| Función | Derivada | Función | Derivada |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen} u$ | $\cos u\, u'$ | $\cos u$ | $-\operatorname{sen} u\, u'$ |
| $\tan u$ | $\sec^2 u\, u'$ | $\cot u$ | $-\csc^2 u\, u'$ |
| $\sec u$ | $\sec u \tan u\, u'$ | $\csc u$ | $-\csc u \cot u\, u'$ |

**Trigonométricas inversas.** Los exámenes escriben ang sen $x$, ang tan $x$ (en otros textos, «arc sen» o $\operatorname{sen}^{-1} x$).

| Función | Derivada | Función | Derivada |
|---|---|---|---|
| ang sen $u$ | $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | ang cos $u$ | $-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| ang tan $u$ | $\dfrac{u'}{1+u^2}$ | ang cot $u$ | $-\dfrac{u'}{1+u^2}$ |
| ang sec $u$ | $\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$ | ang csc $u$ | $-\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$ |

El valor absoluto de ang sec y ang csc corresponde al recorrido $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de ang sec.

Muchos libros eligen otro recorrido y escriben $u\sqrt{u^2-1}$ sin valor absoluto; para $u > 1$ las dos fórmulas coinciden.

**Derivada de la función inversa.** Si $f$ es derivable e invertible y $f'(x) \neq 0$, la inversa es derivable y

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Por ejemplo, para $f(x) = x^3 + x$ se tiene $f(1) = 2$ y $f'(1) = 4$, así que $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{4}$ sin despejar la inversa. Así se obtienen las fórmulas de las inversas: si $y = \text{ang sen } x$, entonces $x = \operatorname{sen} y$, $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Derivación implícita.** Si $y$ está definida por una ecuación $F(x, y) = 0$ sin despejar, se deriva cada término respecto a $x$ tratando $y$ como función de $x$: $\frac{d}{dx} y^2 = 2y\, y'$, $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} y = \cos y\, y'$. Después se despeja $y'$.

**Derivación paramétrica.** Si $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

La segunda derivada **no** es $\frac{y''(t)}{x''(t)}$: se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a $t$ y se divide otra vez entre $\frac{dx}{dt}$.





### Ejercicio propuesto 1A.6.2

*Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 1.*

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Obtenga las funciones $f \circ g$ y $f \cdot g$ y determine el dominio y el recorrido de cada una.

**Resultado:** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$, dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[1, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}\,(x^2+1)$, dominio $[0, \infty)$, recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 160.

### Ejercicio propuesto 1A.6.3

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 2.*

Obtenga el dominio, el recorrido y la regla de correspondencia de la función inversa de $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+2}$.

**Resultado:** $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-3x}$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ y recorrido $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 160.

### Ejercicio propuesto 1A.6.4

*Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 1.*

Dada la función en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 3\cos t, & x \geq 0, \\ y = 4\operatorname{sen} t, & y \geq 0, \end{cases}$$

determine su función inversa, si es que tiene, su dominio y su recorrido, y trace la gráfica de ambas funciones.

**Resultado:** $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$; $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, con dominio $[0,4]$ y recorrido $[0,3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 161.

### Ejercicio propuesto 1A.6.5

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo C, problema 5.*

Obtenga el dominio y el recorrido y trace la gráfica de la función

$$f: \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2\operatorname{senh} t \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

**Resultado:** $y = 2\sqrt{x^2-1}$, con dominio $[1, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 161.

# Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

↑ Volver al índice

**Objetivo del tema 2 (programa 2026).** «Aplicar la derivada de funciones reales al planteamiento y a la resolución de problemas físicos, geométricos y de optimización mediante el análisis de sus propiedades y con apoyo de software matemático para modelar el comportamiento de sistemas ingenieriles.»

**Contenido de esta parte.** «Derivadas de funciones polinómicas y trascendentes. Interpretación geométrica de la derivada. Regla de la cadena. Derivadas de orden superior. Concepto e interpretación geométrica de diferencial. Cálculo de diferenciales. Interpretación física de la derivada como una razón de cambio.» «Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a una curva. Aplicación física de la derivada como razón de cambio de funciones relacionadas.»

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es la parte que más sale. En los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010, 20 problemas, de uno a tres por examen: cálculo de derivadas (implícita, paramétrica, orden superior) 8, recta tangente y normal 5, razón de cambio 4, derivabilidad de una función por partes 2 y ángulo entre curvas 1. En 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016, 44 problemas: tangente y normal 16, cálculo de derivadas 14, razón de cambio 9, ángulo entre curvas 3 y derivabilidad 2. La derivada por definición sale en los segundos parciales.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Aprende las tablas de derivadas de la sección 2A.1 (30 min), con las del logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas: sin ellas no sale nada.
  2. Lee las plantillas 2A.3.4 (implícita) y 2A.3.6 (tangente y normal) y sigue el primer ejemplo de la sección 2A.4 tapando la resolución.
  3. Lee la plantilla de razón de cambio (2A.3.8) y sigue el segundo ejemplo.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 2A.5 con cronómetro: 15 min cada uno. Agrega la derivación logarítmica (2A.3.10).

## 2A.1 Conceptos y expresiones

**Definición.** La derivada de $f$ en $x$ es el límite del cociente de incrementos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si existe. Otras notaciones: $y'$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $D_x f$. Si el límite existe en $x_0$, se dice que $f$ es *derivable* en $x_0$.





## 1A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe primero el dominio y el recorrido de la función dada: casi todos los problemas los piden y la inversa sale de ellos.
2. Completa el cuadrado en cada raíz y nombra la cónica: la gráfica y el recorrido salen de ahí.
3. Inversa: inyectividad (una frase), despeje con el signo justificado, intercambio, $D_{f^{-1}} = R_f$.
4. Dibuja $f$, la recta $y = x$ y $f^{-1}$ en los mismos ejes, con los extremos marcados.
5. Comprueba con un punto: $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$.
6. Modelo: figura, variables, relación, sustitución y dominio, en ese orden.

Si no se termina el despeje, el dominio, el recorrido y la gráfica de $f$ ya valen buena parte del problema.

