CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Cálculo Diferencial e Integral

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.1.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos 9

Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes 30

Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio 46

Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas 65

Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación 72

Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas 89

Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo 102

Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia 115

Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales 121

Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor 136

Apéndice A · Formulario 149

Apéndice B · Exámenes 153

Apéndice C · Fe de erratas 155

Apéndice D · Fuentes 158

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 160

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cálculo Diferencial e Integral** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Es la materia de primer semestre del **Plan 2026**, el de la Generación 2027 en adelante. Junta en un solo curso lo que en los planes anteriores eran dos: el cálculo diferencial de una variable (funciones, límites, derivada y sus aplicaciones) y el cálculo integral de una variable (integrales, métodos de integración y series). Las funciones de varias variables, que antes cerraban el curso de cálculo integral, pasaron a Cálculo Vectorial.

El cuaderno sigue los cuatro temas del programa 2026, cada uno dividido en partes:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y cómo estudiar.
1. Funciones y límites. Parte A: funciones, trascendentes y modelos. Parte B: límites y continuidad.
2. Derivada y sus aplicaciones. Parte A: la derivada, tangentes y razón de cambio. Parte B: regla de L'Hôpital. Parte C: variación y optimización.
3. Integral definida e integral indefinida. Parte A: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e integrales inmediatas. Parte B: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo. Parte C: integral impropia.
4. Métodos de integración. Parte A: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales. Parte B: sucesiones y series.

Cada parte se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa del Plan 2026). «Aplicar conceptos de cálculo diferencial y de cálculo integral al planteamiento y a la resolución de problemas físicos y geométricos mediante el análisis de conceptos matemáticos fundamentales y apoyándose en el uso de nuevas tecnologías computacionales con el propósito de contribuir a la formación científica requerida en el estudio de las ingenierías.»

De dónde salen los ejercicios.

- Todavía no hay exámenes publicados del Plan 2026. Los ejercicios de examen de este cuaderno salen de los exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron: los finales de Cálculo Diferencial (Plan 2010) y de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) para los temas 1 y 2, y los finales y extraordinarios de Cálculo Integral (planes 2010 y 2016) para los temas 3 y 4.
- Lo que el programa 2026 agrega (el uso de software, la representación implícita, las funciones como modelos físicos, la mención del trabajo mecánico y el criterio de la integral) se trabaja con ejercicios propios, sin cita de examen, y con los textos de la bibliografía del programa (Apéndice D).
- **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional. Cuando un examen trae una resolución publicada, se comparó con la propia; las diferencias están en el Apéndice C.
- Cada ejercicio de examen indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están

redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora. Los exámenes de los planes anteriores no permiten calculadora ni formulario: las resoluciones usan valores exactos (fracciones, radicales, π, e, ángulos notables). El programa 2026 pide además usar software matemático; para eso cada parte trae un recuadro **Con la computadora**, con unas líneas de Python que calculan lo mismo que el ejemplo de la parte. Sirven para estudiar y comprobar, no para el examen.

Cómo usar este cuaderno

Cada parte tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto salía el tema en los exámenes de los planes anteriores, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la parte** y **procedimiento recomendado en el examen**.
9. Lo que **agrega el Plan 2026**, con ejercicios propios, y el recuadro **Con la computadora**.

Formato de cada resolución. Planteamiento → pasos numerados → **resultado** en negritas. En los problemas de «¿es continua?» o «¿se cumple el teorema?», cada condición se revisa por separado, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 propone una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Si tu plan es otro. Si eres de una generación anterior a la 2027, tu plan es el 2010 o el 2016: usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial* y *Curso de Emergencia, Cálculo Integral*. Casi todo el texto de este cuaderno es el mismo de esos dos, ordenado según el programa 2026.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

> **Instrucciones de emergencia**
>
> - **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
> - **Para qué:** saber qué trae el programa 2026, qué pesa más en los exámenes y en qué orden estudiar.
> - **Si eres de la Generación 2027 o posterior**, tu plan es el 2026 y este es tu cuaderno. Si eres de una generación anterior, usa *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial* y *Curso de Emergencia, Cálculo Integral.*

0.1 Qué es esta materia

Cálculo Diferencial e Integral es la materia de primer semestre del Plan 2026: 96 horas en cuatro temas. Junta lo que en los planes 2010 y 2016 eran dos cursos de cálculo de una variable:

Tema del programa 2026	Partes	De dónde viene
1. Funciones y límites (22 h)	1A, 1B	Funciones y límites del curso de cálculo diferencial
2. Derivada y sus aplicaciones (26 h)	2A, 2B, 2C	La derivada y la variación de funciones; la regla de L'Hôpital, que antes estaba en el curso de cálculo integral
3. Integral definida e integral indefinida (24 h)	3A, 3B, 3C	Integrales definida e indefinida, aplicaciones e integral impropia del curso de cálculo integral
4. Métodos de integración (24 h)	4A, 4B	Métodos de integración y sucesiones y series del curso de cálculo integral

Lo que cambió respecto a los planes anteriores:

- **Software en los cuatro temas.** El programa pide usar software matemático para graficar, ilustrar límites, sumas de Riemann y series. Cada parte trae un recuadro **Con la computadora** con un bloque corto de Python (con la biblioteca sympy) que calcula el resultado del ejemplo.
- **Las trascendentes desde el principio.** El logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas se estudian con las demás funciones (Parte 1A) y se derivan en la Parte 2A. Antes, en uno de los planes, eran de otro curso.
- **La regla de L'Hôpital pasa al tema de la derivada** (Parte 2B). Los límites de la Parte 1B se siguen resolviendo sin ella, como lo piden los enunciados de los exámenes de límites.

- **Temas nuevos o con más peso:** la representación implícita de una función y las funciones como modelos físicos (1A), la mención del trabajo mecánico como integral (3B) y el criterio de la integral para series (4B). Se trabajan con ejercicios propios.
- **Lo que salió del curso:** la introducción histórica, el área en coordenadas polares y las funciones de varias variables (que pasaron a Cálculo Vectorial).

0.2 Cómo es el examen

Todavía no hay exámenes del Plan 2026. El programa dice que la evaluación sumativa es un examen final. Mientras no haya exámenes publicados, este cuaderno está **basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron**: sus finales y extraordinarios traían seis problemas en dos horas, sin calculadora ni formulario, con un problema por tema y siempre en el mismo orden. Es razonable esperar lo mismo:

- **Duración:** unas 2 horas para seis o siete problemas, con puntos impresos que suman 100.
- **Material:** ninguno. Los exámenes recientes dicen «No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno, ni formulario». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{32}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, e^6, $\ln 2$, $\sqrt[3]{2}$.
- **Cada inciso se califica por separado.** Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.

0.3 Qué tan seguido salía cada tema

Exámenes de los planes anteriores en los que aparece cada parte: los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010, los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016 y los 112 finales y extraordinarios de Cálculo Integral (52 del Plan 2010 y 60 del Plan 2016). Cada instrucción de parte da el detalle por subtema.

Parte	Tema	Plan 2010	Plan 2016
1A	Funciones	**10 de 10**	**39 de 39**
1B	Límites y continuidad	**10 de 10**	**38 de 39**
2A	La derivada	**10 de 10** (20 problemas)	**38 de 39** (44 problemas)
2B	Regla de L'Hôpital	28 de 52	17 de 60
2C	Variación y optimización	**10 de 10**	**35 de 39**
3A	Valor medio, Riemann, teorema fundamental	**52 de 52**	34 de 60
3B	Área, volumen, longitud de arco	**52 de 52**	**56 de 60**
3C	Integral impropia	22 de 52	14 de 60
4A	Tres integrales por método	**52 de 52**	**60 de 60**
4B	Sucesiones y series	**10 de 10**	**59 de 60**

Observaciones:

- Casi todas las partes salían en casi todos los exámenes. La regla de L'Hôpital y la integral impropia se repartían un mismo problema; por eso tienen menos apariciones cada una.

- Lo que más sale dentro de cada tema:
  - Tema 1: la **función inversa** con dominio, recorrido y gráfica, muchas veces de una función dada en forma paramétrica o por partes; dos o tres límites con radicales, trigonométricos y al infinito, o la continuidad de una función por partes con constantes.
  - Tema 2: derivación implícita y paramétrica, recta tangente y normal, razón de cambio, un problema de optimación o un análisis de la gráfica; L'Hôpital con las formas 1^∞, 0^0 e $\infty - \infty$.
  - Tema 3: valor medio y teorema del valor medio, área entre curvas, volumen de revolución y longitud de arco; una impropia que converge o diverge.
  - Tema 4: tres integrales (casi siempre una de fracciones parciales, una por partes y una de sustitución trigonométrica); intervalo de convergencia con el análisis de los extremos o una serie de Maclaurin o de Taylor.
- Del programa casi no se evalúan: el límite y la derivada por definición (salvo en algún parcial), la diferencial, las sucesiones solas, la condición de integrabilidad y la demostración del teorema fundamental. Se mencionan, pero no se desarrollan.

0.4 Orden de estudio

El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar por dependencia: la derivada (Parte 2A) se usa en casi todo lo demás, y los métodos de integración (Parte 4A) son la base de las aplicaciones, de la impropia y de las series.

Semana	Ruta de 5 semanas
1	Unidad 0, Parte 2A (la derivada) y Parte 1B (límites)
2	Parte 1A (funciones), Parte 2C (variación y optimización) y Parte 2B (L'Hôpital)
3	Parte 3A (integrales e inmediatas) y Parte 4A (métodos de integración)
4	Parte 3B (aplicaciones), Parte 3C (impropia) y Parte 4B (series)
5	Simulacros (Apéndice B) y formulario de memoria (Apéndice A)

Ruta de 2 semanas.

- **Primera semana:** Partes 2A, 2C y 4A completas; de las Partes 1A y 1B, solo su ruta corta (inversa y límites).
- **Segunda semana:** Partes 3A, 3B y 4B; de las Partes 2B y 3C, su ruta corta; un simulacro el último día.

En cada parte, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada parte, nunca una parte completa:

1. la derivada por definición y la diferencial (Parte 2A);
2. las hiperbólicas inversas (Parte 1A);
3. las sumas de Riemann calculadas a mano con el límite (Parte 3A);
4. la longitud de arco en polares (Parte 3B) y las potencias trigonométricas con exponentes altos (Parte 4A);

5. las sucesiones solas (Parte 4B), salvo las que se usan en los extremos del intervalo de convergencia.

Los recuadros **Con la computadora** no son para el examen: léelos cuando ya resolviste el ejercicio a mano, para comprobarlo.

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por lo mecánico: las derivadas, las integrales por método y la serie de Maclaurin. Deja para después la inversa con gráficas, el modelo de optimación y la aplicación de la integral, que piden más planteamiento.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: la función por optimizar con su restricción, las variables de la razón de cambio con sus unidades, la región antes de la integral, el término general de la serie.
4. En un límite, sustituye primero y escribe la forma indeterminada; en una integral, revisa si es impropia antes de integrar.
5. Comprueba al final: deriva cada antiderivada, sustituye el punto de tangencia en la curva, revisa que el dominio de f^{-1} sea el recorrido de f y que un área sea positiva.

0.6 Formulario de emergencia

El formulario de todas las partes está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos

↑ Volver al índice

Objetivo del tema 1 (programa 2026). «Comprender y aplicar los conceptos de función real y límite mediante el estudio de sus propiedades, utilizando software matemático para formular modelos físicos y geométricos que describan problemas de ingeniería.»

Contenido de esta parte. «Funciones polinómicas, racionales e irracionales. Función inversa. Representaciones explícita, implícita, paramétrica y con varias reglas de correspondencia de una función. Uso de software matemático para la representación gráfica y estudio de las funciones trascendentes: trigonométricas directas e inversas, exponenciales y logarítmicas e hiperbólicas.» «Formulación de funciones como modelos matemáticos y sus aplicaciones a la ingeniería. Visualización de los resultados obtenidos empleando software.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): un problema en cada uno de los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010 (función inversa en 5, composición en 2, modelo geométrico en 2 y dominio y recorrido en 1) y en cada uno de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016 (función inversa en 19, paramétricas a forma cartesiana en 9, composición, producto o cociente en 6, función por partes en 3, modelo en 1 y dominio y recorrido de una función dada por una ecuación en 1). En los primeros parciales del Plan 2016 abundan los modelos.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 1A.1.1, 1A.1.2 y 1A.1.5 (25 min): dominio, gráficas básicas e inversa.
  2. Aprende los procedimientos 1A.3.6 (inversa) y 1A.3.8 (paramétricas): juntos son más de la mitad de los problemas.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 1A.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 1A.5 con cronómetro: 15 min cada uno, con gráfica.
  5. Lee la sección 1A.10: la representación implícita y los modelos físicos son lo nuevo del programa.

1A.1 Conceptos y expresiones

1A.1.1 Función, dominio y recorrido

Una *función* f de A en B es una regla que asigna a *cada* elemento x de A *un único* elemento $y = f(x)$ de B. También se describe como un conjunto de pares, $f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A\}$, donde no hay dos pares con el mismo primer elemento. En una gráfica,

esto se reconoce con la **prueba de la recta vertical**: toda recta vertical corta a la gráfica a lo más una vez.

- **Dominio** D_f: los valores de x para los que la regla da un número real (o los que el enunciado indique, como «$x \in [-2, 0]$»).
- **Recorrido** (también *rango* o *imagen*) R_f: los valores y que efectivamente toma la función, $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$. El *codominio* es el conjunto de llegada, que puede ser mayor.
- **Regla de correspondencia**: la fórmula $y = f(x)$. En forma *explícita* es $y = \ldots$; en forma *implícita*, una ecuación como $x^2 + y^2 = 4$ más una restricción.

Cuando el enunciado no da el dominio, se toma el *dominio natural*: todos los reales donde la regla tiene sentido. Las restricciones vienen de cuatro fuentes:

- **Raíz de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$. Las raíces de índice impar ($\sqrt[3]{u}$) no restringen.
- **Cociente:** $\frac{N}{D}$ exige $D \neq 0$; si el denominador es una raíz par, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$.
- **Trigonométricas inversas:** $\operatorname{ang\,sen} u$ y $\operatorname{ang\,cos} u$ exigen $-1 \leq u \leq 1$; $\operatorname{ang\,sec} u$ exige $|u| \geq 1$.
- **Logaritmo:** $\ln u$ exige $u > 0$.

1A.1.2 Gráficas básicas y transformaciones

Las gráficas que más aparecen en los exámenes son las de esta tabla. Casi todas las raíces de los enunciados son arcos de circunferencia, elipse o hipérbola: se reconocen al completar el cuadrado y elevar al cuadrado.

Regla	Dominio	Recorrido
$y = x^2$ (parábola)	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$ (hipérbola)	$x \neq 0$	$y \neq 0$
$y = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (semicircunferencia)	$[-a, a]$	$[0, a]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (semielipse)	$[-a, a]$	$[0, b]$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (hipérbola horizontal)	$\lvert x \rvert \geq a$	$[0, \infty)$
$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$ (hipérbola vertical)	$\mathbb{R}$	$[b, \infty)$

Las dos últimas son las mitades superiores de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y de $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Transformaciones. A partir de la gráfica de $y = f(x)$:

- $y = f(x - h) + k$: se traslada h unidades a la derecha y k hacia arriba (h, k con su signo);
- $y = -f(x)$: se refleja respecto al eje x; $y = f(-x)$: respecto al eje y;
- $y = a\,f(x)$ con $a > 0$: se estira ($a > 1$) o se comprime ($a < 1$) verticalmente.

Así, $y = -4 - \frac{1}{2}\sqrt{16-(x-3)^2}$ es la semicircunferencia $\sqrt{16-x^2}$ comprimida a la mitad (una semielipse), reflejada hacia abajo y con centro en $(3,-4)$.

1A.1.3 Funciones por partes

Una función por partes usa reglas distintas en intervalos distintos del dominio:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in I_1, \\ f_2(x) & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Su dominio es la unión $I_1 \cup I_2$ (cada I_k recortado al dominio de su regla) y su recorrido es la unión de los recorridos de cada rama, *cada una en su intervalo*. En la gráfica, los extremos incluidos se marcan con punto lleno y los excluidos con punto vacío.

1A.1.4 Operaciones con funciones y composición

Para f y g se definen

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)\,g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

con dominio $D_f \cap D_g$ (y, en el cociente, sin los ceros de g). La **composición** es

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

Primero se aplica g y luego f. El dominio de la composición **no** se lee de la fórmula simplificada: $e^{\ln(x-2)}+2$ se simplifica a x, pero solo existe para $x > 2$. En general $f\circ g \neq g\circ f$.

1A.1.5 Inyectividad y función inversa

f es **inyectiva** (uno a uno) si valores distintos de x dan valores distintos de y: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. En la gráfica: toda recta *horizontal* la corta a lo más una vez (**prueba de la recta horizontal**). Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en su dominio es inyectiva. Es **biyectiva** si además su codominio es su recorrido.

Solo una función inyectiva tiene **inversa** f^{-1}, definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \qquad D_{f^{-1}} = R_f, \qquad R_{f^{-1}} = D_f.$$

Se cumple $\big(f \circ f^{-1}\big)(x) = x$ en R_f y $\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x$ en D_f. La gráfica de f^{-1} es la de f **reflejada respecto a la recta** $y = x$: el punto (a,b) de f pasa a (b,a).

Si f no es inyectiva (por ejemplo $y = x^2$), se **restringe** su dominio a un intervalo donde sí lo sea: $y = x^2$ con $x \geq 0$ tiene inversa $\sqrt{x}$; con $x \leq 0$, $-\sqrt{x}$. El signo de la raíz al despejar lo decide la restricción.

Inversa de una función por partes. Si cada rama es inyectiva y los recorridos de las ramas no se traslapan, la función es inyectiva y su inversa es por partes: en cada rama se despeja por separado, y el intervalo de cada rama de f^{-1} es el *recorrido* de la rama correspondiente de f.

1A.1.6 Funciones en forma paramétrica

Una función puede darse con un parámetro:

$$f:\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Cada t da un punto (x, y) de la gráfica. Para la forma cartesiana se **elimina el parámetro**: se despeja t (o una función de t, como $\operatorname{sen} t$) de una ecuación y se sustituye en la otra, o se usa una identidad ($\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$). El dominio es el conjunto de valores de $x(t)$ con $t \in I$, y el recorrido el de $y(t)$. Si no se da el intervalo de t, lo imponen las raíces o las restricciones sobre x y y.

1A.1.7 Funciones trigonométricas directas e inversas

$\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[-1, 1]$; $\tan x$ y $\sec x$ excluyen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot x$ y $\csc x$ excluyen $x = k\pi$. Ninguna es inyectiva: para invertirlas se restringen a un intervalo principal.

Inversa	Dominio	Recorrido (valor principal)
$\operatorname{ang\,sen} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\operatorname{ang\cos} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{ang\tan} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ang\cot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\operatorname{ang\sec} x$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y = \operatorname{ang\,sen} x$ significa $\operatorname{sen} y = x$ con y en el intervalo principal. Por eso $\operatorname{ang\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ solo si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (Para ang sec algunos textos usan otro intervalo principal; aquí se usa el de la tabla.)

1A.1.8 Logaritmo natural y exponencial

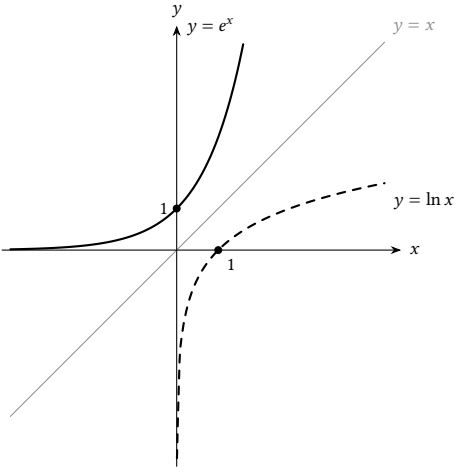
El **logaritmo natural** $\ln x$ tiene dominio $(0, \infty)$ y recorrido $\mathbb{R}$; es creciente, $\ln 1 = 0$ y $\ln e = 1$. Su inversa es la **exponencial** e^x, con dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, \infty)$:

$$e^{\ln x} = x \ \ (x > 0), \qquad \ln e^x = x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Sus gráficas son simétricas respecto a $y = x$ (figura). Propiedades, con $a, b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^r = r \ln a,$$
$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad \left(e^x\right)^r = e^{rx}.$$

Cambio de base: para $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ y $a^x = e^{x \ln a}$.



1A.1.9 Funciones hiperbólicas

Se definen con la exponencial:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x},$$

y $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$. La identidad fundamental es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

por eso $x = a\cosh t$, $y = b\operatorname{senh} t$ recorre la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gráficas: $\operatorname{senh} x$ es impar, creciente, con recorrido $\mathbb{R}$; $\cosh x$ es par, con mínimo $\cosh 0 = 1$ y recorrido $[1, \infty)$ (la forma de una cadena colgante); $\tanh x$ es creciente, con recorrido $(-1, 1)$ y asíntotas $y = \pm 1$.

Las inversas tienen forma logarítmica (se obtienen despejando e^y de una ecuación de segundo grado):

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1,$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \qquad |x| < 1.$$

Para $\cosh^{-1}$ se restringe $\cosh x$ a $x \geq 0$, donde es inyectiva. En algunos exámenes se escriben «ang senh», «ang cosh», «ang tanh».

1A.1.10 Modelos geométricos

Formular un modelo es escribir una cantidad (área, perímetro, volumen, costo) como función de *una sola* variable, con su dominio. Casi siempre hay dos variables relacionadas

por un dato fijo (un área, un perímetro, un material) o por una figura (Pitágoras, triángulos semejantes, un punto sobre una curva). Esa relación se usa para eliminar la variable que sobra. El dominio lo dan las condiciones físicas: longitudes positivas (o no negativas), la figura cabe en la otra. Estos modelos son el primer paso de los problemas de optimación de la Unidad 2C.

1A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar el dominio y el recorrido» de una regla con raíces, cocientes, ln o ang sen	dominio natural y recorrido	1A.3.1, 1A.3.2
$\sqrt{a^2-(x-h)^2}$, $\sqrt{x^2+4x}$, «trazar la gráfica»	reconocer la cónica y trazar el arco	1A.3.3
una regla con llaves y varios intervalos	función por partes	1A.3.4
$f\circ g$, $g\circ f$, fg, $\frac{g}{f}$ «indicando su dominio»	composición u operación	1A.3.5
«determinar si tiene inversa», «obtener f^{-1}», «biyectiva»	inversa y su gráfica	1A.3.6
la función con inversa pedida está dada por partes	inversa rama por rama	1A.3.7
$x=x(t)$, $y=y(t)$: «forma cartesiana», «forma explícita», «$y=f(x)$»	eliminar el parámetro	1A.3.8
«en función de», «en términos únicamente de», con figura	modelo de una variable	1A.3.9

1A.3 Procedimientos

1A.3.1 Dominio

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es el dominio (revisa que la regla exista en todo él).
2. Si no, anota una condición por cada restricción: radicando par ≥ 0, denominador $\neq 0$, argumento de ln > 0, argumento de ang sen o ang cos entre -1 y 1.
3. Resuelve cada desigualdad (completa el cuadrado o factoriza; tabla de signos si hace falta) e intersecta los conjuntos.
4. Escribe el dominio con intervalos.

1A.3.2 Recorrido

1. **Por monotonía:** si f es continua y creciente (o decreciente) en su dominio, el recorrido va de un extremo al otro. Evalúa en los extremos incluidos y toma el valor al que se acerca f en los excluidos y en $\pm\infty$.
2. **Despejando x:** de $y=f(x)$ despeja x en términos de y; los y para los que el despeje existe (y da x en el dominio) forman el recorrido. Es el mismo trabajo que la inversa.
3. **Por la gráfica:** si la regla es un arco de cónica (1A.3.3), el recorrido se lee del arco.

1A.3.3 Gráficas de raíces: arcos de cónicas

1. Completa el cuadrado dentro de la raíz: $8-2x-x^2 = 9-(x+1)^2$, $x^2+4x = (x+2)^2-4$.
2. Aísla la raíz y eleva al cuadrado: de $y = k \pm c\sqrt{\ldots}$ sale $(y-k)^2 = c^2(\ldots)$. Identifica la cónica: circunferencia, elipse o hipérbola, con su centro.
3. El signo de la raíz decide la mitad: $y = k + c\sqrt{\ldots}$ es la mitad con $y \geq k$; $y = k - c\sqrt{\ldots}$, la de $y \leq k$.
4. El intervalo de x decide el arco. Marca extremos (llenos o vacíos) y traza.

1A.3.4 Funciones por partes

1. Para cada rama: recorta su intervalo al dominio de su regla. El dominio es la unión.
2. Para cada rama: su recorrido en su intervalo (1A.3.2). El recorrido de f es la unión.
3. Traza cada rama solo en su intervalo; evalúa la regla en los extremos y marca punto lleno si el extremo pertenece a la rama y vacío si no.

1A.3.5 Composición, producto y cociente

1. Regla: en $f \circ g$ sustituye $g(x)$ en lugar de x en f. Simplifica.
2. Dominio de $f \circ g$: $x \in D_g$ **y** $g(x) \in D_f$. Escribe las dos condiciones antes de simplificar.
3. Dominio de fg, $f \pm g$: $D_f \cap D_g$; de $\frac{f}{g}$: además $g(x) \neq 0$.
4. Recorrido y gráfica de la función resultante con 1A.3.2 y 1A.3.3.

1A.3.6 Función inversa

1. **Dominio y recorrido de** f (1A.3.1, 1A.3.2).
2. **Inyectividad:** muestra que f es creciente o decreciente en su dominio (por la forma de la gráfica o porque la parte que depende de x lo es). Si no lo es, no hay inversa: dilo y explica por qué (dos x con el mismo y).
3. **Despeja** x de $y = f(x)$. Al sacar raíz cuadrada aparece $\pm$: el signo lo decide el dominio de f (si $x \leq -1$, entonces $x+1 \leq 0$ y se toma $-$).
4. **Intercambia** x y y: $y = f^{-1}(x)$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$. No calcules el dominio de f^{-1} con su fórmula: la fórmula puede existir en un conjunto mayor.
6. **Gráfica:** traza f, la recta $y = x$ y el reflejo; los puntos extremos (a, b) pasan a (b, a) con el mismo tipo de punto (lleno o vacío).
7. Comprueba con un punto: si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

1A.3.7 Inversa de una función por partes

1. Calcula el recorrido de cada rama en su intervalo.
2. Si cada rama es inyectiva y los recorridos no se traslapan, f es inyectiva.
3. Despeja x en cada rama por separado (1A.3.6).
4. Arma f^{-1} por partes: la rama que viene de f_k vale en el *recorrido* de f_k.

1A.3.8 Funciones en forma paramétrica

1. Con el intervalo de t, obtén el intervalo de $x(t)$ (dominio) y el de $y(t)$ (recorrido). En las trigonométricas, usa los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ en ese intervalo.

2. Elimina el parámetro: despeja $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$ (o t) y usa la identidad que corresponda. Si hay $\operatorname{sen}^2 t$ o $\cos^2 t$, la parábola sale directo de $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
3. Escribe $y = f(x)$ explícita, eligiendo el signo de la raíz con el recorrido.
4. Traza el arco marcando los puntos de los extremos del intervalo de t.
5. Si piden la inversa, aplica 1A.3.6 a la forma cartesiana.

1A.3.9 Modelos geométricos

1. Dibuja la figura y nombra todas las variables (la que pide el enunciado y las auxiliares).
2. Escribe la cantidad pedida con todas sus variables (área, perímetro, volumen, costo).
3. Escribe la relación entre variables: el dato fijo (área, material, perímetro) o la geometría (Pitágoras, semejanza, el punto sobre la curva).
4. Despeja la variable auxiliar y sustituye: la cantidad queda en función de una sola variable.
5. Dominio: exige que todas las longitudes sean positivas y que la figura quepa.

1A.4 Ejemplo resuelto

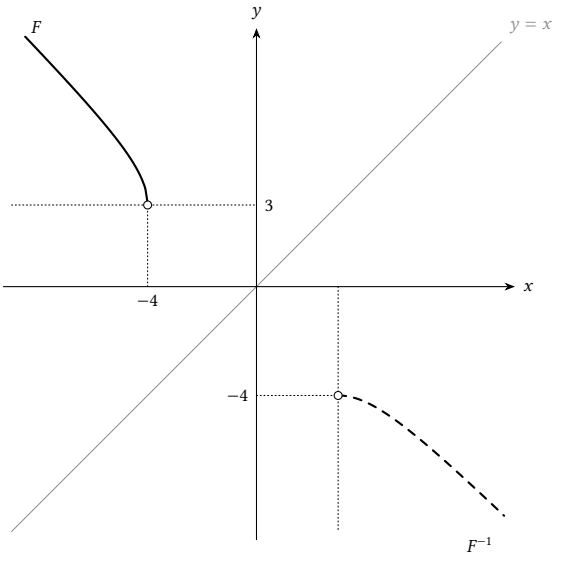
Ejemplo resuelto · Inversa de una función con radical

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 1.

Para la función $F = \left\{(x, y) \;\middle|\; y = 3 + \sqrt{x^2 + 4x}\,;\ x < -4\right\}$ obtenga su función inversa, así como el dominio y el recorrido de ésta, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Dominio de F:** el dado, $x < -4$. Ahí $x^2 + 4x = x(x + 4) > 0$ (producto de dos negativos), así que la raíz existe.
2. **Inyectividad:** se completa el cuadrado, $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$. Para $x < -4$ se tiene $x + 2 < -2$; al disminuir x, $(x + 2)^2$ crece. Entonces F es decreciente y tiene inversa.
3. **Recorrido de F:** cuando $x \to -4^-$, la raíz tiende a 0 y $y \to 3$ (sin alcanzarlo, porque -4 no está en el dominio); cuando $x \to -\infty$, $y \to \infty$. Entonces $R_F = (3, \infty)$.
4. **Despeje:**
$$y - 3 = \sqrt{(x + 2)^2 - 4}$$
$$(y - 3)^2 + 4 = (x + 2)^2$$
$$x + 2 = -\sqrt{(y - 3)^2 + 4}.$$
Se toma el signo negativo porque $x + 2 < -2 < 0$.
5. **Intercambio:** $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x - 3)^2 + 4}$.
6. $D_{F^{-1}} = R_F = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = D_F = (-\infty, -4)$. Comprobación: $F(-5) = 3 + \sqrt{5}$ y $F^{-1}\left(3 + \sqrt{5}\right) = -2 - \sqrt{5 + 4} = -5$.
7. **Gráfica:** de $(y - 3)^2 = (x + 2)^2 - 4$ sale la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, de centro $(-2, 3)$. F es la parte de la rama izquierda con $y > 3$; F^{-1} es su reflejo respecto a $y = x$, con punto vacío en $(3, -4)$.

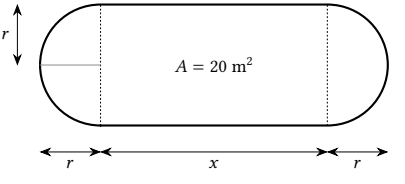


Resultado: $F^{-1}(x) = -2 - \sqrt{(x-3)^2 + 4}$, con $D_{F^{-1}} = (3, \infty)$ y $R_{F^{-1}} = (-\infty, -4)$.

Ejemplo resuelto · Perímetro de un terreno en función del radio

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 1.

Un terreno está formado por tres partes alineadas: la central es un rectángulo y los extremos son semicírculos de radio r (figura). Si el área del terreno es 20 m^2, determine su perímetro en función exclusivamente del radio de los semicírculos.



Resolución.

1. **Variables:** r, radio de los semicírculos, y x, largo del rectángulo; su alto es $2r$.
2. **Cantidad pedida:** el perímetro son los dos lados largos del rectángulo y los dos semicírculos (una circunferencia completa): $P = 2x + 2\pi r$.
3. **Relación:** el área es la del rectángulo más la de un círculo: $2rx + \pi r^2 = 20$, de donde $x = \frac{20 - \pi r^2}{2r}$.

4. **Sustitución:**

$$P = 2 \cdot \frac{20 - \pi r^2}{2r} + 2\pi r = \frac{20}{r} - \pi r + 2\pi r = \frac{20}{r} + \pi r.$$

5. **Dominio:** $r > 0$ y $x > 0$, es decir, $20 - \pi r^2 > 0$: $r < \sqrt{\frac{20}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}} \approx 2.52$.

Resultado: $P(r) = \frac{20}{r} + \pi r$ m, con $0 < r < 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$.

1A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

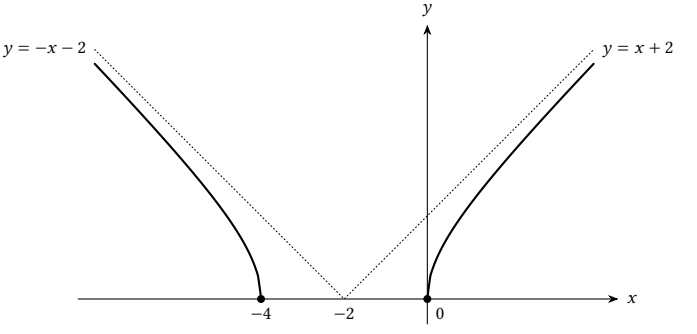
Ejercicio 1A.5.1 · Composición con dominio, recorrido y gráfica

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 1.

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = x + 2$, determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **Regla:** $(f \circ g)(x) = f(x + 2) = \sqrt{(x + 2)^2 - 4} = \sqrt{x^2 + 4x}$.
2. **Dominio:** $D_g = \mathbb{R}$ y $D_f = \{x \mid |x| \geq 2\}$. Se pide $|x + 2| \geq 2$: $x + 2 \geq 2$ o $x + 2 \leq -2$, es decir, $x \geq 0$ o $x \leq -4$. (Lo mismo da $x(x + 4) \geq 0$.)
3. **Recorrido:** la raíz vale 0 en $x = 0$ y en $x = -4$ y crece sin límite cuando $|x| \to \infty$; toma todos los valores $y \geq 0$.
4. **Gráfica:** $y^2 = (x+2)^2 - 4$, es decir, $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$: hipérbola de centro $(-2, 0)$, vértices $(-4, 0)$ y $(0, 0)$ y asíntotas $y = \pm(x + 2)$. La función es la mitad superior ($y \geq 0$) de sus dos ramas.



Resultado: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$, con dominio $(-\infty, -4] \cup [0, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

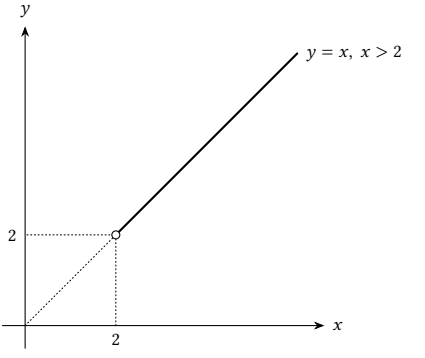
Ejercicio 1A.5.2 · Composición de exponencial y logaritmo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 3.

Sean las funciones $f(x) = e^x + 2$ y $g(x) = \ln(x - 2)$. Determine el dominio y el recorrido de $f \circ g$ y trace su gráfica.

Resolución.

1. **Dominio:** $D_g = \{x \mid x - 2 > 0\} = (2, \infty)$; $D_f = \mathbb{R}$, así que todo valor de g está en D_f. Entonces $D_{f\circ g} = (2, \infty)$.
2. **Regla:** $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} + 2 = (x - 2) + 2 = x$, porque $e^{\ln u} = u$ para $u > 0$.
3. **Recorrido:** $y = x$ con $x > 2$ toma todos los valores mayores que 2: $(2, \infty)$.
4. **Gráfica:** la parte de la recta $y = x$ con $x > 2$, con punto vacío en $(2, 2)$. La regla simplificada es x, pero la función *no* es la identidad en $\mathbb{R}$.



Resultado: $(f \circ g)(x) = x$, con dominio $(2, \infty)$ y recorrido $(2, \infty)$.

Ejercicio 1A.5.3 · Función por partes con arcos de cónicas

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 1.

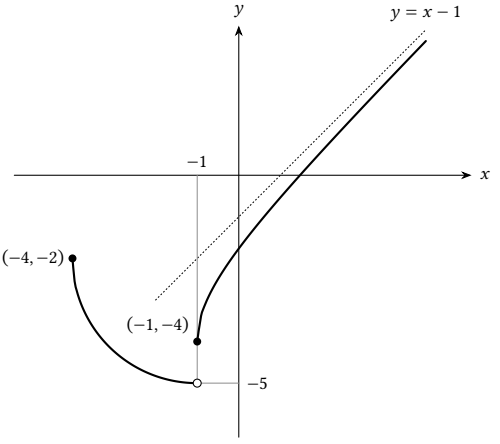
Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{9 - (x+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ -4 + \sqrt{(x+3)^2 - 4} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Determine el dominio y el recorrido y trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Primera rama:** $9 - (x+1)^2 \geq 0 \iff |x+1| \leq 3 \iff -4 \leq x \leq 2$. Con $x < -1$ queda $[-4, -1)$. Es la circunferencia $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ (centro $(-1, -2)$, radio 3), mitad inferior, cuarto izquierdo: de $(-4, -2)$ (lleno) a $(-1, -5)$ (vacío). Recorrido: $(-5, -2]$.
2. **Segunda rama:** $(x+3)^2 \geq 4 \iff x \geq -1$ o $x \leq -5$. Con $x \geq -1$ queda $[-1, \infty)$. Es la hipérbola $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$ (centro $(-3, -4)$), parte superior de la rama derecha: empieza en el vértice $(-1, -4)$ y sube acercándose a la asíntota $y = x - 1$. Recorrido: $[-4, \infty)$.
3. **Dominio:** $[-4, -1) \cup [-1, \infty) = [-4, \infty)$.
4. **Recorrido:** $(-5, -2] \cup [-4, \infty) = (-5, \infty)$.



