 - x} = 2 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} - \cdots$

→ Resolución en el Apéndice E, p. 116.

Ejercicio propuesto 6.6.4

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 6.

Obtenga el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen} 3x$.

Resultado: $\operatorname{sen} 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 - \cdots$, para todo x.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 116.

6.7 Errores frecuentes

1. **Leer al revés la condición necesaria.** $\lim a_n = 0$ *no* asegura que la serie converja (la armónica); solo $\lim a_n \neq 0$ asegura que diverge.
2. **Confundir sucesión y serie.** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge (a 0); $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
3. **Primer término equivocado en la geométrica.** En $\frac{a}{1-r}$, a es el primer término que se suma, no el coeficiente de r^n.
4. **Olvidar el valor absoluto en el cociente.** Sin él, $L = x - 3$ no lleva a $|x - 3| < 1$.
5. **No analizar los extremos.** Ahí el cociente da $L = 1$ y no decide: se sustituye cada extremo en la serie *original*.
6. **Resolver mal** $|x - a| < R$**.** Es $a - R < x < a + R$: con $(x + 1)^n$ el centro es -1, no 1.
7. **Simplificar mal los factoriales.** $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$ y $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n + 1)(2n + 2)$.
8. **Olvidar el** $n!$ al pasar de $f^{(n)}(a)$ al coeficiente, o la regla de la cadena al derivar $\cos 2x$ o $\sqrt{4 - x}$.
9. **Contar los ceros como términos.** Los «tres primeros términos no nulos» de $\cos 2x$ son los de grado 0, 2 y 4.
10. **Taylor con** x^n**.** En $x = a$ la potencia es $(x - a)^n$: en $a = -1$ es $(x + 1)^n$.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Sucesión: $\lim \frac{c}{n^p} = 0$ $(p > 0)$; $r^n \to 0$ si $|r| < 1$ · monótona y acotada $\Rightarrow$ converge.

- Término enésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ · serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge $\iff p > 1$.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$: $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide · raíz: $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.
- Leibniz: b_n decreciente y $b_n \to 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ converge · absoluta si $\sum |a_n|$ converge.
- Intervalo: $L = k|x-a| < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{k}$; extremos $a \pm R$ aparte.
- Taylor: $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ · Maclaurin: $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ $(|x| < 1)$ · $\operatorname{sen} x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ · $\cos x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$ $(|x| < 1)$ · $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Serie numérica:** primero el término enésimo; luego geométrica o p; con factoriales o c^n, cociente; con $(-1)^n$, Leibniz y después convergencia absoluta.
2. **Intervalo:** cociente con valor absoluto, despeja $|x-a| < R$, sustituye cada extremo en la serie original y escribe corchetes o paréntesis.
3. **Maclaurin o Taylor:** tabla de derivadas con cuatro o cinco renglones, coeficientes sin simplificar, patrón comprobado con $n = 0, 1, 2$ y término general con $\sum$.
4. Comprueba con el atajo de la serie conocida (sustituir $u = kx$ o la binomial).
5. Escribe el resultado con la serie en $\sum$ y sus primeros términos, y el intervalo si se pidió.

Si no se termina el patrón general, la tabla de derivadas y los primeros términos bien calculados ya valen parte del problema.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Las líneas marcadas SOLO PLAN 2016 son solo del Plan 2016; la Unidad 6 es solo del Plan 2010 (en el Plan 2016, las series están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5).

A.1 Funciones (Unidad 2)

- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \leq 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot D_{fg} = D_f \cap D_g \cdot$ en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \neq 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro (h,k); $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2 + a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h) + k$: traslación $(h,k) \cdot -f(x)$: reflejo en el eje $x \cdot f(-x)$: en el eje y.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cdot \operatorname{ang\,cos} : [-1,1] \to [0,\pi] \cdot \operatorname{ang\,tan} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{\ln x} = x\ (x > 0)$, $\ln e^x = x \cdot \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot a^x = e^{x \ln a}$.
- SOLO PLAN 2016 $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

A.2 Límites y continuidad (Unidad 3)

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \cdot (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[q]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \operatorname{mcm}(p,q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1 \cdot \frac{\tan u}{u} \to 1 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\operatorname{sen} ku}{u} \to k \cdot \frac{\operatorname{sen} au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en c: $f(c)$ definida $\cdot \lim_{x\to c} f(x)$ existe $\cdot \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- SOLO PLAN 2016 $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty \cdot \tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty \cdot \operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

A.3 La derivada (Unidad 4)

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot$ derivable $\Rightarrow$ continua.
- $(uv)' = uv' + vu' \cdot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \cdot (u^n)' = nu^{n-1}u' \cdot \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u\, u' \cdot (\cos u)' = -\operatorname{sen} u\, u' \cdot (\tan u)' = \sec^2 u\, u' \cdot (\sec u)' = \sec u \tan u\, u'$.
- $(\cot u)' = -\csc^2 u\, u' \cdot (\csc u)' = -\csc u \cot u\, u'$.
- $(\operatorname{ang\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (\operatorname{ang\,tan} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \cdot (\operatorname{ang\,sec} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y - y_0 = m(x - x_0) \cdot$ normal con $-\frac{1}{m} \cdot Ax + By + C = 0$ tiene $m = -\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \cdot m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \varphi = 90°$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a t, sustituir al final.
- Esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2 \cdot$ cilindro $V = \pi r^2 h \cdot$ cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot$ círculo $A = \pi r^2$.
- Diferencial: $dy = f'(x)\,dx \cdot f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.
- SOLO PLAN 2016 $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \cdot (e^u)' = e^u u' \cdot (a^u)' = a^u \ln a\, u' \cdot (\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u' \cdot (\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u' \cdot (\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- SOLO PLAN 2016 $y = f^g$: $\ln y = g \ln f$, $y' = f^g \left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$.

A.4 Variación de funciones (Unidad 5)

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a,b)$.
- Valor medio: f continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a,b)$.
- Weierstrass: continua en $[a,b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a,b)$.
- $f' > 0$: crece · $f' < 0$: decrece · $f'' > 0$: cóncava $\cup$ · $f'' < 0$: cóncava $\cap$.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a,b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 \cdot$ sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}, l = r\theta \cdot$ cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi rh \cdot$ cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

A.5 Sucesiones y series, solo Plan 2010 (Unidad 6)

- Sucesión: $\lim \frac{c}{n^p} = 0$ $(p > 0)$; $r^n \to 0$ si $|r| < 1 \cdot$ monótona y acotada $\Rightarrow$ converge.
- Término enésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1 \cdot$ serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge $\iff p > 1$.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.

- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$: $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide · raíz: $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.
- Leibniz: b_n decreciente y $b_n \to 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ converge · absoluta si $\sum |a_n|$ converge.
- Intervalo: $L = k|x-a| < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{k}$; extremos $a \pm R$ aparte.
- Taylor: $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ · Maclaurin: $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ $(|x| < 1)$ · $\operatorname{sen} x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ · $\cos x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$ $(|x| < 1)$ · $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 10 finales del Plan 2010 y los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016), en orden. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad y, si está en este cuaderno, el ejemplo, el ejercicio resuelto o el ejercicio propuesto donde se trabaja. Al final, los exámenes parciales que se citan en el cuaderno. Las versiones del mismo examen (tipos A, C, D) suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta, la otra se practica con el mismo procedimiento.

