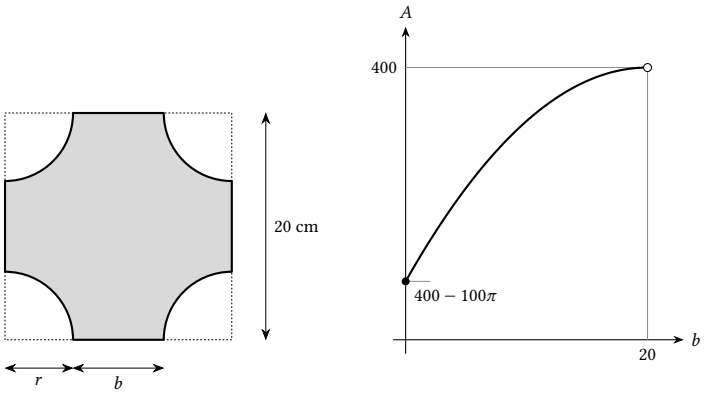
1. **Variables:** r, radio de los cuartos de círculo, y b. Cada lado mide $r + b + r = 20$, así que $r = \frac{20-b}{2}$.
2. **Área:** el cuadrado menos cuatro cuartos de círculo (un círculo completo): $A = 400 - \pi r^2$.
3. **Sustitución:**
$$f(b) = 400 - \pi\left(\frac{20-b}{2}\right)^2 = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2.$$
4. **Dominio:** $b \geq 0$ y $r > 0$ (si $r = 0$ no hay recorte ni cruz), es decir, $0 \leq b < 20$. Con $b = 0$ los cuartos de círculo se tocan en el punto medio de cada lado.
5. **Recorrido:** f es creciente en $[0, 20)$ ($(20-b)^2$ decrece). $f(0) = 400 - 100\pi \approx 85.8$ y $f(b) \to 400$ cuando $b \to 20$: $R_f = [400 - 100\pi, 400)$.
6. **Gráfica:** arco de parábola que abre hacia abajo con vértice en $(20, 400)$, punto lleno en $(0, 400 - 100\pi)$ y vacío en $(20, 400)$.



Resultado: $f(b) = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2$ cm^2, con $D_f = [0, 20)$ y $R_f = [400 - 100\pi, 400)$. Si se admite $b = 20$ (el cuadrado sin recortes), el dominio es $[0, 20]$ y el recorrido $[400 - 100\pi, 400]$.

1A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1A**.

Ejercicio propuesto 1A.6.1

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 1.

Obtenga el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ y trace su gráfica.

Resultado: $D_f = (1, \infty)$, $R_f = (0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 160.

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

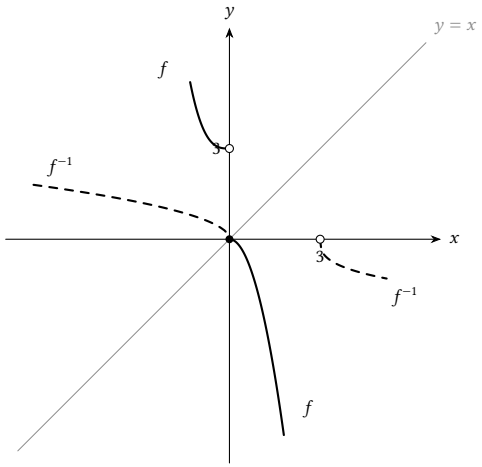
Curso de Emergencia

Cálculo Diferencial e Integral

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.1.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0



Resultado: $f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{x}{2}}$ si $x \le 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3-x}$ si $x > 3$; $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ y $R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.

Ejercicio 1A.5.6 · Paramétricas a forma explícita

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Sea la función

$$f: \begin{cases} x = 3 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = 4\cos^2\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

a) Determine la forma explícita de su regla de correspondencia. b) Obtenga el dominio y el rango de f. c) Trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Eliminar el parámetro:** $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x-3}{2}$ y $\cos^2\theta = 1 - \mathrm{sen}^2\,\theta$, así que
$$y = 4\left[1 - \frac{(x-3)^2}{4}\right] = 4 - (x-3)^2.$$
2. **Dominio:** en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{sen}\,\theta$ va de 0 a 1, así que x va de 3 a 5: $D_f = [3, 5]$.
3. **Rango:** $\cos^2\theta$ va de 1 a 0, así que y va de 4 a 0: $R_f = [0, 4]$.
4. **Gráfica:** arco de la parábola de vértice $(3, 4)$ que abre hacia abajo, de $(3, 4)$ ($\theta = 0$) a $(5, 0)$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Diferencial e Integral** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Es la materia de primer semestre del **Plan 2026**, el de la Generación 2027 en adelante. Junta en un solo curso lo que en los planes anteriores eran dos: el cálculo diferencial de una variable (funciones, límites, derivada y sus aplicaciones) y el cálculo integral de una variable (integrales, métodos de integración y series). Las funciones de varias variables, que antes cerraban el curso de cálculo integral, pasaron a Cálculo Vectorial.

El cuaderno sigue los cuatro temas del programa 2026, cada uno dividido en partes:

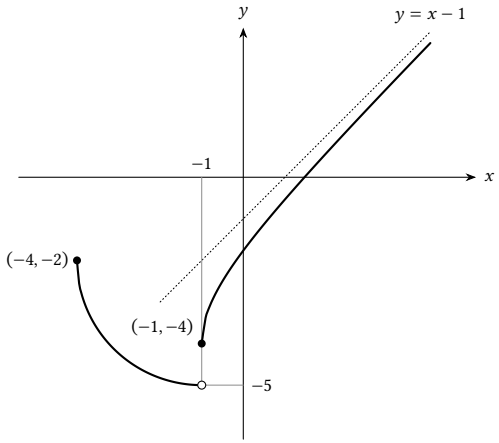
0. Antes de empezar: qué viene en el examen y cómo estudiar.
1. Funciones y límites. Parte A: funciones, trascendentes y modelos. Parte B: límites y continuidad.
2. Derivada y sus aplicaciones. Parte A: la derivada, tangentes y razón de cambio. Parte B: regla de L'Hôpital. Parte C: variación y optimización.
3. Integral definida e integral indefinida. Parte A: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e integrales inmediatas. Parte B: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo. Parte C: integral impropia.
4. Métodos de integración. Parte A: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales. Parte B: sucesiones y series.

