3. **a)** $\bar{f} = \frac{7}{5}$.
4. TVM, tramo por tramo, con $f(c) = \frac{7}{5}$:
   - en $[0,1]$: $1 + c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{2}{5}$ (sí está);
   - en $[1,2]$: $f = 2 \neq \frac{7}{5}$ (ninguno);
   - en $[2,4]$: $4 - c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{13}{5}$ (sí está);
   - en $[4,5]$: $3(c-4) = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{67}{15} \approx 4.47$ (sí está).
5. **b)** $c = \frac{2}{5}$, $c = \frac{13}{5}$ **y** $c = \frac{67}{15}$.

Ejercicio 3A.5.2 · Riemann con un integrando cuadrático

Adaptado de: 1er extraordinario 2011-2, problema 1.

Mediante el límite de las sumas de Riemann, obtenga $\int_1^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$.
2. $f(x_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= 4 + \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &\quad + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 4 + 4\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $4 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.
5. Comprobación: $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3 = (9+3) - \left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{32}{3}$.
6. $\int_1^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}$.

Ejercicio 3A.5.3 · TFC con un límite exponencial

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 1.

Sea $F(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,\mathrm{d}t$. Calcule $F'(\ln 2)$.

Resolución.

1. Integrando $f(t) = \ln t$; límite superior $g(x) = e^x$, con $g'(x) = e^x$; el inferior es constante.

existe al menos un $c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$. Geométricamente: una curva continua que pasa de abajo a arriba del eje x lo corta.

Teorema de Rolle. Hipótesis:

1. f es continua en $[a,b]$;
2. f es derivable en (a,b);
3. $f(a) = f(b)$.

Tesis: existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Interpretación: entre dos puntos de la gráfica a la misma altura hay uno con **tangente horizontal**.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial (de Lagrange). Hipótesis: las dos primeras de Rolle. Tesis: existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretación: hay un punto donde la **tangente es paralela a la secante** que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$. Rolle es el caso $f(a) = f(b)$.

Crecimiento. Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, f es creciente ahí; si $f'(x) < 0$, es decreciente. Es consecuencia del teorema del valor medio.

Criterio de la primera derivada. Sea c un valor crítico con f continua en c. Si f' cambia de $+$ a $-$ al pasar por c, en c hay un máximo relativo; si cambia de $-$ a $+$, un mínimo relativo; si no cambia de signo, no hay extremo.

Concavidad. Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, la gráfica es *cóncava hacia arriba* ($\cup$): queda arriba de sus tangentes. Si $f''(x) < 0$, es *cóncava hacia abajo* ($\cap$). Un *punto de inflexión* es un punto $(c, f(c))$ de la gráfica, con f continua en c, donde la concavidad cambia. Los candidatos son los c con $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ inexistente; hay inflexión solo si f'' cambia de signo (x^4 tiene $f''(0) = 0$ y no tiene inflexión).

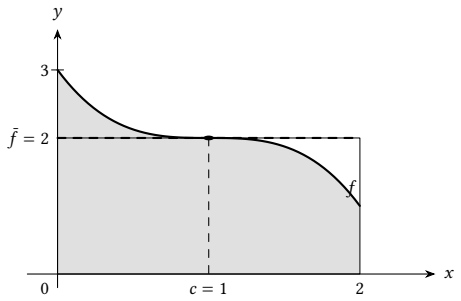
Criterio de la segunda derivada. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, en c hay un máximo relativo; si $f''(c) > 0$, un mínimo relativo; si $f''(c) = 0$, el criterio no decide y se usa el de la primera derivada.

Picos y tangentes verticales. Donde f es continua y f' no existe puede haber:

- un *pico*: $|x|$ en $x = 0$; las pendientes laterales son distintas y hay mínimo;
- una *cúspide*: $x^{2/3}$ en $x = 0$; $f' \to \mp\infty$ por cada lado y también hay mínimo;
- una *tangente vertical* sin extremo: $\sqrt[3]{x}$ en $x = 0$; $f' \to +\infty$ por los dos lados, f sigue creciendo y la concavidad cambia: es punto de inflexión.

2C.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle» o «del valor medio»	revisar cada hipótesis y hallar c	2C.3.1



Ejemplo resuelto · Integral por sumas de Riemann

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo C, problema 1.

Por medio del límite de la suma de Riemann, calcule $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{0-(-3)}{n} = \frac{3}{n}$ y $x_i = -3 + \frac{3i}{n}$.
2. $f(x_i) = 2 - \left(-3 + \frac{3i}{n}\right) = 5 - \frac{3i}{n}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(5 - \frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} \\ &= \frac{15}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{15}{n}\,n - \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 15 - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $\lim_{n\to\infty} S_n = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$.
5. Comprobación: $\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} = 0 - \left(-6 - \frac{9}{2}\right) = \frac{21}{2}$; también es el trapecio de alturas $f(-3) = 5$ y $f(0) = 2$ y base 3: $\frac{5+2}{2}\cdot 3 = \frac{21}{2}$.
6. $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{21}{2}$.

2C.3.3 Concavidad, inflexión y criterio de la segunda derivada

1. Calcula f'' y factorízala. Candidatos: ceros de f'' y puntos del dominio donde f'' no existe.
2. Signo de f'' en cada intervalo: + es cóncava hacia arriba, − hacia abajo.
3. Hay inflexión en un candidato solo si el signo cambia y c está en el dominio. Da las coordenadas $(c, f(c))$.
4. Si el enunciado pide el criterio de la segunda derivada, evalúa f'' en cada crítico con $f'(c) = 0$: negativo, máximo; positivo, mínimo.

2C.3.4 Tabla de variación y gráfica

1. Reúne en una tabla los críticos y los candidatos a inflexión, ordenados, con los signos de f' y f'' entre ellos.
2. Renglón de f: ↗ (crece) o ↘ (decrece), y los valores de f en los puntos de la tabla.
3. Ubica en la gráfica: extremos, inflexiones, intersecciones con los ejes ($f(0)$ y, si es fácil, los ceros), asíntotas.
4. Une los puntos respetando el crecimiento y la concavidad de cada tramo.
5. Donde f' no existe: si $f' \to \pm\infty$ dibuja una tangente vertical; si las pendientes laterales son distintas, un pico.