Plan 2010: Cálculo Diferencial

1er final 2012-2, tipo A

- (1) inversa de una función paramétrica; dominio y recorrido [U2; ejercicio 2.5.7]; (2) límites con radicales y trigonométrico [U3; ejercicio 3.5.1]; (3) continuidad y derivabilidad de una función por partes (constantes *a*, *b*) [U4; ejercicio 4.5.2]; (4) recta tangente y normal, derivación implícita [U4; ejemplo 4.4]; (5) optimación: alambre en triángulo equilátero y cuadrado, área mínima [U5; ejemplo 5.4]; (6) intervalo de convergencia con extremos [U6; ejemplo 6.4].

1er final 2013-1, tipo C

- (1) composición: dominio, recorrido y gráfica [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) continuidad de una función por partes (constante *a*) [U3; propuesto 3.6.1]; (3) derivada implícita y paramétrica [U4]; (4) razón de cambio: globo esférico [U4; ejemplo 4.4]; (5) optimación: sector circular de perímetro mínimo [U5; ejercicio 5.5.6]; (6) serie de Taylor, tres términos no nulos [U6; ejemplo 6.4].

2º final 2013-1, tipo A

- (1) modelo: perímetro de un terreno en función del radio [U2; ejemplo 2.4]; (2) límites trigonométrico y con radical [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) derivada implícita y regla de la cadena [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) recta tangente a una curva paramétrica [U4; propuesto 4.6.1]; (5) crecimiento, extremos relativos y concavidad [U5; ejemplo 5.4]; (6) serie de Maclaurin [U6; ejercicio 6.5.3].

1er final 2013-2, tipo A

- (1) modelo: área de una viga cortada de un tronco [U2; propuesto 2.6.6]; (2) límites: radicales, valor absoluto, al infinito [U3; ejemplo 3.4]; (3) continuidad de una función de tres reglas (constantes *A*, *B*) [U3; ejemplo 3.4]; (4) derivada implícita (ang cos) y segunda derivada [U4]; (5) teorema del valor medio [U5; ejercicio 5.5.1]; (6) serie de Maclaurin, tres términos no nulos [U6; propuesto 6.6.2].

2º final 2013-2, tipo A

- (1) inversa de una función por partes; dominio, recorrido y gráficas [U2; ejercicio 2.5.5]; (2) límites: laterales con valor absoluto, al infinito, factorización [U3; ejercicio 3.5.4]; (3) tangentes horizontales, derivación implícita [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) razón de cambio: esquiador en una rampa [U4; ejercicio 4.5.8]; (5) análisis de $\sqrt[3]{x-1}$ y gráfica [U5; ejercicio 5.5.3]; (6) intervalo de convergencia con extremos [U6; ejercicio 6.5.1].

2º final 2001-2, tipo A

- (1) inversa de una función paramétrica (primer cuadrante) y gráficas [U2; propuesto 2.6.4]; (2) límites: trigonométrico, al infinito, radicales [U3; ejercicio 3.5.3]; (3) segunda derivada con ang

tan, evaluada [U4]; (4) razón de cambio: distancia al origen de un punto sobre $y = \operatorname{sen} x$ [U4]; (5) optimación: rectángulo inscrito en una elipse [U5; propuesto 5.6.2]; (6) intervalo de convergencia [U6; propuesto 6.6.1].

2º final 2003-2, tipo A

- (1) inversa de una función con radical; dominio, recorrido y gráficas [U2; ejemplo 2.4]; (2) continuidad de una función por partes con valor absoluto [U3; ejercicio 3.5.5]; (3) segundas derivadas: ang tan y paramétrica [U4; ejercicio 4.5.4]; (4) límites: trigonométrico lateral y radical [U3; propuesto 3.6.2]; (5) serie de Maclaurin [U6; ejercicio 6.5.4]; (6) área del triángulo formado por tangente, normal y eje y [U4]; (7) crecimiento, extremos relativos y absolutos, gráfica [U5; ejercicio 5.5.4].

1er final 2005-2, tipo B

- (1) dominio, recorrido y gráfica [U2; propuesto 2.6.1]; (2) derivada paramétrica evaluada [U4; propuesto 4.6.7]; (3) límites con radicales y trigonométrico [U3; propuesto 3.6.3]; (4) tangentes a $y = 1/x$ perpendiculares a una recta [U4; ejercicio 4.5.5]; (5) razón de cambio: ondas circulares [U4]; (6) optimación: recipiente en forma de prisma triangular, material mínimo [U5; propuesto 5.6.3]; (7) intervalo de convergencia con extremos [U6; ejercicio 6.5.2].

1er final 2006-1, tipo B

- (1) inversa de una función con radical y gráficas [U2; ejercicio 2.5.4]; (2) límites: radicales, trigonométrico, al infinito [U3; propuesto 3.6.4]; (3) continuidad y derivabilidad de una función por partes (constante A) [U4]; (4) derivadas: ang sec y potencias [U4; ejercicio 4.5.1]; (5) crecimiento, concavidad, extremos y gráfica [U5; propuesto 5.6.1]; (6) optimación: cilindro inscrito en un cono [U5; ejercicio 5.5.7]; (7) serie de Maclaurin, tres términos no nulos [U6; propuesto 6.6.3].

2º final 2006-2, tipo A

- (1) composición y producto: dominio y recorrido [U2; propuesto 2.6.2]; (2) límites con radicales y trigonométrico [U3; propuesto 3.6.5]; (3) derivadas: implícita, cadena, paramétrica (cicloide), evaluadas [U4]; (4) tangente a $y = x^2$ que forma 45° con una recta [U4; propuesto 4.6.2]; (5) optimación: triángulo de área mínima por $(2, 3)$ [U5; propuesto 5.6.4]; (6) serie de Maclaurin [U6; propuesto 6.6.4].

Plan 2016: Cálculo y Geometría Analítica, finales

1er final 2016-1, tipo A

- (1) inversa de función con radical en intervalo [U2]; (2) límites (algebraico, al infinito, hiperbólicas) [U3]; (3) recta normal a una parábola [U4]; (4) extremos, monotonía, inflexión y gráfica de cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2016-1, tipo C

- (1) paramétricas a cartesiana (arco de elipse), dominio y recorrido [U2]; (2) límites (al infinito, trigonométrico, función por partes) [U3]; (3) tangente y normal a curva implícita [U4]; (4) extremos, monotonía, inflexión y gráfica de cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2016-2, tipo A

- (1) paramétricas a cartesiana (arco de circunferencia), dominio y recorrido [U2]; (2) límites (radicales, trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) tangentes a curva implícita donde $y = 0$ [U4]; (4) inflexión de un polinomio; extremos de racional con 1a y 2a derivada [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2016-2, tipo D

- (1) composición, dominio y recorrido [U2]; (2) límites (radical de cociente, trigonométrico) [U3]; (3) derivada de cociente con radical menos logaritmo [U4]; (4) teorema de Rolle [U5; ejercicio 5.5.2]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-1, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) inversa de función paramétrica [U2]; (3) continuidad y derivabilidad de función por partes (parámetros) [U4]; (4) derivada evaluada (radical y angsen) [U4]; (5) razón de cambio (esfera) [U4]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-1, tipo C

- (1) inversa explícita de función con radical; dominio, recorrido y gráficas [U2]; (2) dominio, recorrido y límites leídos de una gráfica [U3]; (3) ángulo de intersección entre circunferencia y elipse [U4]; (4) monotonía, extremos, inflexión y concavidad de racional [U5; ejercicio 5.5.5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-2, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) inversa de parábola restringida [U2]; (3) continuidad de una racional en los reales [U3]; (4) ángulo de intersección entre hipérbolas [U4; ejercicio 4.5.7]; (5) optimación: rectángulo inscrito en elipse [U5]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2017-2, tipo C

