0.78 con $b = 100$ y 0.86 con $b = 1000$: converge a 1, pero despacio. La computadora no sustituye al límite escrito: es la manera de comprobarlo.

### Ejercicio propuesto 3C.10.1 · Una exponencial decreciente

Determine si $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

**Resultado:** Converge y vale $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

### Ejercicio propuesto 3C.10.2 · Una integral $p$ que diverge

Determine si $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge o diverge.

**Resultado:** Diverge (es una integral $p$ con $p = \frac{1}{2} \le 1$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

**Con la computadora**

```
# El ejemplo: integral de 1/(x ln^2 x) de e a infinito
from sympy import E, Rational, integrate, log, oo, symbols
x = symbols("x", positive=True)
f = 1/(x*log(x)**2)
I = integrate(f, (x, E, oo))
print(I)                                        # 1
for k in (1, 2, 3):                 # 0.57, 0.78, 0.86
    print(integrate(f, (x, E, 10**k)).evalf(2))
assert I == 1
assert integrate(1/x**Rational(1, 2), (x, 1, oo)) == oo
```





2. TFC: $F'(x) = \ln(e^x)\,e^x = x\,e^x$.
3. En $x = \ln 2$: $F'(\ln 2) = \ln 2 \cdot e^{\ln 2} = 2\ln 2$.
4. Comprobación: $\int \ln t\,\mathrm{d}t = t\ln t - t$, así que $F(x) = x\,e^x - e^x + 1$ y $F'(x) = e^x + x\,e^x - e^x = x\,e^x$.
5. $F'(\ln 2) = 2\ln 2 = \ln 4$ ($\approx 1.386$).

### Ejercicio 3A.5.4 · Dos funciones con la misma ordenada media

*Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 1.*

Si las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{a}{2\sqrt{2-x}}$ tienen la misma ordenada media en el intervalo $[0, 1]$, calcule el valor de $a$.

**Resolución.**

1. El intervalo es el mismo, así que basta igualar las integrales (el factor $\frac{1}{1-0}$ es igual en los dos lados).
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{ang\,tan} x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
3. Con $u = 2 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} = -\sqrt{2-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sqrt{2-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$. Entonces

$$\int_0^1 \frac{a\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} = a\left(-\sqrt{2-x}\right)\Big|_0^1 = a\left(\sqrt{2}-1\right).$$

4. $a\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}$. Racionalizando:

$$a = \frac{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)}{4} \approx 1.896.$$

5. $g$ es continua en $[0, 1]$ porque $2 - x > 0$: el valor sirve.
6. $a = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{4}$.

### Ejercicio 3A.5.5 · Límite inferior desconocido con logaritmo

*Adaptado de: 2º final 2024-2, problema 2.*

Determine el valor de $a > 0$ que cumple

$$\int_a^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln 2.$$

**Resolución.**

1. Cambio de variable: $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. La integral es $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$, así que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\ln x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$.

4. Segunda parte: $\lim_{s\to 1^+}\left[\frac{1}{2}(8)^{2/3} - \frac{1}{2}(s-1)^{2/3}\right] = \frac{1}{2}(4) - 0 = 2$.
5. Las dos convergen: $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
6. **La integral converge y vale $\frac{3}{2}$.**

### Ejercicio 3C.5.2 · Impropia hacia $-\infty$: completar el cuadrado

*Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 2.*

Determine si la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$ converge o diverge.

**Resolución.**

1. Completar el cuadrado: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. Antiderivada: $\operatorname{ang\,tan}(x+1) + C$. Comprobación: $\left[\operatorname{ang\,tan}(x+1)\right]' = \frac{1}{(x+1)^2+1}$.
2. Límite inferior infinito:

$$\lim_{a\to-\infty} \operatorname{ang\,tan}(x+1)\Big|_a^{-1} = \operatorname{ang\,tan} 0 - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{ang\,tan}(a+1).$$

3. $\operatorname{ang\,tan} 0 = 0$ y $\operatorname{ang\,tan}(a+1) \to -\frac{\pi}{2}$: el resultado es $0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
4. **La integral converge y vale $\frac{\pi}{2}$.**

### Ejercicio 3C.5.3 · Impropia con integrando no acotado en un extremo

*Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo A, problema 2.*

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

**Resolución.**

1. En $x = 0$ el denominador se anula: $\displaystyle\int_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1$.
2. Cambio de variable $u = \sqrt{x}+1$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^{3/2} + C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2}\right]' = 2(\sqrt{x}+1)^{1/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. Evaluación:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{4}{3}\,2^{3/2} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{\varepsilon}+1\right)^{3/2}\right] = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

4. **La integral converge y vale $\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$ ($\approx 2.44$).**





### Ejercicio propuesto 3A.6.3

*Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 2.*

Si $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = 1$, calcule el valor de $b > 0$.

**Resultado:** $b = \frac{3}{4}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

### Ejercicio propuesto 3A.6.4

*Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 1.*

Determine el valor medio de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**Resultado:** $\bar{f} = \frac{2(e-1)}{\pi} \approx 1.094$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

### Ejercicio propuesto 3A.6.5

*Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 1.*

a) Calcule el valor medio de $f(x) = |\tan x|$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. b) Obtenga el valor de $c$ que cumple el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)

**Resultado:** a) $\bar{f} = \frac{2\ln 2}{\pi} = \frac{\ln 4}{\pi} \approx 0.441$; b) $c = \operatorname{ang\,tan}\frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