2C.3.5 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

1. Revisa que f sea continua en $[a, b]$: por el teorema de Weierstrass, existen los dos extremos absolutos.
2. Encuentra los críticos de (a, b).
3. Evalúa f en los críticos y en a y b.
4. El mayor valor es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto. No hace falta ningún criterio.

2C.3.6 Optimación: plantilla

1. **Dibujo y variables.** Haz un esquema y nombra cada medida que cambia (x, y, r, h).
2. **Función objetivo.** Lo que se quiere hacer máximo o mínimo, en función de las variables: área, volumen, perímetro, material, costo.
3. **Restricción.** La ecuación que liga las variables: el dato fijo (perímetro, volumen, área) o la condición geométrica (el punto está en la curva, triángulos semejantes).
4. **Una variable.** Despeja de la restricción y sustituye en la función objetivo.
5. **Dominio.** Los valores con sentido físico (longitudes positivas, el punto dentro de la figura).
6. **Crítico.** Deriva, iguala a cero y resuelve en el dominio.
7. **Justifica** que es máximo o mínimo: con la segunda derivada, con el cambio de signo de la primera o comparando con los extremos del dominio.
8. **Responde** lo que se pide: todas las dimensiones, el valor óptimo y las unidades.

2C.3.7 Punto de inflexión con parámetros

1. «El punto (x_0, y_0) está en la gráfica»: $g(x_0) = y_0$.
2. «Es punto de inflexión»: $g''(x_0) = 0$.
3. Resuelve el sistema y comprueba que g'' cambia de signo en x_0.

Atajo de simetría. Si f es impar alrededor del centro del intervalo, su integral vale cero: $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ y $\int_0^2 (x-1)^3\,dx = 0$. Así se ve rápido que el valor medio de $1 + \sqrt[3]{x-1}$ en $[0,2]$ es 1.

3A.3.2 Integral definida por áreas: función dada por una gráfica

1. Escribe la función por tramos, con la recta de cada tramo: con dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y la recta, $y = y_1 + m(x - x_1)$.
2. Separa la integral en los mismos tramos (propiedad aditiva).
3. Cada tramo es un rectángulo, un triángulo o un trapecio: $A = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$. Lo que esté bajo el eje x se resta.
4. Suma, divide entre $b - a$ para el valor medio y busca c tramo por tramo con la recta de cada uno.

3A.3.3 Sumas de Riemann

1. Escribe $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$ (no olvides el sumando a).
2. Sustituye x_i en f y desarrolla en potencias de i: $f(x_i) = \alpha + \beta i + \gamma i^2$, con α, β, γ que dependen de n.
3. Multiplica por Δx y separa la suma. Usa

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

4. Simplifica: cada término queda como un cociente de polinomios en n. Toma el límite $n \to \infty$ (solo cuentan los términos de mayor grado).
5. Comprueba con el TFC: $F(x)\big|_a^b$ debe dar lo mismo. Si f es lineal, también con el área de un trapecio.

3A.3.4 TFC: derivar una integral con límites variables

1. Identifica el integrando $f(t)$, el límite superior $g(x)$ y el inferior $h(x)$. Si un límite es constante, su término vale cero.
2. Aplica

$$F'(x) = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$

   No hace falta integrar.
3. Si piden F' en un punto, simplifica antes de sustituir ($\ln e^x = x$).
4. Comprobación: si f tiene antiderivada sencilla, calcula F explícitamente y derívala.

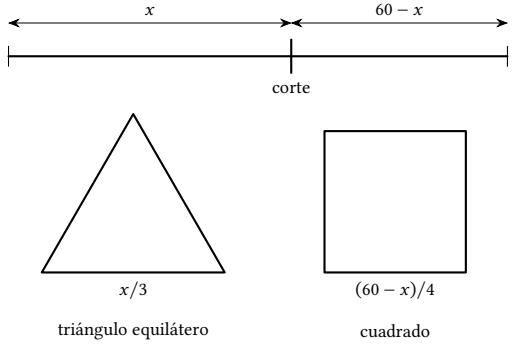
Resultado: a) creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$, decreciente en $(-1, 3)$; b) máximo relativo $f(-1) = \frac{11}{3}$, mínimo relativo $f(3) = -7$; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$, hacia arriba en $(1, \infty)$, con inflexión en $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$.

Ejemplo resuelto · Alambre cortado en dos

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 5.

Un alambre de 60 cm se corta en dos partes; con una se forma un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado. ¿Qué longitud debe tener cada parte para que la suma de las áreas sea mínima?

Resolución.



1. **Variables.** x: tramo del triángulo, de lado $\frac{x}{3}$; $60 - x$: tramo del cuadrado, de lado $\frac{60-x}{4}$.
2. **Función objetivo.** Con el área del triángulo equilátero de lado ℓ, $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{60-x}{4}\right)^2,$$

   es decir,

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(60-x)^2}{16}.$$

3. **Dominio.** $0 \le x \le 60$ (en los extremos todo el alambre va a una sola figura).
4. **Crítico.**

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{60-x}{8} = 0 \;\Rightarrow\; 8\sqrt{3}\,x = 18(60-x),$$

   de donde $x = \frac{1080}{18+8\sqrt{3}} = \frac{540}{9+4\sqrt{3}}$. Racionalizando:

$$x = \frac{540(9-4\sqrt{3})}{81-48} = \frac{540(9-4\sqrt{3})}{33} = \frac{180(9-4\sqrt{3})}{11}.$$

es la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Interpretación geométrica: es el área *con signo* entre la gráfica y el eje x: cuenta positiva el área sobre el eje y negativa el área bajo él.

Propiedades. Para f y g integrables y k constante:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (sirve para las funciones por tramos);
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
- si $f(x) \le g(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Valor medio (ordenada media). El valor medio de f en $[a,b]$ es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Los exámenes lo llaman también *valor promedio* u *ordenada media*, y a veces lo escriben $f(c)$.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (TVM). Si f es continua en $[a,b]$, existe al menos un $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a),$$

es decir, $f(c) = \bar{f}$. *Interpretación geométrica:* el área bajo la curva es igual a la de un rectángulo de base $b-a$ y altura $\bar{f}$ (figura del ejemplo 3A.4.1). El número c se llama *abscisa media.* Puede haber más de uno; solo valen los que están en el intervalo.