Resultado: $D_f = [-4, \infty)$ y $R_f = (-5, \infty)$.

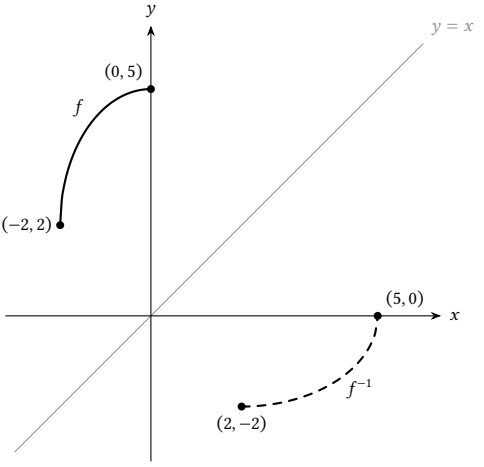
Ejercicio 1A.5.4 · Inversa de un arco de elipse

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 1.

Para la función $f = \left\{(x, y) \;\middle|\; y = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 0]\right\}$, obtenga su inversa y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Inyectividad y recorrido:** en $[-2, 0]$, $4 - x^2$ crece de 0 a 4, así que f es creciente: $f(-2) = 2$ y $f(0) = 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 5$. Entonces $R_f = [2, 5]$.
2. **Despeje:**
$$\frac{2}{3}(y - 2) = \sqrt{4 - x^2}$$
$$x^2 = 4 - \frac{4}{9}(y - 2)^2 = \frac{4}{9}\left[9 - (y - 2)^2\right]$$
$$x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (y - 2)^2}.$$
Se toma el signo negativo porque $x \in [-2, 0]$.
3. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - (x - 2)^2}$, con $D_{f^{-1}} = [2, 5]$ y $R_{f^{-1}} = [-2, 0]$.
4. **Gráfica:** f es el cuarto superior izquierdo de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, de $(-2, 2)$ a $(0, 5)$; f^{-1} es su reflejo, de $(2, -2)$ a $(5, 0)$.



Resultado: $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2}$, $x \in [2,5]$, con recorrido $[-2,0]$.

Ejercicio 1A.5.5 · Inversa de una función por partes

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 1.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 3 - x^3 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

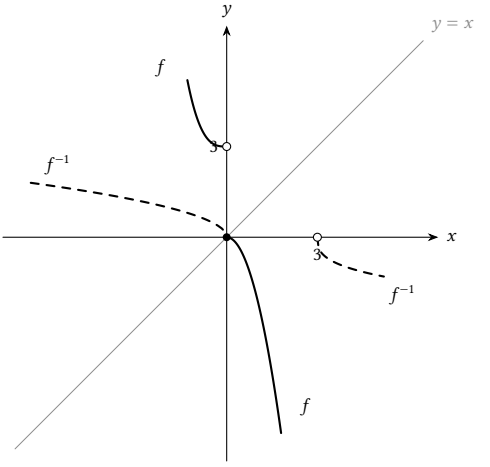
determine la regla de correspondencia de f^{-1}, el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resolución.

1. **Rama $x \geq 0$:** $-2x^2$ es decreciente y vale 0 en $x = 0$; su recorrido es $(-\infty, 0]$.
2. **Rama $x < 0$:** $-x^3$ es decreciente y positiva; $3 - x^3$ toma todos los valores mayores que 3 (el 3 se alcanzaría en $x = 0$, que no es de esta rama). Recorrido: $(3, \infty)$.
3. **Inyectividad:** cada rama es decreciente y los recorridos $(-\infty, 0]$ y $(3, \infty)$ no se traslapan: f es inyectiva. $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.
4. **Despeje por ramas:** de $y = -2x^2$ con $x \geq 0$, $x = \sqrt{-\frac{y}{2}}$ (con $y \leq 0$). De $y = 3 - x^3$, $x = \sqrt[3]{3-y}$ (con $y > 3$, que da $x < 0$).
5. **Inversa:**

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-\dfrac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{3-x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

   $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$ y $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
6. **Gráfica:** f tiene un punto vacío en $(0, 3)$ y uno lleno en $(0, 0)$; en f^{-1} pasan a $(3, 0)$ vacío y $(0, 0)$ lleno.



Resultado: $f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{x}{2}}$ si $x \leq 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3-x}$ si $x > 3$; $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ y $R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.

Ejercicio 1A.5.6 · Paramétricas a forma explícita

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Sea la función

$$f: \begin{cases} x = 3 + 2\operatorname{sen}\theta \\ y = 4\cos^2\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

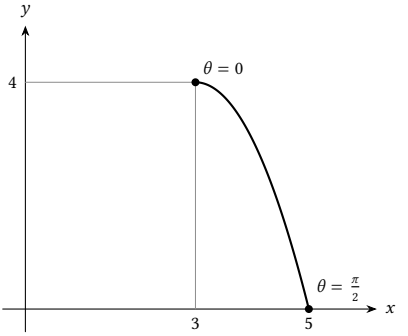
a) Determine la forma explícita de su regla de correspondencia. b) Obtenga el dominio y el rango de f. c) Trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Eliminar el parámetro:** $\operatorname{sen}\theta = \frac{x-3}{2}$ y $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, así que

$$y = 4\left[1 - \frac{(x-3)^2}{4}\right] = 4 - (x-3)^2.$$

2. **Dominio:** en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen}\theta$ va de 0 a 1, así que x va de 3 a 5: $D_f = [3, 5]$.
3. **Rango:** $\cos^2\theta$ va de 1 a 0, así que y va de 4 a 0: $R_f = [0, 4]$.
4. **Gráfica:** arco de la parábola de vértice $(3, 4)$ que abre hacia abajo, de $(3, 4)$ ($\theta = 0$) a $(5, 0)$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$).



Resultado: $y = 4 - (x-3)^2$, con dominio $[3,5]$ y rango $[0,4]$.

Ejercicio 1A.5.7 · Inversa de una función en paramétricas

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 1.

Dada la función en forma paramétrica

$$f:\ \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = 3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

determine su función inversa $f^{-1}(x)$ en forma cartesiana y el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}.

Resolución.

1. **Dominio de f:** en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha$ toma los valores de $[0,1)$ (el 1 corresponde a $\alpha = 0$, excluido). Entonces $x \in \left[0, \sqrt{3}\right)$.
2. **Recorrido de f:** $\mathrm{sen}^2\,\alpha$ toma los valores de $(0,1]$, así que $y \in (0,3]$.
3. **Forma cartesiana:** $\cos^2\alpha = \frac{x^2}{3}$ y $y = 3\left(1 - \cos^2\alpha\right) = 3 - x^2$. Es decreciente en $\left[0, \sqrt{3}\right)$: tiene inversa.
4. **Despeje:** $x^2 = 3 - y$ y, como $x \geq 0$, $x = \sqrt{3-y}$. Intercambio: $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$.
5. $D_{f^{-1}} = R_f = (0,3]$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

Resultado: $f(x) = 3 - x^2$ con $D_f = \left[0, \sqrt{3}\right)$, $R_f = (0,3]$; $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$ con $D_{f^{-1}} = (0,3]$, $R_{f^{-1}} = \left[0, \sqrt{3}\right)$.

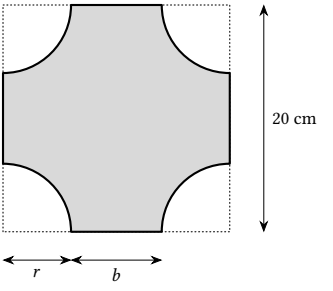
Ejercicio 1A.5.8 · Área de una cruz en función de su base

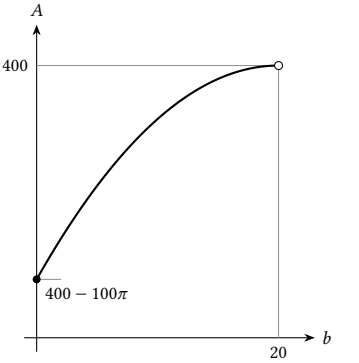
Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 1.

Una cruz se forma recortando cuartos de círculo iguales en las cuatro esquinas de un cuadrado de 20 cm de lado; la base b de la cruz es el tramo recto que queda de cada lado (figura). a) Determine la regla de correspondencia de la función f que da el área de la cruz en términos de su base b. b) Obtenga el dominio y el recorrido de f. c) Trace la gráfica de f.

Resolución.

1. **Variables:** r, radio de los cuartos de círculo, y b. Cada lado mide $r + b + r = 20$, así que $r = \frac{20-b}{2}$.
2. **Área:** el cuadrado menos cuatro cuartos de círculo (un círculo completo): $A = 400 - \pi r^2$.
3. **Sustitución:**
$$f(b) = 400 - \pi\left(\frac{20-b}{2}\right)^2 = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2.$$
4. **Dominio:** $b \geq 0$ y $r > 0$ (si $r = 0$ no hay recorte ni cruz), es decir, $0 \leq b < 20$. Con $b = 0$ los cuartos de círculo se tocan en el punto medio de cada lado.
5. **Recorrido:** f es creciente en $[0, 20)$ ($(20-b)^2$ decrece). $f(0) = 400 - 100\pi \approx 85.8$ y $f(b) \to 400$ cuando $b \to 20$: $R_f = [400 - 100\pi, 400)$.
6. **Gráfica:** arco de parábola que abre hacia abajo con vértice en $(20, 400)$, punto lleno en $(0, 400 - 100\pi)$ y vacío en $(20, 400)$.





Resultado: $f(b) = 400 - \frac{\pi}{4}(20-b)^2$ cm^2, con $D_f = [0, 20)$ y $R_f = [400 - 100\pi, 400)$. Si se admite $b = 20$ (el cuadrado sin recortes), el dominio es $[0, 20]$ y el recorrido $[400 - 100\pi, 400]$.

1A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1A**.

Ejercicio propuesto 1A.6.1

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 1.

Obtenga el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ y trace su gráfica.

Resultado: $D_f = (1, \infty)$, $R_f = (0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 160.

Ejercicio propuesto 1A.6.2

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 1.

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Obtenga las funciones $f \circ g$ y $f \cdot g$ y determine el dominio y el recorrido de cada una.

Resultado: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$, dominio $\mathbb{R}$, recorrido $[1, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}\,(x^2+1)$, dominio $[0, \infty)$, recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 160.

Ejercicio propuesto 1A.6.3

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 2.

Obtenga el dominio, el recorrido y la regla de correspondencia de la función inversa de $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+2}$.

Resultado: $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-3x}$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ y recorrido $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 160.

Ejercicio propuesto 1A.6.4

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 1.

Dada la función en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 3\cos t, & x \geq 0, \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t, & y \geq 0, \end{cases}$$

determine su función inversa, si es que tiene, su dominio y su recorrido, y trace la gráfica de ambas funciones.

Resultado: $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$; $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, con dominio $[0,4]$ y recorrido $[0,3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 161.

Ejercicio propuesto 1A.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2024-2, tipo C, problema 5.

Obtenga el dominio y el recorrido y trace la gráfica de la función

$$f: \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2\,\mathrm{senh}\, t \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

Resultado: $y = 2\sqrt{x^2-1}$, con dominio $[1, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 161.

Ejercicio propuesto 1A.6.6

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

De un tronco de sección circular de diámetro D se cortará una viga de sección rectangular de ancho x. Exprese el área de la sección de la viga en función del ancho x.

Resultado: $A(x) = x\sqrt{D^2 - x^2}$, con $0 < x < D$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

1A.7 Errores frecuentes

1. **Dominio de f^{-1} con su fórmula.** $\sqrt{3-x}$ existe para $x \leq 3$, pero en el ejercicio 1A.5.7 el dominio de f^{-1} es $(0, 3]$: es el recorrido de f.
2. **Signo de la raíz al despejar.** Al despejar x de $x^2 = \ldots$ aparece $\pm$; el signo lo decide el dominio de f, no la costumbre de tomar el positivo.
3. **Dominio de la composición con la fórmula simplificada.** $e^{\ln(x-2)} + 2 = x$ solo para $x > 2$. Se escribe primero $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$.
4. **Confundir $f \circ g$ con $g \circ f$** o con el producto fg.
5. **Olvidar la condición estricta del denominador.** $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ pide $x > 1$, no $x \geq 1$.
6. **Extremos mal marcados.** En la gráfica de f^{-1}, cada punto lleno o vacío de f pasa con el mismo tipo a la posición (b, a).
7. **Paramétricas sin el intervalo del parámetro.** La forma cartesiana sola ($y = 3 - x^2$) no dice qué arco es; el dominio y el recorrido salen de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ en el intervalo dado.
8. **Recorrido de una función por partes como el de una sola regla.** Cada rama se evalúa *solo* en su intervalo y luego se unen los recorridos.
9. **Modelo con dos variables.** El resultado debe depender solo de la variable pedida; la otra se elimina con la relación del enunciado. Y siempre lleva dominio.

1A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \leq 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot D_{fg} = D_f \cap D_g \cdot$ en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \neq 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro (h, k); $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2 + a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h) + k$: traslación $(h, k) \cdot -f(x)$: reflejo en el eje $x \cdot f(-x)$: en el eje y.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cdot \operatorname{ang\,cos}: [-1, 1] \to [0, \pi] \cdot \operatorname{ang\,tan}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $e^{\ln x} = x\ (x > 0)$, $\ln e^x = x \cdot \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot a^x = e^{x \ln a}$.
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

1A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe primero el dominio y el recorrido de la función dada: casi todos los problemas los piden y la inversa sale de ellos.
2. Completa el cuadrado en cada raíz y nombra la cónica: la gráfica y el recorrido salen de ahí.
3. Inversa: inyectividad (una frase), despeje con el signo justificado, intercambio, $D_{f^{-1}} = R_f$.
4. Dibuja f, la recta $y = x$ y f^{-1} en los mismos ejes, con los extremos marcados.
5. Comprueba con un punto: $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$.
6. Modelo: figura, variables, relación, sustitución y dominio, en ese orden.

Si no se termina el despeje, el dominio, el recorrido y la gráfica de f ya valen buena parte del problema.

1A.10 Lo que agrega el Plan 2026: representación implícita y modelos físicos

1A.10.1 Cuatro maneras de dar una función

El programa 2026 nombra las cuatro representaciones de una función. Tres ya aparecieron en esta parte:

- **Explícita:** $y = f(x)$, con la variable dependiente despejada: $y = 3 - x^2$.
- **Paramétrica:** $x = x(t)$, $y = y(t)$ con t en un intervalo (sección 1A.1.6).
- **Con varias reglas de correspondencia:** la función por partes (sección 1A.1.3).
- **Implícita:** una ecuación $F(x, y) = 0$ que liga a x y a y sin despejar, más una condición que elige *una* y para cada x. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 25$ no es una función (la recta vertical $x = 3$ corta la circunferencia en $(3, 4)$ y en $(3, -4)$), pero $x^2 + y^2 = 25$ con $y \geq 0$ sí lo es: es la semicircunferencia $y = \sqrt{25 - x^2}$, con dominio $[-5, 5]$ y recorrido $[0, 5]$.

Para pasar de la forma implícita a la explícita se despeja y y la condición decide el signo de la raíz, igual que al despejar una inversa (procedimiento 1A.3.6). Si no se puede despejar (como en $y^5 + y + x = 0$), la función existe de todos modos y se estudia con la derivación implícita (Unidad 2A).

1A.10.2 Funciones como modelos físicos

Un *modelo* es una función que describe un fenómeno: su regla sale de una ley física o de los datos, y su dominio, de lo que tiene sentido físicamente. Además de los modelos geométricos de la sección 1A.1.10, en ingeniería aparecen siempre estos:

- **Crecimiento y decaimiento exponencial:** $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ ($k > 0$ crece, $k < 0$ decae): población, interés continuo, carga de un capacitor que se descarga, desintegración radiactiva. La *vida media* es el tiempo en que Q baja a la mitad: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|}$.
- **Ley de enfriamiento de Newton:** un cuerpo a temperatura T_0 en un ambiente a T_a se enfría según $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$, con $k > 0$.
- **Catenaria:** un cable que cuelga entre dos postes toma la forma $y = a \cosh \frac{x}{a}$ (sección 1A.1.9).
- **Movimiento:** la posición $s(t)$ de un móvil; su derivada es la velocidad (Unidad 2A).

Ejemplo resuelto · Ley de enfriamiento como modelo

Una taza de café a 90 °C se deja en un cuarto a 20 °C. A los 10 minutos está a 55 °C. Con la ley de enfriamiento de Newton, escriba la temperatura en función del tiempo, dé su dominio y su recorrido y calcule en cuánto tiempo llega a 30 °C.

Resolución.

1. **Modelo:** $T(t) = 20 + (90 - 20)e^{-kt} = 20 + 70e^{-kt}$, con t en minutos.
2. **Constante:** $T(10) = 55 \Rightarrow 70e^{-10k} = 35 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{10}$. Así, $e^{-kt} = \left(e^{-10k}\right)^{t/10} = 2^{-t/10}$ y
$$T(t) = 20 + 70 \cdot 2^{-t/10}.$$
3. **Dominio:** $t \geq 0$ (desde que se sirve el café). **Recorrido:** T es decreciente, $T(0) = 90$ y $T(t) \to 20$ cuando $t \to \infty$ sin alcanzarlo: $R_T = (20, 90]$.
4. **Inversa:** de $T - 20 = 70 \cdot 2^{-t/10}$ sale $t = 10 \log_2 \dfrac{70}{T - 20}$, definida en $(20, 90]$.
5. Con $T = 30$: $t = 10 \log_2 7 = \dfrac{10 \ln 7}{\ln 2} \approx 28.07$ minutos.

Resultado: $T(t) = 20 + 70 \cdot 2^{-t/10}$ °C, con $t \in [0, \infty)$ y recorrido $(20, 90]$; llega a 30 °C a los $10 \log_2 7 \approx 28.1$ minutos.

Ejercicio propuesto 1A.10.1 · Una función dada en forma implícita

La ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, con $y \leq 0$, define una función. Escríbala en forma explícita y obtenga su dominio y su recorrido.

Resultado: $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, con dominio $[-3, 3]$ y recorrido $[-2, 0]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

Ejercicio propuesto 1A.10.2 · Volumen de una caja como modelo

De una lámina cuadrada de 30 cm de lado se recortan cuadrados de lado x en las cuatro esquinas y se doblan las pestañas para formar una caja sin tapa. Exprese el volumen de la caja en función de x, con su dominio, y calcule el volumen cuando $x = 5$ cm.

Resultado: $V(x) = x(30 - 2x)^2$ cm^3, con $0 < x < 15$; $V(5) = 2000$ cm^3.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

Ejercicio propuesto 1A.10.3 · Logaritmo de una cuadrática

Obtenga el dominio y el recorrido de $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$.

Resultado: $D_f = (-2, 2)$, $R_f = (-\infty, \ln 4]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 162.

Ejercicio propuesto 1A.10.4 · Inversa de un coseno hiperbólico

Obtenga la inversa de $f(x) = 2\cosh x$, con $x \geq 0$, en forma logarítmica, con su dominio y su recorrido.

Resultado: $f^{-1}(x) = \ln \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$, con dominio $[2, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

Con la computadora

```
# Dominio, recorrido e inversa del ejemplo resuelto:
# F(x) = 3 + raiz(x^2 + 4x), x < -4
from sympy import Interval, oo, solve, sqrt, symbols
from sympy.calculus.util import function_range
x, y = symbols("x y", real=True)
F = 3 + sqrt(x**2 + 4*x)
R = function_range(F, x, Interval.open(-oo, -4))
print(R)                        # Interval.open(3, oo)
inv = [s for s in solve(y - F, x) if s.subs(y, 5) < -4]
print(inv)       # [-sqrt((y - 3)**2 + 4) - 2]
assert R == Interval.open(3, oo)
assert inv == [-sqrt((y - 3)**2 + 4) - 2]
```

Con `sympy.plot(F, (x, -10, -4))` se dibuja la gráfica (hace falta la biblioteca matplotlib).

Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 1). «Límites y continuidad de una función ejemplificados con software matemático. Interpretación geométrica del concepto de límite de una función. Cálculo de límites de funciones algebraicas y trigonométricas. Límites infinitos y al infinito. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

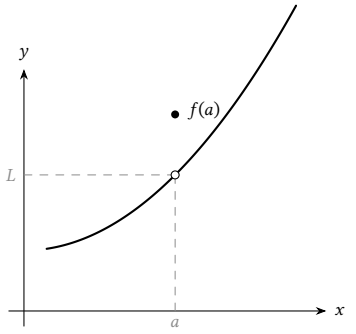
- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): sale en los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010, con 12 problemas (9 de límites y 3 de continuidad), casi siempre como problema 2 con dos o tres incisos; y en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016: 28 de límites, 8 de continuidad y 2 de asíntotas con gráfica.
- **Sin L'Hôpital:** los enunciados de límites dicen «sin emplear la regla de L'Hôpital», y así se resuelven aquí: factorizando, racionalizando, con los límites notables o dividiendo entre la mayor potencia. La regla está en la Parte 2B; sirve para comprobar un resultado, pero en un problema que la prohíbe no cuenta.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1B.1 y la tabla de la sección 1B.2 (20 min).
  2. Aprende las técnicas de la sección 1B.3: factorizar, racionalizar, cambio de variable, $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1$ y dividir entre la mayor potencia.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 1B.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 1B.5 con cronómetro: 5 minutos por inciso de límite y 12 minutos por problema de continuidad o de asíntotas.

1B.1 Conceptos y expresiones

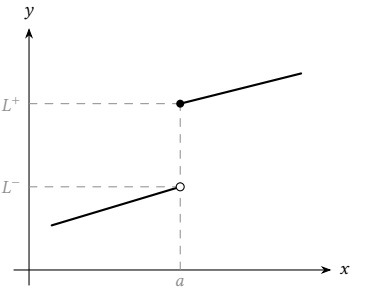
Límite. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca tanto como se quiera a L cuando x se acerca a a sin llegar a a. Lo que pasa *en* $x = a$ no importa: $f(a)$ puede valer otra cosa o no existir. En la definición formal, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Los exámenes no piden demostraciones con ε y δ; piden *calcular* límites.

Límites laterales. $\lim_{x\to a^-} f(x)$ usa solo valores $x < a$, y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ solo valores $x > a$. El límite existe si y solo si los dos laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$



$\lim_{x\to a} f(x) = L$



$L^- \neq L^+$: no existe

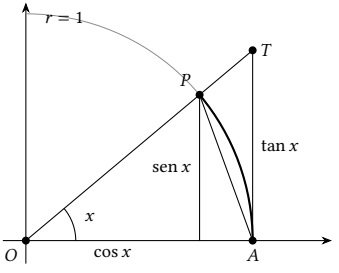
Teoremas sobre límites. Si $\lim f = L$ y $\lim g = M$, entonces el límite de la suma, la diferencia y el producto es $L+M$, $L-M$ y LM; el del cociente es $\frac{L}{M}$ si $M \neq 0$; y $\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{L}$ (con $L \geq 0$ si n es par). En consecuencia, los polinomios, las racionales en los puntos de su dominio, las raíces, las trigonométricas, la exponencial y el logaritmo se resuelven por **sustitución directa**.

Formas indeterminadas. Cuando la sustitución da $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$, el resultado no se conoce todavía: hay que transformar la expresión (factorizar, racionalizar, cambiar de variable, usar un límite notable) hasta que la sustitución dé un número. En cambio, $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ *no* es indeterminada: el límite es infinito (o no existe), y se estudia con los laterales.

El límite trigonométrico fundamental. Con x en radianes,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

En el círculo unitario, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, el triángulo OAP, el sector OAP y el triángulo OAT están uno dentro del otro, así que sus áreas cumplen $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$. Al dividir entre $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ e invertir, $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$; como $\cos x \to 1$, el cociente queda atrapado y tiende a 1 (teorema del emparedado).



De ese límite salen los demás (todos con $u \to 0$):

$$\frac{\tan u}{u} \to 1, \qquad \frac{u}{\operatorname{sen} u} \to 1, \qquad \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2}, \qquad \frac{1-\cos u}{u} \to 0.$$

El tercero se obtiene multiplicando por $1 + \cos u$:

$$\frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1-\cos^2 u}{u^2(1+\cos u)} = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^2 \frac{1}{1+\cos u} \to 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

La variable u puede ser cualquier expresión que tienda a cero: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 1$ y $\frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3} \to 1$ si $x \to 3$. El argumento del seno y el denominador deben ser *iguales*.

Límites al infinito. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca a L cuando x crece sin cota. Lo básico es $\frac{k}{x^n} \to 0$ ($n > 0$). Cuidado con las raíces: $\sqrt{x^2} = |x|$, que vale x si $x \to \infty$ y $-x$ si $x \to -\infty$.

Límites infinitos y asíntotas. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ significa que $f(x)$ crece sin cota cuando x se acerca a a por la derecha. Entonces:

- la recta $x = a$ es **asíntota vertical** si al menos un límite lateral en a es ∞ o $-\infty$ (en una racional simplificada, donde se anula el denominador y no el numerador);
- la recta $y = L$ es **asíntota horizontal** si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

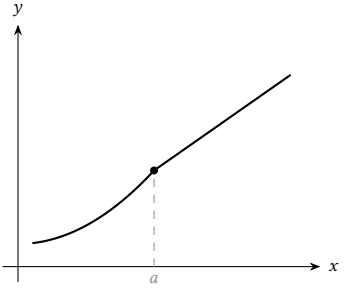
Decir que un límite «es ∞» es decir que no existe como número, pero describe cómo crece la función.

Continuidad en un punto. f es continua en $x = a$ si se cumplen las tres condiciones:

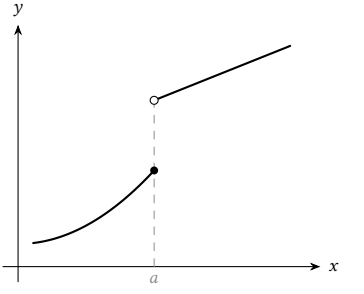
1. $f(a)$ está definida;
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (los dos laterales son iguales);
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si falla alguna, f es discontinua en a. La discontinuidad es *evitable* si el límite existe pero $f(a)$ no está definida o vale otra cosa (un hueco en la gráfica); *de salto* si los laterales son finitos y distintos; *infinita* si un lateral es $\pm\infty$ (asíntota vertical). Una función es continua en un intervalo si lo es en cada punto; en un extremo cerrado basta el límite lateral de adentro.

Funciones por partes. Cada regla (polinomio, raíz, trigonométrica) es continua en su propio tramo. Los únicos puntos en duda son aquellos donde *cambia la regla*. Ahí se igualan los laterales y el valor de la función; si la función tiene constantes, esas igualdades son las ecuaciones que las determinan.



continua en a



discontinua en a (salto)

1B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
cualquier límite	sustituir primero	1B.3.1
cociente de polinomios que da $\frac{0}{0}$: $\frac{x^3+1}{x+1}$	factorizar y cancelar	1B.3.2
$\frac{0}{0}$ con raíces cuadradas: $\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}$	racionalizar	1B.3.3
raíces de distinto índice: $\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$	cambio de variable $x = t^m$	1B.3.4
sen, tan, csc, cot o $1 - \cos$ con $x \to 0$	límites notables	1B.3.5
$x \to \infty$ o $x \to -\infty$	dividir entre la mayor potencia	1B.3.6
$\frac{k}{0}$, «límites infinitos», «asíntotas», «trazar la gráfica»	laterales y signos	1B.3.7
$\lvert x-a\rvert$, $x \to a^+$, función por partes en el punto de cambio	límites laterales	1B.3.8
«continua», «valor de a y b»	tres condiciones en cada punto de cambio	1B.3.9
e^x, senh, cosh, ln	sustitución o dividir entre e^x	1B.3.10

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 Sustitución directa (siempre primero)

1. Sustituye el valor de x. Si sale un número, ese es el límite: escribe «sustitución directa» y termina.
2. Si sale $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$, es una forma indeterminada: elige la técnica con la tabla de la sección 1B.2.
3. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, el límite es infinito o no existe: sección 1B.3.7.

1B.3.2 Factorizar

1. Si $x = a$ anula numerador y denominador, los dos tienen el factor $(x - a)$.
2. Factoriza con productos notables: $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$, $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$, $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$, o con división sintética entre $x - a$.
3. Cancela $(x - a)$ (vale porque $x \neq a$ dentro del límite) y sustituye.
4. Con una resta de fracciones ($\infty - \infty$), primero el denominador común; luego factoriza.

1B.3.3 Racionalizar

1. Multiplica numerador y denominador por el **conjugado** de la expresión con raíz: $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
2. Si hay raíces arriba y abajo, multiplica por los dos conjugados (doble racionalización).
3. Aparece el factor $(x - a)$ arriba y abajo, quizá como $(a - x) = -(x - a)$: cancélalo y sustituye. Los conjugados que quedan se evalúan al final.

1B.3.4 Raíces de distinto índice: cambio de variable

1. Si aparecen $\sqrt[p]{x}$ y $\sqrt[q]{x}$, sea m el mínimo común múltiplo de p y q, y haz $x = t^m$. Entonces $\sqrt[p]{x} = t^{m/p}$ y $\sqrt[q]{x} = t^{m/q}$ son potencias enteras de t.
2. Cambia también el valor al que tiende: si $x \to a$, entonces $t \to \sqrt[m]{a}$.
3. Queda un cociente de polinomios en t: factoriza (sección 1B.3.2).

1B.3.5 Límites trigonométricos

1. Escribe todo en senos y cosenos: $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$, $\csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$, $\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$, $\sec u = \frac{1}{\cos u}$.
2. Arma cada factor $\frac{\operatorname{sen}(ku)}{ku}$, multiplicando y dividiendo por la constante que falte: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 3$.
3. Con $1 - \cos(ku)$, arma $\frac{1-\cos(ku)}{(ku)^2} \to \frac{1}{2}$, o multiplica por $1 + \cos(ku)$.
4. Si $x \to a \neq 0$ o $x \to \infty$, cambia de variable para que la nueva tienda a cero: $u = x - a$, o $u = \frac{1}{x}$.
5. Los cosenos que quedan sueltos se sustituyen: $\cos 0 = 1$.

1B.3.6 Límites al infinito

1. Divide numerador y denominador entre la mayor potencia de x del *denominador*; usa $\frac{k}{x^n} \to 0$.
2. Atajo para cociente de polinomios de grados n (arriba) y m (abajo): si $n < m$, el límite es 0; si $n = m$, es el cociente de los coeficientes principales; si $n > m$, es $\pm\infty$.
3. Con raíces, saca la potencia de la raíz: $\sqrt{9x^2 + 2} = |x|\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}$. Si $x \to \infty$, $|x| = x$; si $x \to -\infty$, $|x| = -x$ y el signo cambia.
4. Con $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ (forma $\infty - \infty$), racionaliza primero.

1B.3.7 Límites infinitos y asíntotas

1. **Dominio:** factoriza el denominador y anota dónde se anula. Simplifica los factores comunes.
2. **Asíntotas verticales:** en cada cero del denominador que no anula el numerador (después de simplificar), calcula los dos laterales. Cada uno da $+\infty$ o $-\infty$ según el signo de $\frac{k}{0^{\pm}}$: determina el signo de cada factor con un valor cercano (por ejemplo $x = 3.1$ y $x = 2.9$).
3. Si el factor se canceló, no hay asíntota: hay un *hueco* (discontinuidad evitable), y su altura es el límite de la función simplificada.
4. **Asíntota horizontal:** calcula $\lim_{x\to\infty}$ y $\lim_{x\to-\infty}$ (sección 1B.3.6).
5. **Gráfica:** dibuja las asíntotas punteadas, las intersecciones con los ejes y los signos de f entre los ceros; une con los límites como guía.

1B.3.8 Límites laterales y valor absoluto

1. Quita el valor absoluto según el lado: si $x \to a^+$, $|x - a| = x - a$; si $x \to a^-$, $|x - a| = -(x - a)$.
2. En una función por partes, el lateral izquierdo usa la regla de los $x < a$ y el derecho la de los $x > a$.
3. Si los dos laterales son iguales, ese es el límite; si son distintos, el límite no existe.

1B.3.9 Continuidad de funciones por partes con constantes

1. Señala los puntos donde cambia la regla y revisa que cada regla sea continua en su tramo (polinomio, raíz con radicando no negativo, denominador distinto de cero).
2. En cada punto de cambio $x = c$, revisa las tres condiciones **una por una**: $f(c)$ (con la regla que incluye a c, la del $\leq$ o el $\geq$); los dos laterales; y su igualdad con $f(c)$. Escribe «se cumple» o «no se cumple» en cada una.
3. Si hay constantes, la igualdad de los laterales y $f(c)$ da una ecuación por punto de cambio. Resuelve el sistema.
4. Sustituye los valores en las tres condiciones para comprobar.

1B.3.10 Exponencial, logaritmo e hiperbólicas

1. e^x, $\ln x$ (con $x > 0$), $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ son continuas: casi siempre basta la sustitución directa. En Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 2, inciso c), $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} 4x - \cosh x}{x+1} = \frac{0-1}{1} = -1$ sale por sustitución directa.
2. Al infinito: $e^x \to \infty$ y $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$. Con un cociente de exponenciales, divide entre la exponencial de mayor exponente. Así, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \to 1$ si $x \to \infty$ y $\to -1$ si $x \to -\infty$.
3. Con logaritmos, junta en uno solo antes de sustituir: $\ln|x^2 - 1| - \ln|x - 1| = \ln|x + 1| \to \ln 2$ si $x \to 1$ (así se resuelve el inciso b del problema 2 del 2º final 2026-2 de Cálculo y Geometría Analítica).

1B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíces de distinto índice, sustitución directa y raíz al infinito

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 32} \frac{\sqrt[10]{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[5]{x} - 2}, \qquad \text{b) } \lim_{\theta\to 0} |\theta - 1| \operatorname{sen}\theta, \qquad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2}}{3 - 4x}.$$

Resolución.

a) Al sustituir: $\sqrt[10]{32} = \sqrt{2}$ y $\sqrt[5]{32} = 2$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Índices 10 y 5: $m = 10$. Se hace $x = t^{10}$, con lo que $\sqrt[10]{x} = t$, $\sqrt[5]{x} = t^2$, y $t \to \sqrt[10]{32} = \sqrt{2}$.
2. Diferencia de cuadrados en el denominador:

$$\frac{t - \sqrt{2}}{t^2 - 2} = \frac{t - \sqrt{2}}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} = \frac{1}{t + \sqrt{2}}.$$

3. Se sustituye $t = \sqrt{2}$: $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) No es forma indeterminada: por sustitución directa, $|0 - 1| \operatorname{sen} 0 = 1 \cdot 0 = 0$.

c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$.

1. Como $x \to \infty$, $x > 0$ y $\sqrt{x^2} = x$. Se divide entre x arriba y abajo:

$$\frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x} = \frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{\frac{3}{x}-4}.$$

2. Con $\frac{2}{x^2} \to 0$ y $\frac{3}{x} \to 0$, el límite es $\frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$.
3. Si fuera $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$ y el resultado sería $\frac{3}{4}$.

Resultado: a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) 0; c) $-\frac{3}{4}$.

Ejemplo resuelto · Continuidad de una función de tres reglas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax & \text{si } 1 < x < 3, \\ A & \text{si } 3 \le x \le 5, \\ Bx - 5 & \text{si } 5 < x < 8. \end{cases}$$

Determine los valores de A y B para que f sea continua en todo su dominio.

Resolución.

1. El dominio es $(1, 8)$. Cada regla es un polinomio o una constante, continua en su tramo. Los puntos de cambio son $x = 3$ y $x = 5$.
2. **En $x = 3$.** Condición 1: $f(3) = A$ (segunda regla); se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 3^-}(x^2 - Ax) = 9 - 3A, \qquad \lim_{x\to 3^+} A = A.$$

   El límite existe si $9 - 3A = A$, es decir, $A = \frac{9}{4}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(3)$; se cumple.
3. **En $x = 5$.** Condición 1: $f(5) = A = \frac{9}{4}$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 5^-} A = \frac{9}{4}, \qquad \lim_{x\to 5^+}(Bx - 5) = 5B - 5.$$

   El límite existe si $5B - 5 = \frac{9}{4}$, es decir, $5B = \frac{29}{4}$ y $B = \frac{29}{20}$. Condición 3: el límite vale $\frac{9}{4} = f(5)$; se cumple.

Resultado: $A = \frac{9}{4}$, $B = \frac{29}{20}$.

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Doble racionalización y un trigonométrico

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 2.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x\tan(2x)}.$$

Resolución.

a) Al sustituir: $3-\sqrt{9}=0$ y $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, forma $\frac{0}{0}$.

1. Se multiplica arriba y abajo por los dos conjugados, $3+\sqrt{2x+1}$ y $\sqrt{2}+\sqrt{x-2}$:

$$(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1}) = 9-(2x+1) = -2(x-4),$$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}) = 2-(x-2) = -(x-4).$$

2. Se cancela $-(x-4)$:

$$\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}} = \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{x-2}\right)}{3+\sqrt{2x+1}}.$$

3. Se sustituye $x=4$: $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{3+3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se escribe $\tan 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$ y se cancela un $\operatorname{sen} 2x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x\tan 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x}{x\operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\cos 2x.$$

2. Se arma el límite notable: $\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \to 2$, y $\cos 2x \to 1$.

Resultado: a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) 2.

Ejercicio 1B.5.2 · Cociente de trigonométricas y resta de fracciones

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan(3\theta)}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4}\right).$$

Resolución.

a) Forma $\frac{0}{0}$. Se multiplica y divide por 3θ y por θ:

$$\frac{\tan 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 3\cdot\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\cdot\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 3\cdot 1\cdot 1 = 3.$$

b) Cada fracción tiende a infinito: forma $\infty-\infty$.