- (1) modelo: área de una cruz en función de su base [U2; ejercicio 2.5.8]; (2) límites (radical, al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) razón de cambio: puente levadizo [U4]; (4) teorema de Rolle [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2018-1, tipo A

- (1) inversa de función paramétrica (rama de hipérbola) [U2]; (2) límites (racional al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas (implícita, radical, trigonométricas) [U4]; (4) razón de cambio (área de un círculo) [U4; propuesto 4.6.6]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2018-1, tipo C

- (1) función por partes con radicales (arcos de cónicas): dominio, recorrido, gráfica [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) continuidad de función por partes (parámetros) [U3]; (3) derivadas (angtan de radical, implícita con ln) [U4]; (4) valores críticos, inflexión y monotonía de racional [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2018-2, tipo A

- (1) inversa de función paramétrica (arco de circunferencia) [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (radical, racional al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas evaluadas (segunda derivada, paramétrica, logaritmo) [U4]; (4) tangente y normal a curva implícita [U4]; (5) optimación: página de un libro con márgenes [U5]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2018-2, tipo C

- (1) dominio, rango, inversa y composición con la inversa [U2]; (2) límites (radical, a menos infinito, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas (logaritmo, angtan, implícita, paramétrica) [U4]; (4) extremos, monotonía y gráfica de polinomio de grado 4 [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2016-1, tipo A

- (1) función por partes: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (2) límites (diferencia de fracciones, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas implícita y paramétrica hiperbólica [U4]; (4) razón de cambio (cilindro con altura igual al radio) [U4]; (5) curva en el espacio (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2016-2

- (1) dominio, recorrido y gráfica (radical y paramétrica) [U2]; (2) límites (trigonométrico, exponenciales al infinito, racional) [U3; ejercicio 3.5.6]; (3) razón de cambio (tanque cilíndrico) [U4]; (4) teorema de Rolle [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2017-1, tipo A

- (1) dominio, recorrido y composición [U2]; (2) discontinuidades de una racional y límites en ellas [U3]; (3) tangente y normal a curva con radical [U4]; (4) razón de cambio (tanque cilíndrico) [U4]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2017-2

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) cociente y composición de funciones con dominios restringidos [U2]; (3) límites (trigonométrico, al infinito con exponentes negativos) [U3]; (4) continuidad y derivabilidad de función por partes [U4]; (5) optimación: ventana normanda [U5]; (6) vectores (fuera del cuaderno); (7) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2018-1

- (1) biyectividad e inversa de arco de circunferencia [U2]; (2) límites (radical, al infinito, trigonométrico) [U3]; (3) normal y tangente a curva implícita [U4]; (4) valores críticos, monotonía, extremos, inflexión y gráfica de cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2018-2

- (1) composición y su dominio [U2]; (2) continuidad de función por partes (seno y logaritmo) [U3]; (3) optimación: cerca de terreno dividido en dos [U5]; (4) derivadas paramétrica hiperbólica e implícita [U4]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-1, tipo A

- (1) función inversa de raíz, dominio y recorrido [U2]; (2) límites (por partes, trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) recta tangente y normal [U4]; (4) extremos, monotonía, inflexión y gráfica de un polinomio [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-1, tipo C

- (1) gráfica, rango, biyectividad e inversa (semicircunferencia) [U2]; (2) límites (racionalización, trigonométrico, al infinito con raíces) [U3]; (3) derivadas (trigonométrica inversa, implícita, paramétrica) [U4]; (4) optimación: triángulo equilátero y cuadrado [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-2, tipo A

- (1) dominio, recorrido e inversa (cuarto de circunferencia) [U2]; (2) límites (racional, trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) derivadas (exponencial, implícita, paramétrica) [U4]; (4) extremos absolutos en intervalo cerrado [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2019-2, tipo C

- (1) función por partes con valor absoluto: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (2) límites (racionalización, al infinito con raíz, trigonométrico) [U3]; (3) rectas tangente y normal a una parábola (implícita) [U4]; (4) máximos y mínimos relativos [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2020-1, tipo A

- (1) función en paramétricas: forma explícita, dominio, rango, gráfica [U2; ejercicio 2.5.6]; (2) límites (racional, hiperbólicas, al infinito) [U3]; (3) razón de cambio: dos autos en direcciones perpendiculares [U4; propuesto 4.6.3]; (4) valores críticos, monotonía, concavidad y gráfica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2020-1, tipo C

- (1) dominio, recorrido e inversa (cuarto de circunferencia) [U2]; (2) límites infinitos y al infinito para trazar la gráfica (asíntotas) [U3]; (3) recta normal a una cónica (implícita) [U4]; (4) optimación: caja sin tapa de base cuadrada [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2024-1, tipo C

- (1) función en paramétricas: dominio, recorrido y gráfica [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetros a, b) [U3]; (3) ángulo de intersección entre curvas [U4]; (4) optimación: tanque prismático de base cuadrada con tapa [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2024-2, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) función en paramétricas: dominio, recorrido, forma explícita, gráfica [U2]; (3) límites sin L'Hôpital (trigonométrico lateral, racionalización) [U3]; (4) monotonía, extremos relativos, inflexión y gráfica de una cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2025-1, tipo A

- (1) inversa de una función dada como conjunto (arco de circunferencia) [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico, racionalización) [U3]; (3) razón de cambio: triángulo rectángulo isósceles [U4]; (4) monotonía, extremos relativos, inflexión y gráfica de una cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2025-1, tipo D

- (1) función dada como conjunto (rama de hipérbola): gráfica, dominio, recorrido, forma explícita [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (doble racionalización, trigonométrico lateral) [U3]; (3) regla de la cadena con radicales anidados, derivada en un punto [U4]; (4) optimación: rectángulo de perímetro fijo [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2025-2, tipo A

- (1) gráfica de función en paramétricas (trigonométricas) [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetros a, b) [U3]; (3) pendiente de la tangente, derivación implícita [U4]; (4) optimación: terreno cercado dividido en tres [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2026-1, tipo A

- (1) función inversa (cuarto de circunferencia) y gráfica [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetro a) [U3]; (3) recta tangente, derivación implícita [U4]; (4) optimación: perímetro máximo de rectángulo inscrito en un círculo [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

1er final 2026-2, tipo A

- (1) composición de funciones: regla, dominio y recorrido [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (factorización, trigonométrico) [U3]; (3) recta tangente, derivación implícita (folium) [U4]; (4) extremos relativos y punto de inflexión de una cúbica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2019-1

- (1) inversa de un arco de circunferencia: dominio, recorrido, regla, gráficas [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico por sustitución, racional, al infinito) [U3]; (3) derivadas (producto con hiperbólica pidiendo dx/dy, implícita con ln, paramétrica) [U4]; (4) valores críticos, monotonía, inflexión y gráfica de una cuártica [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2019-2

- (1) inversa de una rama de hipérbola, dominio y recorrido [U2]; (2) límites (trigonométrico, al infinito) [U3]; (3) recta tangente (producto con exponencial y logaritmo) [U4]; (4) optimación: cilindro sin tapa de volumen dado, material mínimo [U5; ejercicio 5.5.8]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2020-1

- (1) inversa de un arco de circunferencia en intervalo abierto [U2]; (2) límites (lateral con raíz, trigonométrico) [U3]; (3) derivadas (implícita con exponencial y ln, paramétrica hiperbólica) [U4; propuesto 4.6.4]; (4) optimación: rectángulo inscrito entre dos parábolas [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2024-2, tipo A