## 1A.10 Lo que agrega el Plan 2026: representación implícita y modelos físicos

### *1A.10.1 Cuatro maneras de dar una función*

El programa 2026 nombra las cuatro representaciones de una función. Tres ya aparecieron en esta parte:

- **Explícita:** $y = f(x)$, con la variable dependiente despejada: $y = 3 - x^2$.
- **Paramétrica:** $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t$ en un intervalo (sección 1A.1.6).
- **Con varias reglas de correspondencia:** la función por partes (sección 1A.1.3).
- **Implícita:** una ecuación $F(x, y) = 0$ que liga a $x$ y a $y$ sin despejar, más una condición que elige *una* $y$ para cada $x$. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 25$ no es una función (la recta vertical $x = 3$ corta la circunferencia en $(3, 4)$ y en $(3, -4)$), pero $x^2 + y^2 = 25$ con $y \geq 0$ sí lo es: es la semicircunferencia $y = \sqrt{25 - x^2}$, con dominio $[-5, 5]$ y recorrido $[0, 5]$.

Para pasar de la forma implícita a la explícita se despeja $y$ y la condición decide el signo de la raíz, igual que al despejar una inversa (procedimiento 1A.3.6). Si no se puede despejar (como en $y^5 + y + x = 0$), la función existe de todos modos y se estudia con la derivación implícita (Unidad 2A).

### *1A.10.2 Funciones como modelos físicos*

Un *modelo* es una función que describe un fenómeno: su regla sale de una ley física o de los datos, y su dominio, de lo que tiene sentido físicamente. Además de los modelos geométricos de la sección 1A.1.10, en ingeniería aparecen siempre estos:

- **Crecimiento y decaimiento exponencial:** $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ ($k > 0$ crece, $k < 0$ decae): población, interés continuo, carga de un capacitor que se descarga, desintegración radiactiva. La *vida media* es el tiempo en que $Q$ baja a la mitad: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|}$.
- **Ley de enfriamiento de Newton:** un cuerpo a temperatura $T_0$ en un ambiente a $T_a$ se enfría según $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$, con $k > 0$.
- **Catenaria:** un cable que cuelga entre dos postes toma la forma $y = a \cosh \frac{x}{a}$ (sección 1A.1.9).
- **Movimiento:** la posición $s(t)$ de un móvil; su derivada es la velocidad (Unidad 2A).

6. **Usar grados.** $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ solo con $x$ en radianes.
7. $\sqrt{x^2} = x$ **con** $x \to -\infty$**.** Es $|x| = -x$; el signo del resultado cambia.
8. **Un solo lateral en un límite infinito.** Con $\frac{k}{0}$ hay que revisar los dos lados; si dan $+\infty$ y $-\infty$, el límite no existe.
9. **Asíntota donde hay un hueco.** Si el factor que anula el denominador se cancela, no hay asíntota vertical: hay discontinuidad evitable.
10. **Continuidad con una sola condición.** Igualar los laterales no basta: hay que revisar también que $f(c)$ esté definida y coincida.
11. **Usar L'Hôpital.** El enunciado lo prohíbe; un límite resuelto así no cuenta.

### 1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \cdot (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \operatorname{mcm}(p, q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1 \cdot \frac{\tan u}{u} \to 1 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\operatorname{sen} ku}{u} \to k \cdot \frac{\operatorname{sen} au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en $c$: $f(c)$ definida · $\lim_{x\to c} f(x)$ existe · $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$ · $\tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty$ · $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

### 1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Sustituye y escribe la forma que sale ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{k}{0}$ o un número).
2. Elige la técnica por el aspecto: polinomios, factorizar; raíces cuadradas, racionalizar; raíces de distinto índice, $x = t^m$; trigonométricas, $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$; infinito, mayor potencia.
3. Al cancelar el factor $(x - a)$, sustituye otra vez y simplifica el radical al final.
4. Con valor absoluto, función por partes o $\frac{k}{0}$, calcula los dos laterales por separado.
5. En continuidad, escribe las tres condiciones en cada punto de cambio, con «se cumple» o «no se cumple», y despeja las constantes.
6. Si piden la gráfica, dibuja primero asíntotas e intersecciones y después la curva.

Un inciso con la forma indeterminada identificada y la técnica correcta planteada ya vale parte del problema aunque no se termine el álgebra.

### 1B.10 Lo que agrega el Plan 2026: el límite visto con una tabla

**Interpretación geométrica.** $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dice que los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica se acercan al punto $(a, L)$ cuando $x$ se acerca a $a$, por los dos lados, aunque en $x = a$ la función no esté definida o valga otra cosa (un hueco en la gráfica). El programa pide ilustrarlo con software: se evalúa la función en valores cada vez más cercanos a $a$ y se



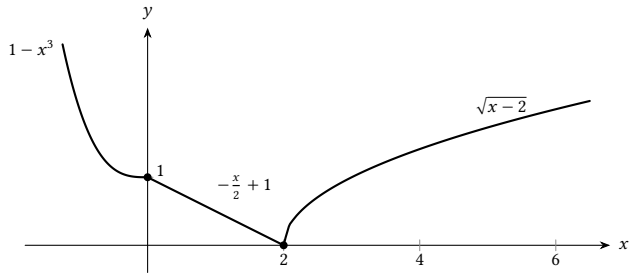


→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

**Con la computadora**

```
# Dominio, recorrido e inversa del ejemplo resuelto:
# F(x) = 3 + raiz(x^2 + 4x), x < -4
from sympy import Interval, oo, solve, sqrt, symbols
from sympy.calculus.util import function_range
x, y = symbols("x y", real=True)
F = 3 + sqrt(x**2 + 4*x)
R = function_range(F, x, Interval.open(-oo, -4))
print(R)                          # Interval.open(3, oo)
inv = [s for s in solve(y - F, x) if s.subs(y, 5) < -4]
print(inv)       # [-sqrt((y - 3)**2 + 4) - 2]
assert R == Interval.open(3, oo)
assert inv == [-sqrt((y - 3)**2 + 4) - 2]
```

Con `sympy.plot(F, (x, -10, -4))` se dibuja la gráfica (hace falta la biblioteca matplotlib).




**Resultado:** $m = 1$, $n = 2$.

### 1B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1B**.

#### Ejercicio propuesto 1B.6.1

*Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 2.*

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le a, \\ (x-2)^2 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Determine el valor de la constante $a$ que hace que $f$ sea continua.