Integral indefinida y Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Si f es continua, la integral con el extremo superior variable

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es derivable y $F'(x) = f(x)$ (primera parte del TFC): F es una *antiderivada* o *primitiva* de f. Todas las antiderivadas difieren en una constante; su familia es la integral indefinida, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. La segunda parte del TFC da la regla para calcular integrales definidas sin límites:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left.F(x)\right|_a^b = F(b) - F(a).$$

Con la regla de la cadena, si los dos límites son funciones de x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$

Resultado: se cumplen las dos hipótesis y la tesis se cumple en $c = \frac{29}{4}$; la tangente en $\left(\frac{29}{4}, \frac{3}{2}\right)$ es paralela a la secante.

Ejercicio 2C.5.2 · Rolle con un polinomio de grado 4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 4.

Sea $f(x) = 2 - 4x^2 + x^4$. Determine si f satisface el teorema de Rolle en el intervalo $\left[1, \sqrt{3}\right]$ y, en caso afirmativo, obtenga los valores del intervalo en los que se cumple.

Resolución.

1. **Continuidad en $\left[1,\sqrt{3}\right]$.** Es un polinomio. Se cumple.
2. **Derivabilidad en $\left(1,\sqrt{3}\right)$.** $f'(x) = 4x^3 - 8x$ existe para toda x. Se cumple.
3. **Valores en los extremos.** $f(1) = 2 - 4 + 1 = -1$ y $f(\sqrt{3}) = 2 - 12 + 9 = -1$. Son iguales: se cumple.
4. **Tesis:** $f'(c) = 4c(c^2 - 2) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0,\ c = \pm\sqrt{2}$. Solo $\sqrt{2} \approx 1.41$ está en $\left(1,\sqrt{3}\right) \approx (1, 1.73)$.
5. En $c = \sqrt{2}$ la tangente es horizontal: $f(\sqrt{2}) = 2 - 8 + 4 = -2$.

Resultado: se cumplen las tres hipótesis y el teorema se verifica en $c = \sqrt{2}$.

Ejercicio 2C.5.3 · Raíz cúbica: tangente vertical

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 5.

Para $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ obtenga, si existen: a) los intervalos donde f es creciente o decreciente; b) los máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Trace la gráfica de f.

Resolución.

1. La raíz cúbica está definida para todo real: dominio $\mathbb{R}$, y f es continua.
2. $f(x) = (x-1)^{1/3}$, así que

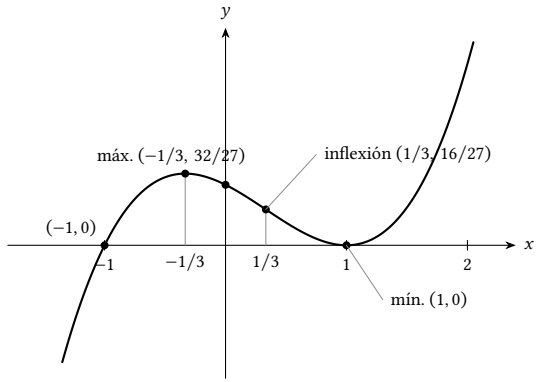
$$f'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

   No se anula nunca y no existe en $x = 1$: único valor crítico, $x = 1$.
3. a) El denominador es positivo (raíz cúbica de un cuadrado): $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$. Como f es continua en $x = 1$, es creciente en todo $\mathbb{R}$.
4. b) f' no cambia de signo en $x = 1$: no hay máximos ni mínimos relativos. Como $f'(x) \to +\infty$ cuando $x \to 1$, en $(1,0)$ la tangente es vertical.
5. c) Segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

   Para $x < 1$, $(x-1)^5 < 0$ y su raíz cúbica también: $f'' > 0$, cóncava hacia arriba. Para $x > 1$: $f'' < 0$, cóncava hacia abajo.
6. La concavidad cambia en $x = 1$ y f es continua ahí: $(1,0)$ es punto de inflexión, con tangente vertical.
7. Puntos para la gráfica: $f(-7) = -2$, $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, $f(9) = 2$.

```
print(infl, f.subs(x, infl[0]))
# [-1, 3] [11/3, -7]   y   [1] -5/3
assert crit == [-1, 3] and infl == [1]
assert f.subs(x, infl[0]) == Rational(-5, 3)
```

Resultado: a) creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ y $(1, \infty)$, decreciente en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; b) máximo relativo $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$, mínimo relativo $f(1) = 0$; c) en $[-1, 1]$, máximo absoluto $\frac{32}{27}$ en $x = -\frac{1}{3}$ y mínimo absoluto 0, en $x = -1$ y en $x = 1$.

Ejercicio 2C.5.5 · Función racional

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.

Dada $f(x) = \frac{8x}{(x-2)^2}$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) los puntos de inflexión y la concavidad de su gráfica.

Resolución.

1. Dominio: $x \neq 2$. En $x = 2$ hay asíntota vertical y, como el grado del denominador es mayor, $y = 0$ es asíntota horizontal.
2. Primera derivada (se simplifica un factor $x - 2$):

$$f'(x) = \frac{8(x-2)^2 - 16x(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8(x-2) - 16x}{(x-2)^3} = -\frac{8(x+2)}{(x-2)^3}.$$

   Crítico: $x = -2$ ($x = 2$ no está en el dominio, pero sí separa intervalos).
3. Signos (valores de prueba -3, 0, 3):

	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$-8(x+2)$	$+$	$-$	$-$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$

4. b) En $x = -2$, f' pasa de $-$ a $+$: mínimo relativo $f(-2) = \frac{-16}{16} = -1$. No hay máximo relativo.
5. c) Derivando $-8(x+2)(x-2)^{-3}$:

$$f''(x) = -8\,\frac{(x-2) - 3(x+2)}{(x-2)^4} = \frac{16(x+4)}{(x-2)^4}.$$

   El denominador es positivo: $f'' < 0$ si $x < -4$ y $f'' > 0$ si $-4 < x < 2$ o $x > 2$.

Resultado: a) $x = \frac{\pi}{4}$; b) máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $x = \frac{\pi}{4}$, mínimo absoluto -1 en $x = -\frac{\pi}{2}$; c) $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 171.