Cada parte se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa del Plan 2026). «Aplicar conceptos de cálculo diferencial y de cálculo integral al planteamiento y a la resolución de problemas físicos y geométricos mediante el análisis de conceptos matemáticos fundamentales y apoyándose en el uso de nuevas tecnologías computacionales con el propósito de contribuir a la formación científica requerida en el estudio de las ingenierías.»

De dónde salen los ejercicios.

- Todavía no hay exámenes publicados del Plan 2026. Los ejercicios de examen de este cuaderno salen de los exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron: los finales de Cálculo Diferencial (Plan 2010) y de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) para los temas 1 y 2, y los finales y extraordinarios de Cálculo Integral (planes 2010 y 2016) para los temas 3 y 4.
- Lo que el programa 2026 agrega (el uso de software, la representación implícita, las funciones como modelos físicos, la mención del trabajo mecánico y el criterio de la integral) se trabaja con ejercicios propios, sin cita de examen, y con los textos de la bibliografía del programa (Apéndice D).
- **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional. Cuando un examen trae una resolución publicada, se comparó con la propia; las diferencias están en el Apéndice C.
- Cada ejercicio de examen indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están



Resultado: $D_f = [-4, \infty)$ y $R_f = (-5, \infty)$.

Ejercicio 1A.5.4 · Inversa de un arco de elipse

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 1.

Para la función $f = \left\{(x, y) \;\middle|\; y = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 0]\right\}$, obtenga su inversa y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Inyectividad y recorrido:** en $[-2, 0]$, $4 - x^2$ crece de 0 a 4, así que f es creciente: $f(-2) = 2$ y $f(0) = 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 5$. Entonces $R_f = [2, 5]$.
2. **Despeje:**
$$\frac{2}{3}(y - 2) = \sqrt{4 - x^2}$$
$$x^2 = 4 - \frac{4}{9}(y - 2)^2 = \frac{4}{9}\left[9 - (y - 2)^2\right]$$
$$x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (y - 2)^2}.$$
Se toma el signo negativo porque $x \in [-2, 0]$.
3. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (x - 2)^2}$, con $D_{f^{-1}} = [2, 5]$ y $R_{f^{-1}} = [-2, 0]$.
4. **Gráfica:** f es el cuarto superior izquierdo de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, de $(-2, 2)$ a $(0, 5)$; f^{-1} es su reflejo, de $(2, -2)$ a $(5, 0)$.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué trae el programa 2026, qué pesa más en los exámenes y en qué orden estudiar.
- **Si eres de la Generación 2027 o posterior**, tu plan es el 2026 y este es tu cuaderno. Si eres de una generación anterior, usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial* y *Curso de Emergencia, Cálculo Integral.*

0.1 Qué es esta materia

Cálculo Diferencial e Integral es la materia de primer semestre del Plan 2026: 96 horas en cuatro temas. Junta lo que en los planes 2010 y 2016 eran dos cursos de cálculo de una variable:

Tema del programa 2026	Partes	De dónde viene
1. Funciones y límites (22 h)	1A, 1B	Funciones y límites del curso de cálculo diferencial
2. Derivada y sus aplicaciones (26 h)	2A, 2B, 2C	La derivada y la variación de funciones; la regla de L'Hôpital, que antes estaba en el curso de cálculo integral
3. Integral definida e integral indefinida (24 h)	3A, 3B, 3C	Integrales definida e indefinida, aplicaciones e integral impropia del curso de cálculo integral
4. Métodos de integración (24 h)	4A, 4B	Métodos de integración y sucesiones y series del curso de cálculo integral

Lo que cambió respecto a los planes anteriores:

- **Software en los cuatro temas.** El programa pide usar software matemático para graficar, ilustrar límites, sumas de Riemann y series. Cada parte trae un recuadro **Con la computadora** con un bloque corto de Python (con la biblioteca sympy) que calcula el resultado del ejemplo.
- **Las trascendentes desde el principio.** El logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas se estudian con las demás funciones (Parte 1A) y se derivan en la Parte 2A. Antes, en uno de los planes, eran de otro curso.
- **La regla de L'Hôpital pasa al tema de la derivada** (Parte 2B). Los límites de la Parte 1B se siguen resolviendo sin ella, como lo piden los enunciados de los exámenes de límites.

4. **Sustitución:**

$$P = 2 \cdot \frac{20 - \pi r^2}{2r} + 2\pi r = \frac{20}{r} - \pi r + 2\pi r = \frac{20}{r} + \pi r.$$

5. **Dominio:** $r > 0$ y $x > 0$, es decir, $20 - \pi r^2 > 0$: $r < \sqrt{\frac{20}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}} \approx 2.52$.

Resultado: $P(r) = \frac{20}{r} + \pi r$ m, con $0 < r < 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$.

1A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

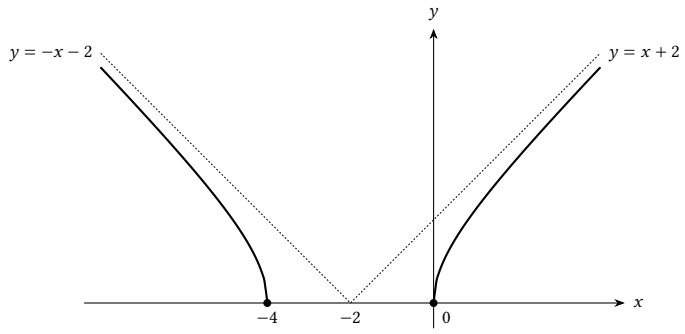
Ejercicio 1A.5.1 · Composición con dominio, recorrido y gráfica

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 1.