**Resultado:** $a = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

#### Ejercicio propuesto 1B.6.2

*Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 4.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\csc 4x}{\cot 3x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{2x-16}.$$

**Resultado:** a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

#### Ejercicio propuesto 1B.6.3

*Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 3.*

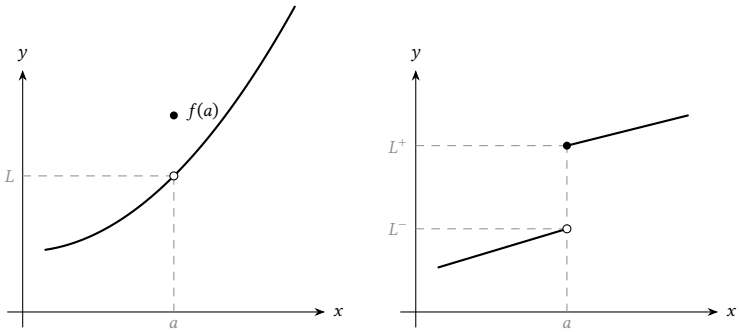
Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule, si existen,

$$\text{a) } \lim_{x\to 4} \frac{1-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{5+x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x}.$$

**Resultado:** a) $-3$; b) 1.







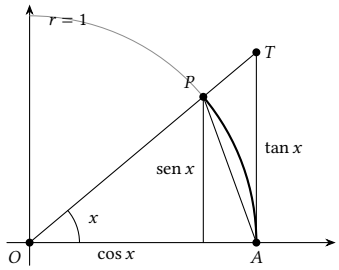

**Teoremas sobre límites.** Si $\lim f = L$ y $\lim g = M$, entonces el límite de la suma, la diferencia y el producto es $L+M$, $L-M$ y $LM$; el del cociente es $\frac{L}{M}$ si $M \neq 0$; y $\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{L}$ (con $L \ge 0$ si $n$ es par). En consecuencia, los polinomios, las racionales en los puntos de su dominio, las raíces, las trigonométricas, la exponencial y el logaritmo se resuelven por **sustitución directa**.

**Formas indeterminadas.** Cuando la sustitución da $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$, el resultado no se conoce todavía: hay que transformar la expresión (factorizar, racionalizar, cambiar de variable, usar un límite notable) hasta que la sustitución dé un número. En cambio, $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ *no* es indeterminada: el límite es infinito (o no existe), y se estudia con los laterales.

**El límite trigonométrico fundamental.** Con $x$ en radianes,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

En el círculo unitario, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, el triángulo $OAP$, el sector $OAP$ y el triángulo $OAT$ están uno dentro del otro, así que sus áreas cumplen $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$. Al dividir entre $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ e invertir, $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$; como $\cos x \to 1$, el cociente queda atrapado y tiende a 1 (teorema del emparedado).




De ese límite salen los demás (todos con $u \to 0$):

$$\frac{\tan u}{u} \to 1, \qquad \frac{u}{\operatorname{sen} u} \to 1, \qquad \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2}, \qquad \frac{1-\cos u}{u} \to 0.$$

**Resultado:** $f$ es continua en todos los reales.

### Ejercicio 1B.5.6 · Cosecante entre cotangente, exponenciales y un límite infinito

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, problema 2.*

Determine, si existe, el valor de cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\csc 2x}{\cot 3x}, \quad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}.$$

**Resolución.**

**a)** Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 2x}{\cot 3x}=\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x\cos 3x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen}2x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\to\frac{3}{2}.$$

**b)** Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre $e^{2x}$, la exponencial de mayor exponente:

$$\frac{1-e^{-4x}}{1+e^{-4x}}\to\frac{1-0}{1+0}=1.$$

La expresión es $\tanh 2x$, que tiende a 1.

**c)** Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se factoriza: $\frac{x(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{x}{x-3}$ si $x\neq 3$. Al sustituir queda $\frac{3}{0}$: límite infinito.
2. Si $x\to 3^+$, $x-3\to 0^+$ y el cociente tiende a $+\infty$. Si $x\to 3^-$, $x-3\to 0^-$ y tiende a $-\infty$.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe (la recta $x=3$ es asíntota vertical).

**Resultado:** a) $\frac{3}{2}$; b) 1; c) no existe ($+\infty$ por la derecha, $-\infty$ por la izquierda).

### Ejercicio 1B.5.7 · Asíntotas y gráfica con límites

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo A, problema 5.*

Mediante los límites infinitos y los límites al infinito, trace la gráfica de $f(x)=\frac{x-2}{x^2-9}$, con sus asíntotas.

**Resolución.**

1. **Dominio:** $x^2-9=(x-3)(x+3)$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. No hay factores comunes.
2. **Asíntotas verticales.** En $x=3$ el numerador vale 1; en $x=-3$ vale $-5$. Signos de los laterales:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\frac{1}{(0^+)(6)}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -3^+}f(x)=\frac{-5}{(-6)(0^+)}=+\infty, \quad \lim_{x\to -3^-}f(x)=-\infty.$$

   Las rectas $x=3$ y $x=-3$ son asíntotas verticales.
3. **Asíntota horizontal.** Se divide entre $x^2$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=0.$$

   La recta $y=0$ (el eje $x$) es asíntota horizontal en los dos lados.





## 1B.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| cualquier límite | sustituir primero | 1B.3.1 |
| cociente de polinomios que da $\frac{0}{0}$: $\frac{x^3+1}{x+1}$ | factorizar y cancelar | 1B.3.2 |
| $\frac{0}{0}$ con raíces cuadradas: $\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}$ | racionalizar | 1B.3.3 |
| raíces de distinto índice: $\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ | cambio de variable $x=t^m$ | 1B.3.4 |
| sen, tan, csc, cot o $1-\cos$ con $x\to 0$ | límites notables | 1B.3.5 |
| $x\to\infty$ o $x\to-\infty$ | dividir entre la mayor potencia | 1B.3.6 |
| $\frac{k}{0}$, «límites infinitos», «asíntotas», «trazar la gráfica» | laterales y signos | 1B.3.7 |
| $\lvert x-a\rvert$, $x\to a^+$, función por partes en el punto de cambio | límites laterales | 1B.3.8 |
| «continua», «valor de $a$ y $b$» | tres condiciones en cada punto de cambio | 1B.3.9 |
| $e^x$, senh, cosh, ln | sustitución o dividir entre $e^x$ | 1B.3.10 |

## 1B.3 Procedimientos

*1B.3.1 Sustitución directa (siempre primero)*

1. Sustituye el valor de $x$. Si sale un número, ese es el límite: escribe «sustitución directa» y termina.
2. Si sale $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ o $0\cdot\infty$, es una forma indeterminada: elige la técnica con la tabla de la sección 1B.2.
3. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k\neq 0$, el límite es infinito o no existe: sección 1B.3.7.

*1B.3.2 Factorizar*

1. Si $x=a$ anula numerador y denominador, los dos tienen el factor $(x-a)$.
2. Factoriza con productos notables: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$, o con división sintética entre $x-a$.
3. Cancela $(x-a)$ (vale porque $x\neq a$ dentro del límite) y sustituye.
4. Con una resta de fracciones ($\infty-\infty$), primero el denominador común; luego factoriza.