2C.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar los críticos donde f' no existe.** En $\sqrt[3]{x-1}$ o $x^{2/3}$, el crítico no sale de $f' = 0$, sino del denominador de f'.
2. **Llamar extremo a todo crítico.** Si f' no cambia de signo (x^3 en 0, $\sqrt[3]{x-1}$ en 1) no hay extremo.
3. **Llamar inflexión a todo cero de f''.** Hay que comprobar que f'' cambia de signo: x^4 tiene $f''(0) = 0$ y es cóncava hacia arriba en todas partes.
4. **Inflexión fuera del dominio.** En $\frac{8x}{(x-2)^2}$, $x = 2$ separa intervalos de signo, pero ahí no hay punto de la gráfica.
5. **Dar solo la abscisa.** «Valor máximo» es $f(c)$; «punto de inflexión» son las coordenadas $(c, f(c))$.
6. **Rolle y valor medio sin revisar hipótesis.** Cada hipótesis se escribe y se califica: «se cumple» o «no se cumple». Y c debe estar en el intervalo *abierto*.
7. **Extremos absolutos sin los extremos del intervalo.** En $[a, b]$ siempre se evalúan $f(a)$ y $f(b)$.
8. **Optimación con dos variables.** Si no se usa la restricción para dejar una sola variable, la derivada no tiene sentido.
9. **No justificar el máximo o el mínimo.** Un crítico no basta: segunda derivada, cambio de signo o comparación con los extremos del dominio.
10. **Contar mal las caras o los tramos.** Un envase sin tapa no lleva πr^2 dos veces; el perímetro de un sector lleva dos radios más el arco.

2C.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- Valor medio: f continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a, b)$.
- Weierstrass: continua en $[a, b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- $f' > 0$: crece · $f' < 0$: decrece · $f'' > 0$: cóncava $\cup$ · $f'' < 0$: cóncava $\cap$.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a, b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ · sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}$, $l = r\theta$ · cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi rh$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

4. **Crítico:** $P'(r) = 2 - \frac{16}{r^2} = 0 \Rightarrow r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$ (la raíz negativa no tiene sentido).
5. **Justificación:** $P''(r) = \frac{32}{r^3} > 0$ para $r > 0$: mínimo, y absoluto, pues es el único crítico.
6. Arco: $l = \frac{16}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Ángulo central: $\theta = \frac{l}{r} = 2$ rad. Perímetro: $P = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

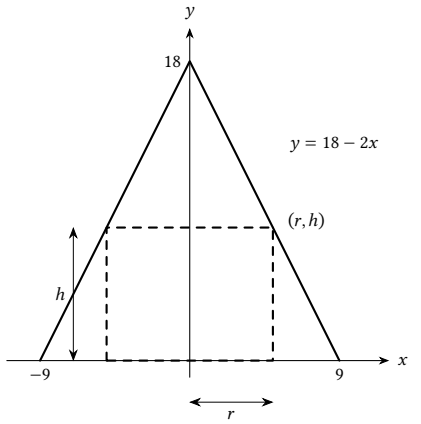
Resultado: $r = 2\sqrt{2}$ m ≈ 2.83 m y $l = 4\sqrt{2}$ m (ángulo central de 2 rad); perímetro mínimo $8\sqrt{2}$ m.

Ejercicio 2C.5.7 · Cilindro inscrito en un cono

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 6.

Calcule las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en un cono de radio $R = 9$ cm y altura $H = 18$ cm.

Resolución.



1. **Variables.** Radio r y altura h del cilindro. En el corte vertical, la generatriz del cono es la recta por $(9, 0)$ y $(0, 18)$: $y = 18 - 2x$.
2. **Restricción.** La esquina (r, h) del cilindro toca la generatriz: $h = 18 - 2r$ (o, con triángulos semejantes, $\frac{h}{18} = \frac{9-r}{9}$).
3. **Función objetivo:** $V = \pi r^2 h = \pi r^2(18 - 2r) = \pi(18r^2 - 2r^3)$, con $0 < r < 9$.
4. **Crítico:** $V'(r) = \pi(36r - 6r^2) = 6\pi r(6 - r) = 0 \Rightarrow r = 6$.
5. **Justificación:** $V''(r) = \pi(36 - 12r)$, $V''(6) = -36\pi < 0$: máximo.
6. $h = 18 - 12 = 6$ y $V = \pi \cdot 36 \cdot 6 = 216\pi$.

Resultado: radio 6 cm y altura 6 cm; volumen máximo 216π cm^3.

Ejercicio 2C.5.8 · Envase cilíndrico sin tapa

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2019-2, problema 4.

Se quiere construir un envase de 1500 cm^3 con forma de cilindro circular recto sin tapa. Calcule el radio y la altura del envase que emplean la menor cantidad de material.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«intervalos donde es creciente o decreciente», «máximos y mínimos relativos», «valores críticos»	signo de f'	2C.3.2
«cóncava hacia arriba o hacia abajo», «puntos de inflexión», «criterio de la segunda derivada»	signo de f''	2C.3.3
«trazar la gráfica», «bosquejar»	tabla de variación	2C.3.4
raíces o potencias fraccionarias: $\sqrt[3]{x-1}$, $x^{2/3}$	críticos donde f' no existe	2C.3.4
«máximo y mínimo absolutos» en $[a,b]$	críticos y extremos del intervalo	2C.3.5
«dimensiones para que el área (volumen) sea máxima», «material mínimo», «costo mínimo»	optimación	2C.3.6
«obtener a y b para que haya un punto de inflexión en (x_0, y_0)»	dos ecuaciones	2C.3.7

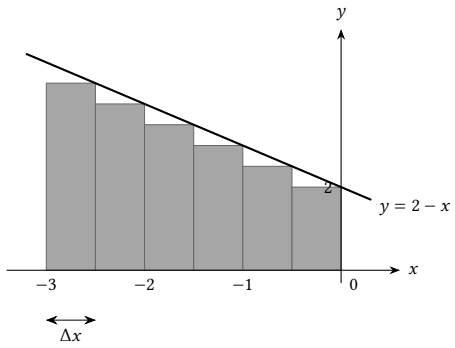
2C.3 Procedimientos

2C.3.1 Teoremas de Rolle y del valor medio

1. Escribe las hipótesis del teorema que pide el enunciado y revisa **una por una**, terminando cada una con «se cumple» o «no se cumple»:
   - **Continuidad en $[a,b]$:** polinomios, sen y cos son continuos siempre; un cociente, donde el denominador no se anula; una raíz par, donde el radicando es ≥ 0.
   - **Derivabilidad en (a,b):** calcula f' y revisa dónde no existe (denominador cero, raíz de cero en el denominador).
   - **Solo Rolle:** $f(a) = f(b)$**.** Evalúa los dos extremos.
2. Si una hipótesis no se cumple, el teorema no se puede aplicar (puede o no existir c): dilo y termina.
3. Si se cumplen, plantea $f'(c) = 0$ (Rolle) o $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (valor medio) y resuelve.
4. Conserva solo las soluciones del intervalo *abierto* (a,b).