1. Se factoriza $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$, que es el denominador común.
2. Una sola fracción:

$$\frac{\sqrt{x}+2-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

3. Se sustituye $x=4$: $\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$.

Resultado: a) 3; b) $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 1B.5.3 · Uno menos coseno, raíz al infinito y raíces de distinto índice

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 2.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos 4x}{x^3}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}.$$

Resolución.

a) Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se saca x de factor común y se cancela: $\frac{x(1-\cos 4x)}{x^3}=\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.
2. Se arma $\frac{1-\cos u}{u^2}$ con $u=4x$, multiplicando y dividiendo por 16:

$$\frac{1-\cos 4x}{x^2}=16\cdot\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\to 16\cdot\frac{1}{2}=8.$$

b) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Con $x>0$, $\sqrt{x^2-9}=x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$:

$$\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\to 1.$$

c) Forma $\frac{0}{0}$. Índices 2 y 3: $m=6$.

1. Con $x=t^6$: $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, y $t\to\sqrt[6]{64}=2$.
2. Diferencia de cubos y de cuadrados:

$$\frac{t^3-8}{t^2-4}=\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\frac{t^2+2t+4}{t+2}.$$

3. Se sustituye $t=2$: $\frac{4+4+4}{4}=3$.

Resultado: a) 8; b) 1; c) 3.

En b) el enunciado escribe $x\to\infty$ sin signo; se toma $x\to+\infty$. Con $x\to-\infty$ el resultado sería -1.

Ejercicio 1B.5.4 · Valor absoluto, cambio de variable al infinito y factorización

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule, si existe, cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\left(x - x\cos\frac{1}{x}\right), \qquad \text{c) } \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}.$$

Resolución.

a) Laterales (sección 1B.3.8):

1. Si $x \to 1^+$, $|x-1| = x-1$ y el cociente vale 1.
2. Si $x \to 1^-$, $|x-1| = -(x-1)$ y el cociente vale -1.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe.

b) Forma $\infty \cdot 0$: $x - x\cos\frac{1}{x} = x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

1. Cambio de variable $u = \frac{1}{x}$: si $x \to +\infty$, $u \to 0^+$, y $x = \frac{1}{u}$.
2. $\frac{1-\cos u}{u} = u \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

c) Forma $\frac{0}{0}$. Suma de cubos: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Se cancela $x+1$ y se sustituye: $(-1)^2-(-1)+1 = 3$.

Resultado: a) no existe (laterales -1 y 1); b) 0; c) 3.

Ejercicio 1B.5.5 · Continuidad de una función con valor absoluto

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 2.

Determine si la función f es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2-|x| & \text{si } x \in (-2,2), \\ x^2-4 & \text{si } x \notin (-2,2). \end{cases}$$

Resolución.

1. Dominio: todos los reales. En $(-2,2)$, $2-|x|$ es continua (el valor absoluto lo es); fuera, x^2-4 es un polinomio. Los puntos de cambio son $x=2$ y $x=-2$.
2. **En $x=2$.** Condición 1: $2 \notin (-2,2)$, así que $f(2) = 2^2-4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to 2^-}(2-|x|) = 2-2 = 0, \qquad \lim_{x\to 2^+}(x^2-4) = 0;$$

   el límite existe y vale 0; se cumple. Condición 3: $0 = f(2)$; se cumple.
3. **En $x=-2$.** Condición 1: $f(-2) = (-2)^2-4 = 0$; se cumple. Condición 2:

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2-4) = 0, \qquad \lim_{x\to -2^+}(2-|x|) = 2-2 = 0;$$

   se cumple. Condición 3: $0 = f(-2)$; se cumple.

Resultado: f es continua en todos los reales.

Ejercicio 1B.5.6 · Cosecante entre cotangente, exponenciales y un límite infinito

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, problema 2.

Determine, si existe, el valor de cada límite:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\csc 2x}{\cot 3x}, \quad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}.$$

Resolución.

a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 2x}{\cot 3x}=\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x\cos 3x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\to\frac{3}{2}.$$

b) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre e^{2x}, la exponencial de mayor exponente:

$$\frac{1-e^{-4x}}{1+e^{-4x}}\to\frac{1-0}{1+0}=1.$$

La expresión es $\tanh 2x$, que tiende a 1.

c) Forma $\frac{0}{0}$.

1. Se factoriza: $\frac{x(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{x}{x-3}$ si $x\neq 3$. Al sustituir queda $\frac{3}{0}$: límite infinito.
2. Si $x\to 3^+$, $x-3\to 0^+$ y el cociente tiende a $+\infty$. Si $x\to 3^-$, $x-3\to 0^-$ y tiende a $-\infty$.
3. Los laterales son distintos: el límite no existe (la recta $x=3$ es asíntota vertical).

Resultado: a) $\frac{3}{2}$; b) 1; c) no existe ($+\infty$ por la derecha, $-\infty$ por la izquierda).

Ejercicio 1B.5.7 · Asíntotas y gráfica con límites

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo A, problema 5.

Mediante los límites infinitos y los límites al infinito, trace la gráfica de $f(x)=\frac{x-2}{x^2-9}$, con sus asíntotas.

Resolución.

1. **Dominio:** $x^2-9=(x-3)(x+3)$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. No hay factores comunes.
2. **Asíntotas verticales.** En $x=3$ el numerador vale 1; en $x=-3$ vale -5. Signos de los laterales:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\frac{1}{(0^+)(6)}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-}f(x)=-\infty,$$

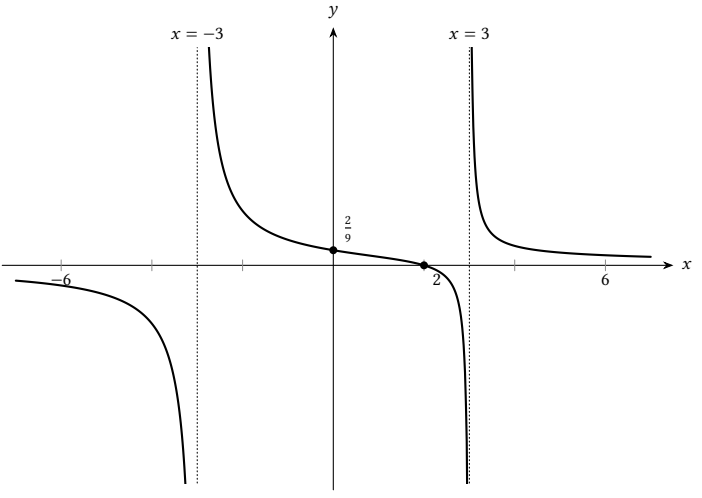
$$\lim_{x\to -3^+}f(x)=\frac{-5}{(-6)(0^+)}=+\infty, \qquad \lim_{x\to -3^-}f(x)=-\infty.$$

   Las rectas $x=3$ y $x=-3$ son asíntotas verticales.
3. **Asíntota horizontal.** Se divide entre x^2:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=0.$$

   La recta $y=0$ (el eje x) es asíntota horizontal en los dos lados.

4. **Intersecciones:** con el eje x, en $(2,0)$; con el eje y, $f(0)=\frac{2}{9}$.
5. **Signos:** $f<0$ en $(-\infty,-3)$ y en $(2,3)$; $f>0$ en $(-3,2)$ y en $(3,\infty)$.



Resultado: asíntotas verticales $x=-3$ y $x=3$; asíntota horizontal $y=0$; la gráfica es la de la figura.

Ejercicio 1B.5.8 · Dos constantes para que una función de tres reglas sea continua

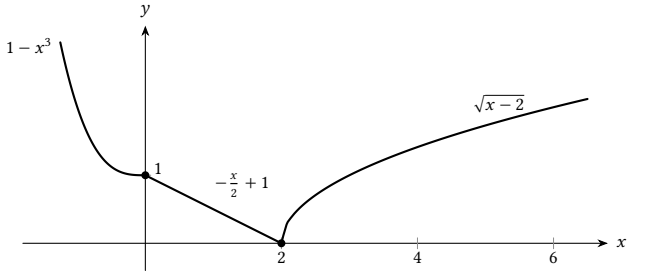
Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-2, tipo A, problema 6.

Calcule los valores de m y n para que la función sea continua en los reales, y trace su gráfica con esos valores:

$$g(x)=\begin{cases}-x^3+m & \text{si } x\le 0,\\ -\frac{x}{2}+1 & \text{si } 0<x\le 2,\\ \sqrt{x-n} & \text{si } x>2.\end{cases}$$

Resolución.

1. Las dos primeras reglas son polinomios. La raíz está definida y es continua para $x>2$ si $n\le 2$. Los puntos de cambio son $x=0$ y $x=2$.
2. **En $x=0$.** Condición 1: $g(0)=m$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 0^-}(-x^3+m)=m$ y $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{2}+1\right)=1$; el límite existe si $m=1$. Condición 3: $1=g(0)$; se cumple.
3. **En $x=2$.** Condición 1: $g(2)=-1+1=0$; se cumple. Condición 2: $\lim_{x\to 2^-} g(x)=0$ y $\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-n}=\sqrt{2-n}$; el límite existe si $\sqrt{2-n}=0$, es decir, $n=2$. Condición 3: $0=g(2)$; se cumple.
4. **Gráfica:** $1-x^3$ para $x\le 0$ (pasa por $(-1,2)$), el segmento de $(0,1)$ a $(2,0)$ y la media parábola $\sqrt{x-2}$ desde $(2,0)$ (pasa por $(6,2)$).



Resultado: $m = 1$, $n = 2$.

1B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1B**.

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 2.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le a, \\ (x-2)^2 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Determine el valor de la constante a que hace que f sea continua.

Resultado: $a = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 4.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\csc 4x}{\cot 3x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{2x - 16}.$$

Resultado: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 3.

Sin utilizar la regla de L'Hôpital, calcule, si existen,

$$\text{a) } \lim_{x\to 4} \frac{1 - \sqrt{5 - x}}{3 - \sqrt{5 + x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x}.$$

Resultado: a) -3; b) 1.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 163.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{2x-2}}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x}, \quad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+8x+6}{x^2+4x-9}.$$

Resultado: a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 164.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 2.

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Resultado: a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 164.

Ejercicio propuesto 1B.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 2.

Sea $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-x}$.

a) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontal y vertical de la gráfica de g.
b) Calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.
c) Trace la gráfica de g.

Resultado: a) horizontal $y = 1$, vertical $x = 0$; b) 0; c) la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ con un hueco en $(1, 0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 164.

1B.7 Errores frecuentes

1. **No sustituir primero.** Varios incisos se resuelven por sustitución directa; factorizar o racionalizar ahí es tiempo perdido.
2. **Escribir $\frac{0}{0} = 1$ o $\frac{0}{0} = 0$.** $\frac{0}{0}$ es una forma indeterminada: indica que hay que transformar, no es un resultado.
3. **Cancelar antes de factorizar.** Solo se cancelan factores: en $\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ no se «tacha» $\sqrt{x}$.
4. **Olvidar el signo al racionalizar.** $4 - x = -(x - 4)$: el signo menos llega al resultado (como en -3 y $-\frac{2}{3}$ de los propuestos).
5. **Armar mal el límite notable.** $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ no tiende a 1, sino a 3: el denominador debe ser $3x$.

6. **Usar grados.** $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ solo con x en radianes.
7. $\sqrt{x^2} = x$ **con** $x \to -\infty$**.** Es $|x| = -x$; el signo del resultado cambia.
8. **Un solo lateral en un límite infinito.** Con $\frac{k}{0}$ hay que revisar los dos lados; si dan $+\infty$ y $-\infty$, el límite no existe.
9. **Asíntota donde hay un hueco.** Si el factor que anula el denominador se cancela, no hay asíntota vertical: hay discontinuidad evitable.
10. **Continuidad con una sola condición.** Igualar los laterales no basta: hay que revisar también que $f(c)$ esté definida y coincida.
11. **Usar L'Hôpital.** El enunciado lo prohíbe; un límite resuelto así no cuenta.

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \cdot (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \operatorname{mcm}(p, q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1 \cdot \frac{\tan u}{u} \to 1 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\operatorname{sen} ku}{u} \to k \cdot \frac{\operatorname{sen} au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en c: $f(c)$ definida · $\lim_{x\to c} f(x)$ existe · $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$ · $\tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty$ · $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Sustituye y escribe la forma que sale ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{k}{0}$ o un número).
2. Elige la técnica por el aspecto: polinomios, factorizar; raíces cuadradas, racionalizar; raíces de distinto índice, $x = t^m$; trigonométricas, $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$; infinito, mayor potencia.
3. Al cancelar el factor $(x - a)$, sustituye otra vez y simplifica el radical al final.
4. Con valor absoluto, función por partes o $\frac{k}{0}$, calcula los dos laterales por separado.
5. En continuidad, escribe las tres condiciones en cada punto de cambio, con «se cumple» o «no se cumple», y despeja las constantes.
6. Si piden la gráfica, dibuja primero asíntotas e intersecciones y después la curva.

Un inciso con la forma indeterminada identificada y la técnica correcta planteada ya vale parte del problema aunque no se termine el álgebra.

1B.10 Lo que agrega el Plan 2026: el límite visto con una tabla

Interpretación geométrica. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dice que los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica se acercan al punto (a, L) cuando x se acerca a a, por los dos lados, aunque en $x = a$ la función no esté definida o valga otra cosa (un hueco en la gráfica). El programa pide ilustrarlo con software: se evalúa la función en valores cada vez más cercanos a a y se

mira hacia dónde van. Para $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, que no está definida en 0:

x	0.1	0.01	0.001
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0.99833	0.99998	0.9999998

Como $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par, por la izquierda da lo mismo: los valores se acercan a 1, el límite notable de la sección 1B.1. La tabla *sugiere* el límite, pero no lo demuestra (puede engañar si la función oscila o si el redondeo de la computadora pierde cifras); en el examen el límite se calcula con las técnicas de esta parte.

Continuidad en un intervalo. f es continua en (a, b) si lo es en cada punto, y en $[a, b]$ si además los límites laterales de adentro en a y en b son $f(a)$ y $f(b)$. Los polinomios, las racionales (fuera de los ceros del denominador), las raíces (donde existen), las trigonométricas, la exponencial y el logaritmo son continuos en su dominio; la duda está en los puntos donde cambia la regla o se anula un denominador.

Ejercicio propuesto 1B.10.1 · Una constante para la continuidad en un intervalo

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ si $x \neq 2$ y $f(2) = k$. Determine k para que f sea continua en $[0, 3]$.
Resultado: $k = 4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 165.

Ejercicio propuesto 1B.10.2 · Diferencia de una raíz y una recta al infinito

Sin emplear la regla de L'Hôpital, calcule $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$.

Resultado: $\frac{3}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 165.

Ejercicio propuesto 1B.10.3 · La asíntota de un modelo

Para el modelo de enfriamiento $T(t) = 20 + 70 \cdot 2^{-t/10}$ del ejemplo de la sección 1A.10, calcule $\lim_{t \to \infty} T(t)$ e interprete el resultado.

Resultado: 20: la gráfica tiene la asíntota horizontal $T = 20$; el café tiende a la temperatura del cuarto sin alcanzarla.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 165.

Con la computadora

```
# Tabla de valores y limite de sen(x)/x en 0
from sympy import Rational, limit, sin, symbols
x = symbols("x")
f = sin(x)/x
for h in [Rational(1, 10**k) for k in (1, 2, 3)]:
    print(h, f.subs(x, h).evalf(8), f.subs(x, -h).evalf(8))
L = limit(f, x, 0)
print(L)                                          # 1
assert L == 1
```

Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

↑ Volver al índice

Objetivo del tema 2 (programa 2026). «Aplicar la derivada de funciones reales al planteamiento y a la resolución de problemas físicos, geométricos y de optimización mediante el análisis de sus propiedades y con apoyo de software matemático para modelar el comportamiento de sistemas ingenieriles.»

Contenido de esta parte. «Derivadas de funciones polinómicas y trascendentes. Interpretación geométrica de la derivada. Regla de la cadena. Derivadas de orden superior. Concepto e interpretación geométrica de diferencial. Cálculo de diferenciales. Interpretación física de la derivada como una razón de cambio.» «Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a una curva. Aplicación física de la derivada como razón de cambio de funciones relacionadas.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es la parte que más sale. En los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010, 20 problemas, de uno a tres por examen: cálculo de derivadas (implícita, paramétrica, orden superior) 8, recta tangente y normal 5, razón de cambio 4, derivabilidad de una función por partes 2 y ángulo entre curvas 1. En 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016, 44 problemas: tangente y normal 16, cálculo de derivadas 14, razón de cambio 9, ángulo entre curvas 3 y derivabilidad 2. La derivada por definición sale en los segundos parciales.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Aprende las tablas de derivadas de la sección 2A.1 (30 min), con las del logaritmo, la exponencial y las hiperbólicas: sin ellas no sale nada.
  2. Lee las plantillas 2A.3.4 (implícita) y 2A.3.6 (tangente y normal) y sigue el primer ejemplo de la sección 2A.4 tapando la resolución.
  3. Lee la plantilla de razón de cambio (2A.3.8) y sigue el segundo ejemplo.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 2A.5 con cronómetro: 15 min cada uno. Agrega la derivación logarítmica (2A.3.10).

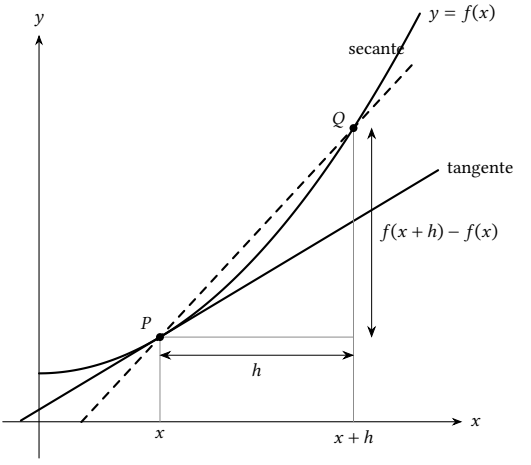
2A.1 Conceptos y expresiones

Definición. La derivada de f en x es el límite del cociente de incrementos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si existe. Otras notaciones: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $D_x f$. Si el límite existe en x_0, se dice que f es *derivable* en x_0.

Interpretación geométrica. El cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la pendiente de la recta *secante* que pasa por $P(x, f(x))$ y $Q(x+h, f(x+h))$. Cuando $h \to 0$, Q se acerca a P y la secante gira hasta la recta *tangente*: $f'(x)$ es la pendiente de la tangente en P.



Interpretación física. Si $s(t)$ es la posición de un móvil, $s'(t)$ es su velocidad y $s''(t)$ su aceleración. En general, $\frac{dy}{dt}$ es la *razón de cambio* (rapidez de variación) de y respecto al tiempo: positiva si y aumenta y negativa si disminuye.

Derivable implica continua. Si f es derivable en x_0, es continua en x_0. Lo contrario es falso: $|x|$ es continua en 0 y no es derivable ahí (tiene un pico).

Derivadas laterales. $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ son los límites del cociente con $h \to 0^-$ y $h \to 0^+$. f es derivable en x_0 si y solo si las dos existen y son iguales. En una función por partes cuyas reglas son derivables, se calculan derivando cada regla y evaluando en el punto de unión, *siempre que f sea continua ahí.*

Reglas algebraicas. Con u, v funciones de x y c, n constantes (n racional):

$$(c)' = 0, \qquad (u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (cu)' = cu',$$
$$(uv)' = uv' + vu', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$
$$(u^n)' = n\,u^{n-1}u', \qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Regla de la cadena. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En las tablas siguientes ya está incluida: cada fórmula termina multiplicada por u'.

Trigonométricas.

Función	Derivada	Función	Derivada
$\operatorname{sen} u$	$\cos u\, u'$	$\cos u$	$-\operatorname{sen} u\, u'$
$\tan u$	$\sec^2 u\, u'$	$\cot u$	$-\csc^2 u\, u'$
$\sec u$	$\sec u \tan u\, u'$	$\csc u$	$-\csc u \cot u\, u'$

Trigonométricas inversas. Los exámenes escriben ang sen x, ang tan x (en otros textos, «arc sen» o $\operatorname{sen}^{-1} x$).

Función	Derivada	Función	Derivada
ang sen u	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	ang cos u	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
ang tan u	$\frac{u'}{1+u^2}$	ang cot u	$-\frac{u'}{1+u^2}$
ang sec u	$\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	ang csc u	$-\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$

El valor absoluto de ang sec y ang csc corresponde al recorrido $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de ang sec. Muchos libros eligen otro recorrido y escriben $u\sqrt{u^2-1}$ sin valor absoluto; para $u > 1$ las dos fórmulas coinciden.

Derivada de la función inversa. Si f es derivable e invertible y $f'(x) \neq 0$, la inversa es derivable y

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Por ejemplo, para $f(x) = x^3 + x$ se tiene $f(1) = 2$ y $f'(1) = 4$, así que $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{4}$ sin despejar la inversa. Así se obtienen las fórmulas de las inversas: si $y = \text{ang sen } x$, entonces $x = \operatorname{sen} y$, $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Derivación implícita. Si y está definida por una ecuación $F(x, y) = 0$ sin despejar, se deriva cada término respecto a x tratando y como función de x: $\frac{d}{dx} y^2 = 2y\, y'$, $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} y = \cos y\, y'$. Después se despeja y'.

Derivación paramétrica. Si $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

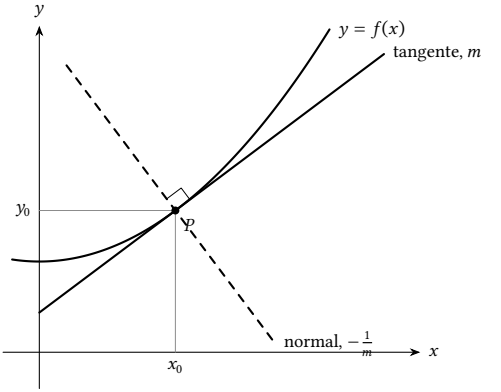
La segunda derivada **no** es $\frac{y''(t)}{x''(t)}$: se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a t y se divide otra vez entre $\frac{dx}{dt}$.

Orden superior. $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ es la derivada de y'; y''', la de y'', y así sucesivamente.

Recta tangente y recta normal. En $P(x_0, y_0)$ de la curva, con $m = y'(x_0)$:

$$\text{tangente: } y - y_0 = m(x - x_0), \qquad \text{normal: } y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

La normal es perpendicular a la tangente. Si $m = 0$, la tangente es horizontal ($y = y_0$) y la normal vertical ($x = x_0$).

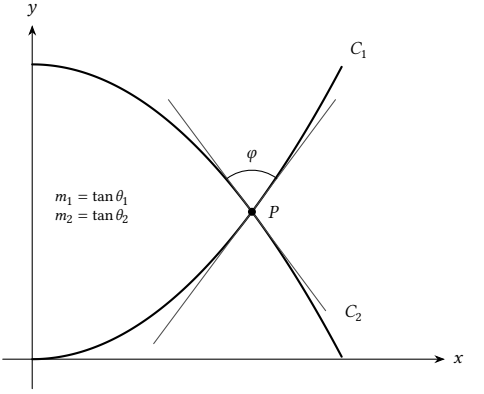


Rectas paralelas y perpendiculares. La recta $Ax + By + C = 0$ tiene pendiente $-\dfrac{A}{B}$. Dos rectas son paralelas si $m_1 = m_2$ y perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.

Ángulo entre dos curvas. En un punto de intersección, es el ángulo agudo φ entre sus tangentes. Con pendientes m_1 y m_2:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

Si $1 + m_1 m_2 = 0$, las curvas se cortan en ángulo recto ($\varphi = 90°$); si $m_1 = m_2$, son tangentes entre sí ($\varphi = 0$).



Diferencial. Para $y = f(x)$, la diferencial es $dy = f'(x)\,dx$, con $dx = \Delta x$. Para Δx pequeño, el incremento verdadero $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ se aproxima con dy:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Es la recta tangente usada como aproximación. Ejemplo: con $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 16$, $\Delta x = 1$: $\sqrt{17} \approx 4 + \frac{1}{2\sqrt{16}}(1) = 4 + \frac{1}{8} = 4.125$ (el valor verdadero es 4.1231 …). La integral usa esta notación en el cambio de variable: $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$.

Logaritmo, exponencial e hiperbólicas. Con $a > 0$, $a \neq 1$:

Función	Derivada	Función	Derivada
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
e^u	$e^u\,u'$	a^u	$a^u \ln a\; u'$
$\operatorname{senh} u$	$\cosh u\; u'$	$\cosh u$	$\operatorname{senh} u\; u'$
$\tanh u$	$\operatorname{sech}^2 u\; u'$	$\coth u$	$-\operatorname{csch}^2 u\; u'$
$\operatorname{sech} u$	$-\operatorname{sech} u \tanh u\; u'$	$\operatorname{csch} u$	$-\operatorname{csch} u \coth u\; u'$
$\operatorname{senh}^{-1} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\cosh^{-1} u\ (u>1)$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$\tanh^{-1} u\ (\lvert u\rvert<1)$	$\frac{u'}{1-u^2}$		

Ojo con los signos: $(\cosh u)' = +\operatorname{senh} u\; u'$, a diferencia de $(\cos u)'$. Útiles al simplificar: $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, $\ln e^u = u$, $e^{\ln u} = u$, $\ln u^n = n \ln u$.

2A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«por definición», «método de los cuatro pasos»	el límite del cociente de incrementos	2A.3.1
$y =$ una expresión en x, «obtener $\frac{dy}{dx}$»	reglas y cadena	2A.3.2
una segunda derivada evaluada en un punto	derivar dos veces y evaluar	2A.3.2
función por partes con constantes, «continua y derivable»	igualar valores y pendientes	2A.3.3
una ecuación con x y y mezcladas: $\tan(xy) = 2x + y$	derivación implícita	2A.3.4
$x = x(t)$, $y = y(t)$	cociente de derivadas respecto a t	2A.3.5

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«recta tangente», «recta normal» en un punto	pendiente y punto-pendiente	2A.3.6
tangente «horizontal», «paralela» o «perpendicular» a una recta	igualar y' a la pendiente pedida	2A.3.6
«área del triángulo» con los ejes o con la normal	intersecciones de las rectas	2A.3.6
«ángulo de intersección» entre curvas o con una recta	$\tan\varphi$ con las dos pendientes	2A.3.7
«rapidez», «razón», «a qué ritmo», unidades por segundo o por minuto	razón de cambio relacionada	2A.3.8
«aproximar», «estimar», «diferencial»	$dy = f'(x)\,dx$	2A.3.9
$y = f(x)^{g(x)}$, productos y cocientes grandes	derivación logarítmica	2A.3.10

2A.3 Procedimientos

2A.3.1 Derivada por definición (cuatro pasos)

1. Escribe $f(x+h)$: cambia cada x por $(x+h)$.
2. Calcula el incremento $f(x+h) - f(x)$ y simplifícalo (denominador común, desarrollo de binomios).
3. Divide entre h. Antes de pasar al límite hay que **cancelar el factor** h: factoriza o racionaliza (multiplica por el conjugado).
4. Toma el límite cuando $h \to 0$, sustituyendo $h = 0$.

Ejemplo breve: con $f(x) = x^2$, $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x$.

2A.3.2 Derivada con reglas y regla de la cadena

1. Reescribe antes de derivar: raíces como potencias ($\sqrt[4]{x+1} = (x+1)^{1/4}$), $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$.
2. Identifica la operación «de afuera» (potencia, cociente, ang tan, sen…) y aplica su fórmula; multiplica por la derivada de lo de adentro. Repite capa por capa.
3. Simplifica: factor común, denominador común, $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$.
4. Si se pide $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ o una segunda derivada evaluada, sustituye solo al final.

2A.3.3 Derivabilidad de una función por partes

1. En cada punto de unión x_0, **continuidad**: el valor de la regla izquierda en x_0 igual al de la regla derecha.
2. **Derivabilidad**: deriva cada regla y exige que las derivadas en x_0 coincidan (derivadas laterales iguales).
3. Resuelve el sistema para las constantes. Si sobran ecuaciones, comprueba que todas se cumplan.
4. Si la función no es continua en x_0, no es derivable ahí, aunque las pendientes coincidan.

2A.3.4 Derivación implícita

1. Deriva los dos lados respecto a x. Cada vez que derives algo con y, multiplica por y' (regla de la cadena). Los productos xy, x^2y llevan regla del producto.
2. Pasa al lado izquierdo los términos con y' y al derecho los demás.
3. Factoriza y' y despeja.
4. Para una pendiente en un punto, sustituye x_0 y y_0 en y' (no hace falta despejar y en la curva).

2A.3.5 Derivación paramétrica y segunda derivada

1. Calcula $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, y forma $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$. Simplifica.
2. Si se pide en un valor de x (o de y), encuentra el valor del parámetro t que le corresponde; puede haber dos.
3. Segunda derivada: deriva $\frac{dy}{dx}$ *respecto a* t y divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. Si en el punto pedido $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ (forma $\frac{0}{0}$), simplifica el cociente antes de evaluar o elimina el parámetro.

2A.3.6 Recta tangente y recta normal

1. **Punto.** Si solo se da una coordenada, obtén la otra con la ecuación de la curva (pueden salir dos puntos; si el enunciado da una condición como $y \geq 0$, úsala).
2. **Pendiente.** $m = y'$ en el punto (directa, implícita o paramétrica).
3. **Rectas.** Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$; normal con pendiente $-\frac{1}{m}$. Escríbelas en forma general $Ax + By + C = 0$ si lo piden.
4. **Tangente con condición.** Horizontal: $y' = 0$. Paralela a $Ax + By + C = 0$: $y' = -\frac{A}{B}$. Perpendicular: $y' = \frac{B}{A}$. Resuelve la ecuación junto con la de la curva para hallar los puntos de tangencia.
5. **Área de un triángulo.** Intersecta las rectas entre sí y con el eje indicado; el área es $\frac{1}{2}$ base · altura con las intersecciones.

2A.3.7 Ángulo entre dos curvas

1. Resuelve el sistema de las dos ecuaciones: puntos de intersección.
2. En cada punto, la pendiente de cada curva (m_1, m_2); si una es recta, su pendiente es fija.
3. $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ y $\varphi = \text{ang tan}(\ldots)$. Si $1 + m_1 m_2 = 0$, $\varphi = 90^\circ$. Si una tangente es vertical y la otra tiene pendiente m, $\varphi = 90^\circ - \text{ang tan}\,|m|$.
4. Si se pide la tangente que forma un ángulo dado con una recta, plantea la ecuación con el valor absoluto: salen dos pendientes.

2A.3.8 Razón de cambio: plantilla de cinco pasos

1. **Figura y variables.** Dibuja la situación y nombra con letras las cantidades que cambian con el tiempo (r, V, x…). Los datos fijos van con su número.
2. **Datos y pregunta.** Escribe la razón conocida con su signo ($\frac{dV}{dt} = -60$ si disminuye), lo que se pide ($\frac{dA}{dt} = ?$) y el instante ($r = 4$). Uniforma las unidades.
3. **Ecuación.** Relaciona las variables con geometría (volumen, área, Pitágoras, triángulos

semejantes, trigonometría). Si aparece una variable de más, elimínala con un dato fijo o una relación.

4. **Derivar respecto a t.** Cada variable produce su razón por la regla de la cadena: $\frac{d}{dt}r^3 = 3r^2\frac{dr}{dt}$.
5. **Sustituir al final** los valores del instante, despejar y dar el resultado con unidades y sentido (aumenta o disminuye).

No sustituyas el valor del instante antes de derivar: una variable con valor fijo tendría derivada cero.

2A.3.9 Diferencial y aproximación

1. Elige f, un valor x donde $f(x)$ sea fácil ($\sqrt{16}$, sen $\frac{\pi}{6}$) y el incremento $dx = \Delta x$.
2. Calcula $dy = f'(x)\,dx$.
3. Aproxima $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$, o el cambio $\Delta y \approx dy$.

2A.3.10 Derivación logarítmica y $f(x)^{g(x)}$

1. Si la variable está en la base y en el exponente, $y = f(x)^{g(x)}$, no sirven ni $(u^n)'$ ni $(a^u)'$. Toma logaritmo natural: $\ln y = g(x)\ln f(x)$.
2. Deriva implícitamente: $\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$.
3. Multiplica por y y sustituye $y = f(x)^{g(x)}$.
4. El mismo método simplifica productos y cocientes largos: el logaritmo los vuelve sumas.

2A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Tangente y normal con derivación implícita

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 4.

Obtenga las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en el punto $A(1, 1)$.

Resolución.

1. El punto está en la curva: $1 + 3 + 1 = 5$.
2. Derivación implícita, con regla del producto en $3xy$:

$$2x + 3\,(y + xy') + 2yy' = 0.$$

3. Se agrupan los términos con y' y se despeja:

$$(3x + 2y)\,y' = -(2x + 3y) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

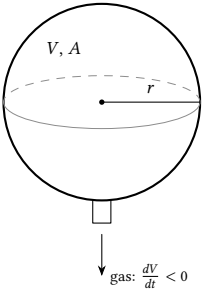
4. Pendiente en $A(1, 1)$: $m = -\frac{2+3}{3+2} = -1$. La normal tiene pendiente $-\frac{1}{m} = 1$.
5. Tangente: $y - 1 = -(x - 1)$, es decir, $x + y - 2 = 0$.
6. Normal: $y - 1 = 1(x - 1)$, es decir, $x - y = 0$.

Resultado: tangente $x + y - 2 = 0$; normal $x - y = 0$.

Ejemplo resuelto · Razón de cambio: el globo que pierde gas

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.

Un globo de forma esférica deja escapar gas a razón de 60 mm^3/min. ¿A qué razón decrece el área del globo en el instante en que el radio es 4 cm?



Resolución.

1. **Variables:** radio r, volumen V y área A de la esfera, funciones del tiempo t (en minutos).
2. **Datos:** el volumen disminuye, así que $\frac{dV}{dt} = -60\ \text{mm}^3/\text{min}$. Se pide $\frac{dA}{dt}$ cuando $r = 4\ \text{cm} = 40\ \text{mm}$ (todo en milímetros).
3. **Ecuaciones:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$.
4. **Derivadas respecto a t:**

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}, \qquad \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

5. **Instante $r = 40$:** de la primera, $\frac{dr}{dt} = \frac{-60}{4\pi(40)^2} = -\frac{3}{320\pi}$ mm/min. En la segunda:

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(40)\left(-\frac{3}{320\pi}\right) = -3\ \text{mm}^2/\text{min}.$$

6. Atajo: al dividir las dos derivadas, $\frac{dA}{dt} = \frac{2}{r}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{40}(-60) = -3$.

Resultado: el área decrece a razón de 3 mm^2/min (0.03 cm^2/min).

2A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2A.5.1 · Ang sec y potencias

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 4.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para: a) $y = \text{ang}\sec(3x)$; b) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Resolución.

1. a) Con $u = 3x$, $u' = 3$, y la fórmula de $\operatorname{ang\,sec} u$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}, \qquad |x| > \tfrac{1}{3}.$$

   Con la fórmula sin valor absoluto queda $\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}$, igual para $x > \frac{1}{3}$.
2. b) Se reescribe $y = x^{1/2} - x^{-1/2}$ y se aplica la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$$

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

Ejercicio 2A.5.2 · Continua y derivable: tres reglas

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 3.

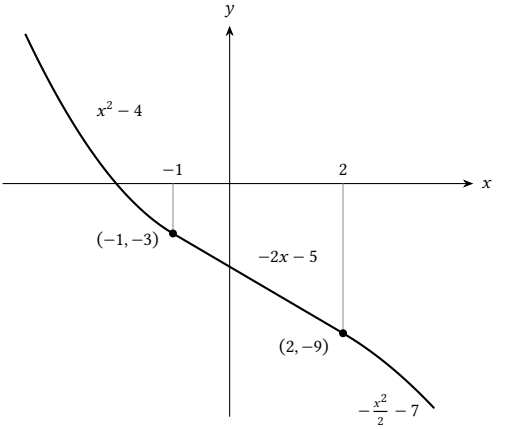
Determine los valores reales de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } -8 \le x < -1, \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 2, \\ -\frac{x^2}{2} - 7 & \text{si } 2 \le x \le 5, \end{cases}$$

sea continua en $[-8, 5]$ y derivable en $(-8, 5)$.

Resolución.

1. Las tres reglas son polinomios: solo hay que revisar las uniones $x = -1$ y $x = 2$. Derivadas de las reglas: $2x$, a y $-x$.
2. En $x = -1$. Continuidad: $(-1)^2 - 4 = -a + b$, es decir, $-a + b = -3$. Derivabilidad: $2(-1) = a$, así que $a = -2$.
3. Entonces $b = -3 + a = -5$.
4. En $x = 2$, con $a = -2$ y $b = -5$. Continuidad: $2a + b = -9$ y $-\frac{4}{2} - 7 = -9$. Se cumple. Derivabilidad: $a = -2$ y $-x\big|_{x=2} = -2$. Se cumple.
5. Las cuatro condiciones se satisfacen con los mismos valores: la recta $y = -2x - 5$ es tangente a las dos parábolas en los puntos de unión.



Resultado: $a=-2$, $b=-5$.

Ejercicio 2A.5.3 · Implícita con tangente y cadena con raíz

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2\tan y = x+y$; b) $y=\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}$.

Resolución.

1. a) Derivación implícita (producto a la izquierda):

$$2x\tan y + x^2\sec^2 y\, y' = 1 + y'.$$

2. Se agrupa y se despeja:

$$\left(x^2\sec^2 y - 1\right) y' = 1 - 2x\tan y \;\Rightarrow\; y' = \frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y - 1}.$$

3. b) Con $u=\frac{2x}{2x-1}$, $y=\sqrt{u}$ y $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Regla del cociente:

$$u' = \frac{2(2x-1)-2x(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

4. Entonces

$$y' = -\frac{2}{(2x-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}} = -\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}},$$

válida en $x<0$ o $x>\frac{1}{2}$, donde la raíz existe y la derivada también.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y-1}$; b) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}$.