*1B.3.3 Racionalizar*

1. Multiplica numerador y denominador por el **conjugado** de la expresión con raíz: $(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=A-B^2$.
2. Si hay raíces arriba y abajo, multiplica por los dos conjugados (doble racionalización).
3. Aparece el factor $(x-a)$ arriba y abajo, quizá como $(a-x)=-(x-a)$: cancélalo y sustituye. Los conjugados que quedan se evalúan al final.

1. Se factoriza $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$, que es el denominador común.
2. Una sola fracción:

$$\frac{\sqrt{x}+2-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

3. Se sustituye $x=4$: $\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$.

**Resultado:** a) 3; b) $\frac{1}{4}$.

**Ejercicio 1B.5.3 · Uno menos coseno, raíz al infinito y raíces de distinto índice**

*Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 2.*

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos 4x}{x^3}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}.$$

**Resolución.**

**a)** Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se saca $x$ de factor común y se cancela: $\frac{x(1-\cos 4x)}{x^3}=\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.
2. Se arma $\frac{1-\cos u}{u^2}$ con $u=4x$, multiplicando y dividiendo por 16:

$$\frac{1-\cos 4x}{x^2}=16\cdot\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\to 16\cdot\frac{1}{2}=8.$$

**b)** Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Con $x>0$, $\sqrt{x^2-9}=x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$:

$$\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\to 1.$$

**c)** Forma $\frac{0}{0}$. Índices 2 y 3: $m=6$.

1. Con $x=t^6$: $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, y $t\to\sqrt[6]{64}=2$.
2. Diferencia de cubos y de cuadrados:

$$\frac{t^3-8}{t^2-4}=\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\frac{t^2+2t+4}{t+2}.$$

3. Se sustituye $t=2$: $\frac{4+4+4}{4}=3$.

**Resultado:** a) 8; b) 1; c) 3.

En b) el enunciado escribe $x\to\infty$ sin signo; se toma $x\to+\infty$. Con $x\to-\infty$ el resultado sería $-1$.





*1B.3.9 Continuidad de funciones por partes con constantes*

1. Señala los puntos donde cambia la regla y revisa que cada regla sea continua en su tramo (polinomio, raíz con radicando no negativo, denominador distinto de cero).
2. En cada punto de cambio $x=c$, revisa las tres condiciones **una por una**: $f(c)$ (con la regla que incluye a $c$, la del $\le$ o el $\ge$); los dos laterales; y su igualdad con $f(c)$. Escribe «se cumple» o «no se cumple» en cada una.
3. Si hay constantes, la igualdad de los laterales y $f(c)$ da una ecuación por punto de cambio. Resuelve el sistema.
4. Sustituye los valores en las tres condiciones para comprobar.

*1B.3.10 Exponencial, logaritmo e hiperbólicas*

1. $e^x$, $\ln x$ (con $x>0$), $\operatorname{senh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ y $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ son continuas: casi siempre basta la sustitución directa. En Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 2, inciso c), $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} 4x-\cosh x}{x+1}=\frac{0-1}{1}=-1$ sale por sustitución directa.
2. Al infinito: $e^x\to\infty$ y $e^{-x}\to 0$ si $x\to\infty$. Con un cociente de exponenciales, divide entre la exponencial de mayor exponente. Así, $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\to 1$ si $x\to\infty$ y $\to -1$ si $x\to-\infty$.
3. Con logaritmos, junta en uno solo antes de sustituir: $\ln|x^2-1|-\ln|x-1|=\ln|x+1|\to\ln 2$ si $x\to 1$ (así se resuelve el inciso b del problema 2 del 2º final 2026-2 de Cálculo y Geometría Analítica).

## 1B.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Raíces de distinto índice, sustitución directa y raíz al infinito**

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.*

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 32}\frac{\sqrt[10]{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[5]{x}-2}, \qquad \text{b) } \lim_{\theta\to 0}|\theta-1|\operatorname{sen}\theta, \qquad \text{c) } \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x}.$$

**Resolución.**

**a)** Al sustituir: $\sqrt[10]{32}=\sqrt{2}$ y $\sqrt[5]{32}=2$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Índices 10 y 5: $m=10$. Se hace $x=t^{10}$, con lo que $\sqrt[10]{x}=t$, $\sqrt[5]{x}=t^2$, y $t\to\sqrt[10]{32}=\sqrt{2}$.
2. Diferencia de cuadrados en el denominador:

$$\frac{t-\sqrt{2}}{t^2-2}=\frac{t-\sqrt{2}}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}=\frac{1}{t+\sqrt{2}}.$$

3. Se sustituye $t=\sqrt{2}$: $\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**b)** No es forma indeterminada: por sustitución directa, $|0-1|\operatorname{sen} 0=1\cdot 0=0$.

**c)** Forma $\frac{\infty}{\infty}$.

**Ejercicio propuesto 1A.6.6**

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.*

De un tronco de sección circular de diámetro $D$ se cortará una viga de sección rectangular de ancho $x$. Exprese el área de la sección de la viga en función del ancho $x$.

**Resultado:** $A(x) = x\sqrt{D^2 - x^2}$, con $0 < x < D$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

### 1A.7 Errores frecuentes

1. **Dominio de $f^{-1}$ con su fórmula.** $\sqrt{3-x}$ existe para $x \le 3$, pero en el ejercicio 1A.5.7 el dominio de $f^{-1}$ es $(0, 3]$: es el recorrido de $f$.
2. **Signo de la raíz al despejar.** Al despejar $x$ de $x^2 = \dots$ aparece $\pm$; el signo lo decide el dominio de $f$, no la costumbre de tomar el positivo.
3. **Dominio de la composición con la fórmula simplificada.** $e^{\ln(x-2)} + 2 = x$ solo para $x > 2$. Se escribe primero $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$.
4. **Confundir $f \circ g$ con $g \circ f$** o con el producto $fg$.
5. **Olvidar la condición estricta del denominador.** $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ pide $x > 1$, no $x \ge 1$.
6. **Extremos mal marcados.** En la gráfica de $f^{-1}$, cada punto lleno o vacío de $f$ pasa con el mismo tipo a la posición $(b, a)$.
7. **Paramétricas sin el intervalo del parámetro.** La forma cartesiana sola ($y = 3 - x^2$) no dice qué arco es; el dominio y el recorrido salen de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ en el intervalo dado.
8. **Recorrido de una función por partes como el de una sola regla.** Cada rama se evalúa *solo* en su intervalo y luego se unen los recorridos.
9. **Modelo con dos variables.** El resultado debe depender solo de la variable pedida; la otra se elimina con la relación del enunciado. Y siempre lleva dominio.