2C.3.2 Crecimiento y extremos relativos

1. Dominio de f.
2. Deriva y **factoriza** f'. Valores críticos: los ceros de f' y los puntos del dominio donde f' no existe.
3. Los críticos y los puntos fuera del dominio parten la recta en intervalos. Toma un valor de prueba en cada uno y anota el signo de f'.
4. $f' > 0$: creciente; $f' < 0$: decreciente.
5. Criterio de la primera derivada en cada crítico; evalúa f en los extremos: el valor máximo o mínimo es $f(c)$.



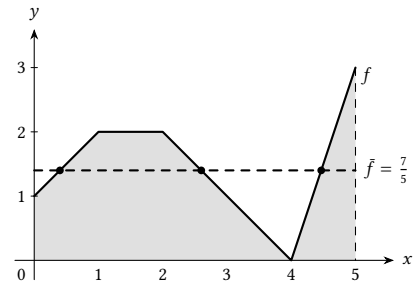
Con $n = 6$ (figura) los rectángulos quedan por debajo de la recta, porque f decrece y se toma el extremo derecho; al crecer n el error $\frac{9}{2n}$ tiende a cero.

3A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3A.5.1 · Valor medio de una función dada por su gráfica

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 1.

La gráfica de f en $[0,5]$ está formada por segmentos de recta que unen los puntos $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(4,0)$ y $(5,3)$ (figura). a) Calcule el valor medio de f en $[0,5]$. b) Obtenga los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)



Resolución.

1. Por tramos: $f(x) = 1 + x$ en $[0,1]$; $f(x) = 2$ en $[1,2]$; $f(x) = 4 - x$ en $[2,4]$; $f(x) = 3(x-4)$ en $[4,5]$.
2. Áreas: trapecio $\frac{1+2}{2}(1) = \frac{3}{2}$; rectángulo $2(1) = 2$; triángulo $\frac{2\cdot 2}{2} = 2$; triángulo $\frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$. Toda el área está sobre el eje:

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \tfrac{3}{2} + 2 + 2 + \tfrac{3}{2} = 7.$$

2C.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Análisis completo de una cúbica

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 5.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus valores máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia abajo o hacia arriba.

Resolución.

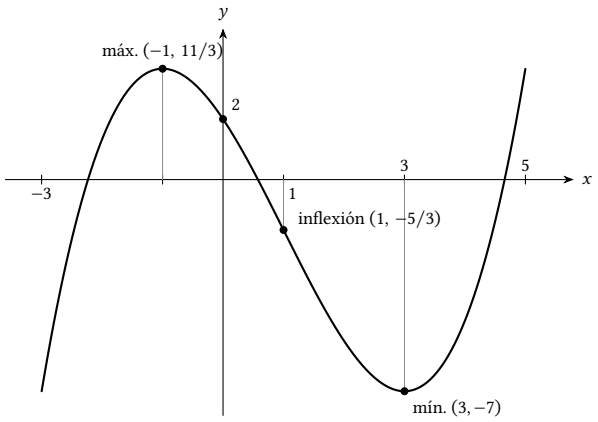
1. Polinomio: dominio $\mathbb{R}$. Primera derivada factorizada:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$$

   Valores críticos: $x = -1$ y $x = 3$.
2. Valores de f: $f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = \frac{11}{3}$ y $f(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7$.
3. Segunda derivada: $f''(x) = 2x - 2$; se anula en $x = 1$, con $f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$.
4. Tabla de variación (valores de prueba -2, 0, 2, 4):

	$x < -1$	-1		1		3	$x > 3$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\frac{11}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$

5. a) $f' > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$; $f' < 0$ en $(-1, 3)$.
6. b) En $x = -1$, f' cambia de + a − (y $f''(-1) = -4 < 0$): máximo relativo. En $x = 3$, de − a + (y $f''(3) = 4 > 0$): mínimo relativo.
7. c) $f'' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y $f'' > 0$ en $(1, \infty)$: la concavidad cambia en $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$, punto de inflexión.
8. Gráfica: además, $f(0) = 2$, $f(-3) = -7$ y $f(5) = \frac{11}{3}$.



3A.3.5 Integrales inmediatas y cambio de variable

Tabla mínima (con u función de x y $a > 0$):

- $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$; $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; $\int e^u\,du = e^u + C$.
- $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$; $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$; $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$.
- $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

1. Busca dentro del integrando una función $g(x)$ cuya derivada también aparezca (salvo una constante): $\operatorname{sen} x$ con $\cos x$; $\ln x$ con $\frac{1}{x}$; $2 - x$ con -1.
2. Haz $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, y reescribe toda la integral en u. Si sobra alguna x, el cambio no sirve.
3. Integra con la tabla y regresa a x. En una definida, o regresas a x o cambias los límites a $u(a)$ y $u(b)$.
4. Comprueba derivando el resultado.

3A.3.6 Integral con parámetro

1. Calcula la integral (o el valor medio) dejando el parámetro como letra.
2. Iguala al dato y despeja. Con logaritmos, aplica la exponencial a los dos lados; con raíces, despeja la raíz y eleva al cuadrado.
3. Revisa que el valor obtenido deje el integrando continuo en el intervalo ($\sqrt{1-x}$ pide $b < 1$; $\ln x$ en un denominador pide no pasar por $x = 1$) y que cumpla la condición del enunciado ($a > 0$).
4. Si son dos funciones con la misma ordenada media en el mismo intervalo, basta igualar las integrales: el factor $\frac{1}{b-a}$ se cancela.