- (1) inversa de un arco de circunferencia y su gráfica [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico lateral con raíz, racionalización) [U3]; (3) recta tangente [U4]; (4) optimación: rectángulo inscrito en una circunferencia [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2025-1, tipo A

- (1) inversa en forma explícita (rama de hipérbola) y gráficas [U2]; (2) asíntotas, límite en discontinuidad removible y gráfica de función racional [U3; propuesto 3.6.6]; (3) derivadas (implícita, logarítmica) [U4; ejercicio 4.5.9]; (4) optimación: cilindro sin tapa con costos distintos de base y pared [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2025-2, tipo A

- (1) producto de funciones con raíces: dominio, recorrido, regla, gráfica [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (trigonométrico con cosecante, al infinito) [U3]; (3) recta tangente a curva paramétrica (circunferencia) [U4]; (4) optimación: rectángulo inscrito en un triángulo [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2026-1, tipo A

- (1) función en paramétricas con raíces: dominio, recorrido, regla y = f(x), gráfica [U2]; (2) continuidad de función por partes (parámetros a, b) [U3]; (3) recta tangente, derivación implícita (elipse rotada) [U4]; (4) valores críticos, extremos absolutos, inflexión y gráfica en intervalo cerrado [U5; propuesto 5.6.6]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

2º final 2026-2

- (1) función en paramétricas (arco de elipse): dominio, recorrido, regla, gráfica [U2]; (2) límites sin L'Hôpital (racionalización, logaritmos) [U3]; (3) razón de cambio: volumen de un cilindro [U4]; (4) optimación: perímetro máximo de rectángulo bajo una parábola [U5]; (5) vectores (fuera del cuaderno); (6) recta y plano (fuera del cuaderno).

Plan 2016: exámenes parciales citados

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo C

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) cónica (fuera del cuaderno); (3) composición $f \circ f$: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (4) modelo: área de terreno rectangular con perímetro fijo [U2]; (5) función paramétrica hiperbólica: dominio, recorrido, gráfica [U2; propuesto 2.6.5]; (6) función por partes: gráfica, dominio, recorrido [U2].

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) paramétricas $\longrightarrow y$ como función de x: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (3) función inversa: regla, dominio, recorrido, gráfica [U2]; (4) modelo: área de rectángulo inscrito en semicírculo [U2]; (5) límites infinitos y al infinito; asíntotas y gráfica [U3; ejercicio 3.5.7]; (6) límites sin L'Hôpital (trigonométrico; raíces) [U3].

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) función inversa de racional: dominio, recorrido, regla [U2; propuesto 2.6.3]; (3) composición $f \circ g$ (exp/ln): dominio, recorrido, gráfica [U2; ejercicio 2.5.2]; (4) modelo: volumen de caja de base cuadrada sin tapa con área fija [U2]; (5) límites sin L'Hôpital (trigonométrico; racionalización) [U3]; (6) continuidad en un punto con parámetro [U3].

Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo A

- (1) cónica (fuera del cuaderno); (2) función paramétrica: dominio, recorrido, gráfica [U2]; (3) función inversa: dominio, recorrido, regla explícita, gráficas [U2]; (4) modelo: cordón de soldadura de tanque prismático con área fija [U2]; (5) límites sin L'Hôpital (trigonométrico; al infinito) [U3]; (6) continuidad en $\mathbb{R}$ con dos parámetros; gráfica [U3; ejercicio 3.5.8].

Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2024-1, tipo C

- (1) derivada por definición (cuatro pasos) [U4; ejercicio 4.5.10]; (2) ángulo entre curvas (recta y elipse rotada) [U4]; (3) derivada paramétrica e implícita [U4]; (4) derivabilidad de función por partes con parámetro [U4]; (5) optimación: rectángulo inscrito en triángulo rectángulo [U5].

Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo A

- (1) cálculo de derivadas (inversa trig., cociente, implícita) [U4]; (2) recta tangente paralela a una recta dada [U4]; (3) ángulo de intersección entre curvas [U4]; (4) punto de inflexión con parámetros [U5; propuesto 5.6.5]; (5) razón de cambio: diagonal de un cuadrado [U4].

Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo D

- (1) cálculo de derivadas (inversa trig., logaritmo de raíz, implícita) [U4]; (2) recta tangente y área del triángulo con los ejes [U4; propuesto 4.6.5]; (3) teorema del valor medio [U5]; (4) razón de cambio: lado de triángulo equilátero [U4]; (5) monotonía, extremos, inflexión, gráfica de cuártica [U5].

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del examen de tu plan. Resuélvelo sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

- **Plan 2010:** seis problemas, 2 horas.
- **Plan 2016:** los cuatro problemas de cálculo (1 a 4), 80 minutos. Los problemas 5 y 6 del examen (vectores, recta y plano) están en *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*: sus simulacros de los problemas 5 y 6 (su Apéndice B) completan estos, con el mismo reloj, unos 20 minutos cada uno.

Simulacro	1	2	3	4	5	6
Plan 2010, 1	2.6.6	3.6.1	4.6.1	4.6.2	5.6.2	6.6.2
Plan 2010, 2	2.6.4	3.6.4	4.6.7	4.6.6	5.6.1	6.6.3
Plan 2016, 1	2.6.3	3.6.6	4.6.3	5.6.5	—	—
Plan 2016, 2	2.6.5	3.6.2	4.6.4	5.6.6	—	—

Las columnas 1 a 6 son los problemas del examen; los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). En el Plan 2010, la columna 4 es el segundo problema de derivadas (tangente, razón de cambio o diferencial). El segundo simulacro del Plan 2016 incluye logaritmo, exponencial e hiperbólicas (SOLO PLAN 2016).

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen usado en este cuaderno tiene resolución publicada: todas las resoluciones son propias. Este apéndice solo registra erratas o rarezas de los *enunciados* (datos que sobran o faltan, dos respuestas donde se pide una) y cómo se trataron.

C.2 · Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4 · Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

2º final 2013-2, tipo A, problema 4: El enunciado pide la razón «en el instante en el cual el esquiador se encuentra a una distancia de 3 m del punto más bajo de la rampa». Como la rampa es recta y la rapidez es constante, $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt}$ no depende del instante y ese dato sobra; en este cuaderno se omite.

2º final 2013-1, tipo A, problema 4: El enunciado pide «una ecuación de la recta tangente» en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$, pero la curva ($y = 1 - x^2$) tiene dos puntos con esa ordenada, $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, con tangentes distintas. En este cuaderno se fija el de abscisa positiva y se da también la otra tangente.

2º final 2006-2, tipo A, problema 4: El enunciado habla de «el punto P», pero hay dos tangentes a $y = x^2$ que forman 45° con la recta $3x - y + 1 = 0$: en $(-1, 1)$ y en $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. En este cuaderno se dan los dos.

1er final 2005-2, tipo B, problema 2: El enunciado pide $\frac{dy}{dx}$ en $y = 1$, donde $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se anulan a la vez y la fórmula paramétrica da $\frac{0}{0}$. En este cuaderno se simplifica el cociente antes de evaluar o se elimina el parámetro ($x = 1 - y^2$); las dos vías dan $-\frac{1}{2}$.