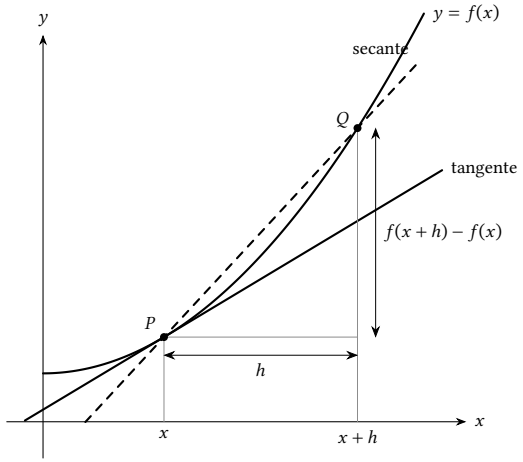
### 1A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \ge 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \ne 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \le 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot D_{fg} = D_f \cap D_g \cdot$ en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \ne 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro $(h, k)$; $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2 + a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h) + k$: traslación $(h, k) \cdot -f(x)$: reflejo en el eje $x \cdot f(-x)$: en el eje $y$.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cdot \operatorname{ang\,cos} : [-1, 1] \to [0, \pi] \cdot \operatorname{ang\,tan} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $e^{\ln x} = x\ (x > 0)$, $\ln e^x = x \cdot \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot a^x = e^{x \ln a}$.
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.





**Interpretación geométrica.** El cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la pendiente de la recta *secante* que pasa por $P(x, f(x))$ y $Q(x+h, f(x+h))$. Cuando $h \to 0$, $Q$ se acerca a $P$ y la secante gira hasta la recta *tangente*: $f'(x)$ es la pendiente de la tangente en $P$.




**Interpretación física.** Si $s(t)$ es la posición de un móvil, $s'(t)$ es su velocidad y $s''(t)$ su aceleración. En general, $\frac{dy}{dt}$ es la *razón de cambio* (rapidez de variación) de $y$ respecto al tiempo: positiva si $y$ aumenta y negativa si disminuye.

**Derivable implica continua.** Si $f$ es derivable en $x_0$, es continua en $x_0$. Lo contrario es falso: $|x|$ es continua en 0 y no es derivable ahí (tiene un pico).

**Derivadas laterales.** $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ son los límites del cociente con $h \to 0^-$ y $h \to 0^+$. $f$ es derivable en $x_0$ si y solo si las dos existen y son iguales. En una función por partes cuyas reglas son derivables, se calculan derivando cada regla y evaluando en el punto de unión, *siempre que $f$ sea continua ahí.*

**Reglas algebraicas.** Con $u$, $v$ funciones de $x$ y $c$, $n$ constantes ($n$ racional):

$$(c)' = 0, \qquad (u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (cu)' = cu',$$

$$(uv)' = uv' + vu', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}u', \qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

**Regla de la cadena.** Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En las tablas siguientes ya está incluida: cada fórmula termina multiplicada por $u'$.

**Trigonométricas.**

**Ejemplo resuelto · Ley de enfriamiento como modelo**

Una taza de café a 90 °C se deja en un cuarto a 20 °C. A los 10 minutos está a 55 °C. Con la ley de enfriamiento de Newton, escriba la temperatura en función del tiempo, dé su dominio y su recorrido y calcule en cuánto tiempo llega a 30 °C.

**Resolución.**

1. **Modelo:** $T(t) = 20 + (90-20)e^{-kt} = 20 + 70e^{-kt}$, con $t$ en minutos.
2. **Constante:** $T(10) = 55 \Rightarrow 70e^{-10k} = 35 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{10}$. Así, $e^{-kt} = \left(e^{-10k}\right)^{t/10} = 2^{-t/10}$ y
$$T(t) = 20 + 70 \cdot 2^{-t/10}.$$
3. **Dominio:** $t \geq 0$ (desde que se sirve el café). **Recorrido:** $T$ es decreciente, $T(0) = 90$ y $T(t) \to 20$ cuando $t \to \infty$ sin alcanzarlo: $R_T = (20, 90]$.
4. **Inversa:** de $T - 20 = 70 \cdot 2^{-t/10}$ sale $t = 10 \log_2 \dfrac{70}{T-20}$, definida en $(20, 90]$.
5. Con $T = 30$: $t = 10 \log_2 7 = \dfrac{10 \ln 7}{\ln 2} \approx 28.07$ minutos.

**Resultado:** $T(t) = 20 + 70 \cdot 2^{-t/10}$ °C, con $t \in [0, \infty)$ y recorrido $(20, 90]$; llega a 30 °C a los $10 \log_2 7 \approx 28.1$ minutos.

### Ejercicio propuesto 1A.10.1 · Una función dada en forma implícita

La ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, con $y \leq 0$, define una función. Escríbala en forma explícita y obtenga su dominio y su recorrido.

**Resultado:** $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, con dominio $[-3, 3]$ y recorrido $[-2, 0]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

### Ejercicio propuesto 1A.10.2 · Volumen de una caja como modelo

De una lámina cuadrada de 30 cm de lado se recortan cuadrados de lado $x$ en las cuatro esquinas y se doblan las pestañas para formar una caja sin tapa. Exprese el volumen de la caja en función de $x$, con su dominio, y calcule el volumen cuando $x = 5$ cm.

**Resultado:** $V(x) = x(30 - 2x)^2$ cm$^3$, con $0 < x < 15$; $V(5) = 2000$ cm$^3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

### Ejercicio propuesto 1A.10.3 · Logaritmo de una cuadrática

Obtenga el dominio y el recorrido de $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$.

**Resultado:** $D_f = (-2, 2)$, $R_f = (-\infty, \ln 4]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

### Ejercicio propuesto 1A.10.4 · Inversa de un coseno hiperbólico

Obtenga la inversa de $f(x) = 2\cosh x$, con $x \geq 0$, en forma logarítmica, con su dominio y su recorrido.

**Resultado:** $f^{-1}(x) = \ln \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$, con dominio $[2, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.





mira hacia dónde van. Para $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, que no está definida en 0:

| $x$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ | 0.99833 | 0.99998 | 0.9999998 |

Como $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par, por la izquierda da lo mismo: los valores se acercan a 1, el límite notable de la sección 1B.1. La tabla *sugiere* el límite, pero no lo demuestra (puede engañar si la función oscila o si el redondeo de la computadora pierde cifras); en el examen el límite se calcula con las técnicas de esta parte.