3A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Valor medio y abscisa del TVM

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 1.

Calcule el valor medio de $f(x) = 2 - (x-1)^3$ en el intervalo $[0, 2]$ y obtenga el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Resolución.

1. f es un polinomio: es continua en $[0, 2]$ y el TVM se aplica.
2. Con $u = x - 1$, $\int (x-1)^3\,dx = \frac{(x-1)^4}{4}$. Entonces

$$\int_0^2 \left[2 - (x-1)^3\right] dx = \left(2x - \frac{(x-1)^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \left(4 - \tfrac{1}{4}\right) - \left(0 - \tfrac{1}{4}\right) = 4.$$

3. Valor medio: $\bar{f} = \frac{4}{2-0} = 2$.
4. TVM: $2 - (c-1)^3 = 2 \Rightarrow (c-1)^3 = 0 \Rightarrow c = 1$, que está en $[0, 2]$.
5. $\bar{f} = 2$ **y** $c = 1$**.** El rectángulo de base 2 y altura 2 tiene la misma área que la región bajo la curva: lo que la curva sobra en $[0, 1]$ le falta en $[1, 2]$.

5. **Justificación.** $A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8} > 0$ para toda x: el crítico es mínimo y, como es el único, es el mínimo absoluto en $[0, 60]$. (Comprobación: $A(0) = 225$ y $A(60) = 100\sqrt{3} \approx 173.2$, mayores que $A \approx 97.9$ en el crítico.)
6. **Otra parte:** $60 - x = \frac{660-1620+720\sqrt{3}}{11} = \frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11}$.

Resultado: para el triángulo, $\frac{180(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 33.90$ cm; para el cuadrado, $\frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11} \approx 26.10$ cm.

2C.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2C.5.1 · Valor medio con una raíz cuadrada

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

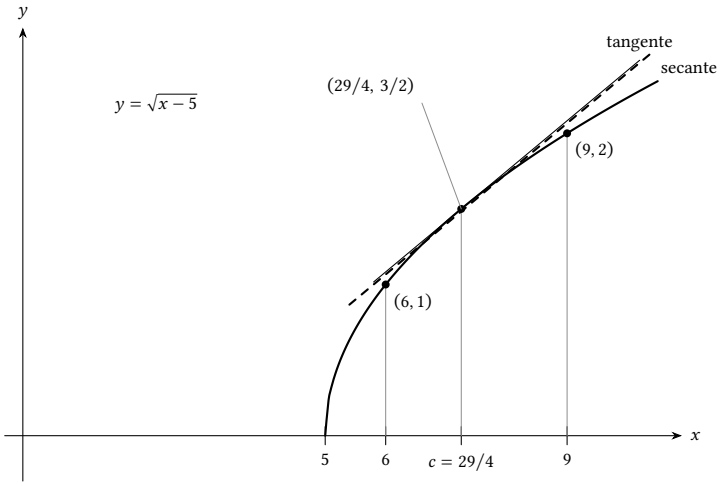
Sea $f(x) = \sqrt{x-5}$ en el intervalo $[6, 9]$. Determine si se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial y, en caso afirmativo, obtenga el o los valores de x donde se cumple la tesis.

Resolución.

1. **Continuidad en** $[6, 9]$**.** La raíz está definida y es continua para $x \geq 5$, y $[6, 9]$ está contenido ahí. Se cumple.
2. **Derivabilidad en** $(6, 9)$**.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$ existe para $x > 5$. Se cumple.
3. **Pendiente de la secante:** $f(6) = 1$, $f(9) = 2$:

$$\frac{f(9) - f(6)}{9 - 6} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. **Tesis:** $\frac{1}{2\sqrt{c-5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{c-5} = \frac{3}{2} \Rightarrow c - 5 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{29}{4} = 7.25$, que está en $(6, 9)$.



Integrales inmediatas y cambio de variable. Una integral es *inmediata* si el integrando es la derivada de una función conocida (la tabla está en 3A.3.5). El *cambio de variable* $u = g(x)$, $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ lleva $\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ a la inmediata $\int f(u)\,\mathrm{d}u$. Las integrales de la forma $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ dan $\ln|g(x)|$; de ellas salen $\int \tan x\,\mathrm{d}x$ y $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$.

Lo que el programa pide y los exámenes no preguntan. El programa incluye la *condición de integrabilidad* (toda función continua en $[a, b]$, o acotada con un número finito de discontinuidades, es integrable) y la *demostración* del TFC (se aplica el TVM a $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ y se hace $h \to 0$). Ninguna de las dos se ha preguntado en los 112 exámenes revisados; basta saber enunciarlas.

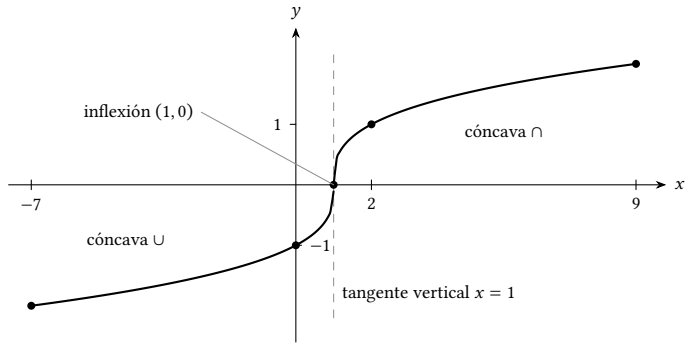
3A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcule el valor medio (valor promedio, ordenada media) de f en $[a, b]$»	Valor medio (3A.3.1)
«…y el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio», «abscisa media»	Valor medio y TVM (3A.3.1)
«La función cuya gráfica está en la figura» (rectas por tramos)	Integral por áreas (3A.3.2) y valor medio (3A.3.1)
«Mediante el límite de la suma de Riemann, calcule…»	Sumas de Riemann (3A.3.3)
«Obtenga $F'(x)$ si $F(x)$ es una integral con límite variable», «usando el Teorema Fundamental del Cálculo»	TFC con límites variables (3A.3.4)
Un integrando de la forma $f(g(x))\,g'(x)$ o $\frac{g'(x)}{g(x)}$: $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$, $\tan x$, $\frac{1}{x \ln x}$	Inmediatas y cambio de variable (3A.3.5)
«Determine a (o b) tal que la integral valga…», «para que el valor medio sea…», «para que las dos funciones tengan la misma ordenada media»	Integral con parámetro (3A.3.6)