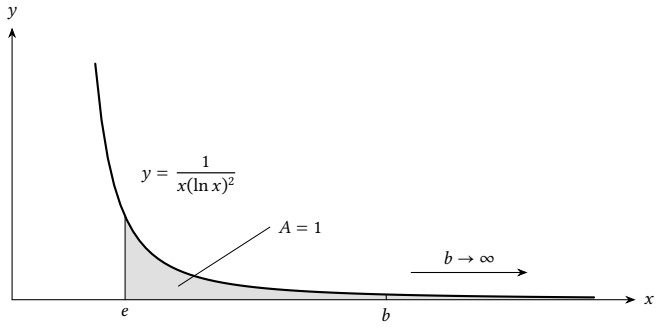
## 3A.7 Errores frecuentes

- **Olvidar dividir entre $b-a$.** $\int_a^b f$ es un área; el valor medio es una altura: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
- **Confundir $\bar{f}$ con $c$.** $\bar{f}$ es una ordenada (un valor de $y$); $c$ es una abscisa, la $x$ donde $f(c) = \bar{f}$.
- **Dejar abscisas fuera del intervalo.** Al resolver $f(c) = \bar{f}$ pueden salir raíces fuera de $[a,b]$: se descartan diciendo por qué.
- **Escribir $x_i = i\,\Delta x$.** En Riemann el punto es $x_i = a + i\,\Delta x$; solo coincide con $i\,\Delta x$ cuando $a = 0$. Y cada término se multiplica por $\Delta x$.
- **Olvidar $g'(x)$ en el TFC.** La derivada de $\int_1^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ es $f(x^2)\cdot 2x$, no $f(x^2)$. Con el límite inferior variable, el término va restando.
- **Perder el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$; en una definida, el intervalo no puede contener un cero de $u$.
- **Ignorar el dominio al despejar un parámetro.** Un $b$ que deje $\sqrt{1-x}$ o $\ln x$ fuera de su dominio dentro del intervalo no sirve, aunque cumpla la ecuación.

## 3A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$




## 3C.2 Cómo reconocer el problema

| El enunciado dice… | Procedimiento |
|---|---|
| «Determinar si la integral converge o diverge» con $\infty$ o $-\infty$ en un límite | Impropia de límite infinito (3C.3.1) |
| «Calcular, de ser posible» una integral cuyo integrando se va a infinito en un extremo | Impropia de integrando no acotado (3C.3.2) |
| Una integral definida que parece normal, pero el denominador se anula dentro del intervalo | Partir en el punto malo (3C.3.2) |
| $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ o $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ | Integrales $p$ (3C.1.1) |

## 3C.3 Procedimientos

*3C.3.1 Integral impropia de límite infinito*

1. Escribe el límite: $\int_a^\infty = \lim_{b\to\infty} \int_a^b$ (o $\int_{-\infty}^c = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c$). Si los dos límites son infinitos, parte en un punto cómodo, como 0.
2. Calcula la antiderivada (Unidad 4A si hace falta) y comprueba derivándola.
3. Evalúa entre $a$ y $b$ y toma el límite. Recuerda: $e^{-b} \to 0$, $\ln b \to \infty$ y $\frac{1}{\ln b} \to 0$ si $b \to \infty$; $\operatorname{ang\,tan} b \to \pm\frac{\pi}{2}$ si $b \to \pm\infty$.
4. Concluye con palabras: «converge a…» o «diverge».

*3C.3.2 Integral impropia de integrando no acotado*

1. Busca dónde se anula el denominador o dónde un ln se va a $-\infty$, y si ese punto está en un extremo o *dentro* del intervalo. Una integral con un punto malo interior parece una integral definida normal: es la trampa.
2. Extremo: $\int_a^b = \lim_{t\to a^+} \int_t^b$ (o $\lim_{t\to b^-} \int_a^t$).
3. Punto interior $c$: $\int_a^b = \lim_{t\to c^-} \int_a^t + \lim_{s\to c^+} \int_s^b$. Si una de las dos diverge, toda la integral diverge.
4. Antiderivada, comprobación por derivación, evaluación y límite, como en 3C.3.1.





**Resultado:** $S_{100} = \frac{6767}{20000} = 0.33835$; el límite es $\frac{1}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

**Con la computadora**

```
# Sumas de Riemann (extremo derecho) de 2 - x en [-3, 0]
from sympy import Rational, limit, oo, summation, symbols
x = symbols("x")
n, i = symbols("n i", positive=True, integer=True)
f, a, b = 2 - x, -3, 0
dx = Rational(b - a)/n
S = summation(f.subs(x, a + i*dx)*dx, (i, 1, n))
print([S.subs(n, k) for k in (10, 100)])  # 201/20, 2091/200
L = limit(S, n, oo)
print(L)                                  # 21/2
assert L == Rational(21, 2)
```

Dos casos de los textos de la bibliografía del programa:

- **Resorte (ley de Hooke).** Para estirar un resorte $x$ metros desde su longitud natural se necesita la fuerza $F(x) = kx$, con $k$ la constante del resorte (N/m). El trabajo para estirarlo de $x = a$ a $x = b$ es $W = \int_a^b kx\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$.
- **Bombeo de un líquido.** Para vaciar un tanque bombeando el líquido por arriba, cada capa delgada a la altura $y$ pesa $\rho g\, A(y)\,\mathrm{d}y$ ($\rho$, densidad; $g = 9.81$ m/s$^2$; $A(y)$, área de la sección) y sube la distancia que le falta para salir. Se suman los trabajos de todas las capas.

**Ejemplo resuelto · Trabajo para estirar un resorte**

Una fuerza de 10 N estira un resorte 0.2 m más allá de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirarlo 0.5 m desde su longitud natural?

**Resolución.**

1. Constante: $F = kx \Rightarrow 10 = k(0.2) \Rightarrow k = 50$ N/m.
2. Trabajo de $x = 0$ a $x = 0.5$:

$$W = \int_0^{0.5} 50x\,\mathrm{d}x = \left.25x^2\right|_0^{0.5} = 25(0.25) = 6.25\ \text{J}.$$

**Resultado:** $W = 6.25$ J.

### Ejercicio propuesto 3B.10.1 · El mismo resorte, en un tramo

Con el resorte del ejemplo ($k = 50$ N/m), calcule el trabajo para estirarlo de 0.2 m a 0.4 m más allá de su longitud natural.

**Resultado:** $W = 3$ J.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

### Ejercicio propuesto 3B.10.2 · Vaciar un tanque cilíndrico

Un tanque cilíndrico vertical de 1 m de radio y 3 m de altura está lleno de agua ($\rho = 1000$ kg/m$^3$, $g = 9.81$ m/s$^2$). Calcule el trabajo necesario para bombear toda el agua por el borde superior del tanque.