C.5 · Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio

1er final 2005-2, tipo B, problema 6: El enunciado no dice qué caras tiene el recipiente; la figura dibuja todas las aristas del prisma. En este cuaderno se toma el prisma cerrado (dos triángulos y tres rectángulos), con $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}}$ m; si la cara de la hipotenusa fuera abierta, resultaría $L = \sqrt[3]{6}$ m.

C.6 · Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010)

Sin erratas registradas en esta unidad.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de las asignaturas

- Programa de estudio de *Cálculo Diferencial* del Plan 2010 (primer semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Seis temas: introducción al Cálculo, funciones, límites y continuidad, la derivada, variación de funciones, y sucesiones y series.
- Programa de estudio de *Cálculo y Geometría Analítica* del Plan 2016 (primer semestre, 12 créditos, 96 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Siete temas: secciones cónicas, funciones, límites y continuidad, la derivada y aplicaciones, variación de funciones, álgebra vectorial, y recta y plano. Este cuaderno cubre los temas 2 a 5. Las sucesiones y series del Plan 2016 son el tema 1 de *Cálculo Integral* y están en el cuaderno de Cálculo Integral, unidad 5.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Ningún examen usado en las unidades tiene resolución publicada: las resoluciones de este cuaderno son propias. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó; los del Plan 2016 llevan el nombre de la asignatura.

- **Cálculo Diferencial, Plan 2010:** 10 exámenes finales colegiados de 2001-2 a 2013-2. Cinco son de 2012-2 a 2013-2, con el programa de 2008; los otros cinco (2001-2, 2003-2, 2005-2, 2006-1 y 2006-2) son de la versión anterior de la misma materia de primer semestre, con los mismos temas.
- **Cálculo y Geometría Analítica, Plan 2016:** 39 exámenes finales (25 primeros y 14 segundos finales, de 2016-1 a 2020-1 y de 2024-1 a 2026-2) y 17 exámenes parciales (2024-1 a 2026-2).

Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Series de ejercicios. Las series de ejercicios de funciones, límites, derivada y variación de funciones que acompañan al programa de Cálculo y Geometría Analítica se revisaron para la notación y el orden de los temas; ningún ejercicio de este cuaderno sale de ellas.

Bibliografía de los programas

Cálculo Diferencial (Plan 2010). Básica

- Larson, R. E., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. *Cálculo I*, 8.ª ed. Madrid: McGraw-Hill, 2006.
- Solar G., E. y Speziale de G., L. *Álgebra I*. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1997.
- Stewart, J. *Cálculo*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.

Cálculo Diferencial (Plan 2010). Complementaria

- Andrade D., A. y otros. *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- Andrade D., A. y Crail, S. C. *Cuaderno de ejercicios de Cálculo I*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- Leithold, L. *El cálculo con geometría analítica*, 7.ª ed. México: Oxford University Press, 1998.
- Purcell, E. J. y Varberg, D. *Calculus with Analytic Geometry*, 8.ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- Spivak, M. *Cálculo infinitesimal*, 2.ª ed. México: Reverté, 1996.
- Swokowski, E. W., Olinick, M. y Pence, D. *Calculus*. EUA: PWS Publishing Company, 1994.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016). Básica

- Andrade, A. y Crail, S. *Cuaderno de ejercicios de Cálculo Diferencial*, 2.ª ed. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2010.
- Castañeda de I. P., É. *Geometría analítica en el espacio*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009.
- De Oteyza, E. y otros. *Geometría analítica y trigonometría*. México: Pearson, 2008.
- Larson, R. y Edwards, B. *Cálculo I de una variable*, 9.ª ed. México: McGraw-Hill, 2010.
- Stewart, J. *Cálculo de una variable*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.

Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016). Complementaria

- Lehmann, C. *Geometría analítica*. México: Limusa, 2008.
- Purcell, E. J. y Varberg, D. *Cálculo*, 9.ª ed. México: Prentice Hall, 2007.
- Rogawski, J. *Cálculo de una variable*, 2.ª ed. Barcelona: Reverté, 2012.
- Spivak, M. *Calculus*, 4.ª ed. Cambridge: Publish or Perish, 2008.
- Swokowski, E. W. y Cole, J. A. *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*, 13.ª ed. Belmont: Brooks Cole, 2011.
- Zill, D. G. *Cálculo de una variable*, 4.ª ed. México: McGraw-Hill, 2011.

Para los temas de geometría que este cuaderno no cubre (sección 0.1), los libros indicados por el programa son los de Castañeda, De Oteyza y Lehmann; el cuaderno hermano es *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*.

La notación de este cuaderno (sen, ang tan x en lugar de arctan x, «regla de correspondencia», «recorrido», «optimación») es la de los enunciados de los exámenes.

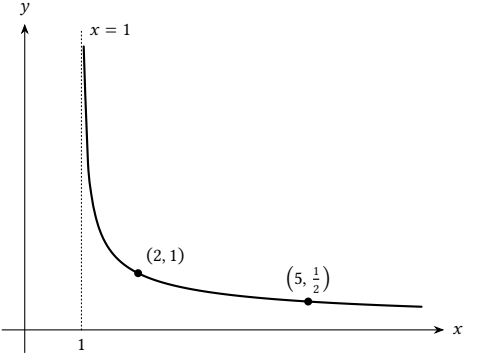
Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.2 · Unidad 2 · Funciones: dominio, recorrido, inversa, composición y modelos

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. **Dominio:** la raíz está en el denominador: $x - 1 > 0$, es decir, $D_f = (1, \infty)$.
2. **Recorrido:** $\sqrt{x-1}$ toma todos los valores positivos, y su recíproco también: cuando $x \to 1^+$, $f(x) \to \infty$; cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$. Como f es continua y decreciente, $R_f = (0, \infty)$.
3. **Gráfica:** la de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ trasladada una unidad a la derecha; asíntota vertical $x = 1$ y horizontal $y = 0$. Pasa por $(2, 1)$ y $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.



Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. $f \circ g$: $f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$. Como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo x, $g(x) \in D_f$ siempre: dominio $\mathbb{R}$.
2. Recorrido de $f \circ g$: $x^2 + 1$ toma todos los valores de $[1, \infty)$, y su raíz, los de $[1, \infty)$. El mínimo es 1, en $x = 0$.
3. $f \cdot g$: $\sqrt{x}\,(x^2+1)$, con dominio $D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.
4. Recorrido de $f \cdot g$: es producto de dos funciones no negativas y crecientes en $[0, \infty)$, así que es creciente; vale 0 en $x = 0$ y crece sin límite: $[0, \infty)$.

Ejercicio 2.6.3 ← volver

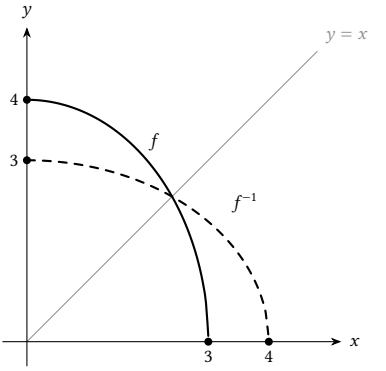
1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ (denominador $\neq 0$).
2. **Despeje:** $y(3x+2) = x - 1 \Rightarrow 3xy - x = -1 - 2y \Rightarrow x(3y-1) = -(2y+1)$, y si $y \neq \frac{1}{3}$,

$$x = \frac{2y+1}{1-3y}.$$

3. Con $y = \frac{1}{3}$ la ecuación queda $0 = -\frac{5}{3}$: no hay x. Entonces $R_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, y para cada otro y hay un único x: f es inyectiva.
4. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$, con $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.
5. Comprobación: $f(0) = -\frac{1}{2}$ y $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{5/2} = 0$.