3A.3 Procedimientos

3A.3.1 Valor medio y Teorema del Valor Medio

1. Revisa que f sea continua en $[a, b]$ (si no, el TVM no garantiza nada).
2. Calcula $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ con una antiderivada (3A.3.5) y divide entre $b - a$: eso es $\bar{f}$.
3. Para el TVM, resuelve la ecuación $f(c) = \bar{f}$.
4. Conserva solo las raíces que están en $[a, b]$ y descarta las demás diciendo por qué. Puede haber una o varias; si no queda ninguna, hay un error (el teorema garantiza al menos una).
5. Si $f(c) = \bar{f}$ no se puede despejar con funciones elementales, basta dar $\bar{f}$; el teorema asegura que c existe.



Resultado: a) creciente en $(-\infty, \infty)$, nunca decreciente; b) no tiene extremos relativos ($x = 1$ es crítico, con tangente vertical); c) cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1)$ y hacia abajo en $(1, \infty)$; inflexión en $(1, 0)$.

Ejercicio 2C.5.4 · Extremos relativos y absolutos

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 7.

Para $f(x) = (1 + x)(x - 1)^2$ obtenga: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) el máximo y el mínimo absolutos en $[-1, 1]$. Trace la gráfica.

Resolución.

1. Desarrollando, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$; dominio $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$. Críticos: $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$.
3. Signo de f': positivo en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, negativo en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, positivo en $(1, \infty)$.
4. Valores: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$ y $f(1) = 2 \cdot 0 = 0$.
5. b) En $-\frac{1}{3}$, f' pasa de + a −: máximo relativo. En 1, de − a +: mínimo relativo. (Con la segunda derivada, $f''(x) = 6x - 2$: $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ y $f''(1) = 4 > 0$.)
6. c) f es continua en $[-1, 1]$. Valores en los críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(-1) = 0, \qquad f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{32}{27}, \qquad f(1) = 0.$$

7. Para la gráfica: inflexión en $x = \frac{1}{3}$ (f'' cambia de signo), con $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$; $f(0) = 1$, $f(2) = 3$.

Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas

↑ Volver al índice

Objetivo del tema 3 (programa 2026). «Aplicar la integral definida y la integral indefinida de funciones reales al planteamiento y a la resolución de problemas geométricos y físicos mediante el análisis de sus propiedades y con apoyo de software matemático para modelar el comportamiento de sistemas ingenieriles.»

Contenido de esta parte. «Concepto de suma de Riemann empleando software matemático para la visualización del problema del cálculo del área de una región plana. Integral definida. Propiedades de la integral definida. Integral indefinida y definición de antiderivada.» «Enunciado del Teorema del valor medio del cálculo integral y su interpretación geométrica. Enunciado del Teorema fundamental del cálculo.» «Integrales indefinidas inmediatas. Cambio de variable para la obtención de la integral de una función.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 sale siempre como problema 1: valor medio y teorema del valor medio en 41 exámenes, sumas de Riemann en 7, teorema fundamental en 4 e integral con un parámetro en 2. En el Plan 2016 sale en 34 de los 60, como problema 2: valor medio 25, integral con parámetro 6, teorema fundamental 2 y Riemann 1.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3A.1 y los procedimientos 3A.3.1, 3A.3.4 y 3A.3.5 (30 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 3A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 3A.5 con cronómetro (12 min cada uno).
  4. Las sumas de Riemann con la computadora (sección 3A.10) son lo nuevo del programa: léelas, pero en el examen el límite de la suma se calcula a mano.

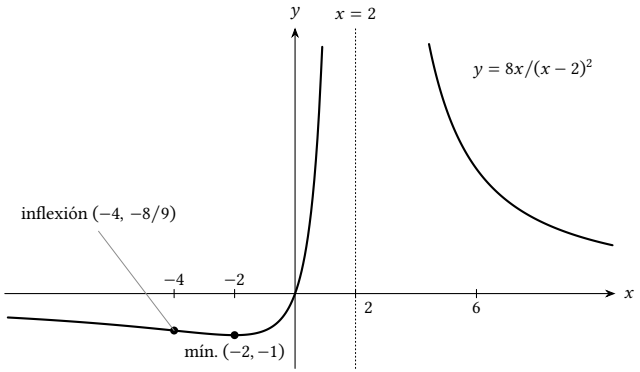
3A.1 Conceptos y expresiones

El problema del área y las sumas de Riemann. Para medir el área bajo la gráfica de f en $[a, b]$, el intervalo se parte en n subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, con puntos $x_i = a + i\,\Delta x$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Sobre cada subintervalo se levanta un rectángulo de altura $f(x_i)$. La suma de sus áreas es una *suma de Riemann*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Integral definida. Si el límite de las sumas de Riemann existe cuando $n \to \infty$, ese límite

6. Inflexión en $x = -4$: $f(-4) = \frac{-32}{36} = -\frac{8}{9}$. En $x = 2$ no hay inflexión: no está en el dominio y f'' no cambia de signo.

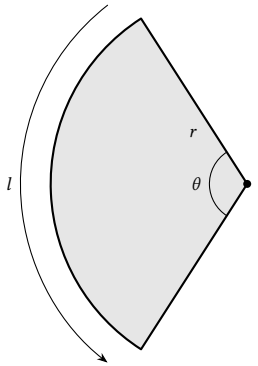


Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, creciente en $(-2, 2)$; b) mínimo relativo $f(-2) = -1$, sin máximos; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$, hacia arriba en $(-4, 2)$ y en $(2, \infty)$; inflexión en $\left(-4, -\frac{8}{9}\right)$.

Ejercicio 2C.5.6 · Sector circular de perímetro mínimo

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 5.

Un sector circular de radio r y arco l tiene área 8 m^2. Determine las dimensiones del sector cuyo perímetro es mínimo. (Área del sector: $\frac{rl}{2}$.)



Resolución.