Ejercicio 2A.5.4 · Segundas derivadas: ang tan y paramétrica

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 3.

a) Sea $y = x\,\text{ang tan}\,x$; calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}$. b) Para $x = t-1$, $y = 2t^3 - 1$, calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$.

Resolución.

1. a) Regla del producto: $y' = \text{ang tan}\,x + \frac{x}{1+x^2}$.
2. Otra vez, con la regla del cociente en el segundo término:

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

3. En $x = \frac{1}{2}$: $1 + x^2 = \frac{5}{4}$ y $y'' = \frac{2}{25/16} = \frac{32}{25}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 6t^2$, así que $\frac{dy}{dx} = 6t^2$.
5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(6t^2)}{dx/dt} = \frac{12t}{1} = 12t$.
6. $x = 1$ corresponde a $t - 1 = 1$, $t = 2$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 24$.

Resultado: a) $\frac{32}{25}$; b) 24.

Ejercicio 2A.5.5 · Tangentes perpendiculares a una recta

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 4.

Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{1}{x}$ que sean perpendiculares a la recta $x - 9y = 2$.

Resolución.

1. La recta dada, $y = \frac{x-2}{9}$, tiene pendiente $\frac{1}{9}$. Las perpendiculares tienen pendiente -9.
2. $y' = -\frac{1}{x^2} = -9 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$. Puntos de tangencia: $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$.
3. En $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$: $y - 3 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y - 6 = 0$.
4. En $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$: $y + 3 = -9\left(x + \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y + 6 = 0$.

Resultado: $9x + y - 6 = 0$ y $9x + y + 6 = 0$.

Ejercicio 2A.5.6 · Tangentes horizontales a una circunferencia

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine los puntos de la curva $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ en los que las rectas tangentes son paralelas a la recta $y = 0$.

Resolución.

1. Paralela a $y = 0$ quiere decir horizontal: $y' = 0$.
2. Derivación implícita: $2x + 2yy' = 4 + 4y' \Rightarrow (2y - 4)\,y' = 4 - 2x \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y-2}$.
3. $y' = 0$ exige $x = 2$ (con $y \neq 2$). En la curva: $4 + y^2 = 8 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 4 = 0$.
4. $y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Ninguno vale 2, así que el denominador no se anula.

5. Comprobación: la curva es la circunferencia $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, de centro $(2,2)$ y radio $2\sqrt{2}$; las tangentes horizontales están arriba y abajo del centro.

Resultado: $\left(2,\ 2+2\sqrt{2}\right)$ y $\left(2,\ 2-2\sqrt{2}\right)$.

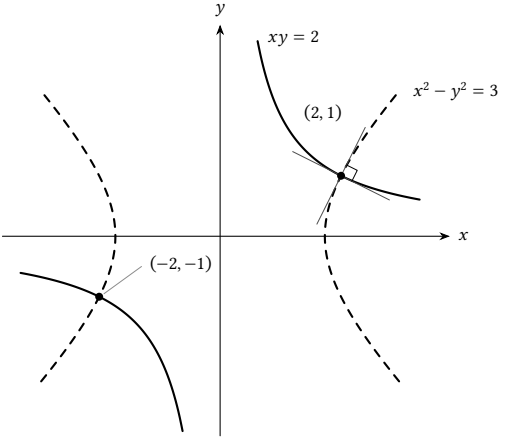
Ejercicio 2A.5.7 · Ángulo entre dos hipérbolas

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 4.

Sean las curvas $C_1:\ xy=2$ y $C_2:\ x^2-y^2=3$. Determine el ángulo de intersección entre C_1 y C_2.

Resolución.

1. Intersección: de C_1, $y=\frac{2}{x}$. En C_2: $x^2-\frac{4}{x^2}=3\Rightarrow x^4-3x^2-4=0\Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$. Entonces $x=\pm 2$: puntos $(2,1)$ y $(-2,-1)$.
2. Pendientes por derivación implícita. C_1: $y+xy'=0\Rightarrow m_1=-\frac{y}{x}$. C_2: $2x-2yy'=0\Rightarrow m_2=\frac{x}{y}$.
3. En $(2,1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Entonces $1+m_1m_2=1-1=0$: las tangentes son perpendiculares.
4. En $(-2,-1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Mismo resultado.
5. En general $m_1m_2=-\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=-1$ en cualquier punto común: las dos familias de hipérbolas son ortogonales.

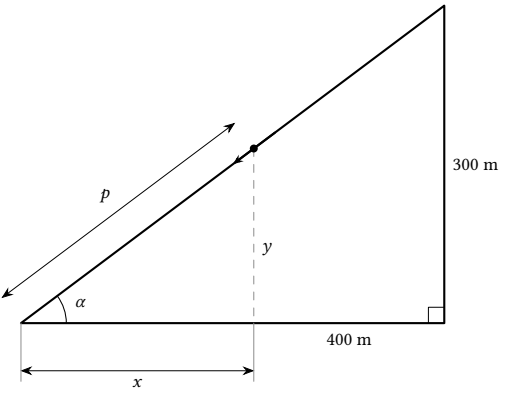


Resultado: $\varphi=90^\circ$ en los dos puntos de intersección, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

Ejercicio 2A.5.8 · Razón de cambio: el esquiador en la rampa

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 4.

Un esquiador se desliza a razón de 10 m/s sobre una rampa en forma de plano inclinado, de 400 m de base horizontal y 300 m de altura. Sea p su distancia, medida sobre la rampa, al punto más bajo, y x la proyección horizontal de esa distancia. Determine la rapidez con la que cambia x.



Resolución.

1. **Variables:** p (sobre la rampa), x (horizontal) y y (altura), funciones de t.
2. **Datos:** el esquiador baja hacia el punto más bajo, así que p disminuye: $\frac{dp}{dt} = -10$ m/s. Se pide $\frac{dx}{dt}$.
3. **Ecuación:** la rampa mide $\sqrt{400^2 + 300^2} = 500$ m. Por triángulos semejantes, $\frac{x}{p} = \frac{400}{500}$, es decir, $x = \frac{4}{5}p$.
4. **Derivada:** $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt} = \frac{4}{5}(-10) = -8$ m/s.
5. La razón es constante: no depende de dónde esté el esquiador. (La altura cambia a $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}(-10) = -6$ m/s.)

Resultado: x disminuye a razón de 8 m/s, en cualquier instante.

Nota: el original pide la razón «en el instante en que el esquiador se encuentra a 3 m del punto más bajo»; ese dato no se usa.

Ejercicio 2A.5.9 · Implícita y potencia con exponente variable

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 3.

Calcule $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2y + xy^2 = y - x$; b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Resolución.

1. a) Derivación implícita, con regla del producto en los dos términos de la izquierda:

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = y' - 1.$$

2. Se agrupan los términos con y':

$$\left(x^2 + 2xy - 1\right)y' = -1 - 2xy - y^2 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1 + 2xy + y^2}{1 - x^2 - 2xy}.$$

3. b) La variable está en la base y en el exponente: derivación logarítmica (con $x > 0$). $\ln y = \operatorname{sen} x \, \ln x$.

4. Derivando implícitamente:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \, \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

5. Se multiplica por $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2xy+y^2}{1-x^2-2xy}$; b) $\frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

Ejercicio 2A.5.10 · Derivada por definición de una raíz

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2024-1, tipo C, problema 1.

Determine la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con el método de los cuatro pasos, es decir, con la definición de derivada.

Resolución.

1. $f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{x+h}}$, con $x > 0$.
2. Incremento, con denominador común:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}.$$

3. Se divide entre h y se racionaliza el numerador (por $\sqrt{x} + \sqrt{x+h}$):

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}. \end{aligned}$$

4. Límite con $h \to 0$:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

5. Comprobación con la regla de la potencia: $\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$.

Resultado: $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$, para $x > 0$.

2A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2A**.

Ejercicio propuesto 2A.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 4.

Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$G: \begin{cases} x^2 = \operatorname{sen}^2 \theta, \\ y = \cos^2 \theta, \end{cases}$$

en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$ y abscisa positiva.

Resultado: $4x + 4y - 5 = 0$, tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.2

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 4.

La tangente a la curva $y = x^2$ en un punto P corta a la recta $3x - y + 1 = 0$ formando un ángulo de 45°. Determine las coordenadas de P.

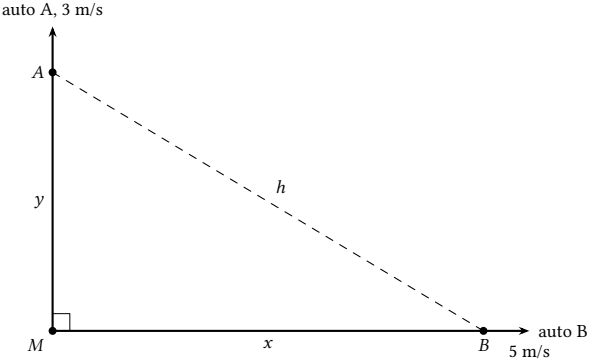
Resultado: $P(-1, 1)$ o $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.3

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 3.

Dos autos parten al mismo tiempo de un punto M en direcciones perpendiculares, como en la figura. El auto A va a 3 m/s y el auto B a 5 m/s. Determine la rapidez con que aumenta la distancia h entre ellos en el instante en que el auto A ha recorrido 9 m.



Resultado: $\frac{dh}{dt} = \sqrt{34}$ m/s ≈ 5.83 m/s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2020-1, problema 3.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $e^{xy} - x = \ln e^y$; b) $x = 3\,\mathrm{senh}(3t)$, $y = 2\cosh(3t)$.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y\,e^{xy}}{x\,e^{xy} - 1}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo D, problema 2.

Obtenga el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de ordenada $y = \frac{1}{2}$.

Resultado: 2 unidades cuadradas.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo A, problema 4.

Una placa metálica circular de radio 20 cm se calienta y su radio aumenta 0.02 cm. Con la diferencial, estime el aumento del área de la placa y compárelo con el aumento exacto.

Resultado: $dA = 0.8\pi$ cm$^2 \approx 2.513$ cm^2; el aumento exacto es $\Delta A = 0.8004\pi$ cm^2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Ejercicio propuesto 2A.6.7

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 2.

Calcule $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1}$ para la curva $y = \operatorname{sen} 2t$, $x = \cos^2 2t$, con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Resultado: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1} = -\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

2A.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar la regla de la cadena.** $(\operatorname{sen} 3x)' = 3\cos 3x$, no $\cos 3x$; $\left(\operatorname{ang\,tan}\sqrt{x}\right)'$ lleva el factor $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. **Derivar y como constante** en la implícita: $\frac{d}{dx}y^2 = 2y\,y'$, no $2y$; $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, no y'.
3. **Segunda derivada paramétrica como $\frac{y''(t)}{x''(t)}$.** Se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a t y se divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. **Evaluar en x cuando la paramétrica pide t**: primero se halla el t que corresponde al valor de x.
5. **Normal con pendiente $-m$** en lugar de $-\frac{1}{m}$.
6. **Derivable sin continuidad.** En una función por partes, igualar pendientes no basta: primero los valores.
7. **Sustituir el instante antes de derivar** en razón de cambio: el radio «vale 4» solo en ese instante; si se sustituye antes, su derivada sale cero.
8. **Signo de las razones.** Lo que disminuye (gas que escapa, agua que sale) lleva razón negativa.
9. **Unidades mezcladas** (mm^3 con cm, m^3 con cm): uniforma antes de sustituir.
10. **Ángulo entre curvas sin valor absoluto**: $\tan\varphi$ negativa da el ángulo obtuso; el ángulo entre curvas es el agudo.
11. **Confundir** $(\cosh u)'$ **con** $(\cos u)'$: la derivada de $\cosh u$ es $+\operatorname{senh} u\,u'$.

12. $x^{\operatorname{sen} x}$ **con la regla de la potencia**: con la variable en el exponente se usa derivación logarítmica.

2A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ · derivable ⇒ continua.
- $(uv)' = uv' + vu' \cdot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2} \cdot (u^n)' = nu^{n-1}u' \cdot \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u\, u' \cdot (\cos u)' = -\operatorname{sen} u\, u' \cdot (\tan u)' = \sec^2 u\, u' \cdot (\sec u)' = \sec u \tan u\, u'$.
- $(\cot u)' = -\csc^2 u\, u' \cdot (\csc u)' = -\csc u \cot u\, u'$.
- $(\operatorname{ang\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (\operatorname{ang\,tan} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \cdot (\operatorname{ang\,sec} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$ · normal con $-\frac{1}{m}$ · $Ax + By + C = 0$ tiene $m = -\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right| \cdot m_1m_2 = -1 \Rightarrow \varphi = 90°$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a t, sustituir al final.
- Esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ · cilindro $V = \pi r^2 h$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ · círculo $A = \pi r^2$.
- Diferencial: $dy = f'(x)\,dx \cdot f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \cdot (e^u)' = e^u u' \cdot (a^u)' = a^u \ln a\, u' \cdot (\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u' \cdot (\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u' \cdot (\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- $y = f^g$: $\ln y = g \ln f$, $y' = f^g\left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$.

2A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Reconoce el tipo con la tabla 2A.2 y escribe la fórmula que vas a usar antes de calcular.
2. En las derivadas, reescribe raíces como potencias y deriva capa por capa; en la implícita, marca cada y'.
3. En tangente y normal: punto completo, pendiente, punto-pendiente; da la forma general si la piden.
4. En razón de cambio, sigue los cinco pasos con su rótulo; sustituye el instante solo al final y di si la cantidad aumenta o disminuye.
5. Comprueba: el punto está en la curva, las pendientes de rectas perpendiculares multiplican -1, las unidades cuadran.

Si no terminas una razón de cambio, la figura, los datos con signo y la ecuación derivada ya valen buena parte del problema.

2A.10 Lo que agrega el Plan 2026: la derivada como razón de cambio física

Si $s(t)$ es la posición de un móvil sobre una recta en el instante t, su derivada es la **velocidad**, $v(t) = s'(t)$, y la derivada de la velocidad es la **aceleración**, $a(t) = v'(t) = s''(t)$: la derivada de orden superior tiene un significado físico. El signo de v dice hacia dónde se mueve; el

móvil está en reposo cuando $v = 0$; si v y a tienen el mismo signo, el móvil acelera, y si tienen signos contrarios, frena. Lo mismo vale para cualquier cantidad que cambia con el tiempo: la corriente es la razón de cambio de la carga, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$; el caudal, la del volumen, $Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

Ejercicio propuesto 2A.10.1 · Velocidad y aceleración de un móvil

La posición de una partícula sobre una recta es $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en metros, con t en segundos y $t \geq 0$). a) Obtenga su velocidad y su aceleración. b) ¿En qué instantes está en reposo? c) ¿En qué instante la aceleración es cero y cuánto vale ahí la velocidad?

Resultado: a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ m/s, $a(t) = 6t - 12$ m/s^2; b) en $t = 1$ y $t = 3$ s; c) en $t = 2$ s, con $v(2) = -3$ m/s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Ejercicio propuesto 2A.10.2 · Una raíz cúbica con la diferencial

Con la diferencial, estime $\sqrt[3]{8.12}$.

Resultado: $\sqrt[3]{8.12} \approx 2.01$ (el valor verdadero es 2.00995 …).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Con la computadora

```
# Pendiente, tangente y normal del primer ejemplo:
# x^2 + 3xy + y^2 = 5 en (1, 1)
from sympy import Eq, idiff, solve, symbols
x, y = symbols("x y")
F = x**2 + 3*x*y + y**2 - 5
m = idiff(F, y, x).subs({x: 1, y: 1})
print(m)                                        # -1
tangente = Eq(y - 1, m*(x - 1))
normal = Eq(y - 1, -(x - 1)/m)
print(solve(tangente, y), solve(normal, y))   # [2 - x] [x]
assert m == -1
```

Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 2). «Regla de L'Hopital y sus aplicaciones a formas indeterminadas de límites de funciones. Uso de software matemático para ilustrar resultados.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores la regla era de Cálculo Integral y compartía un problema con la integral impropia (Parte 3C). Sale en 28 de los 52 finales y extraordinarios del Plan 2010 (formas 1^∞ 9, $\infty - \infty$ 5, 0^0 5, $0 \cdot \infty$ 3 y otras 6) y en 17 de los 60 del Plan 2016. Las hiperbólicas aparecen dentro de los límites con frecuencia.
- **Tiempo:** 2 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2B.1.1 y la tabla de la sección 2B.2 (15 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 2B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 2B.5 con cronómetro: 12 min cada uno.

2B.1 Conceptos y expresiones

2B.1.1 Regla de L'Hôpital

Si $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, o los dos límites son infinitos, y existe $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), entonces

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vale para $x \to a$, $x \to a^{\pm}$ y $x \to \pm\infty$. Se derivan el numerador y el denominador *por separado* (no es la regla del cociente). Si el nuevo límite vuelve a ser $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica otra vez.

Las siete formas indeterminadas. Solo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ admiten la regla directamente. $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$ se reescriben como un cociente. 1^∞, 0^0 e ∞^0 se resuelven tomando logaritmo: si $y = f(x)^{g(x)}$, entonces $\ln y = g(x) \ln f(x)$, que es de la forma $0 \cdot \infty$, y $\lim y = e^{\lim \ln y}$. No son indeterminadas: $\frac{0}{\infty} = 0$, $\infty + \infty = \infty$, $0^\infty = 0$, $\infty^\infty = \infty$.

Límites que conviene saber de memoria. Con $x \to \infty$: $\frac{\ln x}{x} \to 0$, $\frac{x^n}{e^x} \to 0$, $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \to e^{ab}$; con $x \to 0^+$: $x \ln x \to 0$, $x^x \to 1$. Son consecuencias de la regla y sirven para anticipar el resultado. Con $x \to 0$: $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to 1$ (las hiperbólicas, en la sección 1A.1.9).

2B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcular, si existe, el límite» de un cociente que da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$	L'Hôpital (2B.3.1)
Un producto que da $0 \cdot \infty$, o una resta de fracciones que da $\infty - \infty$	Reescribir como cociente (2B.3.2)
Una potencia $f(x)^{g(x)}$ que da 1^∞, 0^0 o ∞^0	Tomar logaritmo (2B.3.3)
Aparecen senh, cosh, tanh, coth en el límite	Sustituir $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$ para ver la forma; derivar con la tabla de la sección 2A.1
«Sin emplear la regla de L'Hôpital»	No se usa: técnicas de la Parte 1B (1B.3)

2B.3 Procedimientos

2B.3.1 L'Hôpital: formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

1. Sustituye el valor: confirma que da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Escríbelo, porque sin forma indeterminada la regla no se aplica.
2. Deriva el numerador y el denominador por separado.
3. Simplifica el nuevo cociente (fracciones dentro de fracciones, factores comunes) y vuelve a sustituir.
4. Si sigue indeterminado, repite. Si un factor tiende a un número distinto de cero (como $\cos x \to 1$ o $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to 1$), sácalo del límite para no derivarlo.

2B.3.2 L'Hôpital: formas $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$

1. $0 \cdot \infty$: escribe $f\,g = \frac{f}{1/g}$ o $\frac{g}{1/f}$. Deja en el denominador el factor que sea más fácil de derivar; un ln se queda casi siempre en el numerador.
2. $\infty - \infty$ con dos fracciones: haz la resta con común denominador. Queda $\frac{0}{0}$.
3. Aplica 2B.3.1.

2B.3.3 L'Hôpital: formas 1^∞, 0^0 e ∞^0

1. Llama $y = f(x)^{g(x)}$ e identifica la forma sustituyendo.
2. Toma logaritmo: $\ln y = g(x) \ln f(x)$. Es $0 \cdot \infty$.
3. Escríbelo como cociente, $\ln y = \dfrac{\ln f(x)}{1/g(x)}$, y aplica 2B.3.1.
4. Si $\lim \ln y = L$, entonces $\lim y = e^L$. **No olvides este paso:** el límite de $\ln y$ no es la respuesta.
5. Comprobación rápida para 1^∞: si $f \to 1$ y $g \to \infty$, entonces $\lim f^{\,g} = e^{\lim g\,(f-1)}$.

2B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · L'Hôpital, forma 1^∞

Adaptado de: 1er final 2011-2, tipo C, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

Resolución.

1. Al sustituir, la base tiende a 1 y el exponente a ∞: forma 1^∞.
2. Sea $y=\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$. Entonces

$$\ln y = 3x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{3x}},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
3. Derivadas: $\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]' = \dfrac{-2/x^2}{1+2/x}$ y $\left[\frac{1}{3x}\right]' = -\dfrac{1}{3x^2}$.
4. L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2/x^2}{1+2/x}\cdot\left(-3x^2\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6}{1+2/x} = 6.\end{aligned}$$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^6$.
6. Comprobación con la fórmula de e: $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\to e^{ab}$ con $a=2$ y $b=3$.

Ejemplo resuelto · L'Hôpital con hiperbólicas

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0^+}(\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. $\cosh 0 = 1$ y $\frac{1}{\operatorname{senh} x}\to\infty$: forma 1^∞.
2. Sea $y=(\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$; $\ln y = \dfrac{\ln\cosh x}{\operatorname{senh} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$ ($\ln 1 = 0$, $\operatorname{senh} 0 = 0$).
3. L'Hôpital, con $(\ln\cosh x)' = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$ y $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tanh x}{\cosh x} = \frac{0}{1} = 0.$$

4. $\lim_{x\to 0^+}(\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x} = e^0 = 1$.
5. Comprobación con la regla rápida de 1^∞: $\frac{\cosh x-1}{\operatorname{senh} x}\to 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\to 0$), así que el límite es e^0.

2B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2B.5.1 · Forma 0^0 con seno hiperbólico

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 3.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. El enunciado original escribe $x \to 0$; como $x^{\operatorname{senh} x}$ solo está definida para $x > 0$, el límite es por la derecha. Al sustituir, la base y el exponente tienden a 0: forma 0^0.
2. Sea $y = x^{\operatorname{senh} x}$: $\ln y = \operatorname{senh} x \ln x = \dfrac{\ln x}{\operatorname{csch} x}$, de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital, con $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{csch} x \coth x} = \lim_{x\to 0^+} \Big(-\frac{\operatorname{senh}^2 x}{x \cosh x}\Big).$$

4. Se separa: $-\dfrac{\operatorname{senh} x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \to -1 \cdot \dfrac{0}{1} = 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to \frac{\cosh 0}{1} = 1$).
5. $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x} = e^0 = 1$.

Ejercicio 2B.5.2 · Forma $\infty - \infty$: L'Hôpital dos veces

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 1}\Big(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\Big)$.

Resolución.

1. Cerca de 1, las dos fracciones crecen sin límite: forma $\infty - \infty$. Común denominador:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\ln x + 1 - 1 = \ln x$; denominador $\ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Sigue $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: numerador $\frac{1}{x}$; denominador $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1/x + 1/x^2} = \frac{1}{1+1}.$$

4. **El límite vale $\frac{1}{2}$.**

Ejercicio 2B.5.3 · Forma ∞^0

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 2.

Determine, si existe, $\lim_{x\to 0^+} \Big(\dfrac{1}{x}\Big)^x$.

Resolución.

1. Base $\to \infty$, exponente $\to 0$: forma ∞^0.
2. Sea $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$: $\ln y = x \ln \frac{1}{x} = -x \ln x = -\dfrac{\ln x}{1/x}$, de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

2B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2B**.

Ejercicio propuesto 2B.6.1

Adaptado de: 2° final 2020-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + \cos x)^{\csc x}$.

Resultado: e.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Ejercicio propuesto 2B.6.2

Adaptado de: 2° final 2017-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Resultado: $-\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

Ejercicio propuesto 2B.6.3

Adaptado de: 2° extraordinario 2011-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to \infty} 4x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.

Resultado: 2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

Ejercicio propuesto 2B.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2016-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - \operatorname{senh} x)^{\coth x}$.

Resultado: e^{-1}.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

2B.7 Errores frecuentes

- **Usar L'Hôpital sin forma indeterminada.** Antes de derivar, sustituye y escribe la forma. $\frac{1}{0^+}$ no es indeterminada: es ∞.
- **Derivar con la regla del cociente.** En L'Hôpital se derivan el numerador y el denominador por separado.
- **Olvidar regresar del logaritmo.** En 1^∞, 0^0 e ∞^0 se calcula $\lim \ln y = L$; la respuesta es e^L, no L.
- **Creer que** $1^\infty = 1$**.** Es indeterminada: $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} \to e^6$.
- **Signos en las hiperbólicas.** $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$, sin el signo menos del coseno; $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$.
- **Usar la regla donde el enunciado la prohíbe.** Los límites de la Parte 1B dicen «sin emplear la regla de L'Hôpital»; ahí un límite resuelto con ella no cuenta.

2B.8 Formulario de emergencia de la parte

- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$, derivando por separado.
- $0 \cdot \infty$: $fg = \frac{f}{1/g}$. $\infty - \infty$: común denominador.
- $y = f^{\,g}$: $\ln y = g \ln f$, $\lim y = e^{\lim g \ln f}$; con $f \to 1$, $g \to \infty$: $\lim f^{\,g} = e^{\lim g(f-1)}$.
- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$; $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.
- $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u'$; $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$; $(\coth u)' = -\operatorname{csch}^2 u\, u'$; $(\operatorname{csch} u)' = -\operatorname{csch} u \coth u\, u'$.

2B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Sustituye y escribe la forma indeterminada antes de cualquier otra cosa.
2. Cociente $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$: deriva arriba y abajo por separado, simplifica y vuelve a sustituir.
3. Producto o resta: pasa a cociente. Potencia $f^{\,g}$: toma ln, pasa a cociente, aplica la regla y termina con e^L.
4. Saca del límite los factores que tienden a un número distinto de cero para no derivarlos.
5. Comprueba con los límites de memoria o con la regla rápida de 1^∞.

2B.10 Lo que agrega el Plan 2026: la regla con la computadora

El programa pide usar software para ilustrar la regla. Una manera: evaluar $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cerca del punto y ver que se acercan al mismo número; otra, calcular el límite directamente, como en el recuadro. La regla también confirma los límites de la Parte 1B: por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. (No sirve para *demostrar* ese límite, porque la derivada del seno se obtiene a partir de él.)

Ejercicio propuesto 2B.10.1 · L'Hôpital dos veces con la exponencial

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Resultado: $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

Con la computadora

```
# El ejemplo de la forma 1^infinito: (1 + 2/x)^(3x)
from sympy import E, limit, log, oo, symbols
x = symbols("x", positive=True)
y = (1 + 2/x)**(3*x)
L = limit(3*x*log(1 + 2/x), x, oo)   # limite de ln y
print(L, limit(y, x, oo))                        # 6 exp(6)
assert L == 6 and limit(y, x, oo) == E**6
```

Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 2). «Variación y optimización de funciones: Interpretación geométrica del Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Función creciente y función decreciente. Concavidad de la gráfica de una función. Extremos relativos de una función. Criterios de la primera y de la segunda derivada. Extremos absolutos de una función. Resolución de problemas de optimización. Visualización de los resultados obtenidos empleando software matemático.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010 hay al menos un problema de esta parte (11 problemas: optimación 6, análisis de la gráfica 4 y valor medio 1). En 35 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016 hay un problema: optimación 16, análisis de la gráfica 14, teorema de Rolle 3 y extremos absolutos en un intervalo cerrado 2; además salen en los segundos parciales.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2C.1 (20 min): los teoremas, los criterios de la primera y la segunda derivada y la concavidad.
  2. Aprende la tabla de variación (2C.3.4) y la plantilla de optimación (2C.3.6): con ellas se resuelve casi todo.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 2C.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 2C.5 con cronómetro: 20 min cada uno. La optimación es la mitad de los problemas: no te saltes los últimos tres.

2C.1 Conceptos y expresiones

Extremos. Una función f tiene un *máximo relativo* en c si $f(c) \geq f(x)$ para toda x cercana a c, y un *mínimo relativo* si $f(c) \leq f(x)$ para toda x cercana a c. Si la desigualdad vale para toda x de un intervalo I, el extremo es *absoluto* en I. El *valor* máximo es $f(c)$; el punto de la gráfica es $(c, f(c))$.

Valor crítico. Un número c del dominio de f es crítico si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe. Los extremos relativos solo pueden estar en valores críticos; pero un valor crítico puede no ser extremo (x^3 en $x = 0$).

Teorema de Weierstrass (de los valores extremos). Si f es continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$, entonces f alcanza en $[a, b]$ un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Están en un valor crítico interior o en un extremo del intervalo.

Teorema de Bolzano. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios,

existe al menos un $c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$. Geométricamente: una curva continua que pasa de abajo a arriba del eje x lo corta.

Teorema de Rolle. Hipótesis:

1. f es continua en $[a,b]$;
2. f es derivable en (a,b);
3. $f(a) = f(b)$.

Tesis: existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Interpretación: entre dos puntos de la gráfica a la misma altura hay uno con **tangente horizontal**.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial (de Lagrange). Hipótesis: las dos primeras de Rolle. Tesis: existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretación: hay un punto donde la **tangente es paralela a la secante** que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$. Rolle es el caso $f(a) = f(b)$.

Crecimiento. Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, f es creciente ahí; si $f'(x) < 0$, es decreciente. Es consecuencia del teorema del valor medio.

Criterio de la primera derivada. Sea c un valor crítico con f continua en c. Si f' cambia de $+$ a $-$ al pasar por c, en c hay un máximo relativo; si cambia de $-$ a $+$, un mínimo relativo; si no cambia de signo, no hay extremo.

Concavidad. Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, la gráfica es *cóncava hacia arriba* ($\cup$): queda arriba de sus tangentes. Si $f''(x) < 0$, es *cóncava hacia abajo* ($\cap$). Un *punto de inflexión* es un punto $(c, f(c))$ de la gráfica, con f continua en c, donde la concavidad cambia. Los candidatos son los c con $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ inexistente; hay inflexión solo si f'' cambia de signo (x^4 tiene $f''(0) = 0$ y no tiene inflexión).

Criterio de la segunda derivada. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, en c hay un máximo relativo; si $f''(c) > 0$, un mínimo relativo; si $f''(c) = 0$, el criterio no decide y se usa el de la primera derivada.

Picos y tangentes verticales. Donde f es continua y f' no existe puede haber:

- un *pico*: $|x|$ en $x = 0$; las pendientes laterales son distintas y hay mínimo;
- una *cúspide*: $x^{2/3}$ en $x = 0$; $f' \to \mp\infty$ por cada lado y también hay mínimo;
- una *tangente vertical* sin extremo: $\sqrt[3]{x}$ en $x = 0$; $f' \to +\infty$ por los dos lados, f sigue creciendo y la concavidad cambia: es punto de inflexión.

2C.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle» o «del valor medio»	revisar cada hipótesis y hallar c	2C.3.1

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«intervalos donde es creciente o decreciente», «máximos y mínimos relativos», «valores críticos»	signo de f'	2C.3.2
«cóncava hacia arriba o hacia abajo», «puntos de inflexión», «criterio de la segunda derivada»	signo de f''	2C.3.3
«trazar la gráfica», «bosquejar»	tabla de variación	2C.3.4
raíces o potencias fraccionarias: $\sqrt[3]{x-1}$, $x^{2/3}$	críticos donde f' no existe	2C.3.4
«máximo y mínimo absolutos» en $[a, b]$	críticos y extremos del intervalo	2C.3.5
«dimensiones para que el área (volumen) sea máxima», «material mínimo», «costo mínimo»	optimación	2C.3.6
«obtener a y b para que haya un punto de inflexión en (x_0, y_0)»	dos ecuaciones	2C.3.7

2C.3 Procedimientos

2C.3.1 Teoremas de Rolle y del valor medio

1. Escribe las hipótesis del teorema que pide el enunciado y revisa **una por una**, terminando cada una con «se cumple» o «no se cumple»:
   - **Continuidad en** $[a, b]$**:** polinomios, sen y cos son continuos siempre; un cociente, donde el denominador no se anula; una raíz par, donde el radicando es ≥ 0.
   - **Derivabilidad en** (a, b)**:** calcula f' y revisa dónde no existe (denominador cero, raíz de cero en el denominador).
   - **Solo Rolle:** $f(a) = f(b)$**.** Evalúa los dos extremos.
2. Si una hipótesis no se cumple, el teorema no se puede aplicar (puede o no existir c): dilo y termina.
3. Si se cumplen, plantea $f'(c) = 0$ (Rolle) o $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (valor medio) y resuelve.
4. Conserva solo las soluciones del intervalo *abierto* (a, b).

2C.3.2 Crecimiento y extremos relativos

1. Dominio de f.
2. Deriva y **factoriza** f'. Valores críticos: los ceros de f' y los puntos del dominio donde f' no existe.
3. Los críticos y los puntos fuera del dominio parten la recta en intervalos. Toma un valor de prueba en cada uno y anota el signo de f'.
4. $f' > 0$: creciente; $f' < 0$: decreciente.
5. Criterio de la primera derivada en cada crítico; evalúa f en los extremos: el valor máximo o mínimo es $f(c)$.

2C.3.3 Concavidad, inflexión y criterio de la segunda derivada

1. Calcula f'' y factorízala. Candidatos: ceros de f'' y puntos del dominio donde f'' no existe.
2. Signo de f'' en cada intervalo: + es cóncava hacia arriba, − hacia abajo.
3. Hay inflexión en un candidato solo si el signo cambia y c está en el dominio. Da las coordenadas $(c, f(c))$.
4. Si el enunciado pide el criterio de la segunda derivada, evalúa f'' en cada crítico con $f'(c) = 0$: negativo, máximo; positivo, mínimo.

2C.3.4 Tabla de variación y gráfica

1. Reúne en una tabla los críticos y los candidatos a inflexión, ordenados, con los signos de f' y f'' entre ellos.
2. Renglón de f: ↗ (crece) o ↘ (decrece), y los valores de f en los puntos de la tabla.
3. Ubica en la gráfica: extremos, inflexiones, intersecciones con los ejes ($f(0)$ y, si es fácil, los ceros), asíntotas.
4. Une los puntos respetando el crecimiento y la concavidad de cada tramo.
5. Donde f' no existe: si $f' \to \pm\infty$ dibuja una tangente vertical; si las pendientes laterales son distintas, un pico.

2C.3.5 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

1. Revisa que f sea continua en $[a, b]$: por el teorema de Weierstrass, existen los dos extremos absolutos.
2. Encuentra los críticos de (a, b).
3. Evalúa f en los críticos y en a y b.
4. El mayor valor es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto. No hace falta ningún criterio.

2C.3.6 Optimación: plantilla

1. **Dibujo y variables.** Haz un esquema y nombra cada medida que cambia (x, y, r, h).
2. **Función objetivo.** Lo que se quiere hacer máximo o mínimo, en función de las variables: área, volumen, perímetro, material, costo.
3. **Restricción.** La ecuación que liga las variables: el dato fijo (perímetro, volumen, área) o la condición geométrica (el punto está en la curva, triángulos semejantes).
4. **Una variable.** Despeja de la restricción y sustituye en la función objetivo.
5. **Dominio.** Los valores con sentido físico (longitudes positivas, el punto dentro de la figura).
6. **Crítico.** Deriva, iguala a cero y resuelve en el dominio.
7. **Justifica** que es máximo o mínimo: con la segunda derivada, con el cambio de signo de la primera o comparando con los extremos del dominio.
8. **Responde** lo que se pide: todas las dimensiones, el valor óptimo y las unidades.

2C.3.7 Punto de inflexión con parámetros

1. «El punto (x_0, y_0) está en la gráfica»: $g(x_0) = y_0$.
2. «Es punto de inflexión»: $g''(x_0) = 0$.
3. Resuelve el sistema y comprueba que g'' cambia de signo en x_0.

2C.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Análisis completo de una cúbica

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 5.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus valores máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia abajo o hacia arriba.

Resolución.

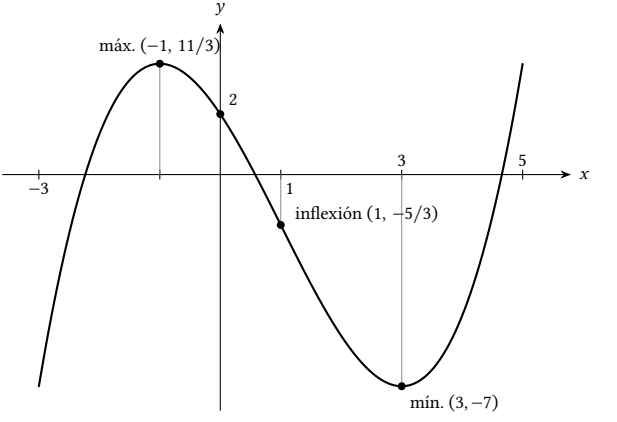
1. Polinomio: dominio $\mathbb{R}$. Primera derivada factorizada:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$$

   Valores críticos: $x = -1$ y $x = 3$.
2. Valores de f: $f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = \frac{11}{3}$ y $f(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7$.
3. Segunda derivada: $f''(x) = 2x - 2$; se anula en $x = 1$, con $f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$.
4. Tabla de variación (valores de prueba -2, 0, 2, 4):

	$x < -1$	-1		1		3	$x > 3$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\frac{11}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$

5. a) $f' > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$; $f' < 0$ en $(-1, 3)$.
6. b) En $x = -1$, f' cambia de + a − (y $f''(-1) = -4 < 0$): máximo relativo. En $x = 3$, de − a + (y $f''(3) = 4 > 0$): mínimo relativo.
7. c) $f'' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y $f'' > 0$ en $(1, \infty)$: la concavidad cambia en $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$, punto de inflexión.
8. Gráfica: además, $f(0) = 2$, $f(-3) = -7$ y $f(5) = \frac{11}{3}$.