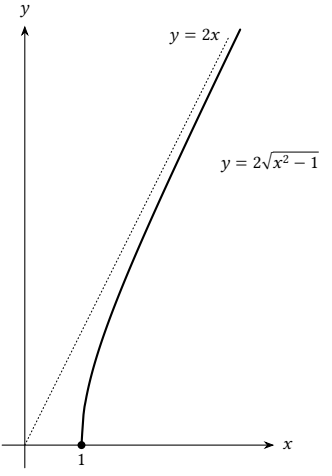
Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. **Forma cartesiana:** $\cos t = \frac{x}{3}$, $\operatorname{sen} t = \frac{y}{4}$ y $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Con $x \geq 0$, $y \geq 0$ es el cuarto de elipse del primer cuadrante: $y = \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [0, 3]$, con recorrido $[0, 4]$.
2. **Inyectividad:** en $[0, 3]$, $9 - x^2$ decrece, así que f es decreciente: tiene inversa.
3. **Despeje:** $x^2 = 9 - \frac{9y^2}{16} = \frac{9}{16}\left(16 - y^2\right)$ y, como $x \geq 0$, $x = \frac{3}{4}\sqrt{16 - y^2}$.
4. **Inversa:** $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, con $D_{f^{-1}} = [0, 4]$ y $R_{f^{-1}} = [0, 3]$.
5. **Gráficas:** f va de $(0, 4)$ a $(3, 0)$; f^{-1}, de $(0, 3)$ a $(4, 0)$: el cuarto de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Ejercicio 2.6.5 ← volver

1. **Dominio:** $\cosh t$ es creciente para $t \geq 0$, con $\cosh 0 = 1$ y sin cota superior: $x \in [1, \infty)$.
2. **Recorrido:** $\operatorname{senh} t$ es creciente, $\operatorname{senh} 0 = 0$ y sin cota: $y \in [0, \infty)$.
3. **Forma cartesiana:** con $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Como $y \geq 0$, $y = 2\sqrt{x^2 - 1}$.
4. **Gráfica:** mitad superior de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$: empieza en el vértice $(1, 0)$ y se acerca a la asíntota $y = 2x$.



Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. El rectángulo más grande que se corta del tronco está inscrito en el círculo: su diagonal es el diámetro D.
2. Si h es el alto, por Pitágoras $x^2 + h^2 = D^2$, así que $h = \sqrt{D^2 - x^2}$.
3. Área: $A = xh = x\sqrt{D^2 - x^2}$.
4. Dominio: $x > 0$ y $h > 0$, es decir, $0 < x < D$.

E.3 · Unidad 3 · Límites y continuidad: formas indeterminadas sin L'Hôpital y funciones por partes

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. Las dos reglas son polinomios; el único punto en duda es $x = a$, con $a \geq -2$.
2. Condición 1: $f(a) = a^2 + 4$ (primera regla); se cumple.
3. Condición 2: $\lim_{x \to a^-} f(x) = a^2 + 4$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = (a - 2)^2$. Se igualan: $a^2 + 4 = a^2 - 4a + 4$, de donde $4a = 0$ y $a = 0$.
4. Condición 3: con $a = 0$, el límite vale $4 = f(0)$; se cumple. Además $a = 0 \geq -2$.
5. Resultado: $a = 0$.

En el original la segunda regla se lee $(x - 2)^2$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 4x}{\cot 3x} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x \cos 3x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen} 4x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \to \frac{3}{4}.$$

   El lateral por la derecha coincide con el límite bilateral.
2. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^3$, $t \to 2$ y $2x - 16 = 2(t^3 - 8)$.

3. Diferencia de cubos:

$$\frac{t-2}{2(t-2)(t^2+2t+4)} = \frac{1}{2(t^2+2t+4)} \to \frac{1}{2\cdot 12} = \frac{1}{24}.$$

4. Resultado: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x}) = 1-(5-x) = x-4,$$
$$(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x}) = 9-(5+x) = -(x-4).$$

2. Se cancela $x-4$:

$$\frac{1-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{5+x}} = -\frac{3+\sqrt{5+x}}{1+\sqrt{5-x}} \to -\frac{3+3}{1+1} = -3.$$

3. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x} = \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 \cos x \to 1\cdot 1 = 1.$$

4. Resultado: a) -3; b) 1.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) = x-9,$$
$$(4-\sqrt{2x-2})(4+\sqrt{2x-2}) = 18-2x = -2(x-9).$$

2. Se cancela $x-9$:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{2x-2}} = -\frac{4+\sqrt{2x-2}}{2(\sqrt{x}+3)} \to -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

3. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\frac{2x}{3x} \to \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

4. c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre x^2:

$$\frac{6+\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}} \to 6.$$

5. Resultado: a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^2$ ($\sqrt{x} = t$, $t \to 1$):

$$\frac{t^4 - t}{t - 1} = \frac{t(t-1)(t^2 + t + 1)}{t - 1} = t(t^2 + t + 1) \to 3.$$

2. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \to \frac{2}{3}.$$

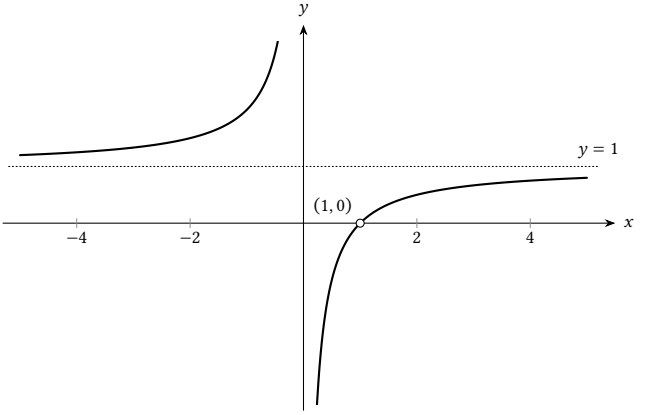
3. Resultado: a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. Dominio: $x^2 - x = x(x-1) \neq 0$, así que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Simplificación:

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \quad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

2. a) Asíntota vertical: en $x = 0$ el numerador simplificado vale -1; $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$. La recta $x = 0$ es asíntota vertical. En $x = 1$ el factor se canceló: no hay asíntota, hay un hueco.
3. Asíntota horizontal: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$; la recta $y = 1$.
4. b) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x} = \frac{0}{1} = 0$. La discontinuidad en $x = 1$ es evitable.
5. c) La gráfica es la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ sin el punto $(1, 0)$.



E.4 · Unidad 4 · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. Punto: $y = \cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$. Con abscisa positiva, $x = \frac{1}{2}$: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

2. Derivadas respecto a θ: $2x\frac{dx}{d\theta} = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\frac{dy}{d\theta} = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$.
3. Cociente: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta/x} = -2x$. (Lo mismo sale al eliminar el parámetro: $y = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - x^2$.)
4. En $x = \frac{1}{2}$: $m = -1$. Tangente: $y - \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4x + 4y - 5 = 0$.
5. En el otro punto de ordenada $\frac{3}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, la pendiente es 1 y la tangente es $4x-4y+5 = 0$.