**Resultado:** $W = 44\,145\pi$ J $\approx 1.39 \times 10^5$ J.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

**Con la computadora**

```
# Volumen por arandelas del segundo ejemplo:
# region entre y = x^2 + 1 y y = x + 3, alrededor del eje x
from sympy import integrate, pi, solve, symbols
x = symbols("x")
f, g = x + 3, x**2 + 1              # arriba y abajo
a, b = sorted(solve(f - g, x))      # cortes: -1 y 2
V = pi*integrate(f**2 - g**2, (x, a, b))
print(a, b, V)                      # -1 2 117*pi/5
assert V == 117*pi/5
```





El área siempre es positiva y se da en $[u^2]$. Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, cambia cuál está arriba y la integral se parte en el punto de cruce.

**Longitud de arco.** Un tramo muy corto de curva es casi un segmento de largo $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Según cómo esté dada la curva:

$$y = f(x): \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$x(t),\ y(t): \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$r = f(\theta): \quad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

La longitud se da en $[u]$. En los exámenes, el radicando casi siempre queda lineal ($\sqrt{1 + 9x}$) o como un cuadrado perfecto disfrazado: si no se simplifica, revisa la derivada. La derivada de las paramétricas viene de la Unidad 2A.

**Sólido de revolución.** Al girar una región plana alrededor de una recta (el *eje de giro*) se forma un sólido. Hay dos maneras de cortarlo:

- *Discos y arandelas:* el rectángulo es *perpendicular* al eje. Al girar forma un disco de radio $R$ o, si la región no toca el eje, una arandela de radio exterior $R$ e interior $r$:

$$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}x.$$

- *Capas cilíndricas:* el rectángulo es *paralelo* al eje. Al girar forma un tubo delgado de radio $\rho$, altura $h$ y grosor $\mathrm{d}x$, con volumen $2\pi\rho h\mathrm{d}x$:

$$V = 2\pi \int_a^b \rho(x)\,h(x)\mathrm{d}x.$$

Los radios son *distancias al eje de giro*, no ordenadas: con el eje $y = k$, el radio a la curva $y = f(x)$ es $|f(x) - k|$; con el eje $x = k$, el radio de una capa es $|x - k|$. El volumen se da en $[u^3]$.

**Lo que no se pregunta.** El área de una superficie de revolución, el centroide y el trabajo no aparecen en los exámenes de los dos planes; tampoco la longitud de arco en polares en el banco del Plan 2016.

## 3B.2 Cómo reconocer el problema

| El enunciado dice… | Procedimiento |
|---|---|
| «Calcular el área de la región limitada por las gráficas de…» con $y = f(x)$ | Área en $x$ (3B.3.1) |
| Curvas como $y^2 - 4y - x = 0$ o $x = y^2$ (parábolas horizontales) | Área en $y$ (3B.3.1) |

## 3B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E**.

### Ejercicio propuesto 3B.6.1

*Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 4.*

Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = 4x^3$ y $y = 8x^2$.

**Resultado:** $A = \dfrac{16}{3}\,[u^2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

### Ejercicio propuesto 3B.6.2

*Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 4.*

Calcule el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1$ y $x = 0$.

**Resultado:** $V = \dfrac{\pi}{7}\,[u^3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

### Ejercicio propuesto 3B.6.3

*Adaptado de: 1er extraordinario 2020-1, problema 4.*

Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por $x = 0$, $y = e^{-x}$, $y = 0$ y $x = \ln 2$. Dibuje el sólido.

**Resultado:** $V = \dfrac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

### Ejercicio propuesto 3B.6.4

*Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 5.*

Calcule la longitud de arco de la curva $r = 3\theta^2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

**Resultado:** $L = \left(\pi^2 + 4\right)^{3/2} - 8\,[u] \approx 43.65\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

### Ejercicio propuesto 3B.6.5

*Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 4.*

Calcule la longitud de la gráfica de $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

**Resultado:** $L = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{6}\,[u] \approx 0.30\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

## 3B.7 Errores frecuentes

- **Empezar sin figura.** Sin la gráfica no se sabe qué curva está arriba, si hay dos regiones ni si la región toca el eje de giro.





3. Mide los radios desde el eje: $R$ hasta la curva más lejana, $r$ hasta la más cercana ($r = 0$ si la región toca el eje).
4. Calcula $V = \pi \int (R^2 - r^2)$. Se eleva cada radio por separado: $R^2 - r^2 \neq (R - r)^2$.

**Eje $y = k$.** La región entre $y = x^2$ y $y = x$ ($0 \le x \le 1$) gira alrededor de $y = 2$. La recta queda arriba de la región, así que la curva más lejana es la de abajo: $R = 2 - x^2$ y $r = 2 - x$, y

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2\right] \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{15}\,[u^3].$$

*3B.3.4 Volumen por capas cilíndricas*

1. Dibuja la región y un rectángulo *paralelo* al eje de giro.
2. Para un eje vertical ($x = 0$ o $x = k$) el rectángulo es vertical y se integra en $x$: radio $\rho = |x - k|$, altura $h =$ curva de arriba menos curva de abajo.
3. Calcula $V = 2\pi \int \rho\, h \mathrm{d}x$.
4. Si puedes, comprueba con discos en $y$: los dos métodos dan el mismo volumen.

**Cuándo conviene cada uno.** Alrededor del eje $y$ con curvas $y = f(x)$ difíciles de despejar, o con una región que necesitaría dos integrales en $y$, usa capas. Si $x$ se despeja fácil ($y = \ln x \Rightarrow x = e^y$), los discos en $y$ suelen ser más cortos.

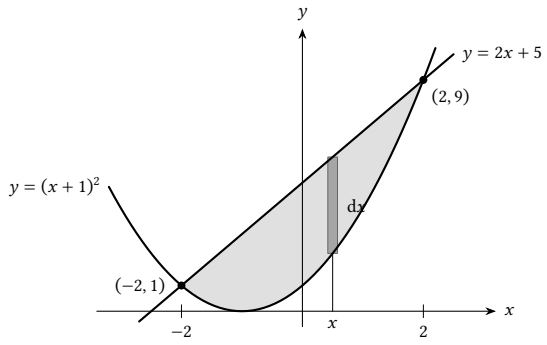
## 3B.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Área entre una parábola y una recta**

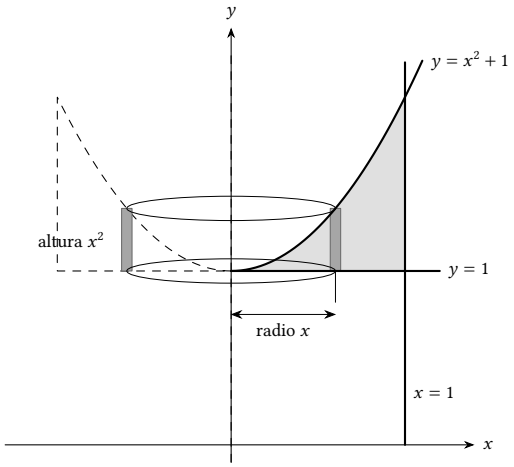
*Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 4.*

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2x + 1$ y $y = 2x + 5$.