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = x + 2$, determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **Regla:** $(f \circ g)(x) = f(x+2) = \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{x^2 + 4x}$.
2. **Dominio:** $D_g = \mathbb{R}$ y $D_f = \{x \mid |x| \geq 2\}$. Se pide $|x+2| \geq 2$: $x + 2 \geq 2$ o $x + 2 \leq -2$, es decir, $x \geq 0$ o $x \leq -4$. (Lo mismo da $x(x+4) \geq 0$.)
3. **Recorrido:** la raíz vale 0 en $x = 0$ y en $x = -4$ y crece sin límite cuando $|x| \to \infty$; toma todos los valores $y \geq 0$.
4. **Gráfica:** $y^2 = (x+2)^2 - 4$, es decir, $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$: hipérbola de centro $(-2, 0)$, vértices $(-4, 0)$ y $(0, 0)$ y asíntotas $y = \pm(x + 2)$. La función es la mitad superior ($y \geq 0$) de sus dos ramas.



Resultado: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$, con dominio $(-\infty, -4] \cup [0, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

Ejercicio 1A.5.2 · Composición de exponencial y logaritmo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 3.

Sean las funciones $f(x) = e^x + 2$ y $g(x) = \ln(x - 2)$. Determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y trace su gráfica.

- Lo que más sale dentro de cada tema:
  - Tema 1: la **función inversa** con dominio, recorrido y gráfica, muchas veces de una función dada en forma paramétrica o por partes; dos o tres límites con radicales, trigonométricos y al infinito, o la continuidad de una función por partes con constantes.
  - Tema 2: derivación implícita y paramétrica, recta tangente y normal, razón de cambio, un problema de optimación o un análisis de la gráfica; L'Hôpital con las formas 1^∞, 0^0 e $\infty - \infty$.
  - Tema 3: valor medio y teorema del valor medio, área entre curvas, volumen de revolución y longitud de arco; una impropia que converge o diverge.
  - Tema 4: tres integrales (casi siempre una de fracciones parciales, una por partes y una de sustitución trigonométrica); intervalo de convergencia con el análisis de los extremos o una serie de Maclaurin o de Taylor.
- Del programa casi no se evalúan: el límite y la derivada por definición (salvo en algún parcial), la diferencial, las sucesiones solas, la condición de integrabilidad y la demostración del teorema fundamental. Se mencionan, pero no se desarrollan.

0.4 Orden de estudio

El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar por dependencia: la derivada (Parte 2A) se usa en casi todo lo demás, y los métodos de integración (Parte 4A) son la base de las aplicaciones, de la impropia y de las series.

Semana	Ruta de 5 semanas
1	Unidad 0, Parte 2A (la derivada) y Parte 1B (límites)
2	Parte 1A (funciones), Parte 2C (variación y optimización) y Parte 2B (L'Hôpital)
3	Parte 3A (integrales e inmediatas) y Parte 4A (métodos de integración)
4	Parte 3B (aplicaciones), Parte 3C (impropia) y Parte 4B (series)
5	Simulacros (Apéndice B) y formulario de memoria (Apéndice A)

Ruta de 2 semanas.

- **Primera semana:** Partes 2A, 2C y 4A completas; de las Partes 1A y 1B, solo su ruta corta (inversa y límites).
- **Segunda semana:** Partes 3A, 3B y 4B; de las Partes 2B y 3C, su ruta corta; un simulacro el último día.

En cada parte, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada parte, nunca una parte completa:

1. la derivada por definición y la diferencial (Parte 2A);
2. las hiperbólicas inversas (Parte 1A);
3. las sumas de Riemann calculadas a mano con el límite (Parte 3A);
4. la longitud de arco en polares (Parte 3B) y las potencias trigonométricas con exponentes altos (Parte 4A);

2. Elimina el parámetro: despeja $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$ (o t) y usa la identidad que corresponda. Si hay $\operatorname{sen}^2 t$ o $\cos^2 t$, la parábola sale directo de $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
3. Escribe $y = f(x)$ explícita, eligiendo el signo de la raíz con el recorrido.
4. Traza el arco marcando los puntos de los extremos del intervalo de t.
5. Si piden la inversa, aplica 1A.3.6 a la forma cartesiana.

1A.3.9 Modelos geométricos

1. Dibuja la figura y nombra todas las variables (la que pide el enunciado y las auxiliares).
2. Escribe la cantidad pedida con todas sus variables (área, perímetro, volumen, costo).
3. Escribe la relación entre variables: el dato fijo (área, material, perímetro) o la geometría (Pitágoras, semejanza, el punto sobre la curva).
4. Despeja la variable auxiliar y sustituye: la cantidad queda en función de una sola variable.
5. Dominio: exige que todas las longitudes sean positivas y que la figura quepa.

1A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Inversa de una función con radical

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 1.

Para la función $F = \left\{(x, y) \;\middle|\; y = 3 + \sqrt{x^2 + 4x}\,;\ x < -4\right\}$ obtenga su función inversa, así como el dominio y el recorrido de ésta, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Dominio de F:** el dado, $x < -4$. Ahí $x^2 + 4x = x(x + 4) > 0$ (producto de dos negativos), así que la raíz existe.
2. **Inyectividad:** se completa el cuadrado, $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$. Para $x < -4$ se tiene $x + 2 < -2$; al disminuir x, $(x + 2)^2$ crece. Entonces F es decreciente y tiene inversa.
3. **Recorrido de F:** cuando $x \to -4^-$, la raíz tiende a 0 y $y \to 3$ (sin alcanzarlo, porque -4 no está en el dominio); cuando $x \to -\infty$, $y \to \infty$. Entonces $R_F = (3, \infty)$.
4. **Despeje:**
$$y - 3 = \sqrt{(x + 2)^2 - 4}$$
$$(y - 3)^2 + 4 = (x + 2)^2$$
$$x + 2 = -\sqrt{(y - 3)^2 + 4}.$$
Se toma el signo negativo porque $x + 2 < -2 < 0$.
5. **Intercambio:** $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x - 3)^2 + 4}$.
6. $D_{F^{-1}} = R_F = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = D_F = (-\infty, -4)$. Comprobación: $F(-5) = 3 + \sqrt{5}$ y $F^{-1}\left(3 + \sqrt{5}\right) = -2 - \sqrt{5 + 4} = -5$.
7. **Gráfica:** de $(y - 3)^2 = (x + 2)^2 - 4$ sale la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, de centro $(-2, 3)$. F es la parte de la rama izquierda con $y > 3$; F^{-1} es su reflejo respecto a $y = x$, con punto vacío en $(3, -4)$.

Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos

↑ Volver al índice

Objetivo del tema 1 (programa 2026). «Comprender y aplicar los conceptos de función real y límite mediante el estudio de sus propiedades, utilizando software matemático para formular modelos físicos y geométricos que describan problemas de ingeniería.»

Contenido de esta parte. «Funciones polinómicas, racionales e irracionales. Función inversa. Representaciones explícita, implícita, paramétrica y con varias reglas de correspondencia de una función. Uso de software matemático para la representación gráfica y estudio de las funciones trascendentes: trigonométricas directas e inversas, exponenciales y logarítmicas e hiperbólicas.» «Formulación de funciones como modelos matemáticos y sus aplicaciones a la ingeniería. Visualización de los resultados obtenidos empleando software.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): un problema en cada uno de los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010 (función inversa en 5, composición en 2, modelo geométrico en 2 y dominio y recorrido en 1) y en cada uno de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016 (función inversa en 19, paramétricas a forma cartesiana en 9, composición, producto o cociente en 6, función por partes en 3, modelo en 1 y dominio y recorrido de una función dada por una ecuación en 1). En los primeros parciales del Plan 2016 abundan los modelos.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 1A.1.1, 1A.1.2 y 1A.1.5 (25 min): dominio, gráficas básicas e inversa.
  2. Aprende los procedimientos 1A.3.6 (inversa) y 1A.3.8 (paramétricas): juntos son más de la mitad de los problemas.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 1A.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 1A.5 con cronómetro: 15 min cada uno, con gráfica.
  5. Lee la sección 1A.10: la representación implícita y los modelos físicos son lo nuevo del programa.

1A.1 Conceptos y expresiones

1A.1.1 Función, dominio y recorrido

Una *función* f de A en B es una regla que asigna a *cada* elemento x de A *un único* elemento $y = f(x)$ de B. También se describe como un conjunto de pares, $f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A\}$, donde no hay dos pares con el mismo primer elemento. En una gráfica,

por un dato fijo (un área, un perímetro, un material) o por una figura (Pitágoras, triángulos semejantes, un punto sobre una curva). Esa relación se usa para eliminar la variable que sobra. El dominio lo dan las condiciones físicas: longitudes positivas (o no negativas), la figura cabe en la otra. Estos modelos son el primer paso de los problemas de optimación de la Unidad 2C.

1A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar el dominio y el recorrido» de una regla con raíces, cocientes, ln o ang sen	dominio natural y recorrido	1A.3.1, 1A.3.2
$\sqrt{a^2-(x-h)^2}$, $\sqrt{x^2+4x}$, «trazar la gráfica»	reconocer la cónica y trazar el arco	1A.3.3
una regla con llaves y varios intervalos	función por partes	1A.3.4
$f\circ g$, $g\circ f$, fg, $\frac{g}{f}$ «indicando su dominio»	composición u operación	1A.3.5
«determinar si tiene inversa», «obtener f^{-1}», «biyectiva»	inversa y su gráfica	1A.3.6
la función con inversa pedida está dada por partes	inversa rama por rama	1A.3.7
$x=x(t)$, $y=y(t)$: «forma cartesiana», «forma explícita», «$y=f(x)$»	eliminar el parámetro	1A.3.8
«en función de», «en términos únicamente de», con figura	modelo de una variable	1A.3.9

1A.3 Procedimientos

1A.3.1 Dominio

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es el dominio (revisa que la regla exista en todo él).
2. Si no, anota una condición por cada restricción: radicando par ≥ 0, denominador $\neq 0$, argumento de ln > 0, argumento de ang sen o ang cos entre -1 y 1.
3. Resuelve cada desigualdad (completa el cuadrado o factoriza; tabla de signos si hace falta) e intersecta los conjuntos.
4. Escribe el dominio con intervalos.

1A.3.2 Recorrido

1. **Por monotonía:** si f es continua y creciente (o decreciente) en su dominio, el recorrido va de un extremo al otro. Evalúa en los extremos incluidos y toma el valor al que se acerca f en los excluidos y en $\pm\infty$.
2. **Despejando x:** de $y=f(x)$ despeja x en términos de y; los y para los que el despeje existe (y da x en el dominio) forman el recorrido. Es el mismo trabajo que la inversa.
3. **Por la gráfica:** si la regla es un arco de cónica (1A.3.3), el recorrido se lee del arco.

Así, $y=-4-\frac{1}{2}\sqrt{16-(x-3)^2}$ es la semicircunferencia $\sqrt{16-x^2}$ comprimida a la mitad (una semielipse), reflejada hacia abajo y con centro en $(3,-4)$.

1A.1.3 Funciones por partes

Una función por partes usa reglas distintas en intervalos distintos del dominio:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{si } x\in I_1,\\ f_2(x) & \text{si } x\in I_2. \end{cases}$$

Su dominio es la unión $I_1\cup I_2$ (cada I_k recortado al dominio de su regla) y su recorrido es la unión de los recorridos de cada rama, *cada una en su intervalo*. En la gráfica, los extremos incluidos se marcan con punto lleno y los excluidos con punto vacío.

1A.1.4 Operaciones con funciones y composición

Para f y g se definen

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\quad (fg)(x)=f(x)\,g(x),\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

con dominio $D_f\cap D_g$ (y, en el cociente, sin los ceros de g). La **composición** es

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big),\qquad D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}.$$

Primero se aplica g y luego f. El dominio de la composición **no** se lee de la fórmula simplificada: $e^{\ln(x-2)}+2$ se simplifica a x, pero solo existe para $x>2$. En general $f\circ g\neq g\circ f$.

1A.1.5 Inyectividad y función inversa

f es **inyectiva** (uno a uno) si valores distintos de x dan valores distintos de y: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. En la gráfica: toda recta *horizontal* la corta a lo más una vez (**prueba de la recta horizontal**). Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en su dominio es inyectiva. Es **biyectiva** si además su codominio es su recorrido.