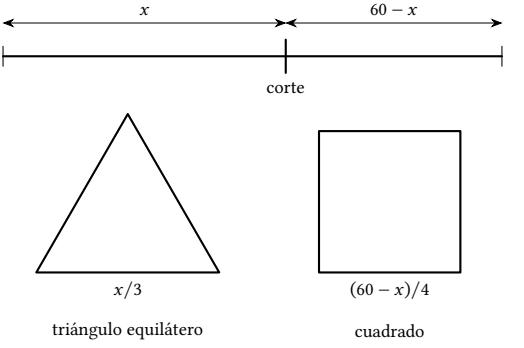
Resultado: a) creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(3,\infty)$, decreciente en $(-1,3)$; b) máximo relativo $f(-1)=\frac{11}{3}$, mínimo relativo $f(3)=-7$; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)$, hacia arriba en $(1,\infty)$, con inflexión en $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$.

Ejemplo resuelto · Alambre cortado en dos

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 5.

Un alambre de 60 cm se corta en dos partes; con una se forma un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado. ¿Qué longitud debe tener cada parte para que la suma de las áreas sea mínima?

Resolución.



1. **Variables.** x: tramo del triángulo, de lado $\frac{x}{3}$; $60-x$: tramo del cuadrado, de lado $\frac{60-x}{4}$.
2. **Función objetivo.** Con el área del triángulo equilátero de lado ℓ, $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$:

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{60-x}{4}\right)^2,$$

es decir,

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{36}x^2+\frac{(60-x)^2}{16}.$$

3. **Dominio.** $0\le x\le 60$ (en los extremos todo el alambre va a una sola figura).
4. **Crítico.**

$$A'(x)=\frac{\sqrt{3}}{18}x-\frac{60-x}{8}=0\ \Rightarrow\ 8\sqrt{3}\,x=18(60-x),$$

de donde $x=\frac{1080}{18+8\sqrt{3}}=\frac{540}{9+4\sqrt{3}}$. Racionalizando:

$$x=\frac{540(9-4\sqrt{3})}{81-48}=\frac{540(9-4\sqrt{3})}{33}=\frac{180(9-4\sqrt{3})}{11}.$$

5. **Justificación.** $A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8} > 0$ para toda x: el crítico es mínimo y, como es el único, es el mínimo absoluto en $[0, 60]$. (Comprobación: $A(0) = 225$ y $A(60) = 100\sqrt{3} \approx 173.2$, mayores que $A \approx 97.9$ en el crítico.)
6. **Otra parte:** $60 - x = \frac{660-1620+720\sqrt{3}}{11} = \frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11}$.

Resultado: para el triángulo, $\frac{180(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 33.90$ cm; para el cuadrado, $\frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11} \approx 26.10$ cm.

2C.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2C.5.1 · Valor medio con una raíz cuadrada

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

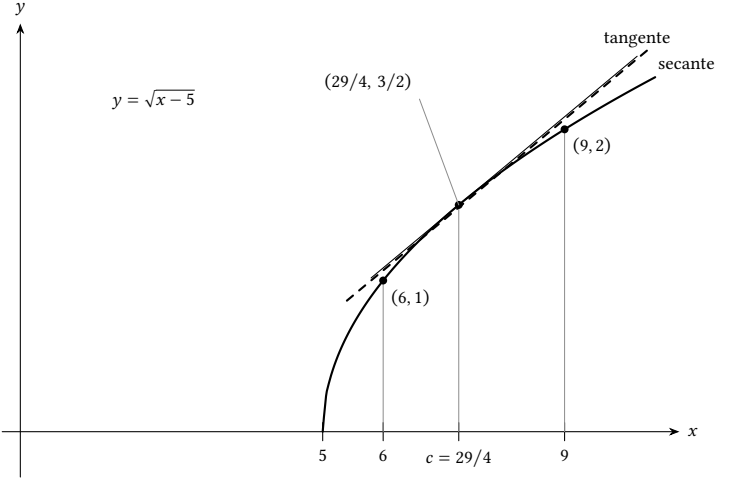
Sea $f(x) = \sqrt{x-5}$ en el intervalo $[6, 9]$. Determine si se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial y, en caso afirmativo, obtenga el o los valores de x donde se cumple la tesis.

Resolución.

1. **Continuidad en** $[6, 9]$**.** La raíz está definida y es continua para $x \geq 5$, y $[6, 9]$ está contenido ahí. Se cumple.
2. **Derivabilidad en** $(6, 9)$**.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$ existe para $x > 5$. Se cumple.
3. **Pendiente de la secante:** $f(6) = 1$, $f(9) = 2$:

$$\frac{f(9) - f(6)}{9 - 6} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. **Tesis:** $\frac{1}{2\sqrt{c-5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{c-5} = \frac{3}{2} \Rightarrow c - 5 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{29}{4} = 7.25$, que está en $(6, 9)$.



Resultado: se cumplen las dos hipótesis y la tesis se cumple en $c = \frac{29}{4}$; la tangente en $\left(\frac{29}{4}, \frac{3}{2}\right)$ es paralela a la secante.

Ejercicio 2C.5.2 · Rolle con un polinomio de grado 4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 4.

Sea $f(x) = 2 - 4x^2 + x^4$. Determine si f satisface el teorema de Rolle en el intervalo $\left[1, \sqrt{3}\right]$ y, en caso afirmativo, obtenga los valores del intervalo en los que se cumple.

Resolución.

1. **Continuidad en $\left[1, \sqrt{3}\right]$.** Es un polinomio. Se cumple.
2. **Derivabilidad en $\left(1, \sqrt{3}\right)$.** $f'(x) = 4x^3 - 8x$ existe para toda x. Se cumple.
3. **Valores en los extremos.** $f(1) = 2 - 4 + 1 = -1$ y $f(\sqrt{3}) = 2 - 12 + 9 = -1$. Son iguales: se cumple.
4. **Tesis:** $f'(c) = 4c(c^2 - 2) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0, c = \pm\sqrt{2}$. Solo $\sqrt{2} \approx 1.41$ está en $\left(1, \sqrt{3}\right) \approx (1, 1.73)$.
5. En $c = \sqrt{2}$ la tangente es horizontal: $f(\sqrt{2}) = 2 - 8 + 4 = -2$.

Resultado: se cumplen las tres hipótesis y el teorema se verifica en $c = \sqrt{2}$.

Ejercicio 2C.5.3 · Raíz cúbica: tangente vertical

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 5.

Para $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ obtenga, si existen: a) los intervalos donde f es creciente o decreciente; b) los máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Trace la gráfica de f.

Resolución.

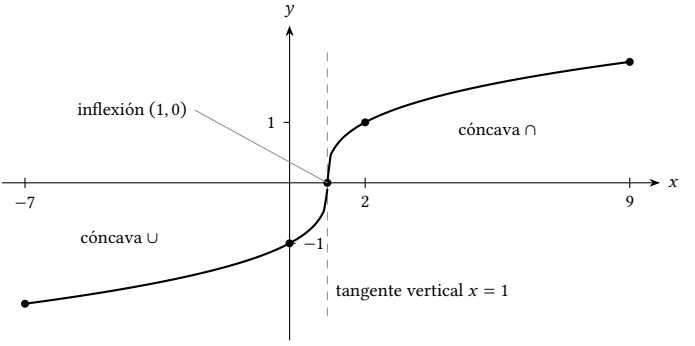
1. La raíz cúbica está definida para todo real: dominio $\mathbb{R}$, y f es continua.
2. $f(x) = (x - 1)^{1/3}$, así que

$$f'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

   No se anula nunca y no existe en $x = 1$: único valor crítico, $x = 1$.
3. a) El denominador es positivo (raíz cúbica de un cuadrado): $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$. Como f es continua en $x = 1$, es creciente en todo $\mathbb{R}$.
4. b) f' no cambia de signo en $x = 1$: no hay máximos ni mínimos relativos. Como $f'(x) \to +\infty$ cuando $x \to 1$, en $(1, 0)$ la tangente es vertical.
5. c) Segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

   Para $x < 1$, $(x - 1)^5 < 0$ y su raíz cúbica también: $f'' > 0$, cóncava hacia arriba. Para $x > 1$: $f'' < 0$, cóncava hacia abajo.
6. La concavidad cambia en $x = 1$ y f es continua ahí: $(1, 0)$ es punto de inflexión, con tangente vertical.
7. Puntos para la gráfica: $f(-7) = -2$, $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, $f(9) = 2$.



Resultado: a) creciente en $(-\infty, \infty)$, nunca decreciente; b) no tiene extremos relativos ($x = 1$ es crítico, con tangente vertical); c) cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1)$ y hacia abajo en $(1, \infty)$; inflexión en $(1, 0)$.

Ejercicio 2C.5.4 · Extremos relativos y absolutos

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 7.

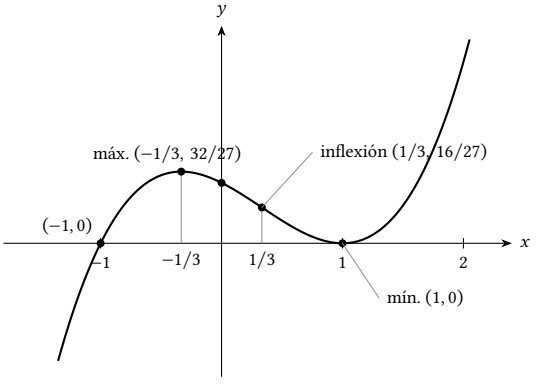
Para $f(x) = (1 + x)(x - 1)^2$ obtenga: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) el máximo y el mínimo absolutos en $[-1, 1]$. Trace la gráfica.

Resolución.

1. Desarrollando, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$; dominio $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$. Críticos: $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$.
3. Signo de f': positivo en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, negativo en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, positivo en $(1, \infty)$.
4. Valores: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$ y $f(1) = 2 \cdot 0 = 0$.
5. b) En $-\frac{1}{3}$, f' pasa de + a −: máximo relativo. En 1, de − a +: mínimo relativo. (Con la segunda derivada, $f''(x) = 6x - 2$: $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ y $f''(1) = 4 > 0$.)
6. c) f es continua en $[-1, 1]$. Valores en los críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(-1) = 0, \qquad f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{32}{27}, \qquad f(1) = 0.$$

7. Para la gráfica: inflexión en $x = \frac{1}{3}$ (f'' cambia de signo), con $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$; $f(0) = 1$, $f(2) = 3$.



Resultado: a) creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ y $(1, \infty)$, decreciente en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; b) máximo relativo $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$, mínimo relativo $f(1) = 0$; c) en $[-1, 1]$, máximo absoluto $\frac{32}{27}$ en $x = -\frac{1}{3}$ y mínimo absoluto 0, en $x = -1$ y en $x = 1$.

Ejercicio 2C.5.5 · Función racional

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.

Dada $f(x) = \frac{8x}{(x-2)^2}$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) los puntos de inflexión y la concavidad de su gráfica.

Resolución.

1. Dominio: $x \neq 2$. En $x = 2$ hay asíntota vertical y, como el grado del denominador es mayor, $y = 0$ es asíntota horizontal.
2. Primera derivada (se simplifica un factor $x - 2$):

$$f'(x) = \frac{8(x-2)^2 - 16x(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8(x-2) - 16x}{(x-2)^3} = -\frac{8(x+2)}{(x-2)^3}.$$

   Crítico: $x = -2$ ($x = 2$ no está en el dominio, pero sí separa intervalos).
3. Signos (valores de prueba -3, 0, 3):

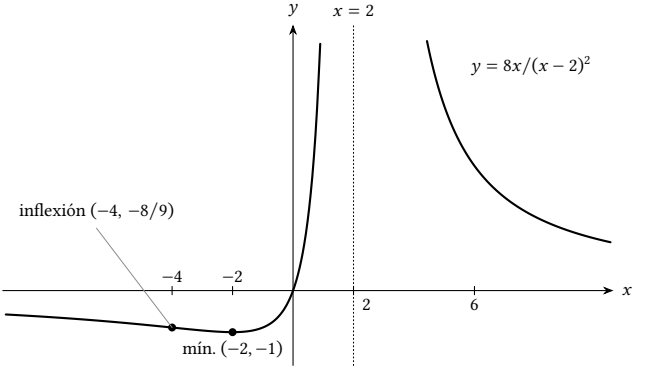
	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$-8(x+2)$	+	−	−
$(x-2)^3$	−	−	+
f'	−	+	−

4. b) En $x = -2$, f' pasa de − a +: mínimo relativo $f(-2) = \frac{-16}{16} = -1$. No hay máximo relativo.
5. c) Derivando $-8(x+2)(x-2)^{-3}$:

$$f''(x) = -8\,\frac{(x-2) - 3(x+2)}{(x-2)^4} = \frac{16(x+4)}{(x-2)^4}.$$

   El denominador es positivo: $f'' < 0$ si $x < -4$ y $f'' > 0$ si $-4 < x < 2$ o $x > 2$.

6. Inflexión en $x = -4$: $f(-4) = \frac{-32}{36} = -\frac{8}{9}$. En $x = 2$ no hay inflexión: no está en el dominio y f'' no cambia de signo.

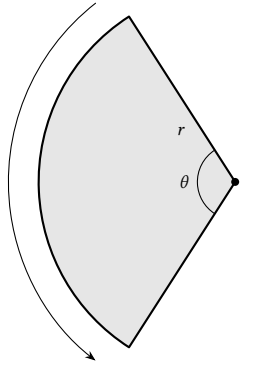


Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, creciente en $(-2, 2)$; b) mínimo relativo $f(-2) = -1$, sin máximos; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$, hacia arriba en $(-4, 2)$ y en $(2, \infty)$; inflexión en $\left(-4, -\frac{8}{9}\right)$.

Ejercicio 2C.5.6 · Sector circular de perímetro mínimo

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 5.

Un sector circular de radio r y arco l tiene área 8 m^2. Determine las dimensiones del sector cuyo perímetro es mínimo. (Área del sector: $\frac{rl}{2}$.)



Resolución.

1. **Función objetivo.** El perímetro son dos radios y el arco: $P = 2r + l$.
2. **Restricción.** $\frac{rl}{2} = 8 \;\Rightarrow\; l = \frac{16}{r}$.
3. **Una variable:** $P(r) = 2r + \frac{16}{r}$, con $r > 0$.

4. **Crítico:** $P'(r) = 2 - \frac{16}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r^2 = 8 \;\Rightarrow\; r = 2\sqrt{2}$ (la raíz negativa no tiene sentido).
5. **Justificación:** $P''(r) = \frac{32}{r^3} > 0$ para $r > 0$: mínimo, y absoluto, pues es el único crítico.
6. Arco: $l = \frac{16}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Ángulo central: $\theta = \frac{l}{r} = 2$ rad. Perímetro: $P = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

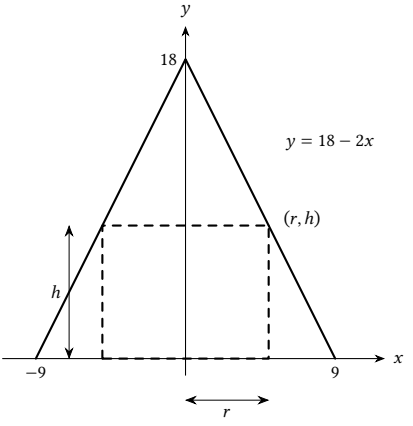
Resultado: $r = 2\sqrt{2}$ m ≈ 2.83 m y $l = 4\sqrt{2}$ m (ángulo central de 2 rad); perímetro mínimo $8\sqrt{2}$ m.

Ejercicio 2C.5.7 · Cilindro inscrito en un cono

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 6.

Calcule las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en un cono de radio $R = 9$ cm y altura $H = 18$ cm.

Resolución.



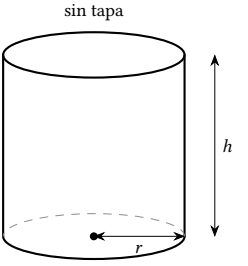
1. **Variables.** Radio r y altura h del cilindro. En el corte vertical, la generatriz del cono es la recta por $(9, 0)$ y $(0, 18)$: $y = 18 - 2x$.
2. **Restricción.** La esquina (r, h) del cilindro toca la generatriz: $h = 18 - 2r$ (o, con triángulos semejantes, $\frac{h}{18} = \frac{9-r}{9}$).
3. **Función objetivo:** $V = \pi r^2 h = \pi r^2(18 - 2r) = \pi(18r^2 - 2r^3)$, con $0 < r < 9$.
4. **Crítico:** $V'(r) = \pi(36r - 6r^2) = 6\pi r(6 - r) = 0 \;\Rightarrow\; r = 6$.
5. **Justificación:** $V''(r) = \pi(36 - 12r)$, $V''(6) = -36\pi < 0$: máximo.
6. $h = 18 - 12 = 6$ y $V = \pi \cdot 36 \cdot 6 = 216\pi$.

Resultado: radio 6 cm y altura 6 cm; volumen máximo 216π cm^3.

Ejercicio 2C.5.8 · Envase cilíndrico sin tapa

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2019-2, problema 4.

Se quiere construir un envase de 1500 cm^3 con forma de cilindro circular recto sin tapa. Calcule el radio y la altura del envase que emplean la menor cantidad de material.



Resolución.

1. **Función objetivo.** Material: base más pared lateral (sin tapa): $S = \pi r^2 + 2\pi rh$.
2. **Restricción.** $\pi r^2 h = 1500 \;\Rightarrow\; h = \frac{1500}{\pi r^2}$.
3. **Una variable:** $S(r) = \pi r^2 + \frac{3000}{r}$, con $r > 0$.
4. **Crítico:**

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{3000}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{1500}{\pi} \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}} = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}.$$

5. **Justificación:** $S''(r) = 2\pi + \frac{6000}{r^3} > 0$: mínimo.
6. **Altura:** como $\pi r^3 = 1500$, $h = \frac{1500}{\pi r^2} = \frac{\pi r^3}{\pi r^2} = r$.

Resultado: $r = h = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}$ cm ≈ 7.82 cm.

2C.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2C**.

Ejercicio propuesto 2C.6.1

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 5.

Para $f(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo; c) sus máximos y mínimos relativos. Trace su gráfica.

Resultado: a) decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$, creciente en $(-2, 1)$; b) cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, hacia abajo en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, inflexión en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{12}\right)$; c) mínimo relativo $f(-2) = -\frac{13}{3}$, máximo relativo $f(1) = \frac{1}{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 169.

Ejercicio propuesto 2C.6.2

Adaptado de: 2º final 2001-2, tipo A, problema 5.

Calcule el área máxima que puede tener un rectángulo de dimensiones variables inscrito en la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

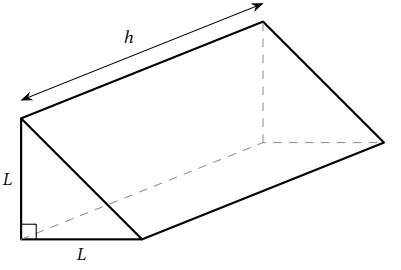
Resultado: 24 unidades de área (rectángulo de $4\sqrt{2}$ por $3\sqrt{2}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 169.

Ejercicio propuesto 2C.6.3

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 6.

Se fabricará un recipiente con forma de prisma triangular recto. Su sección es un triángulo rectángulo isósceles de catetos L y su longitud es h, como en la figura. Calcule el valor de L que hace mínima la cantidad de material, si el recipiente debe tener una capacidad de 3 m^3. Considere el prisma cerrado: dos caras triangulares y tres rectangulares.



Resultado: $L = \sqrt[3]{6+3\sqrt{2}}$ m ≈ 2.17 m (con $h = (2-\sqrt{2})L \approx 1.27$ m).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 170.

Ejercicio propuesto 2C.6.4

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 5.

Un triángulo rectángulo está formado, en el primer cuadrante, por los ejes coordenados y una recta que pasa por el punto $(2, 3)$. Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo de área mínima.

Resultado: $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 6)$; área mínima 12.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 170.

Ejercicio propuesto 2C.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo A, problema 4.

Obtenga el valor de a y el de b tales que la gráfica de $g(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un punto de inflexión en $A(1, 2)$.

Resultado: $a = -1$, $b = 3$: $g(x) = -x^3 + 3x^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 171.

Ejercicio propuesto 2C.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 4.

Para $m(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$: a) obtenga sus valores críticos; b) calcule sus valores extremos absolutos; c) obtenga su punto de inflexión; d) trace su gráfica.

Resultado: a) $x = \frac{\pi}{4}$; b) máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $x = \frac{\pi}{4}$, mínimo absoluto -1 en $x = -\frac{\pi}{2}$; c) $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 171.

2C.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar los críticos donde f' no existe.** En $\sqrt[3]{x-1}$ o $x^{2/3}$, el crítico no sale de $f' = 0$, sino del denominador de f'.
2. **Llamar extremo a todo crítico.** Si f' no cambia de signo (x^3 en 0, $\sqrt[3]{x-1}$ en 1) no hay extremo.
3. **Llamar inflexión a todo cero de f''.** Hay que comprobar que f'' cambia de signo: x^4 tiene $f''(0) = 0$ y es cóncava hacia arriba en todas partes.
4. **Inflexión fuera del dominio.** En $\frac{8x}{(x-2)^2}$, $x = 2$ separa intervalos de signo, pero ahí no hay punto de la gráfica.
5. **Dar solo la abscisa.** «Valor máximo» es $f(c)$; «punto de inflexión» son las coordenadas $(c, f(c))$.
6. **Rolle y valor medio sin revisar hipótesis.** Cada hipótesis se escribe y se califica: «se cumple» o «no se cumple». Y c debe estar en el intervalo *abierto*.
7. **Extremos absolutos sin los extremos del intervalo.** En $[a, b]$ siempre se evalúan $f(a)$ y $f(b)$.
8. **Optimación con dos variables.** Si no se usa la restricción para dejar una sola variable, la derivada no tiene sentido.
9. **No justificar el máximo o el mínimo.** Un crítico no basta: segunda derivada, cambio de signo o comparación con los extremos del dominio.
10. **Contar mal las caras o los tramos.** Un envase sin tapa no lleva πr^2 dos veces; el perímetro de un sector lleva dos radios más el arco.

2C.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- Valor medio: f continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a, b)$.
- Weierstrass: continua en $[a, b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- $f' > 0$: crece · $f' < 0$: decrece · $f'' > 0$: cóncava ∪ · $f'' < 0$: cóncava ∩.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a, b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ · sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}, l = r\theta$ · cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi rh$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

2C.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Análisis de la gráfica:** dominio, f' factorizada, críticos, f'' factorizada, candidatos a inflexión; todo en una sola tabla de variación.
2. Contesta cada inciso con intervalos y con valores $f(c)$ o coordenadas, en el orden del enunciado.
3. Para la gráfica, marca extremos, inflexiones, $f(0)$ y asíntotas antes de unir con la curva.
4. **Rolle o valor medio:** tres (o dos) renglones de hipótesis con «se cumple» y después la ecuación para c.
5. **Optimación:** dibujo con variables, escribe la plantilla completa y no olvides justificar y dar unidades.

Si no se llega al final, la tabla de signos bien hecha o la función objetivo en una variable ya valen buena parte del problema.

2C.10 Lo que agrega el Plan 2026: optimización en ingeniería y con software

Los problemas de optimación de esta parte son el modelo de la Parte 1A más un paso: derivar, igualar a cero y justificar que el crítico es el máximo o el mínimo que se pide. El programa pide además visualizar el resultado con software: graficar la función objetivo en su dominio y ver que el extremo está donde dice el cálculo, o hacer la tabla de variación con la computadora, como en el recuadro. La gráfica no sustituye a la justificación (criterio de la primera o de la segunda derivada, o comparación con los extremos del intervalo), pero detecta errores de planteamiento: un máximo que no se ve, o un dominio mal escrito.

Ejercicio propuesto 2C.10.1 · Terreno junto a un río

Con 240 m de cerca se quiere cercar un terreno rectangular que colinda con un río; el lado del río no lleva cerca. ¿Qué dimensiones dan el área máxima y cuánto vale?

Resultado: 60 m en los dos lados perpendiculares al río y 120 m en el lado paralelo; área máxima 7200 m^2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

Ejercicio propuesto 2C.10.2 · La caja de volumen máximo

Para la caja del ejercicio 1A.10.2, con $V(x) = x(30 - 2x)^2$ y $0 < x < 15$, obtenga el valor de x que da el volumen máximo y ese volumen.

Resultado: $x = 5$ cm; $V_{\text{máx}} = 2000\ \text{cm}^3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

Con la computadora

```
# Tabla de variacion del primer ejemplo:
# f(x) = x^3/3 - x^2 - 3x + 2
from sympy import Rational, diff, solve, symbols
x = symbols("x")
f = Rational(1, 3)*x**3 - x**2 - 3*x + 2
crit = solve(diff(f, x), x)
infl = solve(diff(f, x, 2), x)
print(crit, [f.subs(x, c) for c in crit])
```

```
print(infl, f.subs(x, infl[0]))
# [-1, 3] [11/3, -7]   y   [1] -5/3
assert crit == [-1, 3] and infl == [1]
assert f.subs(x, infl[0]) == Rational(-5, 3)
```

Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas

↑ Volver al índice

Objetivo del tema 3 (programa 2026). «Aplicar la integral definida y la integral indefinida de funciones reales al planteamiento y a la resolución de problemas geométricos y físicos mediante el análisis de sus propiedades y con apoyo de software matemático para modelar el comportamiento de sistemas ingenieriles.»

Contenido de esta parte. «Concepto de suma de Riemann empleando software matemático para la visualización del problema del cálculo del área de una región plana. Integral definida. Propiedades de la integral definida. Integral indefinida y definición de antiderivada.» «Enunciado del Teorema del valor medio del cálculo integral y su interpretación geométrica. Enunciado del Teorema fundamental del cálculo.» «Integrales indefinidas inmediatas. Cambio de variable para la obtención de la integral de una función.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 sale siempre como problema 1: valor medio y teorema del valor medio en 41 exámenes, sumas de Riemann en 7, teorema fundamental en 4 e integral con un parámetro en 2. En el Plan 2016 sale en 34 de los 60, como problema 2: valor medio 25, integral con parámetro 6, teorema fundamental 2 y Riemann 1.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3A.1 y los procedimientos 3A.3.1, 3A.3.4 y 3A.3.5 (30 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 3A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 3A.5 con cronómetro (12 min cada uno).
  4. Las sumas de Riemann con la computadora (sección 3A.10) son lo nuevo del programa: léelas, pero en el examen el límite de la suma se calcula a mano.

3A.1 Conceptos y expresiones

El problema del área y las sumas de Riemann. Para medir el área bajo la gráfica de f en $[a,b]$, el intervalo se parte en n subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, con puntos $x_i = a + i\,\Delta x$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Sobre cada subintervalo se levanta un rectángulo de altura $f(x_i)$. La suma de sus áreas es una *suma de Riemann*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Integral definida. Si el límite de las sumas de Riemann existe cuando $n \to \infty$, ese límite

es la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Interpretación geométrica: es el área *con signo* entre la gráfica y el eje x: cuenta positiva el área sobre el eje y negativa el área bajo él.

Propiedades. Para f y g integrables y k constante:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (sirve para las funciones por tramos);
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
- si $f(x) \le g(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Valor medio (ordenada media). El valor medio de f en $[a,b]$ es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Los exámenes lo llaman también *valor promedio* u *ordenada media*, y a veces lo escriben $f(c)$.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (TVM). Si f es continua en $[a,b]$, existe al menos un $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a),$$

es decir, $f(c) = \bar{f}$. *Interpretación geométrica:* el área bajo la curva es igual a la de un rectángulo de base $b-a$ y altura $\bar{f}$ (figura del ejemplo 3A.4.1). El número c se llama *abscisa media*. Puede haber más de uno; solo valen los que están en el intervalo.

Integral indefinida y Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Si f es continua, la integral con el extremo superior variable

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es derivable y $F'(x) = f(x)$ (primera parte del TFC): F es una *antiderivada* o *primitiva* de f. Todas las antiderivadas difieren en una constante; su familia es la integral indefinida, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. La segunda parte del TFC da la regla para calcular integrales definidas sin límites:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Con la regla de la cadena, si los dos límites son funciones de x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$

Integrales inmediatas y cambio de variable. Una integral es *inmediata* si el integrando es la derivada de una función conocida (la tabla está en 3A.3.5). El *cambio de variable* $u = g(x)$, $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ lleva $\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ a la inmediata $\int f(u)\,\mathrm{d}u$. Las integrales de la forma $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ dan $\ln|g(x)|$; de ellas salen $\int \tan x\,\mathrm{d}x$ y $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$.

Lo que el programa pide y los exámenes no preguntan. El programa incluye la *condición de integrabilidad* (toda función continua en $[a,b]$, o acotada con un número finito de discontinuidades, es integrable) y la *demostración* del TFC (se aplica el TVM a $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ y se hace $h \to 0$). Ninguna de las dos se ha preguntado en los 112 exámenes revisados; basta saber enunciarlas.

3A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcule el valor medio (valor promedio, ordenada media) de f en $[a,b]$»	Valor medio (3A.3.1)
«…y el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio», «abscisa media»	Valor medio y TVM (3A.3.1)
«La función cuya gráfica está en la figura» (rectas por tramos)	Integral por áreas (3A.3.2) y valor medio (3A.3.1)
«Mediante el límite de la suma de Riemann, calcule…»	Sumas de Riemann (3A.3.3)
«Obtenga $F'(x)$ si $F(x)$ es una integral con límite variable», «usando el Teorema Fundamental del Cálculo»	TFC con límites variables (3A.3.4)
Un integrando de la forma $f(g(x))\,g'(x)$ o $\frac{g'(x)}{g(x)}$: $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$, $\tan x$, $\frac{1}{x\ln x}$	Inmediatas y cambio de variable (3A.3.5)
«Determine a (o b) tal que la integral valga…», «para que el valor medio sea…», «para que las dos funciones tengan la misma ordenada media»	Integral con parámetro (3A.3.6)

3A.3 Procedimientos

3A.3.1 Valor medio y Teorema del Valor Medio

1. Revisa que f sea continua en $[a,b]$ (si no, el TVM no garantiza nada).
2. Calcula $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ con una antiderivada (3A.3.5) y divide entre $b-a$: eso es $\bar{f}$.
3. Para el TVM, resuelve la ecuación $f(c) = \bar{f}$.
4. Conserva solo las raíces que están en $[a,b]$ y descarta las demás diciendo por qué. Puede haber una o varias; si no queda ninguna, hay un error (el teorema garantiza al menos una).
5. Si $f(c) = \bar{f}$ no se puede despejar con funciones elementales, basta dar $\bar{f}$; el teorema asegura que c existe.

Atajo de simetría. Si f es impar alrededor del centro del intervalo, su integral vale cero: $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0$ y $\int_0^2 (x-1)^3\,\mathrm{d}x = 0$. Así se ve rápido que el valor medio de $1 + \sqrt[3]{x-1}$ en $[0,2]$ es 1.

3A.3.2 Integral definida por áreas: función dada por una gráfica

1. Escribe la función por tramos, con la recta de cada tramo: con dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y la recta, $y = y_1 + m(x - x_1)$.
2. Separa la integral en los mismos tramos (propiedad aditiva).
3. Cada tramo es un rectángulo, un triángulo o un trapecio: $A = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$. Lo que esté bajo el eje x se resta.
4. Suma, divide entre $b - a$ para el valor medio y busca c tramo por tramo con la recta de cada uno.

3A.3.3 Sumas de Riemann

1. Escribe $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$ (no olvides el sumando a).
2. Sustituye x_i en f y desarrolla en potencias de i: $f(x_i) = \alpha + \beta i + \gamma i^2$, con α, β, γ que dependen de n.
3. Multiplica por Δx y separa la suma. Usa

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

4. Simplifica: cada término queda como un cociente de polinomios en n. Toma el límite $n \to \infty$ (solo cuentan los términos de mayor grado).
5. Comprueba con el TFC: $F(x)\big|_a^b$ debe dar lo mismo. Si f es lineal, también con el área de un trapecio.

3A.3.4 TFC: derivar una integral con límites variables

1. Identifica el integrando $f(t)$, el límite superior $g(x)$ y el inferior $h(x)$. Si un límite es constante, su término vale cero.
2. Aplica
$$F'(x) = f\big(g(x)\big)\,g'(x) - f\big(h(x)\big)\,h'(x).$$
No hace falta integrar.
3. Si piden F' en un punto, simplifica antes de sustituir ($\ln e^x = x$).
4. Comprobación: si f tiene antiderivada sencilla, calcula F explícitamente y derívala.

3A.3.5 Integrales inmediatas y cambio de variable

Tabla mínima (con u función de x y $a > 0$):

- $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$; $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; $\int e^u \, du = e^u + C$.
- $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$; $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$; $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$.
- $\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ang\,tan} \frac{u}{a} + C$; $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen} \frac{u}{a} + C$.

1. Busca dentro del integrando una función $g(x)$ cuya derivada también aparezca (salvo una constante): $\operatorname{sen} x$ con $\cos x$; $\ln x$ con $\frac{1}{x}$; $2 - x$ con -1.
2. Haz $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, y reescribe toda la integral en u. Si sobra alguna x, el cambio no sirve.
3. Integra con la tabla y regresa a x. En una definida, o regresas a x o cambias los límites a $u(a)$ y $u(b)$.
4. Comprueba derivando el resultado.

3A.3.6 Integral con parámetro

1. Calcula la integral (o el valor medio) dejando el parámetro como letra.
2. Iguala al dato y despeja. Con logaritmos, aplica la exponencial a los dos lados; con raíces, despeja la raíz y eleva al cuadrado.
3. Revisa que el valor obtenido deje el integrando continuo en el intervalo ($\sqrt{1-x}$ pide $b < 1$; $\ln x$ en un denominador pide no pasar por $x = 1$) y que cumpla la condición del enunciado ($a > 0$).
4. Si son dos funciones con la misma ordenada media en el mismo intervalo, basta igualar las integrales: el factor $\frac{1}{b-a}$ se cancela.

3A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Valor medio y abscisa del TVM

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 1.

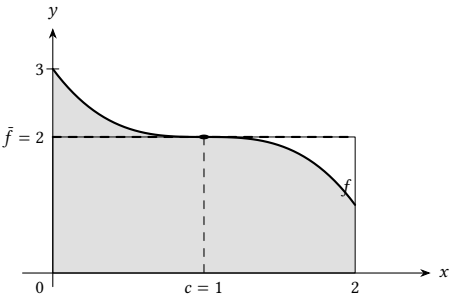
Calcule el valor medio de $f(x) = 2 - (x-1)^3$ en el intervalo $[0, 2]$ y obtenga el o los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Resolución.

1. f es un polinomio: es continua en $[0, 2]$ y el TVM se aplica.
2. Con $u = x - 1$, $\int (x-1)^3 \, dx = \frac{(x-1)^4}{4}$. Entonces

$$\int_0^2 \left[2 - (x-1)^3\right] dx = \left(2x - \frac{(x-1)^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \left(4 - \tfrac{1}{4}\right) - \left(0 - \tfrac{1}{4}\right) = 4.$$

3. Valor medio: $\bar{f} = \frac{4}{2-0} = 2$.
4. TVM: $2 - (c-1)^3 = 2 \Rightarrow (c-1)^3 = 0 \Rightarrow c = 1$, que está en $[0, 2]$.
5. $\bar{f} = 2$ **y** $c = 1$**.** El rectángulo de base 2 y altura 2 tiene la misma área que la región bajo la curva: lo que la curva sobra en $[0, 1]$ le falta en $[1, 2]$.



Ejemplo resuelto · Integral por sumas de Riemann

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo C, problema 1.

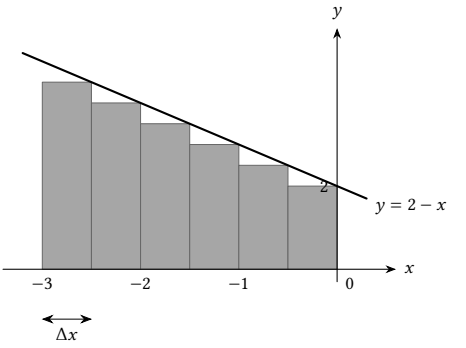
Por medio del límite de la suma de Riemann, calcule $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{0-(-3)}{n} = \frac{3}{n}$ y $x_i = -3 + \frac{3i}{n}$.
2. $f(x_i) = 2 - \left(-3 + \frac{3i}{n}\right) = 5 - \frac{3i}{n}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(5 - \frac{3i}{n}\right) \frac{3}{n} \\ &= \frac{15}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{15}{n}\, n - \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 15 - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $\lim_{n\to\infty} S_n = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$.
5. Comprobación: $\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} = 0 - \left(-6 - \frac{9}{2}\right) = \frac{21}{2}$; también es el trapecio de alturas $f(-3) = 5$ y $f(0) = 2$ y base 3: $\frac{5+2}{2} \cdot 3 = \frac{21}{2}$.
6. $\int_{-3}^{0}(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{21}{2}$.



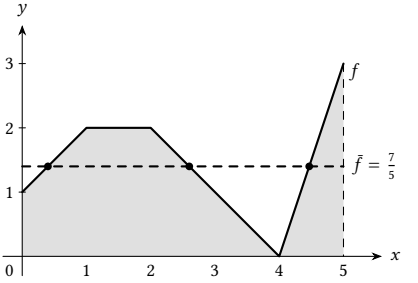
Con $n = 6$ (figura) los rectángulos quedan por debajo de la recta, porque f decrece y se toma el extremo derecho; al crecer n el error $\frac{9}{2n}$ tiende a cero.

3A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3A.5.1 · Valor medio de una función dada por su gráfica

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 1.