**Continuidad en un intervalo.** $f$ es continua en $(a, b)$ si lo es en cada punto, y en $[a, b]$ si además los límites laterales de adentro en $a$ y en $b$ son $f(a)$ y $f(b)$. Los polinomios, las racionales (fuera de los ceros del denominador), las raíces (donde existen), las trigonométricas, la exponencial y el logaritmo son continuos en su dominio; la duda está en los puntos donde cambia la regla o se anula un denominador.

### Ejercicio propuesto 1B.10.1 · Una constante para la continuidad en un intervalo

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ si $x \neq 2$ y $f(2) = k$. Determine $k$ para que $f$ sea continua en $[0, 3]$.

**Resultado:** $k = 4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 165.

### Ejercicio propuesto 1B.10.2 · Diferencia de una raíz y una recta al infinito

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$.

**Resultado:** $\frac{3}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 165.

### Ejercicio propuesto 1B.10.3 · La asíntota de un modelo

Para el modelo de enfriamiento $T(t) = 20 + 70 \cdot 2^{-t/10}$ del ejemplo de la sección 1A.10, calcule $\lim_{t \to \infty} T(t)$ e interprete el resultado.

**Resultado:** 20: la gráfica tiene la asíntota horizontal $T = 20$; el café tiende a la temperatura del cuarto sin alcanzarla.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 165.

**Con la computadora**

```
# Tabla de valores y limite de sen(x)/x en 0
from sympy import Rational, limit, sin, symbols
x = symbols("x")
f = sin(x)/x
for h in [Rational(1, 10**k) for k in (1, 2, 3)]:
    print(h, f.subs(x, h).evalf(8), f.subs(x, -h).evalf(8))
L = limit(f, x, 0)
print(L)                                          # 1
assert L == 1
```

# Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes

↑ Volver al índice

**Contenido de esta parte (programa 2026, tema 1).** «Límites y continuidad de una función ejemplificados con software matemático. Interpretación geométrica del concepto de límite de una función. Cálculo de límites de funciones algebraicas y trigonométricas. Límites infinitos y al infinito. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): sale en los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010, con 12 problemas (9 de límites y 3 de continuidad), casi siempre como problema 2 con dos o tres incisos; y en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016: 28 de límites, 8 de continuidad y 2 de asíntotas con gráfica.
- **Sin L'Hôpital:** los enunciados de límites dicen «sin emplear la regla de L'Hôpital», y así se resuelven aquí: factorizando, racionalizando, con los límites notables o dividiendo entre la mayor potencia. La regla está en la Parte 2B; sirve para comprobar un resultado, pero en un problema que la prohíbe no cuenta.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1B.1 y la tabla de la sección 1B.2 (20 min).
  2. Aprende las técnicas de la sección 1B.3: factorizar, racionalizar, cambio de variable, $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1$ y dividir entre la mayor potencia.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 1B.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 1B.5 con cronómetro: 5 minutos por inciso de límite y 12 minutos por problema de continuidad o de asíntotas.

## 1B.1 Conceptos y expresiones

**Límite.** $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca tanto como se quiera a $L$ cuando $x$ se acerca a $a$ sin llegar a $a$. Lo que pasa *en* $x = a$ no importa: $f(a)$ puede valer otra cosa o no existir. En la definición formal, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Los exámenes no piden demostraciones con $\varepsilon$ y $\delta$; piden *calcular* límites.

**Límites laterales.** $\lim_{x\to a^-} f(x)$ usa solo valores $x < a$, y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ solo valores $x > a$. El límite existe si y solo si los dos laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$





→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

### Ejercicio propuesto 1B.6.4

*Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{4 - \sqrt{2x - 2}}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x}, \quad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 8x + 6}{x^2 + 4x - 9}.$$

**Resultado:** a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 164.

### Ejercicio propuesto 1B.6.5

*Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

**Resultado:** a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 164.

### Ejercicio propuesto 1B.6.6

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 2.*

Sea $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$.

a) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontal y vertical de la gráfica de $g$.
b) Calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.
c) Trace la gráfica de $g$.

**Resultado:** a) horizontal $y = 1$, vertical $x = 0$; b) 0; c) la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ con un hueco en $(1, 0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 164.

## 1B.7 Errores frecuentes

1. **No sustituir primero.** Varios incisos se resuelven por sustitución directa; factorizar o racionalizar ahí es tiempo perdido.
2. **Escribir $\frac{0}{0} = 1$ o $\frac{0}{0} = 0$.** $\frac{0}{0}$ es una forma indeterminada: indica que hay que transformar, no es un resultado.
3. **Cancelar antes de factorizar.** Solo se cancelan factores: en $\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ no se «tacha» $\sqrt{x}$.
4. **Olvidar el signo al racionalizar.** $4 - x = -(x - 4)$: el signo menos llega al resultado (como en $-3$ y $-\frac{2}{3}$ de los propuestos).
5. **Armar mal el límite notable.** $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ no tiende a 1, sino a 3: el denominador debe ser $3x$.

El tercero se obtiene multiplicando por $1+\cos u$:

$$\frac{1-\cos u}{u^2}=\frac{1-\cos^2 u}{u^2(1+\cos u)}=\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^2\frac{1}{1+\cos u}\to 1\cdot\frac{1}{2}.$$

La variable $u$ puede ser cualquier expresión que tienda a cero: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\to 1$ y $\frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}\to 1$ si $x\to 3$. El argumento del seno y el denominador deben ser *iguales*.

**Límites al infinito.** $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ significa que $f(x)$ se acerca a $L$ cuando $x$ crece sin cota. Lo básico es $\frac{k}{x^n}\to 0$ ($n>0$). Cuidado con las raíces: $\sqrt{x^2}=|x|$, que vale $x$ si $x\to\infty$ y $-x$ si $x\to-\infty$.

**Límites infinitos y asíntotas.** $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ significa que $f(x)$ crece sin cota cuando $x$ se acerca a $a$ por la derecha. Entonces:

- la recta $x=a$ es **asíntota vertical** si al menos un límite lateral en $a$ es $\infty$ o $-\infty$ (en una racional simplificada, donde se anula el denominador y no el numerador);
- la recta $y=L$ es **asíntota horizontal** si $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

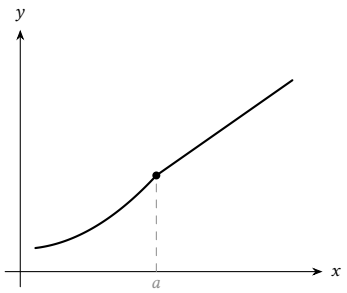
Decir que un límite «es $\infty$» es decir que no existe como número, pero describe cómo crece la función.