Solo una función inyectiva tiene **inversa** f^{-1}, definida por

$$f^{-1}(y)=x \iff f(x)=y,\qquad D_{f^{-1}}=R_f,\qquad R_{f^{-1}}=D_f.$$

Se cumple $\big(f\circ f^{-1}\big)(x)=x$ en R_f y $\big(f^{-1}\circ f\big)(x)=x$ en D_f. La gráfica de f^{-1} es la de f **reflejada respecto a la recta** $y=x$: el punto (a,b) de f pasa a (b,a).

Si f no es inyectiva (por ejemplo $y=x^2$), se **restringe** su dominio a un intervalo donde sí lo sea: $y=x^2$ con $x\geq 0$ tiene inversa $\sqrt{x}$; con $x\leq 0$, $-\sqrt{x}$. El signo de la raíz al despejar lo decide la restricción.

Inversa de una función por partes. Si cada rama es inyectiva y los recorridos de las ramas no se traslapan, la función es inyectiva y su inversa es por partes: en cada rama se despeja por separado, y el intervalo de cada rama de f^{-1} es el *recorrido* de la rama correspondiente de f.

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos 9

Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes 30

Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio 46

Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas 65

Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación 72

Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas 89

Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo 102

Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia 115

Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales 121

Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor 136

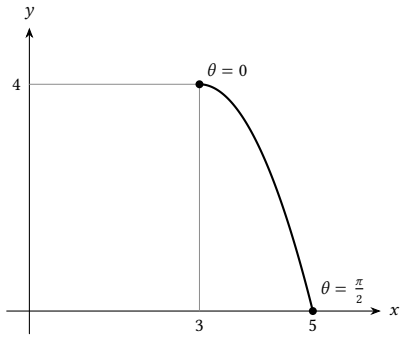
Apéndice A · Formulario 149

Apéndice B · Exámenes 153

Apéndice C · Fe de erratas 155

Apéndice D · Fuentes 158

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 160



Resultado: $y = 4 - (x-3)^2$, con dominio $[3,5]$ y rango $[0,4]$.

Ejercicio 1A.5.7 · Inversa de una función en paramétricas

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 1.

Dada la función en forma paramétrica

$$f: \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = 3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

determine su función inversa $f^{-1}(x)$ en forma cartesiana y el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}.

Resolución.

1. **Dominio de f:** en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha$ toma los valores de $[0,1)$ (el 1 corresponde a $\alpha = 0$, excluido). Entonces $x \in \left[0, \sqrt{3}\right)$.
2. **Recorrido de f:** $\mathrm{sen}^2\,\alpha$ toma los valores de $(0,1]$, así que $y \in (0,3]$.
3. **Forma cartesiana:** $\cos^2\alpha = \frac{x^2}{3}$ y $y = 3\left(1 - \cos^2\alpha\right) = 3 - x^2$. Es decreciente en $\left[0, \sqrt{3}\right)$: tiene inversa.
4. **Despeje:** $x^2 = 3 - y$ y, como $x \geq 0$, $x = \sqrt{3-y}$. Intercambio: $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f = (0,3]$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

Resultado: $f(x) = 3 - x^2$ con $D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$, $R_f = (0,3]$; $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$ con $D_{f^{-1}} = (0,3]$, $R_{f^{-1}} = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

Ejercicio 1A.5.8 · Área de una cruz en función de su base

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 1.

Una cruz se forma recortando cuartos de círculo iguales en las cuatro esquinas de un cuadrado de 20 cm de lado; la base b de la cruz es el tramo recto que queda de cada lado (figura). a) Determine la regla de correspondencia de la función f que da el área de la cruz en términos de su base b. b) Obtenga el dominio y el recorrido de f. c) Trace la gráfica de f.

Resolución.

redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora. Los exámenes de los planes anteriores no permiten calculadora ni formulario: las resoluciones usan valores exactos (fracciones, radicales, π, e, ángulos notables). El programa 2026 pide además usar software matemático; para eso cada parte trae un recuadro **Con la computadora**, con unas líneas de Python que calculan lo mismo que el ejemplo de la parte. Sirven para estudiar y comprobar, no para el examen.

Cómo usar este cuaderno

Cada parte tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto salía el tema en los exámenes de los planes anteriores, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la parte** y **procedimiento recomendado en el examen**.
9. Lo que **agrega el Plan 2026**, con ejercicios propios, y el recuadro **Con la computadora**.

Formato de cada resolución. Planteamiento → pasos numerados → **resultado** en negritas. En los problemas de «¿es continua?» o «¿se cumple el teorema?», cada condición se revisa por separado, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 propone una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

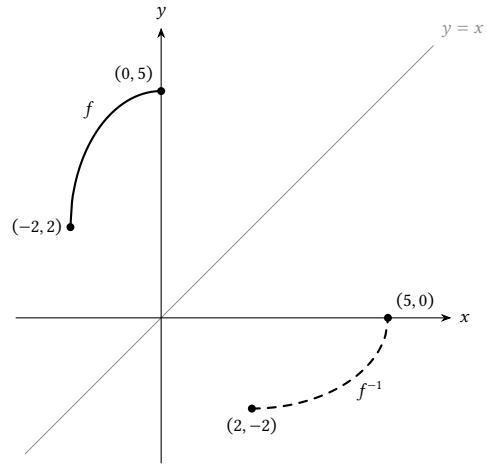
Si tu plan es otro. Si eres de una generación anterior a la 2027, tu plan es el 2010 o el 2016: usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial* y *Curso de Emergencia, Cálculo Integral*. Casi todo el texto de este cuaderno es el mismo de esos dos, ordenado según el programa 2026.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.



Resultado: $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2}$, $x \in [2,5]$, con recorrido $[-2,0]$.