La gráfica de f en $[0, 5]$ está formada por segmentos de recta que unen los puntos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ y $(5, 3)$ (figura). a) Calcule el valor medio de f en $[0, 5]$. b) Obtenga los valores de c que cumplen el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)



Resolución.

1. Por tramos: $f(x) = 1 + x$ en $[0, 1]$; $f(x) = 2$ en $[1, 2]$; $f(x) = 4 - x$ en $[2, 4]$; $f(x) = 3(x - 4)$ en $[4, 5]$.
2. Áreas: trapecio $\frac{1+2}{2}(1) = \frac{3}{2}$; rectángulo $2(1) = 2$; triángulo $\frac{2\cdot 2}{2} = 2$; triángulo $\frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$. Toda el área está sobre el eje:

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 2 + 2 + \frac{3}{2} = 7.$$

3. **a)** $\bar{f} = \frac{7}{5}$**.**
4. TVM, tramo por tramo, con $f(c) = \frac{7}{5}$:
   - en $[0,1]$: $1 + c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{2}{5}$ (sí está);
   - en $[1,2]$: $f = 2 \neq \frac{7}{5}$ (ninguno);
   - en $[2,4]$: $4 - c = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{13}{5}$ (sí está);
   - en $[4,5]$: $3(c-4) = \frac{7}{5} \Rightarrow c = \frac{67}{15} \approx 4.47$ (sí está).
5. **b)** $c = \frac{2}{5}$**,** $c = \frac{13}{5}$ **y** $c = \frac{67}{15}$**.**

Ejercicio 3A.5.2 · Riemann con un integrando cuadrático

Adaptado de: 1er extraordinario 2011-2, problema 1.

Mediante el límite de las sumas de Riemann, obtenga $\int_1^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$.
2. $f(x_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}$.
3. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= 4 + \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &\quad + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 4 + 4\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

4. Límite: $4 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.
5. Comprobación: $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3 = (9+3) - \left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{32}{3}$.
6. $\int_1^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}$**.**

Ejercicio 3A.5.3 · TFC con un límite exponencial

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 1.

Sea $F(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,\mathrm{d}t$. Calcule $F'(\ln 2)$.

Resolución.

1. Integrando $f(t) = \ln t$; límite superior $g(x) = e^x$, con $g'(x) = e^x$; el inferior es constante.

2. TFC: $F'(x) = \ln(e^x)\, e^x = x\, e^x$.
3. En $x = \ln 2$: $F'(\ln 2) = \ln 2 \cdot e^{\ln 2} = 2 \ln 2$.
4. Comprobación: $\int \ln t \, \mathrm{d}t = t \ln t - t$, así que $F(x) = x\, e^x - e^x + 1$ y $F'(x) = e^x + x\, e^x - e^x = x\, e^x$.
5. $F'(\ln 2) = 2 \ln 2 = \ln 4$ (≈ 1.386).

Ejercicio 3A.5.4 · Dos funciones con la misma ordenada media

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 1.

Si las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{a}{2\sqrt{2-x}}$ tienen la misma ordenada media en el intervalo $[0, 1]$, calcule el valor de a.

Resolución.

1. El intervalo es el mismo, así que basta igualar las integrales (el factor $\frac{1}{1-0}$ es igual en los dos lados).
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{ang\,tan} x \big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
3. Con $u = 2 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} = -\sqrt{2-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sqrt{2-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{a\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{2-x}} &= a\left(-\sqrt{2-x}\right)\Big|_0^1 \\ &= a\left(\sqrt{2}-1\right).\end{aligned}$$

4. $a\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}$. Racionalizando:

$$a = \frac{\pi\left(\sqrt{2}+1\right)}{4} \approx 1.896.$$

5. g es continua en $[0, 1]$ porque $2 - x > 0$: el valor sirve.
6. $a = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{4}$.

Ejercicio 3A.5.5 · Límite inferior desconocido con logaritmo

Adaptado de: 2º final 2024-2, problema 2.

Determine el valor de $a > 0$ que cumple

$$\int_a^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln 2.$$

Resolución.

1. Cambio de variable: $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. La integral es $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$, así que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(\ln x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$.

2. Evaluación (con $a > 1$, para que $\ln x > 0$ en todo el intervalo):

$$\ln(\ln x)\Big|_a^{e^2} = \ln 2 - \ln(\ln a).$$

3. $\ln 2 - \ln(\ln a) = \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln a) = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e$.
4. $a = e > 1$: el integrando es continuo en $[e, e^2]$ y el valor sirve. Un $a \leq 1$ dejaría $x = 1$ (donde $\ln x = 0$) dentro del intervalo.
5. $a = e$.

Ejercicio 3A.5.6 · TVM con tres abscisas medias

Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 2.

Sea $f(x) = 3x^2 - 5x^4$ en $[-1, 1]$. Calcule el o los valores de c del intervalo que cumplen el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Resolución.

1. Integral:

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 - 5x^4)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 - x^5\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= (1 - 1) - (-1 + 1) = 0.$$

2. Valor medio: $\bar{f} = \frac{0}{2} = 0$.
3. TVM: $3c^2 - 5c^4 = 0 \Rightarrow c^2(3 - 5c^2) = 0 \Rightarrow c = 0$ o $c^2 = \frac{3}{5}$.
4. $c = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{5} \approx \pm 0.775$: los dos están en $[-1, 1]$.
5. $c = 0$, $c = \frac{\sqrt{15}}{5}$ **y** $c = -\frac{\sqrt{15}}{5}$. El teorema garantiza al menos uno; aquí hay tres.

3A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3A**.

Ejercicio propuesto 3A.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2020-1, problema 2.

Mediante el límite de las sumas de Riemann, calcule $\int_1^3 (x + 1)\,\mathrm{d}x$.

Resultado: 6.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

Ejercicio propuesto 3A.6.2

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,\mathrm{d}t$. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine $F'(x)$.

Resultado: $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

Ejercicio propuesto 3A.6.3

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 2.

Si $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = 1$, calcule el valor de $b > 0$.

Resultado: $b = \frac{3}{4}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 172.

Ejercicio propuesto 3A.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 1.

Determine el valor medio de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Resultado: $\bar{f} = \frac{2(e-1)}{\pi} \approx 1.094$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

Ejercicio propuesto 3A.6.5

Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 1.

a) Calcule el valor medio de $f(x) = |\tan x|$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. b) Obtenga el valor de c que cumple el Teorema del Valor Medio. (El inciso b) se agregó al original.)

Resultado: a) $\bar{f} = \frac{2\ln 2}{\pi} = \frac{\ln 4}{\pi} \approx 0.441$; b) $c = \operatorname{ang\,tan} \frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

3A.7 Errores frecuentes

- **Olvidar dividir entre $b-a$.** $\int_a^b f$ es un área; el valor medio es una altura: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
- **Confundir $\bar{f}$ con c.** $\bar{f}$ es una ordenada (un valor de y); c es una abscisa, la x donde $f(c) = \bar{f}$.
- **Dejar abscisas fuera del intervalo.** Al resolver $f(c) = \bar{f}$ pueden salir raíces fuera de $[a, b]$: se descartan diciendo por qué.
- **Escribir $x_i = i\,\Delta x$.** En Riemann el punto es $x_i = a + i\,\Delta x$; solo coincide con $i\,\Delta x$ cuando $a = 0$. Y cada término se multiplica por Δx.
- **Olvidar $g'(x)$ en el TFC.** La derivada de $\int_1^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ es $f(x^2) \cdot 2x$, no $f(x^2)$. Con el límite inferior variable, el término va restando.
- **Perder el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$; en una definida, el intervalo no puede contener un cero de u.
- **Ignorar el dominio al despejar un parámetro.** Un b que deje $\sqrt{1-x}$ o $\ln x$ fuera de su dominio dentro del intervalo no sirve, aunque cumpla la ecuación.

3A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

3A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Identifica el tipo con la tabla 3A.2: valor medio, gráfica, Riemann, TFC o parámetro.
2. Valor medio: integra, divide entre $b-a$, resuelve $f(c) = \bar{f}$ y revisa que $c \in [a,b]$.
3. Riemann: escribe Δx y $x_i = a + i\,\Delta x$ antes de sustituir; separa en $\sum 1$, $\sum i$, $\sum i^2$.
4. TFC: no integres; aplica $f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$.
5. Cierra siempre con una comprobación: derivar la antiderivada o calcular la integral por el TFC.

3A.10 Lo que agrega el Plan 2026: sumas de Riemann con la computadora

El programa pide visualizar con software el problema del área: se dibujan los n rectángulos bajo la gráfica y se calcula su suma para n cada vez mayor. Con $f(x) = 2 - x$ en $[-3, 0]$ (el segundo ejemplo de la sección 3A.4), los rectángulos con el extremo derecho dan

$$S_n = \frac{3(7n-3)}{2n}: \qquad S_{10} = 10.05, \qquad S_{100} = 10.455, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{21}{2} = 10.5.$$

Como f es decreciente, los rectángulos con el extremo derecho quedan por debajo de la gráfica y las sumas se acercan a 10.5 por abajo. Con el extremo izquierdo quedarían por arriba. La computadora hace en un instante la suma que a mano lleva varios renglones, y el límite confirma la integral.

Ejercicio propuesto 3A.10.1 · Sumas por la derecha y por la izquierda

Para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ con $n = 4$ subintervalos iguales, calcule la suma de Riemann con los extremos derechos y la suma con los extremos izquierdos, y compárelas con $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

Resultado: Por la derecha $\frac{15}{32} = 0.46875$; por la izquierda $\frac{7}{32} = 0.21875$; la integral, $\frac{1}{3} \approx 0.333$, está entre las dos.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

Ejercicio propuesto 3A.10.2 · La suma por la derecha con cien rectángulos

Para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$, la suma por la derecha con n rectángulos es $S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. Calcule S_{100} y $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Resultado: $S_{100} = \frac{6767}{20000} = 0.33835$; el límite es $\frac{1}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

Con la computadora

```
# Sumas de Riemann (extremo derecho) de 2 - x en [-3, 0]
from sympy import Rational, limit, oo, summation, symbols
x = symbols("x")
n, i = symbols("n i", positive=True, integer=True)
f, a, b = 2 - x, -3, 0
dx = Rational(b - a)/n
S = summation(f.subs(x, a + i*dx)*dx, (i, 1, n))
print([S.subs(n, k) for k in (10, 100)])  # 201/20, 2091/200
L = limit(S, n, oo)
print(L)                                  # 21/2
assert L == Rational(21, 2)
```

Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 3). «Cálculo de áreas, longitudes y volúmenes de sólidos de revolución. Mención del empleo de la integral definida para el cálculo de trabajo mecánico.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es el problema 4 de los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 (área entre curvas 20, volumen de revolución 16, longitud de arco 13) y de 56 de los 60 del Plan 2016 (área 36, volumen 12, longitud de arco 8). El área en coordenadas polares de los planes anteriores no está en el programa 2026 y no viene aquí; el trabajo mecánico no salía en esos exámenes.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte. Las integrales se resuelven con lo de la Parte 3A; las que piden partes, sustitución trigonométrica o fracciones parciales, con la Parte 4A. Aquí lo nuevo es plantearlas.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 3B.1 y 3B.3 (30 min).
  2. Sigue los tres ejemplos de la sección 3B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 3B.5 con cronómetro (15 min cada uno), empezando por la figura.
  4. Lee la sección 3B.10: el programa solo pide una mención del trabajo, pero el planteamiento es el mismo de las áreas y los volúmenes.

3B.1 Conceptos y expresiones

La idea de todas las aplicaciones. Se corta la figura en pedazos muy delgados, se escribe la medida de un pedazo (el *elemento diferencial*) y se suman todos con una integral definida. Los límites de la integral son el primero y el último valor de la variable en la que se corta. Por eso cada problema empieza con la gráfica de la región y un pedazo dibujado.

Área entre curvas. Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el elemento es un rectángulo vertical de altura $f(x) - g(x)$ y ancho $\mathrm{d}x$:

$$A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x.$$

Si conviene cortar en franjas horizontales (curvas de la forma $x = h(y)$, como las parábolas horizontales), el elemento tiene largo «derecha menos izquierda»:

$$A = \int_c^d \big[x_{\text{der}}(y) - x_{\text{izq}}(y)\big]\,\mathrm{d}y.$$

El área siempre es positiva y se da en $[u^2]$. Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, cambia cuál está arriba y la integral se parte en el punto de cruce.

Longitud de arco. Un tramo muy corto de curva es casi un segmento de largo $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Según cómo esté dada la curva:

$$y = f(x): \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$x(t),\ y(t): \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$r = f(\theta): \quad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

La longitud se da en $[u]$. En los exámenes, el radicando casi siempre queda lineal ($\sqrt{1+9x}$) o como un cuadrado perfecto disfrazado: si no se simplifica, revisa la derivada. La derivada de las paramétricas viene de la Unidad 2A.

Sólido de revolución. Al girar una región plana alrededor de una recta (el *eje de giro*) se forma un sólido. Hay dos maneras de cortarlo:

- *Discos y arandelas:* el rectángulo es *perpendicular* al eje. Al girar forma un disco de radio R o, si la región no toca el eje, una arandela de radio exterior R e interior r:

$$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}x.$$

- *Capas cilíndricas:* el rectángulo es *paralelo* al eje. Al girar forma un tubo delgado de radio ρ, altura h y grosor $\mathrm{d}x$, con volumen $2\pi\rho h\mathrm{d}x$:

$$V = 2\pi \int_a^b \rho(x)\,h(x)\mathrm{d}x.$$

Los radios son *distancias al eje de giro*, no ordenadas: con el eje $y = k$, el radio a la curva $y = f(x)$ es $|f(x) - k|$; con el eje $x = k$, el radio de una capa es $|x - k|$. El volumen se da en $[u^3]$.

Lo que no se pregunta. El área de una superficie de revolución, el centroide y el trabajo no aparecen en los exámenes de los dos planes; tampoco la longitud de arco en polares en el banco del Plan 2016.

3B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcular el área de la región limitada por las gráficas de…» con $y = f(x)$	Área en x (3B.3.1)
Curvas como $y^2 - 4y - x = 0$ o $x = y^2$ (parábolas horizontales)	Área en y (3B.3.1)

El enunciado dice…	Procedimiento
«Longitud de arco» o «longitud de la gráfica de f en $[a, b]$»	Longitud de arco (3B.3.2), forma cartesiana
«La curva dada por $x = \ldots$, $y = \ldots$» con parámetro t	Longitud de arco (3B.3.2), paramétricas
«Longitud de la curva $r = 3\theta^2$»	Longitud de arco (3B.3.2), polares
«Volumen del sólido… al girar alrededor del eje de las abscisas»	Discos o arandelas en x (3B.3.3)
«… alrededor del eje de las ordenadas»	Capas en x (3B.3.4) o discos en y (3B.3.3)
«… alrededor de la recta $y = k$» o «$x = k$»	Discos (3B.3.3) o capas (3B.3.4) con el radio medido desde la recta

3B.3 Procedimientos

3B.3.1 Área entre curvas

1. Dibuja las curvas: identifica rectas, parábolas (vértice y hacia dónde abren), e^x, $\ln x$. Si alguna ecuación tiene y^2 y no x^2, despeja x: es una parábola horizontal.
2. Calcula los puntos de corte igualando las dos expresiones. Los cortes son los límites de la integral.
3. Elige el corte: franjas verticales ($\mathrm{d}x$) si cada vertical entra por una curva y sale por otra; franjas horizontales ($\mathrm{d}y$) si así pasa con las horizontales. Con parábolas horizontales casi siempre es en y.
4. Decide qué curva está arriba (o a la derecha) probando un punto intermedio. Si el orden cambia, parte la integral.
5. Integra «arriba menos abajo» o «derecha menos izquierda» y da el resultado en $[u^2]$. Si sale negativo, restaste al revés.

Simetría. Si las dos funciones son impares ($\sqrt[3]{x}$ y x) o la región es simétrica respecto a un eje, calcula una parte y multiplica. Nunca integres de un lado al otro de un cruce sin partir: las áreas con signo se cancelan.

3B.3.2 Longitud de arco

1. Identifica la forma de la curva: $y = f(x)$, paramétrica o polar, y escribe la fórmula que corresponde.
2. Deriva y eleva al cuadrado: $[f'(x)]^2$, o $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2$, o $r^2 + (r')^2$.
3. Simplifica el radicando antes de integrar. En paramétricas con $e^t \cos t$ y $e^t \operatorname{sen} t$, los productos cruzados se cancelan; en polares con $r = a\theta^2$, saca el factor común.
4. Integra (casi siempre un cambio de variable $u = 1 + 9x$ o $u = \theta^2 + 4$) y evalúa. Da el resultado exacto en $[u]$.

3B.3.3 Volumen por discos y arandelas

1. Dibuja la región, el eje de giro con línea punteada y un rectángulo *perpendicular* al eje.
2. Si el eje es horizontal ($y = 0$ o $y = k$), el rectángulo es vertical y se integra en x; si es vertical ($x = 0$ o $x = k$), es horizontal y se integra en y: despeja x de cada curva.

3. Mide los radios desde el eje: R hasta la curva más lejana, r hasta la más cercana ($r = 0$ si la región toca el eje).
4. Calcula $V = \pi \int (R^2 - r^2)$. Se eleva cada radio por separado: $R^2 - r^2 \neq (R - r)^2$.

Eje $y = k$. La región entre $y = x^2$ y $y = x$ ($0 \leq x \leq 1$) gira alrededor de $y = 2$. La recta queda arriba de la región, así que la curva más lejana es la de abajo: $R = 2 - x^2$ y $r = 2 - x$, y

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2\right] \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{15}\,[u^3].$$

3B.3.4 Volumen por capas cilíndricas

1. Dibuja la región y un rectángulo *paralelo* al eje de giro.
2. Para un eje vertical ($x = 0$ o $x = k$) el rectángulo es vertical y se integra en x: radio $\rho = |x - k|$, altura $h =$ curva de arriba menos curva de abajo.
3. Calcula $V = 2\pi \int \rho h \mathrm{d}x$.
4. Si puedes, comprueba con discos en y: los dos métodos dan el mismo volumen.

Cuándo conviene cada uno. Alrededor del eje y con curvas $y = f(x)$ difíciles de despejar, o con una región que necesitaría dos integrales en y, usa capas. Si x se despeja fácil ($y = \ln x \Rightarrow x = e^y$), los discos en y suelen ser más cortos.

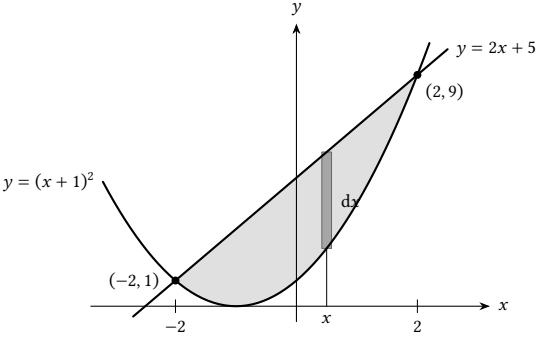
3B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Área entre una parábola y una recta

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2x + 1$ y $y = 2x + 5$.

Resolución.



1. Figura: $y = (x + 1)^2$ es una parábola con vértice en $(-1, 0)$ que abre hacia arriba; $y = 2x + 5$ es una recta de pendiente 2.
2. Cortes: $x^2 + 2x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Puntos $(-2, 1)$ y $(2, 9)$.
3. En $x = 0$ la recta vale 5 y la parábola 1: la recta está arriba. Rectángulo vertical de altura $(2x + 5) - (x^2 + 2x + 1) = 4 - x^2$.

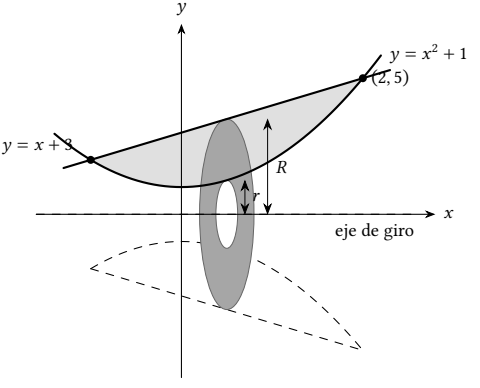
4. Integral:
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}.$$
5. Evaluación: $\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.
6. $A = \frac{32}{3}\,[u^2] \approx 10.67\,[u^2]$**.** Comprobación: el integrando $4 - x^2$ es par, así que $A = 2\int_0^2 (4 - x^2)\mathrm{d}x = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$.

Ejemplo resuelto · Volumen por arandelas alrededor del eje x

Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje x, la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$.

Resolución.

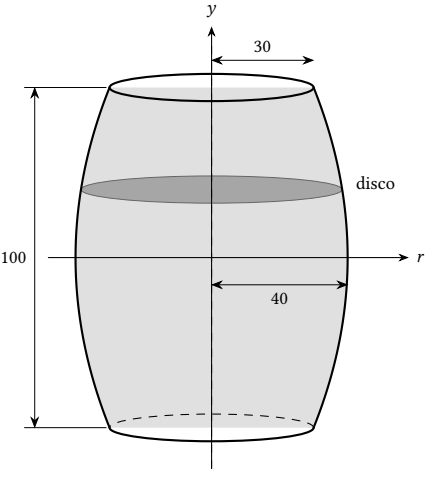


1. Cortes: $x^2 + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$. Puntos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$.
2. En $x = 0$ la recta vale 3 y la parábola 1: la recta está arriba. Las dos curvas están sobre el eje ($y \geq 1$), así que la región no toca el eje: arandelas con $R = x + 3$ y $r = x^2 + 1$.
3. Integrando: $(x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2 = x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1 = -x^4 - x^2 + 6x + 8$.
4. Integral:
$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left(-x^4 - x^2 + 6x + 8\right)\mathrm{d}x$$
$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right)\Big|_{-1}^{2}.$$
5. En $x = 2$: $-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 = \frac{284}{15}$. En $x = -1$: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 = -\frac{67}{15}$. Diferencia: $\frac{351}{15} = \frac{117}{5}$.

6. $V = \dfrac{117\pi}{5}\,[u^3] \approx 73.5\,[u^3]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right) = -x^4 - x^2 + 6x + 8$.

Ejemplo resuelto · Volumen de un barril

Un barril mide 1 m de altura. Su radio es de 40 cm a la mitad de la altura y de 30 cm en las tapas, y su perfil es parabólico. Calcule cuántos litros le caben.
Resolución.



1. Ejes: el eje y es el eje del barril, con el origen a la mitad de la altura y todo en centímetros, así que $-50 \le y \le 50$. El radio a la altura y es $r(y)$.
2. Perfil parabólico, simétrico, con máximo 40 en $y = 0$: $r(y) = 40 - ky^2$. En las tapas, $r(\pm 50) = 30 \Rightarrow 40 - 2500k = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{250}$. Así, $r(y) = 40 - \frac{y^2}{250}$.
3. Cada corte horizontal es un disco de radio $r(y)$ y grosor $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}V = \pi\, r(y)^2 \mathrm{d}y$.
4. Por simetría, el doble de la mitad de arriba:

$$V = \pi \int_{-50}^{50} \left(40 - \frac{y^2}{250}\right)^2 \mathrm{d}y$$
$$= 2\pi \int_{0}^{50} \left(1600 - \frac{8y^2}{25} + \frac{y^4}{62\,500}\right) \mathrm{d}y.$$

5. Término a término, de 0 a 50: $1600(50) = 80\,000$; $\frac{8}{25}\cdot\frac{50^3}{3} = \frac{40\,000}{3}$; $\frac{1}{62\,500}\cdot\frac{50^5}{5} = 1000$. Suma: $81\,000 - \frac{40\,000}{3} = \frac{203\,000}{3}$.
6. $V = \dfrac{406\,000\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3 \approx 425\,162\ \mathrm{cm}^3$. Como 1 L = 1000 cm^3:
7. **Al barril le caben unos 425 L.** Comprobación: un cilindro de radio 40 cm y 1 m de alto tendría unos 503 L, y uno de radio 30 cm, unos 283 L; el barril queda entre

los dos y más cerca del primero, porque casi toda su altura tiene radio cercano a 40.

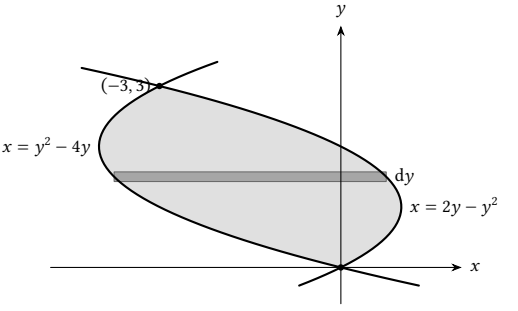
3B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3B.5.1 · Área entre dos parábolas horizontales

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 - 4y - x = 0$ y $y^2 - 2y + x = 0$.

Resolución.



1. Se despeja x: $x = y^2 - 4y$ es una parábola horizontal que abre a la derecha, con vértice $(-4, 2)$; $x = 2y - y^2$ abre a la izquierda, con vértice $(1, 1)$.
2. Cortes: $y^2 - 4y = 2y - y^2 \Rightarrow 2y^2 - 6y = 0 \Rightarrow 2y(y-3) = 0$, así que $y = 0$ y $y = 3$. Puntos $(0, 0)$ y $(-3, 3)$.
3. Franjas horizontales. En $y = 1$: $2y - y^2 = 1$ y $y^2 - 4y = -3$; la de la derecha es $x = 2y - y^2$.
4. Largo de la franja: $(2y - y^2) - (y^2 - 4y) = 6y - 2y^2$.
5. Integral:
$$A = \int_0^3 \big(6y - 2y^2\big)\mathrm{d}y = \Big(3y^2 - \frac{2y^3}{3}\Big)\Big|_0^3 = 27 - 18.$$
6. $A = 9\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(3y^2 - \frac{2}{3}y^3\big) = 6y - 2y^2$.

Ejercicio 3B.5.2 · Área con dos regiones: raíz cúbica y recta

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = x$.

Resolución.

1. Cortes: $\sqrt[3]{x} = x \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$, así que $x = -1, 0, 1$. Hay dos regiones.
2. En $[0, 1]$, con $x = \frac{1}{8}$: $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$; arriba está f. En $[-1, 0]$, con $x = -\frac{1}{8}$: $x = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$; arriba está g.
3. Las dos funciones son impares: las regiones son simétricas respecto al origen y tienen la misma área.

4. Integral:
$$A = 2\int_0^1 \left(x^{1/3} - x\right)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1.$$
5. $2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4}$.
6. $A = \frac{1}{2}\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{3}{4}x^{4/3}\right) = x^{1/3}$. Sin partir, $\int_{-1}^1 (x^{1/3} - x)\mathrm{d}x = 0$: las dos áreas se cancelan.

Ejercicio 3B.5.3 · Arandelas entre seno y coseno hiperbólicos

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$, $y = \cosh x$, $x = 0$ y $x = \ln 2$.

Resolución.

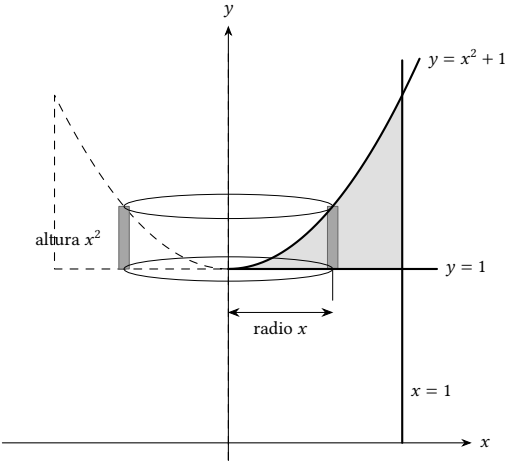
1. Figura: $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x} > 0$, así que $\cosh x$ está arriba; en $[0, \ln 2]$, $\operatorname{senh} x \geq 0$. La región va de $y = \operatorname{senh} x$ a $y = \cosh x$ y no toca el eje (salvo en el punto $(0, 0)$ de su borde inferior).
2. Arandelas: $R = \cosh x$, $r = \operatorname{senh} x$.
3. Integral, con la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$:
$$V = \pi\int_0^{\ln 2} \left(\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x\right)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\ln 2} \mathrm{d}x.$$
4. $V = \pi \ln 2\,[u^3] \approx 2.18\,[u^3]$. Comprobación: con $\cosh \ln 2 = \frac{5}{4}$ y $\operatorname{senh} \ln 2 = \frac{3}{4}$, el integrando en $x = \ln 2$ es $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$.

Ejercicio 3B.5.4 · Capas cilíndricas alrededor del eje y

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 1$ y $x = 1$.

Resolución.



1. Región: $0 \le x \le 1$ y $1 \le y \le x^2 + 1$. El eje de giro ($x = 0$) es su borde izquierdo.
2. Rectángulos verticales (paralelos al eje): capas de radio $\rho = x$ y altura $h = (x^2+1) - 1 = x^2$.
3. Integral:
$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \mathrm{d}x = 2\pi \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{4}.$$
4. $V = \dfrac{\pi}{2}\,[u^3]$.
5. Comprobación con arandelas en y, para $1 \le y \le 2$: $R = 1$ (la recta $x = 1$) y $r = \sqrt{y-1}$ (la parábola):
$$V = \pi \int_1^2 \big[1 - (y-1)\big]\mathrm{d}y = \pi\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 3B.5.5 · Discos en y con logaritmo

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$ y $x = 0$.

Resolución.

1. Se despeja x: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$. La región está entre el eje y ($x = 0$) y la curva $x = e^y$, para $0 \le y \le 1$.
2. La región toca el eje de giro: discos horizontales de radio $R = e^y$.
3. Integral:
$$V = \pi \int_0^1 e^{2y}\mathrm{d}y = \pi \left.\frac{e^{2y}}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}\big(e^2 - 1\big).$$
4. $V = \dfrac{\pi(e^2-1)}{2}\,[u^3] \approx 10.04\,[u^3]$.

5. Comprobación con capas: en x la región se parte en $0 \le x \le 1$ (altura 1) y $1 \le x \le e$ (altura $1 - \ln x$). Con partes, $\int_1^e x(1-\ln x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-3}{4}$, y

$$2\pi\Big(\frac{1}{2} + \frac{e^2-3}{4}\Big) = \frac{\pi(e^2-1)}{2}.$$

Los discos en y evitan partir la región y la integración por partes.

Ejercicio 3B.5.6 · Longitud de arco en cartesianas

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 4.

Calcule la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\big[0, \frac{1}{3}\big]$.

Resolución.

1. $f(x) = 2x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = 3x^{1/2} \Rightarrow [f'(x)]^2 = 9x$.
2. Integral:

$$L = \int_0^{1/3} \sqrt{1+9x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Cambio de variable $u = 1 + 9x$, $\mathrm{d}u = 9\mathrm{d}x$; los límites pasan a $u = 1$ y $u = 4$:

$$L = \frac{1}{9}\int_1^4 u^{1/2}\mathrm{d}u = \frac{2}{27}\,u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{27}(8-1).$$

4. $L = \dfrac{14}{27}\,[u] \approx 0.52\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\big] = \frac{2}{27}\cdot\frac{3}{2}\cdot 9\sqrt{1+9x} = \sqrt{1+9x}$.

Ejercicio 3B.5.7 · Longitud de arco en paramétricas: espiral

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 5.

Calcule la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, con $t \in [0, \ln 11]$.

Resolución.

1. Derivadas (producto):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

2. Suma de cuadrados: los productos cruzados $\pm 2\operatorname{sen} t\cos t$ se cancelan,

$$e^{-2t}\big[(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2\big] = 2e^{-2t}.$$

3. Integral:

$$L = \int_0^{\ln 11} \sqrt{2}\,e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\big(-e^{-t}\big)\Big|_0^{\ln 11} = \sqrt{2}\Big(1 - \frac{1}{11}\Big).$$

4. $L = \dfrac{10\sqrt{2}}{11}\,[u] \approx 1.29\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\sqrt{2}e^{-t}\big) = \sqrt{2}e^{-t}$; y la distancia al origen baja de 1 a $\frac{1}{11}$: L es mayor que esa diferencia, $\frac{10}{11}$.

3B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E**.

Ejercicio propuesto 3B.6.1

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = 4x^3$ y $y = 8x^2$.

Resultado: $A = \dfrac{16}{3}\,[u^2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 173.

Ejercicio propuesto 3B.6.2

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1$ y $x = 0$.

Resultado: $V = \dfrac{\pi}{7}\,[u^3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

Ejercicio propuesto 3B.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2020-1, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por $x = 0$, $y = e^{-x}$, $y = 0$ y $x = \ln 2$. Dibuje el sólido.

Resultado: $V = \dfrac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

Ejercicio propuesto 3B.6.4

Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 5.

Calcule la longitud de arco de la curva $r = 3\theta^2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Resultado: $L = \left(\pi^2 + 4\right)^{3/2} - 8\,[u] \approx 43.65\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

Ejercicio propuesto 3B.6.5

Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 4.

Calcule la longitud de la gráfica de $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Resultado: $L = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{6}\,[u] \approx 0.30\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

3B.7 Errores frecuentes

- **Empezar sin figura.** Sin la gráfica no se sabe qué curva está arriba, si hay dos regiones ni si la región toca el eje de giro.

- **Integrar de un lado al otro de un cruce.** Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, las áreas con signo se cancelan ($\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x}-x)\mathrm{d}x = 0$). Parte la integral.
- **Equivocar «derecha menos izquierda».** En las parábolas horizontales despeja x con cuidado: $y^2 - 2y + x = 0$ da $x = 2y - y^2$, no $y^2 - 2y$.
- **Elevar mal en las arandelas.** $\pi\int(R^2 - r^2)$ no es $\pi\int(R-r)^2$.
- **Medir el radio desde el eje equivocado.** Con el eje $y = k$ o $x = k$, el radio es la distancia a esa recta, no la ordenada ni la abscisa.
- **Olvidar 2π en las capas o π en los discos**.
- **Olvidar el 1 en la longitud de arco**: es $\sqrt{1 + [f']^2}$, no $\sqrt{[f']^2}$.

3B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Área en x: $A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x$, con f arriba.
- Área en y: $A = \int_c^d \big[x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}\big]\,\mathrm{d}y$.
- Arco, cartesianas: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
- Arco, paramétricas: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.
- Arco, polares: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\theta$.
- Discos y arandelas: $V = \pi\int_a^b \big(R^2 - r^2\big)\mathrm{d}x$ (o $\mathrm{d}y$).
- Capas: $V = 2\pi\int_a^b \rho\, h\mathrm{d}x$, con ρ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

3B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja las curvas, marca los puntos de corte y sombrea la región. Dibuja un rectángulo (o un sector) representativo.
2. En volumen, dibuja el eje de giro punteado y decide: rectángulo perpendicular al eje (discos) o paralelo (capas).
3. Escribe el elemento diferencial con palabras: «arriba menos abajo», «radio exterior», «radio por altura».
4. Plantea la integral con sus límites y simplifica el integrando antes de integrar.
5. Integra con la técnica de la Unidad 4A, evalúa con fracciones exactas y escribe las unidades $[u^2]$, $[u]$ o $[u^3]$.
6. Revisa el signo y el orden de magnitud con la figura: un área no puede salir negativa ni mayor que el rectángulo que la contiene.

3B.10 Lo que agrega el Plan 2026: el trabajo mecánico

Si una fuerza constante F mueve un objeto una distancia d en su misma dirección, el trabajo es $W = Fd$ (en joules, J, si F está en newtons y d en metros). Si la fuerza cambia con la posición, $F = F(x)$, se parte $[a, b]$ en tramos cortos de largo $\mathrm{d}x$: en cada uno la fuerza es casi constante y el trabajo es $F(x)\,\mathrm{d}x$. Sumando, como en las áreas,

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dos casos de los textos de la bibliografía del programa:

- **Resorte (ley de Hooke).** Para estirar un resorte x metros desde su longitud natural se necesita la fuerza $F(x) = kx$, con k la constante del resorte (N/m). El trabajo para estirarlo de $x = a$ a $x = b$ es $W = \int_a^b kx\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$.
- **Bombeo de un líquido.** Para vaciar un tanque bombeando el líquido por arriba, cada capa delgada a la altura y pesa $\rho g\, A(y)\,\mathrm{d}y$ (ρ, densidad; $g = 9.81$ m/s^2; $A(y)$, área de la sección) y sube la distancia que le falta para salir. Se suman los trabajos de todas las capas.

Ejemplo resuelto · Trabajo para estirar un resorte

Una fuerza de 10 N estira un resorte 0.2 m más allá de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirarlo 0.5 m desde su longitud natural?

Resolución.

1. Constante: $F = kx \Rightarrow 10 = k(0.2) \Rightarrow k = 50$ N/m.
2. Trabajo de $x = 0$ a $x = 0.5$:

$$W = \int_0^{0.5} 50x\,\mathrm{d}x = \left.25x^2\right|_0^{0.5} = 25(0.25) = 6.25 \text{ J}.$$

Resultado: $W = 6.25$ J.

Ejercicio propuesto 3B.10.1 · El mismo resorte, en un tramo

Con el resorte del ejemplo ($k = 50$ N/m), calcule el trabajo para estirarlo de 0.2 m a 0.4 m más allá de su longitud natural.

Resultado: $W = 3$ J.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

Ejercicio propuesto 3B.10.2 · Vaciar un tanque cilíndrico

Un tanque cilíndrico vertical de 1 m de radio y 3 m de altura está lleno de agua ($\rho = 1000$ kg/m^3, $g = 9.81$ m/s^2). Calcule el trabajo necesario para bombear toda el agua por el borde superior del tanque.

Resultado: $W = 44\,145\pi$ J $\approx 1.39 \times 10^5$ J.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 174.