**Resolución.**




1. Figura: $y = (x + 1)^2$ es una parábola con vértice en $(-1, 0)$ que abre hacia arriba; $y = 2x + 5$ es una recta de pendiente 2.
2. Cortes: $x^2 + 2x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Puntos $(-2, 1)$ y $(2, 9)$.
3. En $x = 0$ la recta vale 5 y la parábola 1: la recta está arriba. Rectángulo vertical de altura $(2x + 5) - (x^2 + 2x + 1) = 4 - x^2$.




1. Región: $0 \le x \le 1$ y $1 \le y \le x^2 + 1$. El eje de giro ($x = 0$) es su borde izquierdo.
2. Rectángulos verticales (paralelos al eje): capas de radio $\rho = x$ y altura $h = (x^2+1) - 1 = x^2$.
3. Integral:
$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \mathrm{d}x = 2\pi \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{4}.$$
4. $V = \dfrac{\pi}{2}\,[u^3]$.
5. Comprobación con arandelas en $y$, para $1 \le y \le 2$: $R = 1$ (la recta $x = 1$) y $r = \sqrt{y-1}$ (la parábola):
$$V = \pi \int_1^2 \big[1 - (y-1)\big]\mathrm{d}y = \pi\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

**Ejercicio 3B.5.5 · Discos en $y$ con logaritmo**

*Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.*

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$ y $x = 0$.

**Resolución.**

1. Se despeja $x$: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$. La región está entre el eje $y$ ($x = 0$) y la curva $x = e^y$, para $0 \le y \le 1$.
2. La región toca el eje de giro: discos horizontales de radio $R = e^y$.
3. Integral:
$$V = \pi \int_0^1 e^{2y}\mathrm{d}y = \pi \left.\frac{e^{2y}}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}\big(e^2 - 1\big).$$
4. $V = \dfrac{\pi(e^2-1)}{2}\,[u^3] \approx 10.04\,[u^3]$.



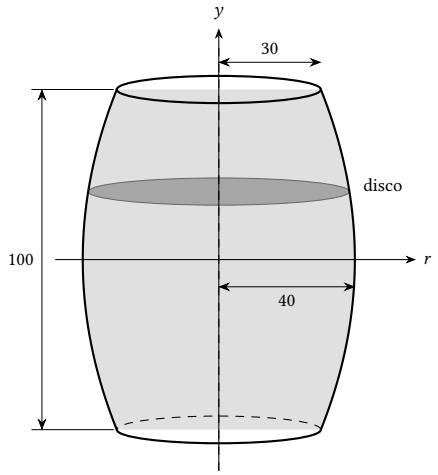


6. $V = \dfrac{117\pi}{5}\,[u^3] \approx 73.5\,[u^3]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\big) = -x^4 - x^2 + 6x + 8$.

**Ejemplo resuelto · Volumen de un barril**

Un barril mide 1 m de altura. Su radio es de 40 cm a la mitad de la altura y de 30 cm en las tapas, y su perfil es parabólico. Calcule cuántos litros le caben.

**Resolución.**




1. Ejes: el eje $y$ es el eje del barril, con el origen a la mitad de la altura y todo en centímetros, así que $-50 \le y \le 50$. El radio a la altura $y$ es $r(y)$.
2. Perfil parabólico, simétrico, con máximo 40 en $y = 0$: $r(y) = 40 - ky^2$. En las tapas, $r(\pm 50) = 30 \Rightarrow 40 - 2500k = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{250}$. Así, $r(y) = 40 - \frac{y^2}{250}$.
3. Cada corte horizontal es un disco de radio $r(y)$ y grosor $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}V = \pi\, r(y)^2 \mathrm{d}y$.
4. Por simetría, el doble de la mitad de arriba:
$$V = \pi \int_{-50}^{50} \Big(40 - \frac{y^2}{250}\Big)^2 \mathrm{d}y$$
$$= 2\pi \int_0^{50} \Big(1600 - \frac{8y^2}{25} + \frac{y^4}{62\,500}\Big)\mathrm{d}y.$$
5. Término a término, de 0 a 50: $1600(50) = 80\,000$; $\frac{8}{25}\cdot\frac{50^3}{3} = \frac{40\,000}{3}$; $\frac{1}{62\,500}\cdot\frac{50^5}{5} = 1000$. Suma: $81\,000 - \frac{40\,000}{3} = \frac{203\,000}{3}$.
6. $V = \dfrac{406\,000\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3 \approx 425\,162\ \mathrm{cm}^3$. Como $1\ \mathrm{L} = 1000\ \mathrm{cm}^3$:
7. **Al barril le caben unos 425 L.** Comprobación: un cilindro de radio 40 cm y 1 m de alto tendría unos 503 L, y uno de radio 30 cm, unos 283 L; el barril queda entre

2. Evaluación (con $a > 1$, para que $\ln x > 0$ en todo el intervalo):

$$\ln(\ln x)\Big|_a^{e^2} = \ln 2 - \ln(\ln a).$$

3. $\ln 2 - \ln(\ln a) = \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln a) = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e$.
4. $a = e > 1$: el integrando es continuo en $[e, e^2]$ y el valor sirve. Un $a \le 1$ dejaría $x = 1$ (donde $\ln x = 0$) dentro del intervalo.
5. $a = e$.