Ejercicio 1A.5.5 · Inversa de una función por partes

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 1.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 3 - x^3 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

determine la regla de correspondencia de f^{-1}, el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Rama $x \geq 0$:** $-2x^2$ es decreciente y vale 0 en $x = 0$; su recorrido es $(-\infty, 0]$.
2. **Rama $x < 0$:** $-x^3$ es decreciente y positiva; $3 - x^3$ toma todos los valores mayores que 3 (el 3 se alcanzaría en $x = 0$, que no es de esta rama). Recorrido: $(3, \infty)$.
3. **Inyectividad:** cada rama es decreciente y los recorridos $(-\infty, 0]$ y $(3, \infty)$ no se traslapan: f es inyectiva. $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.
4. **Despeje por ramas:** de $y = -2x^2$ con $x \geq 0$, $x = \sqrt{-\frac{y}{2}}$ (con $y \leq 0$). De $y = 3 - x^3$, $x = \sqrt[3]{3-y}$ (con $y > 3$, que da $x < 0$).
5. **Inversa:**
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{3-x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$
$D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$ y $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
6. **Gráfica:** f tiene un punto vacío en $(0, 3)$ y uno lleno en $(0, 0)$; en f^{-1} pasan a $(3, 0)$ vacío y $(0, 0)$ lleno.

- **Temas nuevos o con más peso:** la representación implícita de una función y las funciones como modelos físicos (1A), la mención del trabajo mecánico como integral (3B) y el criterio de la integral para series (4B). Se trabajan con ejercicios propios.
- **Lo que salió del curso:** la introducción histórica, el área en coordenadas polares y las funciones de varias variables (que pasaron a Cálculo Vectorial).

0.2 Cómo es el examen

Todavía no hay exámenes del Plan 2026. El programa dice que la evaluación sumativa es un examen final. Mientras no haya exámenes publicados, este cuaderno está **basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron**: sus finales y extraordinarios traían seis problemas en dos horas, sin calculadora ni formulario, con un problema por tema y siempre en el mismo orden. Es razonable esperar lo mismo:

- **Duración:** unas 2 horas para seis o siete problemas, con puntos impresos que suman 100.
- **Material:** ninguno. Los exámenes recientes dicen «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno, ni formulario». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{32}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, e^6, $\ln 2$, $\sqrt[3]{2}$.
- **Cada inciso se califica por separado.** Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.

0.3 Qué tan seguido salía cada tema

Exámenes de los planes anteriores en los que aparece cada parte: los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010, los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016 y los 112 finales y extraordinarios de Cálculo Integral (52 del Plan 2010 y 60 del Plan 2016). Cada instrucción de parte da el detalle por subtema.

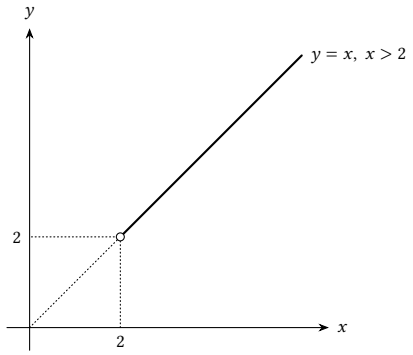
Parte	Tema	Plan 2010	Plan 2016
1A	Funciones	**10 de 10**	**39 de 39**
1B	Límites y continuidad	**10 de 10**	**38 de 39**
2A	La derivada	**10 de 10** (20 problemas)	**38 de 39** (44 problemas)
2B	Regla de L'Hôpital	28 de 52	17 de 60
2C	Variación y optimización	**10 de 10**	**35 de 39**
3A	Valor medio, Riemann, teorema fundamental	**52 de 52**	34 de 60
3B	Área, volumen, longitud de arco	**52 de 52**	**56 de 60**
3C	Integral impropia	22 de 52	14 de 60
4A	Tres integrales por método	**52 de 52**	**60 de 60**
4B	Sucesiones y series	**10 de 10**	**59 de 60**

Observaciones:

- Casi todas las partes salían en casi todos los exámenes. La regla de L'Hôpital y la integral impropia se repartían un mismo problema; por eso tienen menos apariciones cada una.

Resolución.

1. **Dominio:** $D_g = \{x \mid x - 2 > 0\} = (2, \infty)$; $D_f = \mathbb{R}$, así que todo valor de g está en D_f. Entonces $D_{f\circ g} = (2, \infty)$.
2. **Regla:** $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} + 2 = (x-2) + 2 = x$, porque $e^{\ln u} = u$ para $u > 0$.
3. **Recorrido:** $y = x$ con $x > 2$ toma todos los valores mayores que 2: $(2, \infty)$.
4. **Gráfica:** la parte de la recta $y = x$ con $x > 2$, con punto vacío en $(2, 2)$. La regla simplificada es x, pero la función *no* es la identidad en $\mathbb{R}$.



Resultado: $(f \circ g)(x) = x$, con dominio $(2, \infty)$ y recorrido $(2, \infty)$.

Ejercicio 1A.5.3 · Función por partes con arcos de cónicas

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 1.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{9 - (x+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ -4 + \sqrt{(x+3)^2 - 4} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Determine el dominio y el recorrido y trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Primera rama:** $9 - (x+1)^2 \geq 0 \iff |x+1| \leq 3 \iff -4 \leq x \leq 2$. Con $x < -1$ queda $[-4, -1)$. Es la circunferencia $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ (centro $(-1, -2)$, radio 3), mitad inferior, cuarto izquierdo: de $(-4, -2)$ (lleno) a $(-1, -5)$ (vacío). Recorrido: $(-5, -2]$.
2. **Segunda rama:** $(x+3)^2 \geq 4 \iff x \geq -1$ o $x \leq -5$. Con $x \geq -1$ queda $[-1, \infty)$. Es la hipérbola $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$ (centro $(-3, -4)$), parte superior de la rama derecha: empieza en el vértice $(-1, -4)$ y sube acercándose a la asíntota $y = x - 1$. Recorrido: $[-4, \infty)$.
3. **Dominio:** $[-4, -1) \cup [-1, \infty) = [-4, \infty)$.
4. **Recorrido:** $(-5, -2] \cup [-4, \infty) = (-5, \infty)$.

5. las sucesiones solas (Parte 4B), salvo las que se usan en los extremos del intervalo de convergencia.