1. **Función objetivo.** El perímetro son dos radios y el arco: $P = 2r + l$.
2. **Restricción.** $\frac{rl}{2} = 8 \;\Rightarrow\; l = \frac{16}{r}$.
3. **Una variable:** $P(r) = 2r + \frac{16}{r}$, con $r > 0$.

2C.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Análisis de la gráfica:** dominio, f' factorizada, críticos, f'' factorizada, candidatos a inflexión; todo en una sola tabla de variación.
2. Contesta cada inciso con intervalos y con valores $f(c)$ o coordenadas, en el orden del enunciado.
3. Para la gráfica, marca extremos, inflexiones, $f(0)$ y asíntotas antes de unir con la curva.
4. **Rolle o valor medio:** tres (o dos) renglones de hipótesis con «se cumple» y después la ecuación para c.
5. **Optimación:** dibujo con variables, escribe la plantilla completa y no olvides justificar y dar unidades.

Si no se llega al final, la tabla de signos bien hecha o la función objetivo en una variable ya valen buena parte del problema.

2C.10 Lo que agrega el Plan 2026: optimización en ingeniería y con software

Los problemas de optimación de esta parte son el modelo de la Parte 1A más un paso: derivar, igualar a cero y justificar que el crítico es el máximo o el mínimo que se pide. El programa pide además visualizar el resultado con software: graficar la función objetivo en su dominio y ver que el extremo está donde dice el cálculo, o hacer la tabla de variación con la computadora, como en el recuadro. La gráfica no sustituye a la justificación (criterio de la primera o de la segunda derivada, o comparación con los extremos del intervalo), pero detecta errores de planteamiento: un máximo que no se ve, o un dominio mal escrito.

Ejercicio propuesto 2C.10.1 · Terreno junto a un río

Con 240 m de cerca se quiere cercar un terreno rectangular que colinda con un río; el lado del río no lleva cerca. ¿Qué dimensiones dan el área máxima y cuánto vale?

Resultado: 60 m en los dos lados perpendiculares al río y 120 m en el lado paralelo; área máxima 7200 m^2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

Ejercicio propuesto 2C.10.2 · La caja de volumen máximo

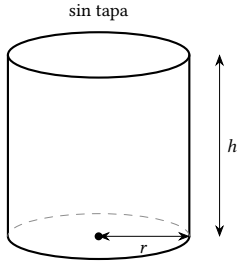
Para la caja del ejercicio 1A.10.2, con $V(x) = x(30 - 2x)^2$ y $0 < x < 15$, obtenga el valor de x que da el volumen máximo y ese volumen.

Resultado: $x = 5$ cm; $V_{\text{máx}} = 2000$ cm^3.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

Con la computadora

```
# Tabla de variacion del primer ejemplo:
# f(x) = x^3/3 - x^2 - 3x + 2
from sympy import Rational, diff, solve, symbols
x = symbols("x")
f = Rational(1, 3)*x**3 - x**2 - 3*x + 2
crit = solve(diff(f, x), x)
infl = solve(diff(f, x, 2), x)
print(crit, [f.subs(x, c) for c in crit])
```



Resolución.

1. **Función objetivo.** Material: base más pared lateral (sin tapa): $S = \pi r^2 + 2\pi rh$.
2. **Restricción.** $\pi r^2 h = 1500 \;\Rightarrow\; h = \frac{1500}{\pi r^2}$.
3. **Una variable:** $S(r) = \pi r^2 + \frac{3000}{r}$, con $r > 0$.
4. **Crítico:**

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{3000}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{1500}{\pi} \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}} = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}.$$

5. **Justificación:** $S''(r) = 2\pi + \frac{6000}{r^3} > 0$: mínimo.
6. **Altura:** como $\pi r^3 = 1500$, $h = \frac{1500}{\pi r^2} = \frac{\pi r^3}{\pi r^2} = r$.

Resultado: $r = h = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}$ cm ≈ 7.82 cm.

2C.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2C**.

Ejercicio propuesto 2C.6.1

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 5.

Para $f(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo; c) sus máximos y mínimos relativos. Trace su gráfica.

Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$, creciente en $(-2, 1)$; b) cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, hacia abajo en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, inflexión en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{12}\right)$; c) mínimo relativo $f(-2) = -\frac{13}{3}$, máximo relativo $f(1) = \frac{1}{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 169.

Ejercicio propuesto 2C.6.2

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 5.

Calcule el área máxima que puede tener un rectángulo de dimensiones variables inscrito en la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

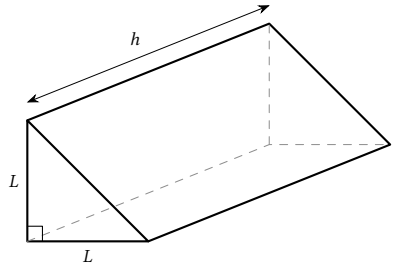
Resultado: 24 unidades de área (rectángulo de $4\sqrt{2}$ por $3\sqrt{2}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 169.

Ejercicio propuesto 2C.6.3

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 6.

Se fabricará un recipiente con forma de prisma triangular recto. Su sección es un triángulo rectángulo isósceles de catetos L y su longitud es h, como en la figura. Calcule el valor de L que hace mínima la cantidad de material, si el recipiente debe tener una capacidad de 3 m^3. Considere el prisma cerrado: dos caras triangulares y tres rectangulares.



Resultado: $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}}$ m ≈ 2.17 m (con $h = (2 - \sqrt{2})L \approx 1.27$ m).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 170.

Ejercicio propuesto 2C.6.4

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 5.

Un triángulo rectángulo está formado, en el primer cuadrante, por los ejes coordenados y una recta que pasa por el punto $(2, 3)$. Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo de área mínima.

Resultado: $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 6)$; área mínima 12.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 170.

Ejercicio propuesto 2C.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo A, problema 4.

Obtenga el valor de a y el de b tales que la gráfica de $g(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un punto de inflexión en $A(1, 2)$.

Resultado: $a = -1$, $b = 3$: $g(x) = -x^3 + 3x^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 171.

Ejercicio propuesto 2C.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 4.

Para $m(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, con $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$: a) obtenga sus valores críticos; b) calcule sus valores extremos absolutos; c) obtenga su punto de inflexión; d) trace su gráfica.