### Ejercicio 3A.5.6 · TVM con tres abscisas medias

*Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 2.*

Sea $f(x) = 3x^2 - 5x^4$ en $[-1, 1]$. Calcule el o los valores de $c$ del intervalo que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

**Resolución.**

1. Integral:

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 - 5x^4)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 - x^5\right)\Big|_{-1}^{1} = (1-1) - (-1+1) = 0.$$

2. Valor medio: $\bar{f} = \frac{0}{2} = 0$.
3. TVM: $3c^2 - 5c^4 = 0 \Rightarrow c^2(3 - 5c^2) = 0 \Rightarrow c = 0$ o $c^2 = \frac{3}{5}$.
4. $c = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{5} \approx \pm 0.775$: los dos están en $[-1, 1]$.
5. $c = 0$, $c = \frac{\sqrt{15}}{5}$ **y** $c = -\frac{\sqrt{15}}{5}$**.** El teorema garantiza al menos uno; aquí hay tres.

## 3A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3A**.

### Ejercicio propuesto 3A.6.1

*Adaptado de: 2º extraordinario 2020-1, problema 2.*

Mediante el límite de las sumas de Riemann, calcule $\int_1^3 (x+1)\,\mathrm{d}x$.

**Resultado:** 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

### Ejercicio propuesto 3A.6.2

*Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 3.*

Sea $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,\mathrm{d}t$. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine $F'(x)$.

**Resultado:** $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.





## 3C.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3C**.

### Ejercicio propuesto 3C.6.1

*Adaptado de: 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 2.*

Calcule, de ser posible, $\displaystyle\int_5^6 \frac{\ln(x-5)}{2x-10}\,\mathrm{d}x$.

**Resultado:** La integral diverge (tiende a $-\infty$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

## 3C.7 Errores frecuentes

- **No ver el punto malo interior.** $\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x-1}}$ parece normal, pero en $x = 1$ el integrando no está acotado: hay que partir en dos.
- **Declarar que converge sin tomar el límite.** Si $F(b) \to \infty$, la integral diverge, aunque la antiderivada esté bien.
- **Juntar dos límites en uno.** Con $\int_{-\infty}^{\infty}$ o con un punto malo interior, cada parte se calcula por separado y las dos deben converger; $\infty - \infty$ no se cancela.
- **Confundir los criterios** $p$**.** $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, si $p < 1$. Con $p = 1$ las dos divergen.

## 3C.8 Formulario de emergencia de la parte

- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$; $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f$; $\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$.
- Integrando no acotado en $a$: $\int_a^b f = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f$; punto malo interior $c$: $\int_a^b = \lim_{t\to c^-} \int_a^t + \lim_{s\to c^+} \int_s^b$.
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p < 1$.
- Con $b \to \infty$: $e^{-b} \to 0$, $\ln b \to \infty$, $\frac{1}{\ln b} \to 0$, $\operatorname{ang\,tan} b \to \frac{\pi}{2}$.

## 3C.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Revisa los límites ($\pm\infty$) y los ceros del denominador *dentro* del intervalo; escribe el límite antes de integrar.
2. Calcula la antiderivada y compruébala derivando.
3. Evalúa y toma el límite de cada parte por separado.
4. Concluye con palabras: «converge a…» o «diverge».

## 3C.10 Lo que agrega el Plan 2026: convergencia con la computadora

El software calcula la integral impropia directamente (en sympy, con oo como límite) y dice si diverge (oo). También permite ver el límite: se evalúa $\int_a^b f$ para $b = 10, 100, 1000, \ldots$ y se mira si se estabiliza. Para $\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ (el ejemplo), $\int_e^b = 1 - \frac{1}{\ln b}$ vale 0.57 con $b = 10$,

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

### 3A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Identifica el tipo con la tabla 3A.2: valor medio, gráfica, Riemann, TFC o parámetro.
2. Valor medio: integra, divide entre $b-a$, resuelve $f(c) = \bar{f}$ y revisa que $c \in [a,b]$.
3. Riemann: escribe $\Delta x$ y $x_i = a + i\,\Delta x$ antes de sustituir; separa en $\sum 1$, $\sum i$, $\sum i^2$.
4. TFC: no integres; aplica $f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$.
5. Cierra siempre con una comprobación: derivar la antiderivada o calcular la integral por el TFC.

### 3A.10 Lo que agrega el Plan 2026: sumas de Riemann con la computadora

El programa pide visualizar con software el problema del área: se dibujan los $n$ rectángulos bajo la gráfica y se calcula su suma para $n$ cada vez mayor. Con $f(x) = 2 - x$ en $[-3, 0]$ (el segundo ejemplo de la sección 3A.4), los rectángulos con el extremo derecho dan

$$S_n = \frac{3(7n-3)}{2n}: \qquad S_{10} = 10.05, \qquad S_{100} = 10.455, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{21}{2} = 10.5.$$

Como $f$ es decreciente, los rectángulos con el extremo derecho quedan por debajo de la gráfica y las sumas se acercan a 10.5 por abajo. Con el extremo izquierdo quedarían por arriba. La computadora hace en un instante la suma que a mano lleva varios renglones, y el límite confirma la integral.

#### Ejercicio propuesto 3A.10.1 · Sumas por la derecha y por la izquierda

Para $f(x) = x^2$ en $[0,1]$ con $n = 4$ subintervalos iguales, calcule la suma de Riemann con los extremos derechos y la suma con los extremos izquierdos, y compárelas con $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

**Resultado:** Por la derecha $\frac{15}{32} = 0.46875$; por la izquierda $\frac{7}{32} = 0.21875$; la integral, $\frac{1}{3} \approx 0.333$, está entre las dos.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

#### Ejercicio propuesto 3A.10.2 · La suma por la derecha con cien rectángulos

Para $f(x) = x^2$ en $[0,1]$, la suma por la derecha con $n$ rectángulos es $S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. Calcule $S_{100}$ y $\lim_{n\to\infty} S_n$.





### 3C.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Integral impropia que converge**

*Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 2.*

Determine si la integral $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ converge o diverge.

**Resolución.**

1. El límite superior es infinito:

$$\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_e^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}.$$

2. Cambio de variable $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

   Comprobación: $\left(-\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}$.

3. Evaluación:

$$\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_e^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln e}\right) = 0 + 1.$$

4. **La integral converge y vale 1.** Es el área de la región sombreada de la figura de 3C.1.1.

### 3C.5 Ejercicios de examen (resueltos)

#### Ejercicio 3C.5.1 · Impropia con un punto malo interior

*Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 2.*

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^{9} \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x-1}}$ converge o diverge.