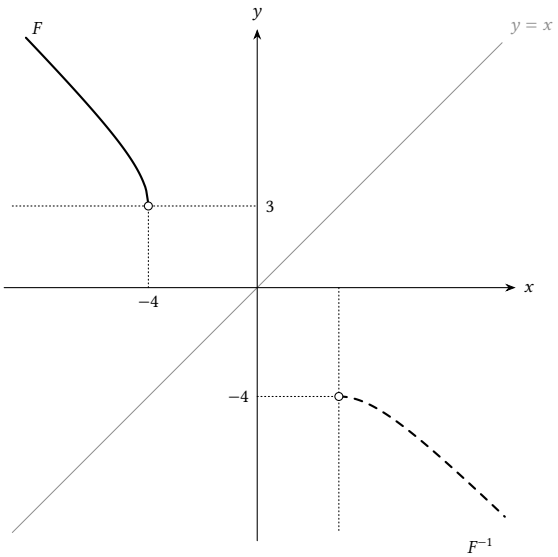
Los recuadros **Con la computadora** no son para el examen: léelos cuando ya resolviste el ejercicio a mano, para comprobarlo.

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por lo mecánico: las derivadas, las integrales por método y la serie de Maclaurin. Deja para después la inversa con gráficas, el modelo de optimación y la aplicación de la integral, que piden más planteamiento.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: la función por optimizar con su restricción, las variables de la razón de cambio con sus unidades, la región antes de la integral, el término general de la serie.
4. En un límite, sustituye primero y escribe la forma indeterminada; en una integral, revisa si es impropia antes de integrar.
5. Comprueba al final: deriva cada antiderivada, sustituye el punto de tangencia en la curva, revisa que el dominio de f^{-1} sea el recorrido de f y que un área sea positiva.

0.6 Formulario de emergencia

El formulario de todas las partes está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

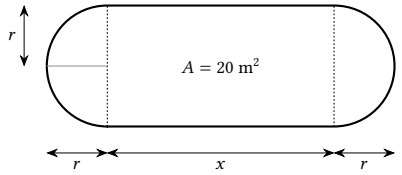


Resultado: $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x-3)^2 + 4}$, con $D_{F^{-1}} = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = (-\infty, -4)$.

Ejemplo resuelto · Perímetro de un terreno en función del radio

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 1.

Un terreno está formado por tres partes alineadas: la central es un rectángulo y los extremos son semicírculos de radio r (figura). Si el área del terreno es 20 m^2, determine su perímetro en función exclusivamente del radio de los semicírculos.



Resolución.

1. **Variables:** r, radio de los semicírculos, y x, largo del rectángulo; su alto es $2r$.
2. **Cantidad pedida:** el perímetro son los dos lados largos del rectángulo y los dos semicírculos (una circunferencia completa): $P = 2x + 2\pi r$.
3. **Relación:** el área es la del rectángulo más la de un círculo: $2rx + \pi r^2 = 20$, de donde $x = \frac{20 - \pi r^2}{2r}$.

esto se reconoce con la **prueba de la recta vertical**: toda recta vertical corta a la gráfica a lo más una vez.

- **Dominio** D_f: los valores de x para los que la regla da un número real (o los que el enunciado indique, como «$x \in [-2, 0]$»).
- **Recorrido** (también *rango* o *imagen*) R_f: los valores y que efectivamente toma la función, $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$. El *codominio* es el conjunto de llegada, que puede ser mayor.
- **Regla de correspondencia**: la fórmula $y = f(x)$. En forma *explícita* es $y = \ldots$; en forma *implícita*, una ecuación como $x^2 + y^2 = 4$ más una restricción.

Cuando el enunciado no da el dominio, se toma el *dominio natural*: todos los reales donde la regla tiene sentido. Las restricciones vienen de cuatro fuentes:

- **Raíz de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$. Las raíces de índice impar ($\sqrt[3]{u}$) no restringen.
- **Cociente:** $\frac{N}{D}$ exige $D \neq 0$; si el denominador es una raíz par, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$.
- **Trigonométricas inversas:** ang sen u y ang cos u exigen $-1 \leq u \leq 1$; ang sec u exige $|u| \geq 1$.
- **Logaritmo:** $\ln u$ exige $u > 0$.

1A.1.2 Gráficas básicas y transformaciones

Las gráficas que más aparecen en los exámenes son las de esta tabla. Casi todas las raíces de los enunciados son arcos de circunferencia, elipse o hipérbola: se reconocen al completar el cuadrado y elevar al cuadrado.

Regla	Dominio	Recorrido
$y = x^2$ (parábola)	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$ (hipérbola)	$x \neq 0$	$y \neq 0$
$y = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (semicircunferencia)	$[-a, a]$	$[0, a]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (semielipse)	$[-a, a]$	$[0, b]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (hipérbola horizontal)	$\lvert x \rvert \geq a$	$[0, \infty)$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$ (hipérbola vertical)	$\mathbb{R}$	$[b, \infty)$

Las dos últimas son las mitades superiores de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y de $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Transformaciones. A partir de la gráfica de $y = f(x)$:

- $y = f(x - h) + k$: se traslada h unidades a la derecha y k hacia arriba (h, k con su signo);
- $y = -f(x)$: se refleja respecto al eje x; $y = f(-x)$: respecto al eje y;
- $y = a\, f(x)$ con $a > 0$: se estira ($a > 1$) o se comprime ($a < 1$) verticalmente.

1A.3.3 Gráficas de raíces: arcos de cónicas

1. Completa el cuadrado dentro de la raíz: $8 - 2x - x^2 = 9 - (x+1)^2$, $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$.
2. Aísla la raíz y eleva al cuadrado: de $y = k \pm c\sqrt{\ldots}$ sale $(y-k)^2 = c^2(\ldots)$. Identifica la cónica: circunferencia, elipse o hipérbola, con su centro.
3. El signo de la raíz decide la mitad: $y = k + c\sqrt{\ldots}$ es la mitad con $y \geq k$; $y = k - c\sqrt{\ldots}$, la de $y \leq k$.
4. El intervalo de x decide el arco. Marca extremos (llenos o vacíos) y traza.