**Continuidad en un punto.** $f$ es continua en $x=a$ si se cumplen las tres condiciones:

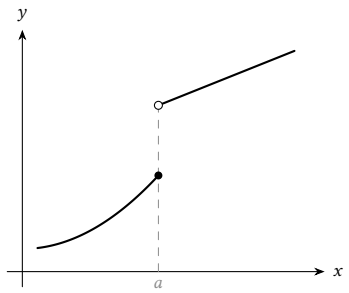
1. $f(a)$ está definida;
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (los dos laterales son iguales);
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Si falla alguna, $f$ es discontinua en $a$. La discontinuidad es *evitable* si el límite existe pero $f(a)$ no está definida o vale otra cosa (un hueco en la gráfica); *de salto* si los laterales son finitos y distintos; *infinita* si un lateral es $\pm\infty$ (asíntota vertical). Una función es continua en un intervalo si lo es en cada punto; en un extremo cerrado basta el límite lateral de adentro.

**Funciones por partes.** Cada regla (polinomio, raíz, trigonométrica) es continua en su propio tramo. Los únicos puntos en duda son aquellos donde *cambia la regla*. Ahí se igualan los laterales y el valor de la función; si la función tiene constantes, esas igualdades son las ecuaciones que las determinan.




continua en $a$

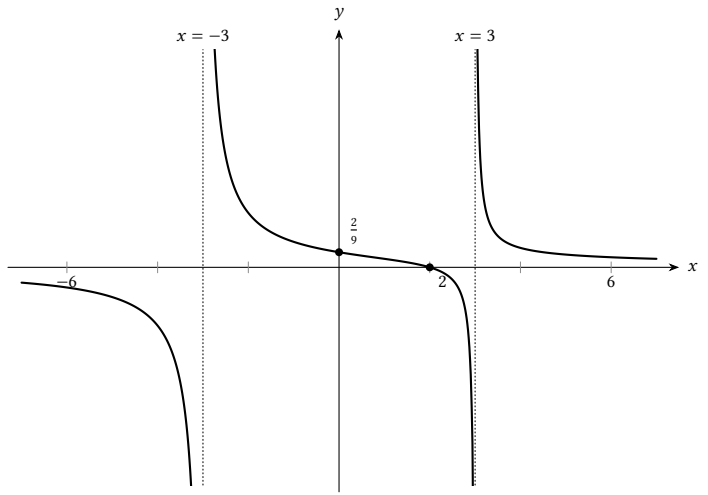



discontinua en $a$ (salto)





4. **Intersecciones:** con el eje $x$, en $(2,0)$; con el eje $y$, $f(0)=\frac{2}{9}$.
5. **Signos:** $f<0$ en $(-\infty,-3)$ y en $(2,3)$; $f>0$ en $(-3,2)$ y en $(3,\infty)$.




**Resultado:** asíntotas verticales $x=-3$ y $x=3$; asíntota horizontal $y=0$; la gráfica es la de la figura.

### Ejercicio 1B.5.8 · Dos constantes para que una función de tres reglas sea continua

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo A, problema 6.*

Calcule los valores de $m$ y $n$ para que la función sea continua en los reales, y trace su gráfica con esos valores:

$$g(x)=\begin{cases}-x^3+m & \text{si } x\le 0,\\ -\frac{x}{2}+1 & \text{si } 0<x\le 2,\\ \sqrt{x-n} & \text{si } x>2.\end{cases}$$

**Resolución.**

1. Las dos primeras reglas son polinomios. La raíz está definida y es continua para $x>2$ si $n\le 2$. Los puntos de cambio son $x=0$ y $x=2$.
2. **En $x=0$.** Condición 1: $g(0)=m$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 0^-}(-x^3+m)=m$ y $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{2}+1\right)=1$; el límite existe si $m=1$. Condición 3: $1=g(0)$; se cumple.
3. **En $x=2$.** Condición 1: $g(2)=-1+1=0$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 2^-} g(x)=0$ y $\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-n}=\sqrt{2-n}$; el límite existe si $\sqrt{2-n}=0$, es decir, $n=2$. Condición 3: $0=g(2)$; se cumple.
4. **Gráfica:** $1-x^3$ para $x\le 0$ (pasa por $(-1,2)$), el segmento de $(0,1)$ a $(2,0)$ y la media parábola $\sqrt{x-2}$ desde $(2,0)$ (pasa por $(6,2)$).

*1B.3.4 Raíces de distinto índice: cambio de variable*

1. Si aparecen $\sqrt[p]{x}$ y $\sqrt[q]{x}$, sea $m$ el mínimo común múltiplo de $p$ y $q$, y haz $x = t^m$. Entonces $\sqrt[p]{x} = t^{m/p}$ y $\sqrt[q]{x} = t^{m/q}$ son potencias enteras de $t$.
2. Cambia también el valor al que tiende: si $x \to a$, entonces $t \to \sqrt[m]{a}$.
3. Queda un cociente de polinomios en $t$: factoriza (sección 1B.3.2).

*1B.3.5 Límites trigonométricos*

1. Escribe todo en senos y cosenos: $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$, $\csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$, $\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$, $\sec u = \frac{1}{\cos u}$.
2. Arma cada factor $\frac{\operatorname{sen}(ku)}{ku}$, multiplicando y dividiendo por la constante que falte: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 3$.
3. Con $1 - \cos(ku)$, arma $\frac{1-\cos(ku)}{(ku)^2} \to \frac{1}{2}$, o multiplica por $1 + \cos(ku)$.
4. Si $x \to a \neq 0$ o $x \to \infty$, cambia de variable para que la nueva tienda a cero: $u = x - a$, o $u = \frac{1}{x}$.
5. Los cosenos que quedan sueltos se sustituyen: $\cos 0 = 1$.

*1B.3.6 Límites al infinito*

1. Divide numerador y denominador entre la mayor potencia de $x$ del *denominador*; usa $\frac{k}{x^n} \to 0$.
2. Atajo para cociente de polinomios de grados $n$ (arriba) y $m$ (abajo): si $n < m$, el límite es 0; si $n = m$, es el cociente de los coeficientes principales; si $n > m$, es $\pm\infty$.
3. Con raíces, saca la potencia de la raíz: $\sqrt{9x^2 + 2} = |x|\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}$. Si $x \to \infty$, $|x| = x$; si $x \to -\infty$, $|x| = -x$ y el signo cambia.
4. Con $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ (forma $\infty - \infty$), racionaliza primero.