**Resolución.**

1. El denominador se anula en $x = 1$, que está *dentro* de $[0,9]$. Se parte:

$$\int_0^{9} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^{t} + \lim_{s\to 1^+}\int_s^{9}.$$

2. Antiderivada: $\int \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)^{2/3} + C$. Comprobación: $\left[\frac{1}{2}(x-1)^{2/3}\right]' = \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}$.
3. Primera parte: $\lim_{t\to 1^-}\left[\frac{1}{2}(t-1)^{2/3} - \frac{1}{2}(-1)^{2/3}\right] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, porque $(-1)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 = 1$.

# Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo

↑ Volver al índice

**Contenido de esta parte (programa 2026, tema 3).** «Cálculo de áreas, longitudes y volúmenes de sólidos de revolución. Mención del empleo de la integral definida para el cálculo de trabajo mecánico.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es el problema 4 de los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 (área entre curvas 20, volumen de revolución 16, longitud de arco 13) y de 56 de los 60 del Plan 2016 (área 36, volumen 12, longitud de arco 8). El área en coordenadas polares de los planes anteriores no está en el programa 2026 y no viene aquí; el trabajo mecánico no salía en esos exámenes.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte. Las integrales se resuelven con lo de la Parte 3A; las que piden partes, sustitución trigonométrica o fracciones parciales, con la Parte 4A. Aquí lo nuevo es plantearlas.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 3B.1 y 3B.3 (30 min).
  2. Sigue los tres ejemplos de la sección 3B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 3B.5 con cronómetro (15 min cada uno), empezando por la figura.
  4. Lee la sección 3B.10: el programa solo pide una mención del trabajo, pero el planteamiento es el mismo de las áreas y los volúmenes.

## 3B.1 Conceptos y expresiones

**La idea de todas las aplicaciones.** Se corta la figura en pedazos muy delgados, se escribe la medida de un pedazo (el *elemento diferencial*) y se suman todos con una integral definida. Los límites de la integral son el primero y el último valor de la variable en la que se corta. Por eso cada problema empieza con la gráfica de la región y un pedazo dibujado.

**Área entre curvas.** Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el elemento es un rectángulo vertical de altura $f(x) - g(x)$ y ancho $\mathrm{d}x$:

$$A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x.$$

Si conviene cortar en franjas horizontales (curvas de la forma $x = h(y)$, como las parábolas horizontales), el elemento tiene largo «derecha menos izquierda»:

$$A = \int_c^d \big[x_{\text{der}}(y) - x_{\text{izq}}(y)\big]\,\mathrm{d}y.$$





# Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia

↑ Volver al índice

**Contenido de esta parte (programa 2026, tema 3).** «Integral impropia. Convergencia y divergencia de la integral impropia.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): sale en 22 de los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 y en 14 de los 60 del Plan 2016, casi siempre como problema 2, que comparte con la regla de L'Hôpital (Parte 2B) y con el valor medio (Parte 3A).
- **Tiempo:** 2 horas para esta parte. Muchas antiderivadas salen con un cambio de variable (Parte 3A); algunas piden los métodos de la Parte 4A.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3C.1.1 y la tabla de la sección 3C.2 (15 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 3C.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 3C.5 con cronómetro: 12 min cada uno. El del punto malo interior es la trampa más común.

## 3C.1 Conceptos y expresiones

### *3C.1.1 Integral impropia*

Una integral es *impropia* si un límite de integración es infinito o si el integrando no está acotado en un punto del intervalo (extremo o interior). Se define con un límite:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

y, si $f$ no está acotada en $a$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si el límite existe y es finito, la integral *converge* y su valor es ese límite; si no existe o es infinito, *diverge*. Con $\int_{-\infty}^{\infty}$, o con un punto malo $c$ dentro de $[a, b]$, se parte en dos integrales y *cada una* debe converger.

**Integrales** $p$ (sirven para anticipar el resultado): $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$, y $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p < 1$.

| El enunciado dice… | Procedimiento |
|---|---|
| «Longitud de arco» o «longitud de la gráfica de $f$ en $[a,b]$» | Longitud de arco (3B.3.2), forma cartesiana |
| «La curva dada por $x=\ldots$, $y=\ldots$» con parámetro $t$ | Longitud de arco (3B.3.2), paramétricas |
| «Longitud de la curva $r=3\theta^2$» | Longitud de arco (3B.3.2), polares |
| «Volumen del sólido… al girar alrededor del eje de las abscisas» | Discos o arandelas en $x$ (3B.3.3) |
| «… alrededor del eje de las ordenadas» | Capas en $x$ (3B.3.4) o discos en $y$ (3B.3.3) |
| «… alrededor de la recta $y=k$» o «$x=k$» | Discos (3B.3.3) o capas (3B.3.4) con el radio medido desde la recta |

## 3B.3 Procedimientos

*3B.3.1 Área entre curvas*

1. Dibuja las curvas: identifica rectas, parábolas (vértice y hacia dónde abren), $e^x$, $\ln x$. Si alguna ecuación tiene $y^2$ y no $x^2$, despeja $x$: es una parábola horizontal.
2. Calcula los puntos de corte igualando las dos expresiones. Los cortes son los límites de la integral.
3. Elige el corte: franjas verticales ($\mathrm{d}x$) si cada vertical entra por una curva y sale por otra; franjas horizontales ($\mathrm{d}y$) si así pasa con las horizontales. Con parábolas horizontales casi siempre es en $y$.
4. Decide qué curva está arriba (o a la derecha) probando un punto intermedio. Si el orden cambia, parte la integral.
5. Integra «arriba menos abajo» o «derecha menos izquierda» y da el resultado en $[u^2]$. Si sale negativo, restaste al revés.

**Simetría.** Si las dos funciones son impares ($\sqrt[3]{x}$ y $x$) o la región es simétrica respecto a un eje, calcula una parte y multiplica. Nunca integres de un lado al otro de un cruce sin partir: las áreas con signo se cancelan.