1A.3.4 Funciones por partes

1. Para cada rama: recorta su intervalo al dominio de su regla. El dominio es la unión.
2. Para cada rama: su recorrido en su intervalo (1A.3.2). El recorrido de f es la unión.
3. Traza cada rama solo en su intervalo; evalúa la regla en los extremos y marca punto lleno si el extremo pertenece a la rama y vacío si no.

1A.3.5 Composición, producto y cociente

1. Regla: en $f \circ g$ sustituye $g(x)$ en lugar de x en f. Simplifica.
2. Dominio de $f \circ g$: $x \in D_g$ **y** $g(x) \in D_f$. Escribe las dos condiciones antes de simplificar.
3. Dominio de fg, $f \pm g$: $D_f \cap D_g$; de $\frac{f}{g}$: además $g(x) \neq 0$.
4. Recorrido y gráfica de la función resultante con 1A.3.2 y 1A.3.3.

1A.3.6 Función inversa

1. **Dominio y recorrido de** f (1A.3.1, 1A.3.2).
2. **Inyectividad:** muestra que f es creciente o decreciente en su dominio (por la forma de la gráfica o porque la parte que depende de x lo es). Si no lo es, no hay inversa: dilo y explica por qué (dos x con el mismo y).
3. **Despeja** x de $y = f(x)$. Al sacar raíz cuadrada aparece $\pm$: el signo lo decide el dominio de f (si $x \leq -1$, entonces $x + 1 \leq 0$ y se toma $-$).
4. **Intercambia** x y y: $y = f^{-1}(x)$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$. No calcules el dominio de f^{-1} con su fórmula: la fórmula puede existir en un conjunto mayor.
6. **Gráfica:** traza f, la recta $y = x$ y el reflejo; los puntos extremos (a, b) pasan a (b, a) con el mismo tipo de punto (lleno o vacío).
7. Comprueba con un punto: si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

1A.3.7 Inversa de una función por partes

1. Calcula el recorrido de cada rama en su intervalo.
2. Si cada rama es inyectiva y los recorridos no se traslapan, f es inyectiva.
3. Despeja x en cada rama por separado (1A.3.6).
4. Arma f^{-1} por partes: la rama que viene de f_k vale en el *recorrido* de f_k.

1A.3.8 Funciones en forma paramétrica

1. Con el intervalo de t, obtén el intervalo de $x(t)$ (dominio) y el de $y(t)$ (recorrido). En las trigonométricas, usa los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ en ese intervalo.

1A.1.6 Funciones en forma paramétrica

Una función puede darse con un parámetro:

$$f:\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Cada t da un punto (x, y) de la gráfica. Para la forma cartesiana se **elimina el parámetro**: se despeja t (o una función de t, como $\operatorname{sen} t$) de una ecuación y se sustituye en la otra, o se usa una identidad ($\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$). El dominio es el conjunto de valores de $x(t)$ con $t \in I$, y el recorrido el de $y(t)$. Si no se da el intervalo de t, lo imponen las raíces o las restricciones sobre x y y.

1A.1.7 Funciones trigonométricas directas e inversas

$\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[-1, 1]$; $\tan x$ y $\sec x$ excluyen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot x$ y $\csc x$ excluyen $x = k\pi$. Ninguna es inyectiva: para invertirlas se restringen a un intervalo principal.

Inversa	Dominio	Recorrido (valor principal)
$\operatorname{ang\,sen} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\operatorname{ang\,cos} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{ang\,tan} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ang\,cot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\operatorname{ang\,sec} x$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y = \operatorname{ang\,sen} x$ significa $\operatorname{sen} y = x$ con y en el intervalo principal. Por eso $\operatorname{ang\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ solo si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (Para ang sec algunos textos usan otro intervalo principal; aquí se usa el de la tabla.)

1A.1.8 Logaritmo natural y exponencial

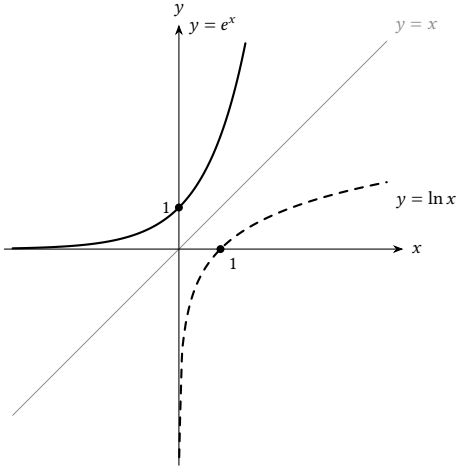
El **logaritmo natural** $\ln x$ tiene dominio $(0, \infty)$ y recorrido $\mathbb{R}$; es creciente, $\ln 1 = 0$ y $\ln e = 1$. Su inversa es la **exponencial** e^x, con dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, \infty)$:

$$e^{\ln x} = x \ \ (x > 0), \qquad \ln e^x = x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Sus gráficas son simétricas respecto a $y = x$ (figura). Propiedades, con $a, b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^r = r \ln a,$$
$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad \left(e^x\right)^r = e^{rx}.$$

Cambio de base: para $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ y $a^x = e^{x \ln a}$.



1A.1.9 Funciones hiperbólicas

Se definen con la exponencial:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x},$$

y $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$. La identidad fundamental es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

por eso $x = a\cosh t$, $y = b\operatorname{senh} t$ recorre la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gráficas: $\operatorname{senh} x$ es impar, creciente, con recorrido $\mathbb{R}$; $\cosh x$ es par, con mínimo $\cosh 0 = 1$ y recorrido $[1, \infty)$ (la forma de una cadena colgante); $\tanh x$ es creciente, con recorrido $(-1, 1)$ y asíntotas $y = \pm 1$.

Las inversas tienen forma logarítmica (se obtienen despejando e^y de una ecuación de segundo grado):

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1,$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \qquad \lvert x\rvert < 1.$$

Para $\cosh^{-1}$ se restringe $\cosh x$ a $x \geq 0$, donde es inyectiva. En algunos exámenes se escriben «ang senh», «ang cosh», «ang tanh».

1A.1.10 Modelos geométricos

Formular un modelo es escribir una cantidad (área, perímetro, volumen, costo) como función de *una sola* variable, con su dominio. Casi siempre hay dos variables relacionadas