*1B.3.7 Límites infinitos y asíntotas*

1. **Dominio:** factoriza el denominador y anota dónde se anula. Simplifica los factores comunes.
2. **Asíntotas verticales:** en cada cero del denominador que no anula el numerador (después de simplificar), calcula los dos laterales. Cada uno da $+\infty$ o $-\infty$ según el signo de $\frac{k}{0^\pm}$: determina el signo de cada factor con un valor cercano (por ejemplo $x = 3.1$ y $x = 2.9$).
3. Si el factor se canceló, no hay asíntota: hay un *hueco* (discontinuidad evitable), y su altura es el límite de la función simplificada.
4. **Asíntota horizontal:** calcula $\lim_{x\to\infty}$ y $\lim_{x\to-\infty}$ (sección 1B.3.6).
5. **Gráfica:** dibuja las asíntotas punteadas, las intersecciones con los ejes y los signos de $f$ entre los ceros; une con los límites como guía.

*1B.3.8 Límites laterales y valor absoluto*

1. Quita el valor absoluto según el lado: si $x \to a^+$, $|x - a| = x - a$; si $x \to a^-$, $|x - a| = -(x - a)$.
2. En una función por partes, el lateral izquierdo usa la regla de los $x < a$ y el derecho la de los $x > a$.
3. Si los dos laterales son iguales, ese es el límite; si son distintos, el límite no existe.





**Ejercicio 1B.5.4 · Valor absoluto, cambio de variable al infinito y factorización**

*Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule, si existe, cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \left(x - x\cos\frac{1}{x}\right), \qquad \text{c) } \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}.$$

**Resolución.**

**a)** Laterales (sección 1B.3.8):

1. Si $x \to 1^+$, $|x - 1| = x - 1$ y el cociente vale 1.
2. Si $x \to 1^-$, $|x - 1| = -(x - 1)$ y el cociente vale $-1$.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe.

**b)** Forma $\infty \cdot 0$: $x - x\cos\frac{1}{x} = x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)$.

1. Cambio de variable $u = \frac{1}{x}$: si $x \to +\infty$, $u \to 0^+$, y $x = \frac{1}{u}$.
2. $\frac{1-\cos u}{u} = u \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

**c)** Forma $\frac{0}{0}$. Suma de cubos: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Se cancela $x + 1$ y se sustituye: $(-1)^2 - (-1) + 1 = 3$.

**Resultado:** a) no existe (laterales $-1$ y 1); b) 0; c) 3.

**Ejercicio 1B.5.5 · Continuidad de una función con valor absoluto**

*Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 2.*

Determine si la función $f$ es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{si } x \in (-2, 2), \\ x^2 - 4 & \text{si } x \notin (-2, 2). \end{cases}$$

**Resolución.**

1. Dominio: todos los reales. En $(-2, 2)$, $2 - |x|$ es continua (el valor absoluto lo es); fuera, $x^2 - 4$ es un polinomio. Los puntos de cambio son $x = 2$ y $x = -2$.
2. **En $x = 2$.** Condición 1: $2 \notin (-2, 2)$, así que $f(2) = 2^2 - 4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 2^-} (2 - |x|) = 2 - 2 = 0, \qquad \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0;$$

   el límite existe y vale 0; se cumple. Condición 3: $0 = f(2)$; se cumple.
3. **En $x = -2$.** Condición 1: $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to -2^-} (x^2 - 4) = 0, \qquad \lim_{x\to -2^+} (2 - |x|) = 2 - 2 = 0;$$

   se cumple. Condición 3: $0 = f(-2)$; se cumple.

1. Como $x \to \infty$, $x > 0$ y $\sqrt{x^2} = x$. Se divide entre $x$ arriba y abajo:

$$\frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x} = \frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{\frac{3}{x}-4}.$$

2. Con $\frac{2}{x^2} \to 0$ y $\frac{3}{x} \to 0$, el límite es $\frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$.
3. Si fuera $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$ y el resultado sería $\frac{3}{4}$.

**Resultado:** a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) 0; c) $-\frac{3}{4}$.

**Ejemplo resuelto · Continuidad de una función de tres reglas**

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.*

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax & \text{si } 1 < x < 3, \\ A & \text{si } 3 \le x \le 5, \\ Bx - 5 & \text{si } 5 < x < 8. \end{cases}$$

Determine los valores de $A$ y $B$ para que $f$ sea continua en todo su dominio.

**Resolución.**

1. El dominio es $(1, 8)$. Cada regla es un polinomio o una constante, continua en su tramo. Los puntos de cambio son $x = 3$ y $x = 5$.
2. **En $x = 3$.** Condición 1: $f(3) = A$ (segunda regla); se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 3^-}(x^2 - Ax) = 9 - 3A, \qquad \lim_{x\to 3^+} A = A.$$

   El límite existe si $9 - 3A = A$, es decir, $A = \frac{9}{4}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(3)$; se cumple.
3. **En $x = 5$.** Condición 1: $f(5) = A = \frac{9}{4}$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 5^-} A = \frac{9}{4}, \qquad \lim_{x\to 5^+}(Bx - 5) = 5B - 5.$$

   El límite existe si $5B - 5 = \frac{9}{4}$, es decir, $5B = \frac{29}{4}$ y $B = \frac{29}{20}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(5)$; se cumple.

**Resultado:** $A = \frac{9}{4}$, $B = \frac{29}{20}$.





## 1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 1B.5.1 · Doble racionalización y un trigonométrico

*Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 2.*

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x\tan(2x)}.$$

**Resolución.**

**a)** Al sustituir: $3 - \sqrt{9} = 0$ y $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Se multiplica arriba y abajo por los dos conjugados, $3 + \sqrt{2x+1}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{x-2}$:

$$(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1}) = 9 - (2x+1) = -2(x-4),$$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}) = 2 - (x-2) = -(x-4).$$

2. Se cancela $-(x-4)$:

$$\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}} = \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}\right)}{3+\sqrt{2x+1}}.$$

3. Se sustituye $x = 4$: $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{3+3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**b)** Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se escribe $\tan 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$ y se cancela un $\operatorname{sen} 2x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x\tan 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x}{x\operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\cos 2x.$$

2. Se arma el límite notable: $\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \to 2$, y $\cos 2x \to 1$.

**Resultado:** a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) 2.

### Ejercicio 1B.5.2 · Cociente de trigonométricas y resta de fracciones

*Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.*

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan(3\theta)}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4}\right).$$

**Resolución.**

**a)** Forma $\frac{0}{0}$. Se multiplica y divide por $3\theta$ y por $\theta$:

$$\frac{\tan 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 3\cdot\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\cdot\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 3\cdot 1\cdot 1 = 3.$$

**b)** Cada fracción tiende a infinito: forma $\infty - \infty$.