*3B.3.2 Longitud de arco*

1. Identifica la forma de la curva: $y=f(x)$, paramétrica o polar, y escribe la fórmula que corresponde.
2. Deriva y eleva al cuadrado: $[f'(x)]^2$, o $(\dot{x})^2+(\dot{y})^2$, o $r^2+(r')^2$.
3. Simplifica el radicando antes de integrar. En paramétricas con $e^t\cos t$ y $e^t\operatorname{sen} t$, los productos cruzados se cancelan; en polares con $r=a\theta^2$, saca el factor común.
4. Integra (casi siempre un cambio de variable $u=1+9x$ o $u=\theta^2+4$) y evalúa. Da el resultado exacto en $[u]$.

*3B.3.3 Volumen por discos y arandelas*

1. Dibuja la región, el eje de giro con línea punteada y un rectángulo *perpendicular* al eje.
2. Si el eje es horizontal ($y=0$ o $y=k$), el rectángulo es vertical y se integra en $x$; si es vertical ($x=0$ o $x=k$), es horizontal y se integra en $y$: despeja $x$ de cada curva.





- **Integrar de un lado al otro de un cruce.** Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, las áreas con signo se cancelan ($\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x}-x)\mathrm{d}x=0$). Parte la integral.
- **Equivocar «derecha menos izquierda».** En las parábolas horizontales despeja $x$ con cuidado: $y^2-2y+x=0$ da $x=2y-y^2$, no $y^2-2y$.
- **Elevar mal en las arandelas.** $\pi\int(R^2-r^2)$ no es $\pi\int(R-r)^2$.
- **Medir el radio desde el eje equivocado.** Con el eje $y=k$ o $x=k$, el radio es la distancia a esa recta, no la ordenada ni la abscisa.
- **Olvidar $2\pi$ en las capas o $\pi$ en los discos**.
- **Olvidar el 1 en la longitud de arco**: es $\sqrt{1+[f']^2}$, no $\sqrt{[f']^2}$.

## 3B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Área en $x$: $A=\int_a^b\big[f(x)-g(x)\big]\mathrm{d}x$, con $f$ arriba.
- Área en $y$: $A=\int_c^d\big[x_{\text{der}}-x_{\text{izq}}\big]\mathrm{d}y$.
- Arco, cartesianas: $L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
- Arco, paramétricas: $L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.
- Arco, polares: $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta$.
- Discos y arandelas: $V=\pi\int_a^b\big(R^2-r^2\big)\mathrm{d}x$ (o $\mathrm{d}y$).
- Capas: $V=2\pi\int_a^b\rho\,h\mathrm{d}x$, con $\rho$ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2u=\frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2u=\frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2x-\operatorname{senh}^2x=1$.

## 3B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja las curvas, marca los puntos de corte y sombrea la región. Dibuja un rectángulo (o un sector) representativo.
2. En volumen, dibuja el eje de giro punteado y decide: rectángulo perpendicular al eje (discos) o paralelo (capas).
3. Escribe el elemento diferencial con palabras: «arriba menos abajo», «radio exterior», «radio por altura».
4. Plantea la integral con sus límites y simplifica el integrando antes de integrar.
5. Integra con la técnica de la Unidad 4A, evalúa con fracciones exactas y escribe las unidades $[u^2]$, $[u]$ o $[u^3]$.
6. Revisa el signo y el orden de magnitud con la figura: un área no puede salir negativa ni mayor que el rectángulo que la contiene.

## 3B.10 Lo que agrega el Plan 2026: el trabajo mecánico

Si una fuerza constante $F$ mueve un objeto una distancia $d$ en su misma dirección, el trabajo es $W=Fd$ (en joules, J, si $F$ está en newtons y $d$ en metros). Si la fuerza cambia con la posición, $F=F(x)$, se parte $[a,b]$ en tramos cortos de largo $\mathrm{d}x$: en cada uno la fuerza es casi constante y el trabajo es $F(x)\,\mathrm{d}x$. Sumando, como en las áreas,

$$W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

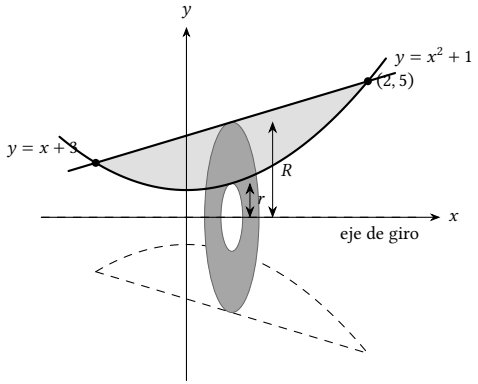
4. Integral:
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\mathrm{d}x = \Big(4x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-2}^{2}.$$
5. Evaluación: $\big(8 - \frac{8}{3}\big) - \big(-8 + \frac{8}{3}\big) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.
6. $A = \dfrac{32}{3}\,[u^2] \approx 10.67\,[u^2]$**.** Comprobación: el integrando $4 - x^2$ es par, así que $A = 2\int_0^2 (4 - x^2)\mathrm{d}x = 2\big(8 - \frac{8}{3}\big) = \frac{32}{3}$.

**Ejemplo resuelto · Volumen por arandelas alrededor del eje $x$**

*Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 4.*

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje $x$, la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$.

**Resolución.**




1. Cortes: $x^2 + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$. Puntos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$.
2. En $x = 0$ la recta vale 3 y la parábola 1: la recta está arriba. Las dos curvas están sobre el eje ($y \geq 1$), así que la región no toca el eje: arandelas con $R = x + 3$ y $r = x^2 + 1$.
3. Integrando: $(x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2 = x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1 = -x^4 - x^2 + 6x + 8$.
4. Integral:
$$V = \pi \int_{-1}^{2} \big(-x^4 - x^2 + 6x + 8\big)\mathrm{d}x$$
$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right)\Big|_{-1}^{2}.$$
5. En $x = 2$: $-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 = \frac{284}{15}$. En $x = -1$: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 = -\frac{67}{15}$. Diferencia: $\frac{351}{15} = \frac{117}{5}$.





5. Comprobación con capas: en $x$ la región se parte en $0 \leq x \leq 1$ (altura 1) y $1 \leq x \leq e$ (altura $1 - \ln x$). Con partes, $\int_1^e x(1 - \ln x)\mathrm{d}x = \frac{e^2 - 3}{4}$, y
$$2\pi\Big(\frac{1}{2} + \frac{e^2 - 3}{4}\Big) = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$$
Los discos en $y$ evitan partir la región y la integración por partes.