Con la computadora

```
# Volumen por arandelas del segundo ejemplo:
# region entre y = x^2 + 1 y y = x + 3, alrededor del eje x
from sympy import integrate, pi, solve, symbols
x = symbols("x")
f, g = x + 3, x**2 + 1               # arriba y abajo
a, b = sorted(solve(f - g, x))       # cortes: -1 y 2
V = pi*integrate(f**2 - g**2, (x, a, b))
print(a, b, V)                       # -1 2 117*pi/5
assert V == 117*pi/5
```

Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 3). «Integral impropia. Convergencia y divergencia de la integral impropia.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): sale en 22 de los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 y en 14 de los 60 del Plan 2016, casi siempre como problema 2, que comparte con la regla de L'Hôpital (Parte 2B) y con el valor medio (Parte 3A).
- **Tiempo:** 2 horas para esta parte. Muchas antiderivadas salen con un cambio de variable (Parte 3A); algunas piden los métodos de la Parte 4A.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3C.1.1 y la tabla de la sección 3C.2 (15 min).
  2. Sigue el ejemplo de la sección 3C.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 3C.5 con cronómetro: 12 min cada uno. El del punto malo interior es la trampa más común.

3C.1 Conceptos y expresiones

3C.1.1 Integral impropia

Una integral es *impropia* si un límite de integración es infinito o si el integrando no está acotado en un punto del intervalo (extremo o interior). Se define con un límite:

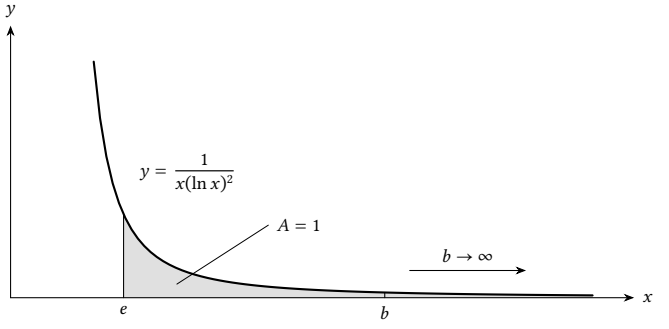
$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

y, si f no está acotada en a,

$$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si el límite existe y es finito, la integral *converge* y su valor es ese límite; si no existe o es infinito, *diverge*. Con $\int_{-\infty}^{\infty}$, o con un punto malo c dentro de $[a,b]$, se parte en dos integrales y *cada una* debe converger.

Integrales p (sirven para anticipar el resultado): $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$, y $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p < 1$.



3C.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determinar si la integral converge o diverge» con ∞ o $-\infty$ en un límite	Impropia de límite infinito (3C.3.1)
«Calcular, de ser posible» una integral cuyo integrando se va a infinito en un extremo	Impropia de integrando no acotado (3C.3.2)
Una integral definida que parece normal, pero el denominador se anula dentro del intervalo	Partir en el punto malo (3C.3.2)
$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ o $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$	Integrales p (3C.1.1)

3C.3 Procedimientos

3C.3.1 Integral impropia de límite infinito

1. Escribe el límite: $\int_a^\infty = \lim_{b\to\infty} \int_a^b$ (o $\int_{-\infty}^c = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c$). Si los dos límites son infinitos, parte en un punto cómodo, como 0.
2. Calcula la antiderivada (Unidad 4A si hace falta) y comprueba derivándola.
3. Evalúa entre a y b y toma el límite. Recuerda: $e^{-b} \to 0$, $\ln b \to \infty$ y $\frac{1}{\ln b} \to 0$ si $b \to \infty$; $\operatorname{ang\,tan} b \to \pm\frac{\pi}{2}$ si $b \to \pm\infty$.
4. Concluye con palabras: «converge a…» o «diverge».

3C.3.2 Integral impropia de integrando no acotado

1. Busca dónde se anula el denominador o dónde un ln se va a $-\infty$, y si ese punto está en un extremo o *dentro* del intervalo. Una integral con un punto malo interior parece una integral definida normal: es la trampa.
2. Extremo: $\int_a^b = \lim_{t\to a^+} \int_t^b$ (o $\lim_{t\to b^-} \int_a^t$).
3. Punto interior c: $\int_a^b = \lim_{t\to c^-} \int_a^t + \lim_{s\to c^+} \int_s^b$. Si una de las dos diverge, toda la integral diverge.
4. Antiderivada, comprobación por derivación, evaluación y límite, como en 3C.3.1.

3C.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Integral impropia que converge

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ converge o diverge.

Resolución.

1. El límite superior es infinito:

$$\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_e^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}.$$

2. Cambio de variable $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

   Comprobación: $\left(-\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}$.

3. Evaluación:

$$\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_e^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln e}\right) = 0 + 1.$$

4. **La integral converge y vale 1.** Es el área de la región sombreada de la figura de 3C.1.1.

3C.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3C.5.1 · Impropia con un punto malo interior

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^{9} \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x-1}}$ converge o diverge.

Resolución.

1. El denominador se anula en $x = 1$, que está *dentro* de $[0, 9]$. Se parte:

$$\int_0^{9} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^{t} + \lim_{s\to 1^+}\int_s^{9}.$$

2. Antiderivada: $\displaystyle\int \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)^{2/3} + C$. Comprobación: $\left[\frac{1}{2}(x-1)^{2/3}\right]' = \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}$.

3. Primera parte: $\lim_{t\to 1^-}\left[\frac{1}{2}(t-1)^{2/3} - \frac{1}{2}(-1)^{2/3}\right] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, porque $(-1)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 = 1$.

4. Segunda parte: $\lim_{s\to 1^+}\left[\frac{1}{2}(8)^{2/3} - \frac{1}{2}(s-1)^{2/3}\right] = \frac{1}{2}(4) - 0 = 2$.
5. Las dos convergen: $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
6. **La integral converge y vale $\frac{3}{2}$.**

Ejercicio 3C.5.2 · Impropia hacia $-\infty$: completar el cuadrado

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$ converge o diverge.

Resolución.

1. Completar el cuadrado: $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$. Antiderivada: $\operatorname{ang\,tan}(x+1) + C$. Comprobación: $\left[\operatorname{ang\,tan}(x+1)\right]' = \frac{1}{(x+1)^2+1}$.
2. Límite inferior infinito:

$$\lim_{a\to-\infty} \operatorname{ang\,tan}(x+1)\Big|_a^{-1} = \operatorname{ang\,tan} 0 - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{ang\,tan}(a+1).$$

3. $\operatorname{ang\,tan} 0 = 0$ y $\operatorname{ang\,tan}(a+1) \to -\frac{\pi}{2}$: el resultado es $0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
4. **La integral converge y vale $\frac{\pi}{2}$.**

Ejercicio 3C.5.3 · Impropia con integrando no acotado en un extremo

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo A, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

Resolución.

1. En $x = 0$ el denominador se anula: $\displaystyle\int_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1$.
2. Cambio de variable $u = \sqrt{x} + 1$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^{3/2} + C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2}\right]' = 2(\sqrt{x}+1)^{1/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. Evaluación:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{4}{3}\,2^{3/2} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{\varepsilon}+1\right)^{3/2}\right] = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

4. **La integral converge y vale $\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$ (≈ 2.44).**

3C.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3C**.

Ejercicio propuesto 3C.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 2.

Calcule, de ser posible, $\displaystyle\int_5^6 \frac{\ln(x-5)}{2x-10}\,\mathrm{d}x$.

Resultado: La integral diverge (tiende a $-\infty$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

3C.7 Errores frecuentes

- **No ver el punto malo interior.** $\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x-1}}$ parece normal, pero en $x=1$ el integrando no está acotado: hay que partir en dos.
- **Declarar que converge sin tomar el límite.** Si $F(b)\to\infty$, la integral diverge, aunque la antiderivada esté bien.
- **Juntar dos límites en uno.** Con $\int_{-\infty}^{\infty}$ o con un punto malo interior, cada parte se calcula por separado y las dos deben converger; $\infty-\infty$ no se cancela.
- **Confundir los criterios** *p*. $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p>1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, si $p<1$. Con $p=1$ las dos divergen.

3C.8 Formulario de emergencia de la parte

- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f$; $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$; $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$.
- Integrando no acotado en *a*: $\int_a^b f = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f$; punto malo interior *c*: $\int_a^b = \lim_{t\to c^-}\int_a^t + \lim_{s\to c^+}\int_s^b$.
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p>1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p<1$.
- Con $b\to\infty$: $e^{-b}\to 0$, $\ln b\to\infty$, $\frac{1}{\ln b}\to 0$, $\operatorname{ang\,tan} b\to\frac{\pi}{2}$.

3C.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Revisa los límites ($\pm\infty$) y los ceros del denominador *dentro* del intervalo; escribe el límite antes de integrar.
2. Calcula la antiderivada y compruébala derivando.
3. Evalúa y toma el límite de cada parte por separado.
4. Concluye con palabras: «converge a…» o «diverge».

3C.10 Lo que agrega el Plan 2026: convergencia con la computadora

El software calcula la integral impropia directamente (en sympy, con oo como límite) y dice si diverge (oo). También permite ver el límite: se evalúa $\int_a^b f$ para $b=10, 100, 1000, \ldots$ y se mira si se estabiliza. Para $\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ (el ejemplo), $\int_e^b = 1-\frac{1}{\ln b}$ vale 0.57 con $b=10$,

0.78 con $b = 100$ y 0.86 con $b = 1000$: converge a 1, pero despacio. La computadora no sustituye al límite escrito: es la manera de comprobarlo.

Ejercicio propuesto 3C.10.1 · Una exponencial decreciente

Determine si $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

Resultado: Converge y vale $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

Ejercicio propuesto 3C.10.2 · Una integral p que diverge

Determine si $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge o diverge.

Resultado: Diverge (es una integral p con $p = \frac{1}{2} \leq 1$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

Con la computadora

```
# El ejemplo: integral de 1/(x ln^2 x) de e a infinito
from sympy import E, Rational, integrate, log, oo, symbols
x = symbols("x", positive=True)
f = 1/(x*log(x)**2)
I = integrate(f, (x, E, oo))
print(I)                                          # 1
for k in (1, 2, 3):                 # 0.57, 0.78, 0.86
    print(integrate(f, (x, E, 10**k)).evalf(2))
assert I == 1
assert integrate(1/x**Rational(1, 2), (x, 1, oo)) == oo
```

Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

↑ Volver al índice

Objetivo del tema 4 (programa 2026). «Aplicar diversos métodos de integración de funciones reales y el desarrollo de dichas funciones en series de potencias estudiando sus propiedades y apoyándose en el uso de software matemático para describir situaciones ingenieriles.»

Contenido de esta parte. «Integración por partes, por sustitución trigonométrica y por fracciones parciales apoyándose con software matemático.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es el problema 3 (tres integrales, una por método) en los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 y en los 60 del Plan 2016. Incisos por método en el Plan 2010: fracciones parciales 50, sustitución trigonométrica 35, por partes 34, otras sustituciones 23 y potencias trigonométricas 3. En el Plan 2016: fracciones parciales 51, por partes 43, sustitución trigonométrica 35, otras sustituciones 20 y potencias trigonométricas 9.
- **Tiempo:** de 6 a 8 horas para esta parte. Es la que más rinde: es la base de las aplicaciones (Parte 3B), de la integral impropia (Parte 3C), de las series (Parte 4B) y de Cálculo Vectorial.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la tabla de la sección 4A.2 y la de integrales inmediatas de la 4A.1 (30 min).
  2. Lee los procedimientos 4A.3.1, 4A.3.3 y 4A.3.4 (partes, sustitución trigonométrica y fracciones: la terna típica).
  3. Sigue el ejemplo de la sección 4A.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 4A.5 con cronómetro (8 min cada integral) y comprueba cada resultado derivando.

4A.1 Conceptos y expresiones

Integral indefinida. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ quiere decir que $F'(x) = f(x)$. Por eso toda integral indefinida se *comprueba derivando*: si la derivada del resultado no regresa al integrando, hay un error. En este libro cada integral termina con esa comprobación en una línea.

Cambio de variable. Si $u = g(x)$, entonces $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ y

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Todos los métodos de esta unidad terminan en una integral inmediata, casi siempre después de un cambio de variable. Al final se regresa a x.

Integrales inmediatas. Hay que saberlas de memoria: en el examen no se permite formulario.

Integral	Resultado (más C)
$\int u^n \, du$, $n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\int \dfrac{du}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$
$\int e^u \, du$	e^u
$\int \operatorname{sen} u \, du$; $\int \cos u \, du$	$-\cos u$; $\operatorname{sen} u$
$\int \sec^2 u \, du$; $\int \csc^2 u \, du$	$\tan u$; $-\cot u$
$\int \sec u \tan u \, du$	$\sec u$
$\int \csc u \cot u \, du$	$-\csc u$
$\int \tan u \, du$	$-\ln \lvert \cos u \rvert = \ln \lvert \sec u \rvert$
$\int \cot u \, du$	$\ln \lvert \operatorname{sen} u \rvert$
$\int \sec u \, du$	$\ln \lvert \sec u + \tan u \rvert$
$\int \csc u \, du$	$\ln \lvert \csc u - \cot u \rvert$
$\int \dfrac{du}{a^2 + u^2}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{ang\,tan} \dfrac{u}{a}$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$	$\operatorname{ang\,sen} \dfrac{u}{a}$
$\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{ang\,sec} \dfrac{u}{a}$ (con $u > a > 0$)
$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert$

Identidades trigonométricas que se usan.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Valor absoluto y constante. El logaritmo lleva valor absoluto: $\int \frac{dx}{x-2} = \ln \lvert x-2 \rvert + C$. Dos resultados que difieren en una constante son los dos correctos: $\ln \lvert x^2 + x - 2 \rvert$ y $\ln \lvert x+2 \rvert + \ln \lvert x-1 \rvert$ son la misma antiderivada; $2 \operatorname{ang\,sec} \sqrt{e^x}$ y $2 \operatorname{ang\,tan} \sqrt{e^x - 1}$ también.

Los cinco métodos. *Por partes* (4A.3.1) para productos de funciones de distinto tipo; *potencias trigonométricas* (4A.3.2) para $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$ y $\tan^m x \sec^n x$; *sustitución trigonométrica* (4A.3.3) para raíces de $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ y $x^2 - a^2$; *fracciones parciales* (4A.3.4) para cocientes de polinomios; *sustituciones diversas* (4A.3.5) para raíces de x, exponenciales y logaritmos dentro de otra función. Muchas integrales de examen combinan dos: primero un cambio de variable y después uno de los otros cuatro.

4A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado siempre dice «Efectuar las integrales» (o «Efectúa»); lo que decide el método es la **forma del integrando**. Revisa los renglones en este orden: el primero que encaje es el método.

El integrando tiene…	Procedimiento
Una función $g(x)$ y, multiplicando, su derivada (salvo una constante): $x\cos x^2$, $\frac{\ln x}{x}$, $\frac{2x+1}{x^2+x-2}$	Cambio de variable $u = g(x)$ (4A.3.5)
Un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$	Fracciones parciales (4A.3.4); si el grado de P es mayor o igual que el de Q, divide primero
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$ sin raíces reales	Completa el cuadrado y usa ang tan (4A.3.3)
$\sqrt{a^2-x^2}$ (sola, en un cociente o elevada a $\frac{3}{2}$)	$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ (4A.3.3)
$\sqrt{a^2+x^2}$ o $(x^2+a^2)^{3/2}$	$x = a\tan\theta$ (4A.3.3)
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$ (4A.3.3)
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	Completa el cuadrado y después uno de los tres anteriores (4A.3.3)
Polinomio por e^{ax}, $\mathrm{sen}\,ax$ o $\cos ax$	Partes con u = polinomio (4A.3.1)
Polinomio (o nada) por $\ln x$, ang tan x, ang sen x, ang sec x	Partes con u = el logaritmo o la inversa (4A.3.1)
$e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\mathrm{sen}(\ln x)$, $\cos(\ln x)$	Partes dos veces: integral cíclica (4A.3.1)
$\mathrm{sen}^m x\cos^n x$ con un exponente impar	Separa un factor y usa $\mathrm{sen}^2+\cos^2 = 1$ (4A.3.2)
$\mathrm{sen}^m x\cos^n x$ con los dos exponentes pares	Ángulo doble (4A.3.2)
$\tan^m x\sec^n x$, $(\tan x - \sec x)^2$, cocientes de seno y coseno	Pasa a tan y sec y usa $1+\tan^2 = \sec^2$ (4A.3.2)
$\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$ o $\sqrt[3]{x}$ dentro de otra función	$u = \sqrt{x}$ (o la raíz que aparezca) (4A.3.5)
e^x dentro de una raíz o de un cociente	$u = e^x$ o $u = \sqrt{e^x-1}$ (4A.3.5)
$\ln x$ junto con $\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$u = \ln x$ (4A.3.5)
$\frac{1}{x}$ dentro de otra función y $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ o $\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$	$u = \frac{1}{x}$ (4A.3.5)

La terna típica. En 50 de los 52 exámenes del Plan 2010 un inciso es de fracciones parciales; los otros dos suelen ser uno por partes y uno de sustitución trigonométrica. Si un inciso no encaja en ninguno, casi siempre es de sustitución ($u = \sqrt{x}$, $u = e^x$, $u = \ln x$) seguida de uno de los otros métodos.

4A.3 Procedimientos

4A.3.1 Integración por partes

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

1. Elige u con el orden **LIATE**: Logaritmo, Inversa trigonométrica, Algebraica (polinomio),

Trigonométrica, Exponencial. La primera que aparezca en el integrando es u; el resto, con $\mathrm{d}x$, es $\mathrm{d}v$.
2. Escribe el cuadro: u, $\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v$, $v = \int \mathrm{d}v$ (sin constante).
3. Aplica la fórmula. La nueva integral $\int v\,\mathrm{d}u$ debe ser más sencilla; si no lo es, cambia la elección.
4. Si queda otra vez un producto de polinomio por exponencial o trigonométrica, repite partes (una vez por cada grado del polinomio).
5. **Integral cíclica** ($e^{ax}\operatorname{sen} bx$, $\operatorname{sen}(\ln x)$): aplica partes dos veces *con el mismo tipo de u*. Reaparece la integral original I; despéjala como una incógnita: $I = \cdots - kI \Rightarrow (1+k)I = \ldots$
6. Con $\ln x$ o una inversa sola, toma $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$.

Las que hay que saber.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

$$\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{ang\,sen} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Con $\operatorname{ang\,sec} x$ (para $x > 1$): $u = \operatorname{ang\,sec} x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; la integral que queda es algebraica (ejercicio de la sección 4A.5).

4A.3.2 Potencias trigonométricas

En el examen de esta materia salen poco (3 incisos en el Plan 2010 y 9 en el Plan 2016), pero Cálculo Vectorial las usa en casi todas las integrales de línea, de superficie y en polares. Vale la pena dominarlas.

$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x$**.**

1. Si m es impar, separa un $\operatorname{sen} x$, pasa el resto a cosenos con $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y usa $u = \cos x$.
2. Si n es impar, separa un $\cos x$, pasa el resto a senos con $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y usa $u = \operatorname{sen} x$.
3. Si los dos son pares, baja las potencias con $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; repite si hace falta.

Ejemplos:

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$.

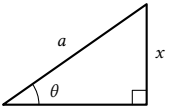
1. Si n es par, separa un $\sec^2 x$, pasa el resto a tangentes con $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ y usa $u = \tan x$. Ejemplo:

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$
$$= \tfrac{1}{3} \tan^3 x + \tfrac{1}{5} \tan^5 x + C$$

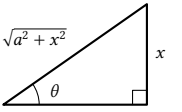
2. Si m es impar, separa $\sec x \tan x$, pasa el resto a secantes con $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y usa $u = \sec x$.
3. Si solo hay tangentes, convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x - 1$ y repite (ejercicio de la sección 4A.5).
4. Si el integrando es un cociente de senos y cosenos, escríbelo como $\tan^m x \sec^n x$: $\frac{\operatorname{sen}^a x}{\cos^b x} = \tan^a x \sec^{b-a} x$. Sirve también con exponentes fraccionarios.

También conviene saber $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C$ (por partes, cíclica): aparece al final de varias sustituciones trigonométricas y en longitud de arco.

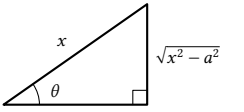
4A.3.3 Sustitución trigonométrica



$x = a \operatorname{sen} \theta$



$x = a \tan \theta$



$x = a \sec \theta$

Raíz	Sustitución y lo que queda
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$, $dx = a \cos\theta \, d\theta$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$, $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$, $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$, $dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan\theta$

1. Identifica a. Si la raíz es $\sqrt{16 - 9x^2}$, escribe $3x = 4 \operatorname{sen} \theta$ (es decir, $u = 3x$, $a = 4$).
2. Si hay $ax^2 + bx + c$, completa el cuadrado: $x^2 + 6x + 18 = (x + 3)^2 + 9$; haz $u = x + 3$ y sigue con u.
3. Sustituye x, dx y la raíz; simplifica hasta una integral trigonométrica (casi siempre de potencias, 4A.3.2).
4. Integra en θ.
5. Regresa a x **con el triángulo**: dibuja el de tu caso (figura), pon x y a donde dice la sustitución y lee $\operatorname{sen}\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$… como cociente de lados. El ángulo solo se escribe con su inversa: $\theta = \operatorname{ang\,sen} \frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan} \frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec} \frac{x}{a}$.

4A.3.4 Fracciones parciales

1. **Compara grados.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, divide: $\frac{P}{Q} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{Q}$.
2. **Factoriza el denominador** en factores lineales y cuadráticos irreducibles. Para una cúbica, prueba raíces enteras que dividan al término independiente ($\pm1, \pm2, \ldots$) y divide.
3. **Escribe la descomposición:**
   - cada $(x-r)$ distinto da $\frac{A}{x-r}$;
   - un $(x-r)^k$ repetido da $\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$;
   - cada cuadrático irreducible x^2+px+q da $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$; si está al cuadrado, también $\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^2}$.
4. **Obtén las constantes.** Multiplica por el denominador. Sustituye las raíces reales (cada una da una constante al instante: método de «tapar»); para las que falten, iguala coeficientes de x^2 o del término independiente, o sustituye un valor sencillo como $x=0$.
5. **Integra cada término:**

$$\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{x-r} = A\ln|x-r|, \qquad \int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r},$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+q}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\ln(x^2+q) + \frac{C}{\sqrt{q}}\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{\sqrt{q}}.$$

6. Junta los logaritmos si quieres ($\ln|x-1| - \ln|x-2| = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$) y comprueba derivando o sumando las fracciones.

Atajo. Antes de descomponer, revisa si el numerador es la derivada del denominador, o casi: $\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \ln|x^2+x-2| + C$ sale con $u = x^2+x-2$.

4A.3.5 Sustituciones diversas

1. Busca la parte «incómoda» del integrando (una raíz de x, una exponencial dentro de una raíz, un $\ln x$ o un $\frac{1}{x}$ dentro de otra función) y llámala u.
2. Despeja x y $\mathrm{d}x$ en términos de u, o identifica $\mathrm{d}u$ en el integrando.
3. Sustituye todo: no debe quedar ninguna x. Lo que queda suele ser una integral inmediata, racional (4A.3.4), de partes (4A.3.1) o de sustitución trigonométrica (4A.3.3).
4. Regresa a x y comprueba derivando.

Sustitución	Ejemplo
$u=\sqrt{x}$, $x=u^2$, $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u} = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$
$u=e^x$, $\mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x$	$\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \operatorname{ang\,tan} e^x + C$
$u=\ln x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$
$u=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$	$\int \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = \cos\frac{1}{x} + C$
$u=x^2$, $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$	$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} x^2 + C$

4A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · La terna típica: partes, sustitución trigonométrica y fracciones

Adaptado de: 2º final 2011-2, tipo A, problema 3.

Efectúe las integrales:

$$\text{a)}\ \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)}\ \int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Resolución.

1. a) Polinomio por coseno: partes con $u = x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$.

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x$$

2. **a)** $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$**.** Comprobación: $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + x\cos 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = x\cos 2x$.
3. b) Raíz de $1-x^2$: $x = \operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int \cot^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\cot\theta - \theta + C\end{aligned}$$

4. Del triángulo (hipotenusa 1, opuesto x, adyacente $\sqrt{1-x^2}$): $\cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\theta = \operatorname{ang\,sen} x$.
5. **b)** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{ang\,sen} x + C$**.** Comprobación:

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

6. c) Racional propia; $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$, con x repetido:

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

7. $x - 3 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$. Con $x = 0$: $B = -3$. Con $x = -1$: $C = -4$. Coeficiente de x^2: $A + C = 0 \Rightarrow A = 4$.
8. **c)** $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\mathrm{d}x = 4\ln|x| + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1| + C$**.** Comprobación:

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x+1} = \frac{4x^2+4x-3x-3-4x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x-3}{x^3+x^2}$$

4A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4A.5.1 · Partes cíclica: exponencial por seno

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Partes con $u=\operatorname{sen}x$, $\mathrm{d}v=e^{2x}\mathrm{d}x$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$:

$$I=\tfrac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen}x-\tfrac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

2. Otra vez partes, con el mismo tipo de u: $u=\cos x$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}e^{2x}\cos x+\tfrac{1}{2}I$$

3. Sustituyendo: $I=\frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen}x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x-\frac{1}{4}I$, así que $\frac{5}{4}I=\frac{1}{4}e^{2x}(2\operatorname{sen}x-\cos x)$.
4. $\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen}x-\cos x)+C$. Comprobación:

$$\tfrac{1}{5}e^{2x}\big[2(2\operatorname{sen}x-\cos x)+(2\cos x+\operatorname{sen}x)\big]=e^{2x}\operatorname{sen}x$$

Ejercicio 4A.5.2 · Partes con una inversa: $x\operatorname{ang\,sec}x$

Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int x\operatorname{ang\,sec}x\,\mathrm{d}x$ (con $x>1$).

Resolución.

1. LIATE: la inversa es u. $u=\operatorname{ang\,sec}x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x$, $v=\frac{x^2}{2}$.
2. Partes:

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec}x-\frac{1}{2}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. La integral que queda es inmediata con $w=x^2-1$: $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}$.
4. $\int x\operatorname{ang\,sec}x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec}x-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$. Comprobación:

$$x\operatorname{ang\,sec}x+\frac{x^2}{2x\sqrt{x^2-1}}-\frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}=x\operatorname{ang\,sec}x$$

Ejercicio 4A.5.3 · Potencia impar de la tangente

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int\tan^3 x\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Solo hay tangentes: se convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x - 1$.

$$\int \tan^3 x \, dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx$$

2. La primera es inmediata con $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$: $\frac{1}{2}\tan^2 x$. La segunda es $-\ln|\cos x|$.
3. $\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$. Comprobación: $\tan x \sec^2 x - \tan x = \tan x(\sec^2 x - 1) = \tan^3 x$.

Ejercicio 4A.5.4 · Cociente de potencias con exponente fraccionario

Adaptado de: 1er final 2010-1, tipo C, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\, dx$.

Resolución.

1. Se escribe como $\tan^m x \sec^n x$: $\cos^7 x = \cos x \cdot \cos^6 x$, así que

$$\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}} = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^{1/3} x \sec^2 x$$

2. Hay $\sec^2 x$ (exponente par): $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$.

$$\int u^{1/3} \, du = \tfrac{3}{4} u^{4/3}$$

3. $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\, dx = \frac{3}{4}\tan^{4/3} x + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\tan^4 x} + C$. Comprobación: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\tan^{1/3} x \sec^2 x = \tan^{1/3} x \sec^2 x$.

Ejercicio 4A.5.5 · Sustitución trigonométrica con seno: $\sqrt{16 - 9x^2}$

Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{x^4}\, dx$.

Resolución.

1. Raíz de $a^2 - u^2$ con $u = 3x$, $a = 4$: $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $dx = \frac{4}{3}\cos\theta \, d\theta$, $\sqrt{16 - 9x^2} = 4\cos\theta$, $x^4 = \frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{4\cos\theta \cdot \frac{4}{3}\cos\theta}{\frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta} \, d\theta = \frac{27}{16}\int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{27}{16}\int \cot^2\theta \csc^2\theta \, d\theta = -\frac{9}{16}\cot^3\theta + C$$

(con $w = \cot\theta$, $dw = -\csc^2\theta \, d\theta$).

3. Triángulo: hipotenusa 4, opuesto $3x$, adyacente $\sqrt{16-9x^2}$. Entonces $\cot\theta = \frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}$ y $\cot^3\theta = \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{27x^3}$.
4. $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}\,dx = -\frac{(16-9x^2)^{3/2}}{48x^3} + C$. Comprobación:

$$\frac{27x^4\sqrt{16-9x^2} + 3x^2(16-9x^2)^{3/2}}{48x^6} = \frac{\sqrt{16-9x^2}\,(27x^2+48-27x^2)}{48x^4} = \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}$$

Ejercicio 4A.5.6 · Sustitución trigonométrica con secante: $\sqrt{x^2-1}$

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ (con $x>1$).

Resolución.

1. Raíz de x^2-a^2 con $a=1$: $x=\sec\theta$, $dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, $\sqrt{x^2-1}=\tan\theta$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int \tan^2\theta\,d\theta = \int(\sec^2\theta-1)\,d\theta = \tan\theta-\theta+C$$

3. Triángulo: hipotenusa x, adyacente 1, opuesto $\sqrt{x^2-1}$; $\tan\theta=\sqrt{x^2-1}$, $\theta=\operatorname{ang\,sec} x$.
4. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{ang\,sec} x + C$. Comprobación:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Ejercicio 4A.5.7 · Fracciones con un cuadrático repetido

Adaptado de: 1er extraordinario 2019-2, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Resolución.

1. Racional propia (grado 3 contra grado 4); x^2+1 es irreducible y está al cuadrado:

$$\frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

2. $2x^3+10x = (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D = Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$. Igualando coeficientes: $A=2$, $B=0$, $A+C=10 \Rightarrow C=8$, $D=0$.
3. $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)$ y $\int \frac{8x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{4}{x^2+1}$ (las dos con $u=x^2+1$).

4. $\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) - \frac{4}{x^2+1} + C$. Comprobación:

$$\frac{2x}{x^2+1} + \frac{8x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x+8x}{(x^2+1)^2}$$

Otra vía, más corta: con $u = x^2+1$, $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$ y $2x^2+10 = 2u+8$, la integral es $\int \left(\frac{1}{u} + \frac{4}{u^2}\right)\mathrm{d}u$.

Ejercicio 4A.5.8 · Fracción impropia: dividir primero

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 4, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Grado 3 contra grado 2: se divide. Cociente $x-1$, residuo $2x+1$:

$$\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

   (se comprueba con $(x-1)(x^2+x-2)+2x+1 = x^3-x+3$).
2. $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ y $2x+1 = A(x-1)+B(x+2)$. Con $x=1$: $B=1$; con $x=-2$: $A=1$. (También sirve el atajo: $2x+1$ es la derivada de x^2+x-2.)
3. $\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+2| + \ln|x-1| + C$. Comprobación:

$$x - 1 + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

Ejercicio 4A.5.9 · Fracciones con un factor lineal repetido

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Resolución.

1. Raíces enteras de la cúbica: $x=1$ la anula ($1-5+8-4=0$). Al dividir entre $x-1$ queda $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Así, $x^3-5x^2+8x-4 = (x-1)(x-2)^2$.
2. Descomposición:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

3. $1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$. Con $x=1$: $A=1$. Con $x=2$: $C=1$. Coeficiente de x^2: $A+B=0 \Rightarrow B=-1$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+8x-4} = \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$. Comprobación: al sumar $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ sobre $(x-1)(x-2)^2$, el numerador es $(x-2)^2 - (x-1)(x-2) + (x-1) = 1$.

Ejercicio 4A.5.10 · Sustitución $u = x^2$ y después tangente

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. El factor x es casi la derivada de x^2: $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.
$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}$$
2. Raíz de $1+u^2$: $u = \tan\theta$, $\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{1+u^2} = \sec\theta$.
$$I = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$
3. Regreso: $\tan\theta = u = x^2$, $\sec\theta = \sqrt{1+x^4}$.
4. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right) + C$**.** Comprobación:
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{x^2+\sqrt{1+x^4}} = \frac{x\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)}{\sqrt{1+x^4}\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$$

4A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución y comprueba cada uno derivando. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4A**.

Ejercicio propuesto 4A.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Resultado: $\frac{x}{2}\big[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

Ejercicio propuesto 4A.6.2

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

Resultado: $\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

Ejercicio propuesto 4A.6.3

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int (\tan x - \sec x)^2\,\mathrm{d}x$.

Resultado: $2\tan x - 2\sec x - x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

Ejercicio propuesto 4A.6.4

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x\,\operatorname{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Resultado: $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(x^2) + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

Ejercicio propuesto 4A.6.5

Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left[(x+3)^2+9\right]^3}}$.

Resultado: $\frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

Ejercicio propuesto 4A.6.6

Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}$.

Resultado: $\frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} e^x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.

Ejercicio propuesto 4A.6.7

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

Resultado: $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.

Ejercicio propuesto 4A.6.8

Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Resultado: $\operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.

4A.7 Errores frecuentes

- **No comprobar.** Derivar el resultado toma un minuto y detecta casi todos los errores de signo y de constantes; varias resoluciones publicadas tienen justo esos errores (Apéndice C).
- **Olvidar el factor de v en partes.** Si $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, entonces $v = \frac{x^2}{2}$, no x^2; si $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.
- **Cambiar de u a media integral cíclica.** En la segunda aplicación de partes hay que elegir el mismo tipo de función como u; si no, se regresa a la integral original y queda $0 = 0$.
- **No dividir una fracción impropia.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, las fracciones parciales dan un sistema sin solución.
- **Olvidar términos en la descomposición.** Un $(x-2)^2$ pide $\frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$; un cuadrático irreducible pide numerador $Bx + C$, no solo B.
- **Dejar la respuesta en θ.** En la sustitución trigonométrica hay que regresar a x con el triángulo; θ solo aparece como $\operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec}\frac{x}{a}$.
- **Olvidar el factor del cambio en $\mathrm{d}x$.** Con $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, no $\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
- **Quitar el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln|x-2|$, porque el integrando también existe para $x < 2$.

4A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Partes: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$; elección de u con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$; $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x|$.
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$; $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.
- $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta$; $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec\theta$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\frac{u}{a}$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$.
- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+q)$.

4A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Si el examen trae varias integrales, cada una se decide con la tabla de 4A.2.
2. Antes de elegir método, busca un cambio de variable inmediato (la derivada de algo está multiplicando) o una simplificación algebraica.

3. Escribe el método al inicio de cada inciso («por partes», «$x = 2\tan\theta$», «fracciones parciales»); si te equivocas después, el planteamiento cuenta.
4. En fracciones parciales, revisa grados y factoriza antes de escribir la descomposición; usa las raíces para las constantes.
5. En sustitución trigonométrica, dibuja el triángulo antes de integrar: lo necesitarás para regresar a x.
6. Comprueba cada resultado derivando (una línea) y escribe $+C$.

4A.10 Lo que agrega el Plan 2026: integrar con software

El programa pide resolver las integrales «apoyándose con software matemático». Un sistema de álgebra computacional (como sympy, en el recuadro) da la antiderivada en un instante, pero conviene saber tres cosas:

- **La forma puede ser otra.** El resultado puede diferir del tuyo en una constante o en la forma algebraica ($\ln|x| - \ln|x+1|$ contra $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$; ang tan contra ang cot). Para compararlos, deriva los dos o resta y simplifica: la diferencia debe ser constante.
- **Puede omitir valores absolutos** y escribir $\ln(x)$ donde va $\ln|x|$: trabaja con variables complejas. En el examen, escribe el valor absoluto.
- **Comprobar sí es tarea de la computadora:** derivar tu resultado y restar el integrando debe dar 0. Es lo mismo que el paso de comprobación de cada ejercicio de esta parte.

Ejercicio propuesto 4A.10.1 · Partes en una integral impropia

Calcule $\int x\,e^{-x}\,dx$ y, con ella, determine si $\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,dx$ converge.

Resultado: $\int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C$; la impropia converge y vale 1.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.

Con la computadora

```
# La terna del ejemplo, con la comprobacion por derivacion
from sympy import cos, diff, integrate, simplify, sqrt
from sympy import symbols
x = symbols("x", positive=True)
fs = [x*cos(2*x), sqrt(1 - x**2)/x**2,
      (x - 3)/(x**3 + x**2)]
for f in fs:
    F = integrate(f, x)
    print(F)
    assert simplify(diff(F, x) - f) == 0
```

Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 4). «Definiciones de sucesión y de serie. Series convergentes y series divergentes. Carácter de una serie empleando software matemático. Serie p, serie geométrica, serie de signos alternados. Criterios del cociente, de comparación y de la integral.» «Desarrollo de funciones en serie de potencias. Series de Maclaurin y series de Taylor. Intervalo de convergencia. Visualización de la convergencia y de la divergencia de series mediante un enfoque gráfico empleando software matemático. Uso de las series en aplicaciones a la ingeniería.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es el problema 1 en 59 de los 60 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2016, con 61 problemas: 35 de sucesiones y series (intervalo de convergencia 19, casi siempre con el análisis de los extremos; carácter de una serie con un criterio 9, ocho del cociente y uno de Leibniz; suma de una serie 7) y 26 de series de Maclaurin (20) o de Taylor alrededor de otro punto (6). En el Plan 2010 era el problema 6 de los 10 finales de Cálculo Diferencial: serie de Maclaurin o de Taylor en 6 e intervalo de convergencia en 4.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4B.1 y 4B.3 (30 min) y memoriza el formulario de la sección 4B.8: el examen no permite formulario.
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 4B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 4B.5 con cronómetro (12 min cada uno): el intervalo de convergencia primero, porque es el más frecuente.
  4. Lee el criterio de la integral en la sección 4B.10: lo pide el programa 2026 y no salía en los exámenes anteriores.