Se agregó «y abscisa positiva» al original.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. Sea $P(a, a^2)$. La tangente tiene pendiente $m = 2a$; la recta, $m_2 = 3$.
2. $\tan 45^\circ = 1 = \left|\frac{3-2a}{1+6a}\right|$: dos casos.
3. $\frac{3-2a}{1+6a} = 1 \Rightarrow 3 - 2a = 1 + 6a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$, con $m = \frac{1}{2}$.
4. $\frac{3-2a}{1+6a} = -1 \Rightarrow 3 - 2a = -1 - 6a \Rightarrow a = -1$, con $m = -2$.
5. Comprobación: con $m = -2$, $\frac{3-(-2)}{1-6} = -1$; con $m = \frac{1}{2}$, $\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = 1$. En los dos el ángulo agudo es de 45°.
6. Puntos: $P(-1, 1)$ y $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. Variables: y (recorrido de A), x (de B), h (distancia entre ellos). Datos: $\frac{dy}{dt} = 3$, $\frac{dx}{dt} = 5$ (m/s).
2. Instante: $y = 9$ a los $t = 3$ s; entonces $x = 5(3) = 15$ y $h = \sqrt{81 + 225} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$.
3. Ecuación: $h^2 = x^2 + y^2$. Derivando: $2h\frac{dh}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$.
4. Sustitución:
$$\frac{dh}{dt} = \frac{15(5) + 9(3)}{3\sqrt{34}} = \frac{102}{3\sqrt{34}} = \frac{34}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}\text{ m/s}.$$
5. Comprobación: $h = \sqrt{(3t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{34}\,t$, que crece siempre a $\sqrt{34}$ m/s.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. a) Se simplifica primero: $\ln e^y = y$. La ecuación es $e^{xy} - x = y$.
2. Derivación implícita: $e^{xy}(y + xy') - 1 = y'$.
3. Se agrupa: $(x\,e^{xy} - 1)\,y' = 1 - y\,e^{xy} \Rightarrow y' = \frac{1 - y\,e^{xy}}{x\,e^{xy} - 1}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 9\cosh(3t)$ y $\frac{dy}{dt} = 6\operatorname{senh}(3t)$ (sin cambio de signo: $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\,u'$).
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{6\operatorname{senh}(3t)}{9\cosh(3t)} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. Punto: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$; $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
2. Pendiente: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $m = -\frac{1}{4}$.
3. Tangente: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{x}{4} + 1$, o $x + 4y - 4 = 0$.
4. Intersecciones: con el eje x ($y = 0$), $x = 4$; con el eje y ($x = 0$), $y = 1$.

5. Área: $\frac{1}{2}(4)(1) = 2$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. $A = \pi r^2$, así que $dA = 2\pi r\, dr$.
2. Con $r = 20$ y $dr = 0.02$: $dA = 2\pi(20)(0.02) = 0.8\pi$ cm^2.
3. Exacto: $\Delta A = \pi\left(20.02^2 - 20^2\right) = \pi(0.8004)$ cm^2.
4. La diferencia, $0.0004\pi = \pi(dr)^2$, es despreciable frente a dA.

Se cambió la pregunta del original, que pide la rapidez con que aumenta el área si el radio crece a razón de 0.02 cm/s: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} = 0.8\pi$ cm^2/s, el mismo número.

Ejercicio 4.6.7 ← volver

1. $y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ (único en el intervalo). Punto $(0, 1)$.
2. $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ y $\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\,(-\operatorname{sen} 2t)(2) = -4\operatorname{sen} 2t\cos 2t$. En $t = \frac{\pi}{4}$ las dos valen 0: la fórmula da $\frac{0}{0}$.
3. Se simplifica antes de evaluar (para $\cos 2t \neq 0$):

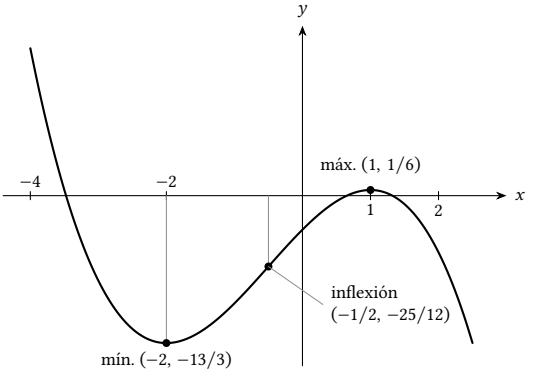
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2t}{-4\operatorname{sen} 2t\cos 2t} = -\frac{1}{2\operatorname{sen} 2t}.$$

   Cuando $t \to \frac{\pi}{4}$, el cociente tiende a $-\frac{1}{2}$.
4. Otra forma, sin el parámetro: $x = \cos^2 2t = 1 - \operatorname{sen}^2 2t = 1 - y^2$. Entonces $\frac{dx}{dy} = -2y$ y $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2}$ en $y = 1$.

E.5 · Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio

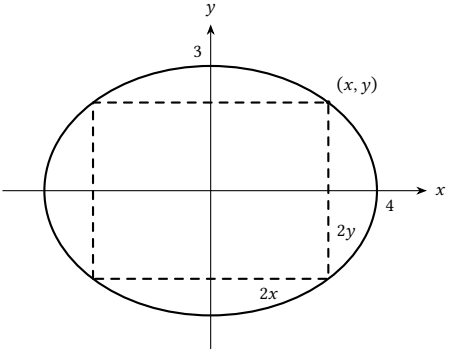
Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. Dominio $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2 - x - x^2 = -(x^2 + x - 2) = -(x + 2)(x - 1)$. Críticos: $x = -2$ y $x = 1$.
2. a) $-(x+2)(x-1)$ es positivo entre las raíces y negativo fuera: decreciente en $(-\infty, -2)$, creciente en $(-2, 1)$, decreciente en $(1, \infty)$.
3. b) $f''(x) = -1 - 2x$, cero en $x = -\frac{1}{2}$: $f'' > 0$ si $x < -\frac{1}{2}$ (cóncava hacia arriba) y $f'' < 0$ si $x > -\frac{1}{2}$ (hacia abajo). Inflexión: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = -\frac{25}{12}$.
4. c) En $x = -2$, f' pasa de $-$ a $+$ y $f''(-2) = 3 > 0$: mínimo relativo $f(-2) = -1 - 4 - 2 + \frac{8}{3} = -\frac{13}{3}$. En $x = 1$, de $+$ a $-$ y $f''(1) = -3 < 0$: máximo relativo $f(1) = -1 + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
5. Para la gráfica: $f(0) = -1$, $f(-4) = \frac{13}{3}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx -4.33$.



Ejercicio 5.6.2

← volver



1. **Variables.** Por simetría, el vértice del primer cuadrante es (x, y), con lados $2x$ y $2y$.
2. **Función objetivo:** $A = 4xy$. **Restricción:** el vértice está en la elipse, $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.
3. **Una variable:** $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$, con $0 < x < 4$.
4. **Crítico:**

$$A'(x) = 3\sqrt{16 - x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{3(16 - 2x^2)}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{2}.$$

5. **Justificación:** el numerador $3(16 - 2x^2)$ pasa de positivo a negativo en $x = 2\sqrt{2}$: máximo. (Además $A \to 0$ en los extremos $x = 0$ y $x = 4$.)
6. $y = \frac{3}{4}\sqrt{8} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Lados: $2x = 4\sqrt{2}$ y $2y = 3\sqrt{2}$.
7. Resultado: $A = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$ unidades de área (en general, $2ab$).