**Ejercicio 3B.5.6 · Longitud de arco en cartesianas**

*Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 4.*

Calcule la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\big[0, \frac{1}{3}\big]$.

**Resolución.**

1. $f(x) = 2x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = 3x^{1/2} \Rightarrow [f'(x)]^2 = 9x$.
2. Integral:
$$L = \int_0^{1/3} \sqrt{1 + 9x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Cambio de variable $u = 1 + 9x$, $\mathrm{d}u = 9\mathrm{d}x$; los límites pasan a $u = 1$ y $u = 4$:
$$L = \frac{1}{9}\int_1^4 u^{1/2}\mathrm{d}u = \frac{2}{27}\,u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{27}(8 - 1).$$
4. $L = \dfrac{14}{27}\,[u] \approx 0.52\,[u]$**.** Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\frac{2}{27}(1 + 9x)^{3/2}\big] = \frac{2}{27} \cdot \frac{3}{2} \cdot 9\sqrt{1 + 9x} = \sqrt{1 + 9x}$.

**Ejercicio 3B.5.7 · Longitud de arco en paramétricas: espiral**

*Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 5.*

Calcule la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, con $t \in [0, \ln 11]$.

**Resolución.**

1. Derivadas (producto):
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t)$$
2. Suma de cuadrados: los productos cruzados $\pm 2\operatorname{sen} t \cos t$ se cancelan,
$$e^{-2t}\big[(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2\big] = 2e^{-2t}.$$
3. Integral:
$$L = \int_0^{\ln 11} \sqrt{2}\,e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\big(-e^{-t}\big)\big|_0^{\ln 11} = \sqrt{2}\Big(1 - \frac{1}{11}\Big).$$
4. $L = \dfrac{10\sqrt{2}}{11}\,[u] \approx 1.29\,[u]$**.** Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\sqrt{2}e^{-t}\big) = \sqrt{2}e^{-t}$; y la distancia al origen baja de 1 a $\frac{1}{11}$: $L$ es mayor que esa diferencia, $\frac{10}{11}$.

> los dos y más cerca del primero, porque casi toda su altura tiene radio cercano a 40.

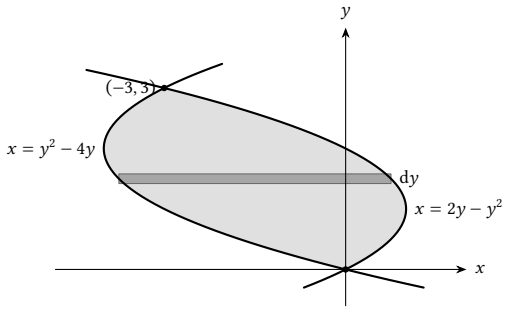
## 3B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 3B.5.1 · Área entre dos parábolas horizontales

*Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 4.*

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 - 4y - x = 0$ y $y^2 - 2y + x = 0$.

**Resolución.**




1. Se despeja $x$: $x = y^2 - 4y$ es una parábola horizontal que abre a la derecha, con vértice $(-4, 2)$; $x = 2y - y^2$ abre a la izquierda, con vértice $(1, 1)$.
2. Cortes: $y^2 - 4y = 2y - y^2 \Rightarrow 2y^2 - 6y = 0 \Rightarrow 2y(y-3) = 0$, así que $y = 0$ y $y = 3$. Puntos $(0, 0)$ y $(-3, 3)$.
3. Franjas horizontales. En $y = 1$: $2y - y^2 = 1$ y $y^2 - 4y = -3$; la de la derecha es $x = 2y - y^2$.
4. Largo de la franja: $(2y - y^2) - (y^2 - 4y) = 6y - 2y^2$.
5. Integral:
$$A = \int_0^3 \big(6y - 2y^2\big)\mathrm{d}y = \left(3y^2 - \frac{2y^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 27 - 18.$$
6. $A = 9\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(3y^2 - \frac{2}{3}y^3\big) = 6y - 2y^2$.

### Ejercicio 3B.5.2 · Área con dos regiones: raíz cúbica y recta

*Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 4.*

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = x$.

**Resolución.**

1. Cortes: $\sqrt[3]{x} = x \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$, así que $x = -1, 0, 1$. Hay dos regiones.
2. En $[0, 1]$, con $x = \frac{1}{8}$: $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$; arriba está $f$. En $[-1, 0]$, con $x = -\frac{1}{8}$: $x = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$; arriba está $g$.
3. Las dos funciones son impares: las regiones son simétricas respecto al origen y tienen la misma área.





4. Integral:
$$A = 2\int_0^1 \big(x^{1/3} - x\big)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1.$$
5. $2\big(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\big) = 2 \cdot \frac{1}{4}$.
6. $A = \frac{1}{2}\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\frac{3}{4}x^{4/3}\big) = x^{1/3}$. Sin partir, $\int_{-1}^1 (x^{1/3} - x)\mathrm{d}x = 0$: las dos áreas se cancelan.

### Ejercicio 3B.5.3 · Arandelas entre seno y coseno hiperbólicos

*Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 4.*

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$, $y = \cosh x$, $x = 0$ y $x = \ln 2$.

**Resolución.**

1. Figura: $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x} > 0$, así que $\cosh x$ está arriba; en $[0, \ln 2]$, $\operatorname{senh} x \geq 0$. La región va de $y = \operatorname{senh} x$ a $y = \cosh x$ y no toca el eje (salvo en el punto $(0, 0)$ de su borde inferior).
2. Arandelas: $R = \cosh x$, $r = \operatorname{senh} x$.
3. Integral, con la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$:
$$V = \pi\int_0^{\ln 2} \big(\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x\big)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\ln 2} \mathrm{d}x.$$
4. $V = \pi \ln 2\,[u^3] \approx 2.18\,[u^3]$. Comprobación: con $\cosh \ln 2 = \frac{5}{4}$ y $\operatorname{senh} \ln 2 = \frac{3}{4}$, el integrando en $x = \ln 2$ es $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$.

### Ejercicio 3B.5.4 · Capas cilíndricas alrededor del eje $y$

*Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.*

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 1$ y $x = 1$.

**Resolución.**