Ejercicio 5.6.3

← volver

1. **Restricción.** Volumen: área del triángulo por la longitud, $\frac{L^2}{2}h = 3 \;\Rightarrow\; h = \frac{6}{L^2}$.
2. **Función objetivo.** Dos triángulos de área $\frac{L^2}{2}$; dos rectángulos $L \times h$ (los catetos) y uno $\sqrt{2}L \times h$ (la hipotenusa):

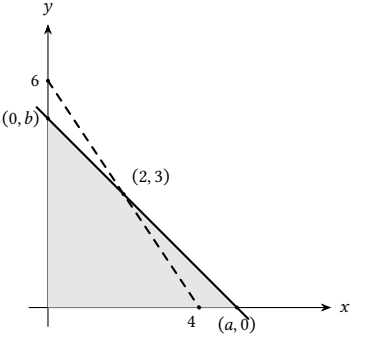
$$S = L^2 + (2+\sqrt{2})Lh = L^2 + \frac{6(2+\sqrt{2})}{L}, \qquad L > 0.$$

3. **Crítico:**

$$S'(L) = 2L - \frac{6(2+\sqrt{2})}{L^2} = 0 \;\Rightarrow\; L^3 = 3(2+\sqrt{2}) = 6 + 3\sqrt{2}.$$

4. **Justificación:** $S''(L) = 2 + \frac{12(2+\sqrt{2})}{L^3} > 0$: mínimo.
5. $L = \sqrt[3]{6+3\sqrt{2}} \approx 2.17$ m. Como $L^3 = 3(2+\sqrt{2})$, $h = \frac{6}{L^2} = \frac{6L}{L^3} = \frac{2L}{2+\sqrt{2}} = (2-\sqrt{2})L \approx 1.27$ m.
6. Si la cara de la hipotenusa quedara abierta, $S = L^2 + \frac{12}{L}$ y el mínimo estaría en $L = \sqrt[3]{6}$ m.

Ejercicio 5.6.4 ← volver



1. **Variables.** La recta corta los ejes en $(a, 0)$ y $(0, b)$, con $a, b > 0$; su ecuación es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
2. **Restricción.** Pasa por $(2, 3)$: $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{3a}{a-2}$, con $a > 2$ para que $b > 0$.
3. **Función objetivo:** $A = \frac{ab}{2} = \frac{3a^2}{2(a-2)}$, $a > 2$.
4. **Crítico:**

$$A'(a) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a(a-2) - a^2}{(a-2)^2} = \frac{3a(a-4)}{2(a-2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; a = 4.$$

5. **Justificación:** para $2 < a < 4$, $A' < 0$; para $a > 4$, $A' > 0$: mínimo.
6. $b = \frac{12}{2} = 6$ y $A = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$. La recta es $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, y $(2, 3)$ es el punto medio del segmento entre los ejes.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. A está en la gráfica: $g(1) = a + b = 2$.
2. Inflexión en $x = 1$: $g''(x) = 6ax + 2b$ y $g''(1) = 6a + 2b = 0$, es decir, $b = -3a$.

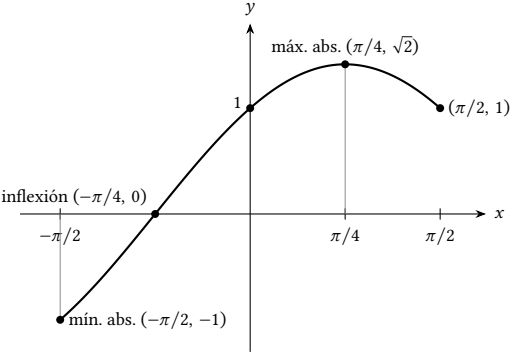
3. Sustituyendo: $a - 3a = 2 \Rightarrow a = -1$ y $b = 3$.
4. Comprobación: $g(x) = -x^3 + 3x^2$, $g''(x) = -6x + 6$ cambia de + a − en $x = 1$, y $g(1) = 2$. Es inflexión.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. a) $m'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$, que existe siempre. $m'(x) = 0 \iff \tan x = 1$; en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la única solución es $x = \frac{\pi}{4}$.
2. b) m es continua en el intervalo cerrado (teorema de Weierstrass). Valores:

$$m\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

   Máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$; mínimo absoluto -1 en $-\frac{\pi}{2}$.
3. c) $m''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x = -m(x)$; se anula donde $\tan x = -1$: $x = -\frac{\pi}{4}$. Para $x < -\frac{\pi}{4}$, $m < 0$ y $m'' > 0$ (cóncava hacia arriba); para $x > -\frac{\pi}{4}$, $m'' < 0$ (hacia abajo). Inflexión en $\left(-\frac{\pi}{4}, m\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.
4. d) Además $m(0) = 1$. La gráfica sube de $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ a $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y baja a $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.



E.6 · Unidad 6 · Sucesiones y series: convergencia, intervalo y series de Taylor (solo Plan 2010)

Ejercicio 6.6.1 ← volver

1. $a_k = \frac{4(x-1)^k}{5k}$. Cociente: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x-1|\frac{k}{k+1} \to |x-1|$.
2. $|x-1| < 1 \iff 0 < x < 2$. Centro 1, radio 1.
3. El enunciado no pide los extremos, pero conviene analizarlos. En $x = 2$: $\frac{4}{5}\sum \frac{1}{k}$, múltiplo de la armónica: diverge.
4. En $x = 0$: $\frac{4}{5}\sum \frac{(-1)^k}{k}$, alternada con $\frac{1}{k}$ decreciente y con límite 0: converge (condicionalmente).
5. Resultado: $0 \le x < 2$, es decir, $[0, 2)$.

Ejercicio 6.6.2 ← volver

1. Derivadas: $f = \cos 2x$, $f' = -2\operatorname{sen} 2x$, $f'' = -4\cos 2x$, $f''' = 8\operatorname{sen} 2x$, $f^{(4)} = 16\cos 2x$.
2. En 0: $1,\ 0,\ -4,\ 0,\ 16$. Los no nulos son los de $n = 0, 2, 4$.
3. Términos: 1, $\frac{-4}{2!}x^2 = -2x^2$, $\frac{16}{4!}x^4 = \frac{2}{3}x^4$.
4. Comprobación: en $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \cdots$ con $u = 2x$ queda $1 - 2x^2 + \frac{16x^4}{24}$.
5. Resultado: $1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$.

Ejercicio 6.6.3 ← volver

1. $f = (4-x)^{1/2}$; $f' = -\frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}$; $f'' = -\frac{1}{4}(4-x)^{-3/2}$ (por la regla de la cadena, cada derivada multiplica por -1).
2. En 0: $f(0) = 2$; $f'(0) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $f''(0) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{32}$.
3. Términos: 2, $-\frac{1}{4}x$, $\frac{-1/32}{2!}x^2 = -\frac{x^2}{64}$.
4. Comprobación con la binomial: $2\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{1/2} = 2\left(1 - \frac{x}{8} - \frac{x^2}{128} - \cdots\right)$.
5. Resultado: $2 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64}$.

Ejercicio 6.6.4 ← volver

1. Derivadas: $f' = 3\cos 3x$, $f'' = -9\operatorname{sen} 3x$, $f''' = -27\cos 3x$, $f^{(4)} = 81\operatorname{sen} 3x$, $f^{(5)} = 243\cos 3x$.
2. En 0: $0,\ 3,\ 0,\ -27,\ 0,\ 243$. Las pares se anulan; las impares son $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n 3^{2n+1}$.
3. Término general: $\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.
4. Primeros términos: $3x - \frac{27}{6}x^3 + \frac{243}{120}x^5 = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5$.
5. Comprobación: en la serie de $\operatorname{sen} u$ se sustituye $u = 3x$. El cociente da $L = \lim \frac{9x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0$: vale para todo x.