4B.1 Conceptos y expresiones

Sucesión. Una sucesión es una lista infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dada por un término general a_n. *Converge* a L si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (un número); si el límite no existe o es infinito, *diverge*. El límite se calcula como el de una función de x (con L'Hôpital si hace falta): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 7^0 = 1$. La sucesión es *monótona* si siempre crece ($a_{n+1} \geq a_n$) o siempre decrece ($a_{n+1} \leq a_n$), y *acotada* si $|a_n| \leq M$ para todo n. Toda sucesión monótona y acotada converge.

Serie. Una serie es la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ Su *suma parcial* es $S_n = a_1 + \cdots + a_n$; la serie converge a S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Hay que distinguir: la *sucesión* a_n puede converger (a cero) y la *serie* diverger, como en la armónica.

Criterio del término *n*-ésimo. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (o no existe), la serie diverge. Si el límite es cero, no se concluye nada.

Series de referencia.

Serie	Carácter
Geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$	converge si $\lvert r\rvert < 1$, con suma $\frac{a}{1-r}$ (a es el primer término); diverge si $\lvert r\rvert \geq 1$
Serie p: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	converge si $p > 1$; diverge si $p \leq 1$
Armónica $\sum \frac{1}{n}$ ($p = 1$)	diverge
Armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	converge (condicionalmente), con suma $\ln 2$
Telescópica $\sum(b_n - b_{n+1})$	$S_n = b_1 - b_{n+1}$; converge a $b_1 - \lim b_n$ si ese límite existe

Criterios para series de términos positivos.

- *Comparación directa:* si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge; si $a_n \geq b_n \geq 0$ y $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ diverge.
- *Comparación en el límite:* si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ con $0 < c < \infty$, las dos series tienen el mismo carácter. Se compara con una geométrica o una serie p que tenga las potencias dominantes: $\frac{n+1}{n^3+2}$ con $\frac{1}{n^2}$.
- *Cociente (D'Alembert):* con $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, la serie converge si $L < 1$, diverge si $L > 1$ y el criterio no decide si $L = 1$. Es el criterio de las series con factoriales y potencias c^n.

Series alternadas (Leibniz). Una serie $\sum(-1)^{n+1}b_n$ con $b_n > 0$ converge si b_n es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Si además $\sum |a_n|$ converge, la convergencia es *absoluta*; si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge, es *condicional*. Toda serie absolutamente convergente converge.

Serie de potencias. Es una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, con centro a. Converge en un intervalo centrado en a: solo en $x = a$, para todo x (radio $R = \infty$) o para $|x - a| < R$, y en los extremos $x = a \pm R$ puede converger o no; cada extremo se estudia aparte. Ese conjunto es el *intervalo de convergencia*.

Series de Taylor y de Maclaurin. Si f tiene derivadas de todos los órdenes en a, su serie de Taylor alrededor de a es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

es decir, $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$ La serie de Maclaurin es el caso $a = 0$. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias se puede derivar e integrar término a término (el radio no cambia), y en ella se puede sustituir x por $2x$, $-x$, x^2, etcétera.

4B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determine el carácter de la serie» o «si converge o diverge» con números (sin x)	Carácter de una serie (4B.3.1)
«Empleando el criterio del cociente o de D'Alembert»	Carácter de una serie (4B.3.1), con el cociente
«Si es convergente, calcule su suma»; una lista $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\ldots$; un decimal periódico	Suma de una serie (4B.3.2)
«Empleando el criterio de Leibniz»; un factor $(-1)^n$	Serie alternada (4B.3.3); revisa antes el término n-ésimo
«Intervalo de convergencia», con x en la serie; «incluir el análisis de los extremos»	Intervalo de convergencia (4B.3.4)
«Serie de Maclaurin» o «de Taylor alrededor de a» de una función; «los primeros términos»; «el término enésimo»	Serie por derivadas (4B.3.5)
La función es una conocida con $2x$, $-x$, x^2 o una constante, o una derivada o integral de una conocida	Serie a partir de una conocida (4B.3.6)

4B.3 Procedimientos

4B.3.1 Carácter de una serie numérica

1. Calcula $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si no es cero (o no existe), **diverge** y terminaste.
2. ¿Es geométrica ($a_n = ar^{n-1}$) o serie p? Decide con la tabla de la sección 4B.1.
3. ¿Hay factoriales o potencias c^n? Usa el cociente: simplifica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ antes de tomar el límite ($\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, $\frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$).
4. ¿Es un cociente de polinomios o de raíces? Compara en el límite con la serie p de las potencias dominantes.
5. ¿Hay $(-1)^n$? Usa Leibniz (4B.3.3) y, si piden, revisa la convergencia absoluta.

4B.3.2 Suma de una serie

1. Escribe los primeros términos y localiza el primer término a y la razón $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Cuidado con el índice: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$ empieza en $\frac{4}{9}$, no en 4.
2. Si $|r| < 1$, la suma es $\frac{a}{1-r}$; si $|r| \geq 1$, la serie diverge.
3. Si el término es una suma o diferencia de dos geométricas convergentes, suma cada una por separado.
4. Si es telescópica (fracciones parciales como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$), escribe S_n, cancela y toma el límite.
5. Un decimal periódico $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots$ es geométrica con $r = \frac{1}{10}$.

4B.3.3 Serie alternada (criterio de Leibniz)

1. Escribe la serie como $\sum(-1)^{n+1}b_n$ con $b_n > 0$.

2. Calcula $\lim_{n\to\infty} b_n$. Si no es cero, la serie diverge por el término n-ésimo (no por Leibniz).
3. Comprueba que b_n decrece: $b_{n+1} \le b_n$, o bien la derivada de $b(x)$ es negativa.
4. Con las dos condiciones, converge. Si piden el tipo, estudia $\sum b_n$: si converge, es absoluta; si no, condicional.

4B.3.4 Intervalo de convergencia

1. Aplica el cociente con valor absoluto a toda la expresión, incluida la x:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

2. Resuelve $L(x) < 1$. Queda $|x - a| < R$, es decir, $a - R < x < a + R$. Si $L(x) = 0$ para todo x, el intervalo es $(-\infty, \infty)$ y no hay extremos.
3. Sustituye cada extremo en la serie **original**: obtienes dos series numéricas. Decide cada una con 4B.3.1 (casi siempre serie p o Leibniz).
4. Escribe el intervalo con corchete en los extremos que convergen y paréntesis en los que divergen.

4B.3.5 Serie de Maclaurin o Taylor por derivadas

1. Haz la tabla: f, f', f'', f''', $f^{(4)}$ y cada una evaluada en a (en Maclaurin, $a = 0$). Simplifica antes de derivar: $\ln \sqrt[3]{1+x} = \frac{1}{3}\ln(1+x)$.
2. Busca el patrón de $f^{(n)}(a)$: signo alternado $(-1)^{n+1}$, factorial $(n-1)!$, potencias 2^n, ceros en los pares o impares.
3. Escribe los términos $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ y el término general con su índice inicial.
4. Si piden el intervalo, aplica 4B.3.4 al término general.

4B.3.6 Serie a partir de una conocida

1. Reconoce la conocida: e^u, $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\operatorname{senh} u$, $\cosh u$, $\ln(1+u)$, $\frac{1}{1-u}$.
2. Sustituye u ($u = 2x$, $u = -x$, $u = x^2$, $u = 2(x-1)$) y simplifica cada término.
3. Si la función es una derivada o integral de una conocida, deriva o integra término a término: $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}$.
4. El intervalo es el de la conocida con u en lugar de x: $\frac{2}{1+x}$ converge si $|-x| < 1$. En los extremos revisa de nuevo, porque integrar puede ganar un extremo y derivar perderlo.

4B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Intervalo de convergencia con los dos extremos

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}.$$

Resolución.

1. Cociente con valor absoluto:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(2x-1)^n}\right| = |2x-1|\,\frac{n}{n+1}.$$

2. Límite: $L(x) = |2x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |2x-1|$.
3. Converge si $|2x-1|<1$: $-1<2x-1<1 \Rightarrow 0<x<1$. Centro $\frac{1}{2}$, radio $\frac{1}{2}$.
4. Extremo $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n} = \sum\frac{1}{n}$, la armónica (serie p con $p=1$): diverge.
5. Extremo $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, alternada con $b_n=\frac{1}{n}$, que decrece y tiende a cero: converge por Leibniz (condicionalmente, porque $\sum\frac{1}{n}$ diverge).
6. **Intervalo de convergencia:** $0\le x<1$**, es decir,** $[0,1)$**.**

Ejemplo resuelto · Serie de Maclaurin de $\ln(x+1)$

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo C, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de la función $f(x)=\ln(x+1)$.

Resolución.

1. Tabla de derivadas, evaluadas en 0:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$(1+x)^{-1}$	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1
3	$2(1+x)^{-3}$	2
4	$-6(1+x)^{-4}$	-6

2. Patrón: $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ para $n\ge 1$. El coeficiente es

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

3. **Serie:**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

4. Intervalo (no lo pide el enunciado, pero sale en otros exámenes): el cociente da $L=|x|$; en $x=1$ queda la armónica alternada (converge) y en $x=-1$, $-\sum\frac{1}{n}$ (diverge). Converge en $(-1,1]$.
5. Comprobación: derivando término a término, $1-x+x^2-\dots = \frac{1}{1+x}$, que es la derivada de $\ln(1+x)$.

4B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4B.5.1 · Intervalo con los dos extremos convergentes

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Obtenga el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^n\, n^2}$$

e incluya el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{4}.$$
2. $\frac{|x-4|}{4} < 1 \Rightarrow |x-4| < 4 \Rightarrow 0 < x < 8$. Centro 4, radio 4.
3. $x = 0$: $\frac{(-1)^n(-4)^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^{2n}4^n}{4^n n^2} = \frac{1}{n^2}$. Serie p con $p = 2 > 1$: converge.
4. $x = 8$: $\frac{(-1)^n 4^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$. La serie de sus valores absolutos es $\sum \frac{1}{n^2}$, que converge: converge absolutamente.
5. **Intervalo de convergencia:** $0 \le x \le 8$**, es decir,** $[0, 8]$**.**

Ejercicio 4B.5.2 · Intervalo con exponente $n-1$

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\, x^{n-1}}{n}.$$

Resolución.

1. Cociente (las potencias de x bajan un grado: $\frac{x^n}{x^{n-1}} = x$):
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^{n+1}|x|^n}{n+1} \cdot \frac{n}{4^n|x|^{n-1}} = 4|x|\,\frac{n}{n+1} \to 4|x|.$$
2. $4|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$. Centro 0, radio $\frac{1}{4}$.
3. $x = \frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4}{n}$. La serie $4\sum \frac{1}{n}$ diverge (armónica).
4. $x = -\frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4(-1)^{n-1}}{n}$. Es 4 por la armónica alternada: converge (condicionalmente) por Leibniz.
5. **Intervalo de convergencia:** $-\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4}$**, es decir,** $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$**.**

Ejercicio 4B.5.3 · Intervalo con factorial: radio infinito

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{n!}.$$

Resolución.

1. Cociente, con $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}|x+1|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n|x+1|^n} = \frac{3|x+1|}{n+1}.$$

2. Para cualquier x fijo, $\lim_{n\to\infty} \frac{3|x+1|}{n+1} = 0 < 1$: la serie converge para todo x. No hay extremos que analizar.
3. **Intervalo de convergencia:** $(-\infty, \infty)$**; radio** $R = \infty$**.**
4. Comprobación: con $u = 3(x+1)$ es la serie de e^u sin su primer término, así que suma $e^{3(x+1)} - 1$ para todo x.

Ejercicio 4B.5.4 · Criterio del cociente con factorial

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 1.

Emplee el criterio del cociente o de D'Alembert para determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n-1)!}.$$

Resolución.

1. El término siguiente es $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{n!}$. Cociente, con $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{4^n} = \frac{4}{n}.$$

2. $L = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$.
3. **La serie converge.**
4. Comprobación: con $m = n-1$, $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^{m+1}}{m!} = 4e^4$, un número finito.

Ejercicio 4B.5.5 · Suma de una diferencia de geométricas

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 1.

Determine el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k+1} - \frac{3}{7^{k+1}}\right].$$

Si no es posible, indique por qué es divergente.

Resolución.

1. Son dos geométricas. Como $e < \pi$, la razón $\frac{e}{\pi}$ es menor que 1; la otra razón es $\frac{1}{7}$. Las dos convergen, así que la suma se separa.
2. Primera: empieza en $k = 1$ con $a = \left(\frac{e}{\pi}\right)^2$ y $r = \frac{e}{\pi}$:

$$\frac{e^2/\pi^2}{1 - e/\pi} = \frac{e^2}{\pi(\pi - e)}.$$

3. Segunda: $a = \frac{3}{49}$, $r = \frac{1}{7}$:
$$\frac{3/49}{1 - 1/7} = \frac{3}{49} \cdot \frac{7}{6} = \frac{1}{14}.$$
4. **La serie converge y su suma es** $\dfrac{e^2}{\pi(\pi - e)} - \dfrac{1}{14}$ (≈ 5.485).

Ejercicio 4B.5.6 · Maclaurin de $\operatorname{senh} 2x$ e intervalo

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.

Obtenga el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{senh} 2x$, determine su intervalo de convergencia y haga el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Derivadas: $f = \operatorname{senh} 2x$, $f' = 2\cosh 2x$, $f'' = 4\operatorname{senh} 2x$, $f''' = 8\cosh 2x$, y así sucesivamente. En $x = 0$: $0, 2, 0, 8, 0, 32, \ldots$ Las de orden par valen 0 y la de orden impar n vale 2^n.
2. Términos no nulos, con $n = 2k + 1$:
$$\operatorname{senh} 2x = 2x + \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \ldots$$
$$\operatorname{senh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Es la serie de $\operatorname{senh} u$ con $u = 2x$: $2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \ldots$
3. Cociente entre términos no nulos consecutivos:
$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{4x^2}{(2k+2)(2k+3)} \to 0.$$
4. El límite es $0 < 1$ para todo x: no hay extremos.
5. $\operatorname{senh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$**, convergente en** $(-\infty, \infty)$**.**

Ejercicio 4B.5.7 · Taylor de e^{2x} alrededor de 1

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 1.

Obtenga la serie de Taylor de $f(x) = e^{2x}$ alrededor de $a = 1$.

Resolución.

1. Derivadas: $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, así que $f^{(n)}(1) = 2^n e^2$: $e^2, 2e^2, 4e^2, 8e^2, \ldots$
2. Coeficientes $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$: $e^2,\ 2e^2,\ \frac{4e^2}{2!} = 2e^2,\ \frac{8e^2}{3!} = \frac{4}{3}e^2$.
3. **Serie:**
$$e^{2x} = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^2(x-1)^3 + \ldots$$
$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$
4. Comprobación: $e^{2x} = e^2\, e^{2(x-1)}$, y con $u = 2(x-1)$ en $e^u = \sum \frac{u^n}{n!}$ sale la misma serie, válida para todo x.

4B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4B**.

Ejercicio propuesto 4B.6.1

Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n(n+1)^2}.$$

Resultado: $[1, 7]$: converge en los dos extremos.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.

Ejercicio propuesto 4B.6.2

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo C, problema 1.

Determine el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{7}}$$

empleando el criterio de Leibniz.

Resultado: Diverge: $b_n = 7^{-1/(n+1)} \to 1 \neq 0$, así que no se cumple Leibniz y falla el criterio del término n-ésimo.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.

Ejercicio propuesto 4B.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 1.

Escriba el número decimal periódico infinito $0.7777\ldots$ como una serie y determine su carácter. Si es convergente, calcule su suma.

Resultado: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, geométrica convergente con suma $\frac{7}{9}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.

Ejercicio propuesto 4B.6.4

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de $f(x) = \ln \sqrt[3]{1+x}$.

Resultado: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{3n} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{9} - \ldots$, en $(-1, 1]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.

Ejercicio propuesto 4B.6.5

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de la función

$$g(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

Resultado: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \ldots$, para $|x| < 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

4B.7 Errores frecuentes

- **Concluir convergencia porque $a_n \to 0$.** El término n-ésimo solo sirve para probar divergencia: $\frac{1}{n} \to 0$ y la armónica diverge.
- **Aplicar Leibniz sin revisar el límite.** Si b_n no tiende a cero, la serie diverge aunque alterne, como $\sum(-1)^{n+1}7^{-1/(n+1)}$.
- **Olvidar el análisis de los extremos.** El cociente da $L = 1$ en ellos y no decide; hay que sustituir cada extremo en la serie y estudiarla con otro criterio.
- **Sustituir el extremo mal.** Con $x = 0$ en $(-1)^n(x-4)^n$ queda $(-1)^n(-4)^n = 4^n$: los signos se cancelan. Escribe las potencias completas.
- **Equivocar el primer término de una geométrica.** En $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n+1}}$ el primer término es $\frac{4}{9}$; la suma es $\frac{a}{1-r} = \frac{4/9}{2/3} = \frac{2}{3}$, no $\frac{4}{1-1/3}$.
- **Perder el término constante o el índice.** En una serie de Maclaurin, el término $n = 0$ es $f(0)$; revisa que el índice inicial del término general reproduzca el primer término de la tabla.
- **Olvidar el $n!$ del denominador.** El coeficiente es $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$; sin el factorial, la serie de e^x se convierte en la de $\frac{1}{1-x}$.

4B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.
- Cociente: $L = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Leibniz: $\sum(-1)^{n+1}b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; Maclaurin con $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.

- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, en $(-1, 1]$.

4B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Si la serie no tiene x: término n-ésimo primero; después geométrica, serie p, cociente o Leibniz, según su forma.
2. Si tiene x: cociente con valor absoluto, despeja $|x - a| < R$ y sustituye cada extremo en la serie original.
3. Si piden Maclaurin o Taylor: busca primero una serie conocida con sustitución; si no la hay, haz la tabla de cuatro o cinco derivadas y busca el patrón.
4. Escribe el resultado completo: carácter con el criterio usado, suma exacta, intervalo con corchetes o paréntesis, término general con su índice.

4B.10 Lo que agrega el Plan 2026: el criterio de la integral y las series en la computadora

4B.10.1 Criterio de la integral

Si f es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

tienen el mismo carácter: las dos convergen o las dos divergen. La razón es geométrica: los términos $a_2, a_3, \ldots$ son áreas de rectángulos de base 1 que caben bajo la gráfica de f desde $x = 1$, y $a_1, a_2, \ldots$ son rectángulos que la cubren. Si la serie empieza en otro índice, la integral empieza en ese número; basta que f sea decreciente a partir de algún punto.

Cuidado: el criterio dice si la serie converge, pero *no* da su suma. La integral y la serie valen números distintos.

La serie p. Con $f(x) = \frac{1}{x^p}$ $(p > 0)$, el criterio y la integral impropia de la Parte 3C (sección 3C.1.1) dan la regla de la tabla de series conocidas: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.

Cuándo usarlo. Cuando el término general es una función de n fácil de integrar y los criterios del cociente y de comparación no deciden. Pasa sobre todo con logaritmos, como $\frac{1}{n \ln n}$ o $\frac{\ln n}{n^2}$: ahí el cociente da $L = 1$, igual que en todas las series p, y no decide. También sirve cuando la integral sale con un cambio de variable inmediato, como en ne^{-n^2}.

> **Ejemplo resuelto · Criterio de la integral**
>
> Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ con el criterio de la integral.
>
> **Resolución.**
>
> 1. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ es continua y positiva, y es decreciente en $[1, \infty)$ porque el denominador crece.
> 2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{b \to \infty} \operatorname{ang\,tan} x \Big|_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$: converge.

3. **La serie converge.** (Su suma es aproximadamente 1.077, no $\frac{\pi}{4}$.) También se decide por comparación con $\sum \frac{1}{n^2}$.

4B.10.2 Visualización y uso de las series

Sumas parciales. El programa pide ver con software la convergencia y la divergencia: se calculan las sumas parciales S_N y se grafican contra N. Para $\sum \frac{1}{n^2}$, $S_{10} \approx 1.550$, $S_{100} \approx 1.635$ y $S_{1000} \approx 1.644$: se estabilizan cerca de $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$. Para la armónica $\sum \frac{1}{n}$, $S_{10} \approx 2.93$, $S_{100} \approx 5.19$ y $S_{1000} \approx 7.49$: crecen sin límite, aunque despacio (más o menos como $\ln N$). Una gráfica que «parece» estabilizarse no prueba la convergencia: la decide un criterio.

Error al cortar una serie alternada. Si una serie alternada cumple el criterio de Leibniz, el error al cortarla en un término es menor que el valor absoluto del primer término que se omite.

Uso en ingeniería. Cortar una serie de Taylor da un polinomio que aproxima la función cerca del centro. Así calculan una calculadora y una computadora $\operatorname{sen} x$, e^x o $\ln x$, y así se simplifican modelos: para ángulos pequeños, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ convierte la ecuación del péndulo en una que se resuelve a mano; $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ y $e^x \approx 1 + x$ linealizan una función cerca de 0 (es la diferencial de la Parte 2A).

Ejercicio propuesto 4B.10.1 · Una serie con logaritmo

Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Resultado: Diverge.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

Ejercicio propuesto 4B.10.2 · Una serie con exponencial

Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$ con el criterio de la integral.

Resultado: Converge (la integral vale $\frac{1}{2e}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

Ejercicio propuesto 4B.10.3 · El error de la aproximación del péndulo

Con la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} x$, acote el error de la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$ para $x = 0.1$.

Resultado: El error es menor que $\frac{0.1^3}{6} \approx 1.67 \times 10^{-4}$ (el error verdadero es 1.666×10^{-4}).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

Con la computadora

```
# Sumas parciales de 1/n^2 y su suma; serie de ln(1 + x)
from sympy import Rational, log, oo, pi, series, summation
from sympy import symbols
n = symbols("n", integer=True, positive=True)
```

```
for N in (10, 100, 1000):
    S = sum(Rational(1, k**2) for k in range(1, N + 1))
    print(N, round(float(S), 3))      # 1.55, 1.635, 1.644
suma = summation(1/n**2, (n, 1, oo))
print(suma)                                    # pi**2/6
x = symbols("x")
print(series(log(1 + x), x, 0, 5))   # x - x**2/2 + ...
assert suma == pi**2/6
```

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Las fórmulas de todas las partes, en el orden del cuaderno. El examen no permite formulario: este apéndice es para escribirlo de memoria y comprobar.

A.1 Parte 1A · Funciones

- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \leq 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot D_{fg} = D_f \cap D_g \cdot$ en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \neq 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro (h,k); $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2 + a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h) + k$: traslación $(h,k) \cdot -f(x)$: reflejo en el eje $x \cdot f(-x)$: en el eje y.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cdot \operatorname{ang\,cos}: [-1,1] \to [0,\pi] \cdot \operatorname{ang\,tan}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $e^{\ln x} = x\ (x > 0)$, $\ln e^x = x \cdot \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot a^x = e^{x \ln a}$.
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

A.2 Parte 1B · Límites y continuidad

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \cdot (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[q]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \operatorname{mcm}(p,q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1 \cdot \frac{\tan u}{u} \to 1 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\operatorname{sen} ku}{u} \to k \cdot \frac{\operatorname{sen} au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en c: $f(c)$ definida $\cdot \lim_{x\to c} f(x)$ existe $\cdot \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty \cdot \tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty \cdot \operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

A.3 Parte 2A · La derivada

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot$ derivable $\Rightarrow$ continua.
- $(uv)' = uv' + vu' \cdot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \cdot (u^n)' = nu^{n-1}u' \cdot \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u\, u' \cdot (\cos u)' = -\operatorname{sen} u\, u' \cdot (\tan u)' = \sec^2 u\, u' \cdot (\sec u)' = \sec u \tan u\, u'$.
- $(\cot u)' = -\csc^2 u\, u' \cdot (\csc u)' = -\csc u \cot u\, u'$.

- $(\operatorname{ang\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (\operatorname{ang\,tan} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \cdot (\operatorname{ang\,sec} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y - y_0 = m(x - x_0) \cdot$ normal con $-\frac{1}{m} \cdot Ax + By + C = 0$ tiene $m = -\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}\right| \cdot m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a t, sustituir al final.
- Esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2 \cdot$ cilindro $V = \pi r^2 h \cdot$ cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot$ círculo $A = \pi r^2$.
- Diferencial: $dy = f'(x)\,dx \cdot f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \cdot (e^u)' = e^u u' \cdot (a^u)' = a^u \ln a\, u' \cdot (\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u' \cdot (\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u' \cdot (\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- $y = f^g$: $\ln y = g \ln f$, $y' = f^g \left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$.

A.4 Parte 2B · Regla de L'Hôpital

- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$, derivando por separado.
- $0 \cdot \infty$: $fg = \frac{f}{1/g} \cdot \infty - \infty$: común denominador.
- $y = f^g$: $\lim y = e^{\lim g \ln f} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab} \cdot \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

A.5 Parte 2C · Variación y optimización

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a,b)$.
- Valor medio: f continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a,b)$.
- Weierstrass: continua en $[a,b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a,b)$.
- $f' > 0$: crece · $f' < 0$: decrece · $f'' > 0$: cóncava $\cup$ · $f'' < 0$: cóncava $\cap$.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a,b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 \cdot$ sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}, l = r\theta \cdot$ cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi rh \cdot$ cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

A.6 Parte 3A · Integrales definida e indefinida

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

A.7 Parte 3B · Aplicaciones de la integral

- Área en x: $A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\mathrm{d}x$, con f arriba.
- Área en y: $A = \int_c^d \big[x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}\big]\mathrm{d}y$.
- Arco, cartesianas: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
- Arco, paramétricas: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.
- Arco, polares: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\theta$.
- Discos y arandelas: $V = \pi\int_a^b \big(R^2 - r^2\big)\mathrm{d}x$ (o $\mathrm{d}y$).
- Capas: $V = 2\pi\int_a^b \rho\, h\mathrm{d}x$, con ρ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.
- Trabajo: $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ · resorte $F = kx$, $W = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$ · bombeo: peso de la capa $\rho g\, A(y)\,\mathrm{d}y$ por la distancia que sube.

A.8 Parte 3C · Integral impropia

- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f$ · integrando no acotado en a: $\int_a^b f = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f$ · punto malo interior: partir y que las dos partes converjan.
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, si $p < 1$.

A.9 Parte 4A · Métodos de integración

- Partes: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$; elección de u con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$; $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x|$.

- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$; $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$; $\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$.
- $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2 - x^2} \to x = a \operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2 + x^2} \to x = a \tan\theta$; $\sqrt{x^2 - a^2} \to x = a \sec\theta$.
- $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ang\,tan} \frac{u}{a}$; $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen} \frac{u}{a}$; $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{ang\,sec} \frac{u}{a}$.
- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$.
- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,dx}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,dx}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + q)$.

A.10 Parte 4B · Sucesiones y series

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.
- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Integral: f continua, positiva y decreciente, $a_n = f(n) \Rightarrow \sum a_n$ y $\int_1^{\infty} f$ tienen el mismo carácter.
- Leibniz: $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$; Maclaurin con $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, en $(-1, 1]$.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Cómo serán los exámenes

Todavía no hay exámenes publicados del Plan 2026. El programa pide un examen final como evaluación sumativa y no dice cómo es; los finales y extraordinarios de los planes 2010 y 2016 de las materias que se juntaron en esta (Cálculo Diferencial, Cálculo y Geometría Analítica y Cálculo Integral) traían seis problemas en dos horas, uno por tema y en un orden fijo, sin calculadora ni formulario. Los simulacros de este apéndice siguen esa forma con los cuatro temas del programa 2026: siete problemas, uno por cada bloque de temas, todos tomados de exámenes de los planes anteriores en temas que no cambiaron.

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del programa. Resuélvelo en **2 horas y media**, sin calculadora, sin formulario y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E. El problema 6 son tres integrales, una por método, que valen lo mismo.

Simulacro I

Problema	Tema	Ejercicio	Examen de origen
1	Inversa de una función en paramétricas	1A.6.4	Cálculo Diferencial, 2º final 2001-2, tipo A, problema 1
2	Tres límites	1B.6.4	Cálculo Diferencial, 1er final 2006-1, tipo B, problema 2
3	Razón de cambio	2A.6.3	Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 3
4	Optimación	2C.6.2	Cálculo Diferencial, 2º final 2001-2, tipo A, problema 5
5	Área entre curvas	3B.6.1	Cálculo Integral, 2º final 2016-2, problema 4
6	Tres integrales	4A.6.1, 4A.6.3, 4A.6.6	Cálculo Integral, 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 3, inciso a); 2º final 2015-2, tipo B, problema 3, inciso a); 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso c)
7	Intervalo de convergencia	4B.6.1	Cálculo Integral, 2º final 2017-2, problema 1

Simulacro II

Problema	Tema	Ejercicio	Examen de origen
1	Inversa de una racional	1A.6.3	Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 2
2	Asíntotas y límite	1B.6.6	Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 2
3	Recta tangente a una curva paramétrica	2A.6.1	Cálculo Diferencial, 2º final 2013-1, tipo A, problema 4
4	L'Hôpital, forma 1^{∞}	2B.6.1	Cálculo Integral, 2º final 2020-1, problema 2
5	Valor medio y teorema del valor medio	3A.6.5	Cálculo Integral, 2º extraordinario 2012-2, problema 1
6	Tres integrales	4A.6.2, 4A.6.5, 4A.6.7	Cálculo Integral, 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a); 2º extraordinario 2012-2, problema 3, inciso a); 1er final 2018-2, tipo A, problema 3, inciso c)
7	Serie de Maclaurin	4B.6.5	Cálculo Integral, 1er final 2017-2, tipo A, problema 1

Después del simulacro. Con 60 o más en los dos simulacros, estás listo para el examen. Si un problema falla, vuelve a su parte y resuelve otra vez sus ejercicios de examen. Para practicar más, cada parte tiene otros propuestos de exámenes en el mismo formato; la integral impropia, por ejemplo, está en el ejercicio 3C.6.1 (Cálculo Integral, 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 2).

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Todas las resoluciones de este cuaderno son propias. Varios exámenes de Cálculo Integral de los planes anteriores traen una resolución publicada; para cada problema usado aquí que la tiene, se comparó con la resolución propia, verificada con álgebra computacional. Aquí se registran las diferencias: resultados distintos, pasos que cambian el resultado y enunciados con datos que sobran, faltan o admiten dos lecturas. No se registran las formas equivalentes de un mismo resultado (otra constante de integración, otra forma algebraica). Los ejercicios propios del Plan 2026 no tienen resolución publicada.

C.1A · Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2A · Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

2º final 2013-2, tipo A, problema 4: El enunciado pide la razón «en el instante en el cual el esquiador se encuentra a una distancia de 3 m del punto más bajo de la rampa». Como la rampa es recta y la rapidez es constante, $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt}$ no depende del instante y ese dato sobra; en este cuaderno se omite.

2º final 2013-1, tipo A, problema 4: El enunciado pide «una ecuación de la recta tangente» en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$, pero la curva ($y = 1 - x^2$) tiene dos puntos con esa ordenada, $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, con tangentes distintas. En este cuaderno se fija el de abscisa positiva y se da también la otra tangente.

2º final 2006-2, tipo A, problema 4: El enunciado habla de «el punto P», pero hay dos tangentes a $y = x^2$ que forman 45° con la recta $3x - y + 1 = 0$: en $(-1, 1)$ y en $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. En este cuaderno se dan los dos.

1er final 2005-2, tipo B, problema 2: El enunciado pide $\frac{dy}{dx}$ en $y = 1$, donde $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se anulan a la vez y la fórmula paramétrica da $\frac{0}{0}$. En este cuaderno se simplifica el cociente antes de evaluar o se elimina el parámetro ($x = 1 - y^2$); las dos vías dan $-\frac{1}{2}$.

C.2B · Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas

2º final 2010-2, tipo A, problema 2: En la resolución publicada, al aplicar la regla de L'Hôpital a $\ln\cosh x / \operatorname{senh} x$ se escribe la derivada del denominador como $\operatorname{senh} x$ (es

cosh x); con eso se obtiene $\lim \ln y = 1$ y el resultado e. El límite verificado de $\ln y$ es 0 y el valor verificado del límite es 1.

C.2C · Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación

1er final 2005-2, tipo B, problema 6: El enunciado no dice qué caras tiene el recipiente; la figura dibuja todas las aristas del prisma. En este cuaderno se toma el prisma cerrado (dos triángulos y tres rectángulos), con $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}}$ m; si la cara de la hipotenusa fuera abierta, resultaría $L = \sqrt[3]{6}$ m.

C.3A · Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo

2º extraordinario 2015-1, problema 4: En la resolución publicada la curva de la derecha aparece como $x = y^2 - 2y$ en lugar de $x = 2y - y^2$, y el integrando queda $(y^2 - 2y) - (y^2 - 4y) = 2y$; el área coincide por casualidad, 9 $[u^2]$, pero el integrando verificado es $6y - 2y^2$. La ecuación de los cortes aparece como $2y^2 - 6 = 0$; la verificada es $2y^2 - 6y = 0$.

C.3C · Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4A · Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a): En la resolución publicada se integra $e^x \operatorname{sen} x$ en lugar de $e^{2x} \operatorname{sen} x$ y aparece $-\frac{e^x}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x) + C$; para el integrando del enunciado, el valor verificado es $\frac{1}{5}e^{2x}(2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C$.

2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada se toma $v = x^2$ para $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ y aparece $x^2 \operatorname{ang\,sec} x - \sqrt{x^2 - 1} + C$, el doble del resultado; con $v = \frac{x^2}{2}$, el valor verificado es $\frac{x^2}{2} \operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada, con las constantes correctas $A = 1$, $B = -1$, $D = 1$, el resultado aparece como $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) + \frac{1}{x-2} + C$; el valor verificado es $\ln|x - 1| - \ln|x - 2| - \frac{1}{x-2} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a): En la resolución publicada el resultado aparece como $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$; el segundo término verificado es $-\frac{1}{2}x^2 \ln x$.

C.4B · Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor

2º final 2018-1, problema 1: En la resolución publicada la derivada de orden n aparece como $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{3}\frac{(-1)^n}{(1+x)^n}$; el signo verificado es $(-1)^{n+1}$ (por ejemplo, $f'(0) = \frac{1}{3} > 0$). La serie final publicada sí es la correcta.

1er final 2017-2, tipo A, problema 1: En la resolución publicada el resultado enmarcado es $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, que omite el término constante $\frac{1}{2}$; el resultado verificado empieza en $n = 0$: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, como en el renglón anterior de la misma resolución.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programa de la asignatura

- Programa de estudios de *Cálculo Diferencial e Integral* del Plan 2026 de Ingeniería en Computación (primer semestre, 10 créditos, 96 horas: 64 de teoría y 32 de práctica; obligatoria, sin seriación antecedente). Cuatro temas: funciones y límites; derivada y sus aplicaciones; integral definida e integral indefinida; métodos de integración.

De él se tomaron el orden de las unidades y de sus partes, el objetivo del curso, el objetivo de cada tema y el contenido literal de cada parte.

Exámenes

Todavía no hay exámenes del Plan 2026. Los ejercicios de examen salen de los exámenes de los planes 2010 y 2016 de las materias que se juntaron en esta, en los temas que no cambiaron; son los mismos que usan *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial* y *Curso de Emergencia, Cálculo Integral*, que los listan completos en su Apéndice D. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2011-2, tipo A, problema 3»; los de Cálculo y Geometría Analítica llevan el nombre de la materia.

- **Temas 1 y 2 (Partes 1A, 1B, 2A y 2C):** 10 exámenes finales de *Cálculo Diferencial* (Plan 2010 y la versión anterior de la misma materia, de 2001-2 a 2013-2) y 39 exámenes finales y 17 parciales de *Cálculo y Geometría Analítica* (Plan 2016, de 2016-1 a 2026-2).
- **Partes 2B, 3A, 3B, 3C, 4A y 4B:** 112 exámenes finales y extraordinarios de *Cálculo Integral*: 52 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2016-2) y 60 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), más los parciales del Plan 2016 para las series.

Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias; las resoluciones publicadas solo se usaron para cotejar (Apéndice C). Los ejercicios de las secciones «Lo que agrega el Plan 2026» son propios y no llevan cita de examen.

Bibliografía del programa

Básica

- García, P., Castañeda, J. E. y Jurado, M. *Cálculo diferencial e integral con geometría analítica para ingeniería*, 1.ª ed., 2017.
- Larson, R. y Edwards, B. *Cálculo diferencial e integral*, 1.ª ed. Cengage, 2023.
- Smith, R. T., Minton, R. B. y Rafhi, Z. A. *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*, 1.ª ed. McGraw-Hill, 2019.
- Stewart, J., Clegg, D. y Watson, S. *Cálculo: trascendentes tempranas*, 1.ª ed. Cengage Learning, 2021.
- Zill, D. y Wright, W. *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4.ª ed. McGraw-Hill Interamericana, 2023.

Los temas que el programa 2026 agrega (representación implícita, funciones como modelos,

sumas de Riemann con software, trabajo mecánico, criterio de la integral y visualización de series) se redactaron con estos textos, que los tratan en sus capítulos de funciones, de aplicaciones de la integral y de series infinitas; los ejercicios de esas secciones son propios.

Software

- SymPy, biblioteca de Python para matemáticas simbólicas (`https://www.sympy.org`). Los recuadros «Con la computadora» la usan; su código corre tal cual y comprueba el resultado impreso. Con la biblioteca matplotlib, `sympy.plot` dibuja las gráficas.

La notación de este cuaderno (ang sen x, ang tan x y ang sec x para las trigonométricas inversas; senh x y cosh x; «ordenada media»; $[u^2]$ y $[u^3]$ para las unidades de área y volumen) es la de los enunciados de los exámenes.

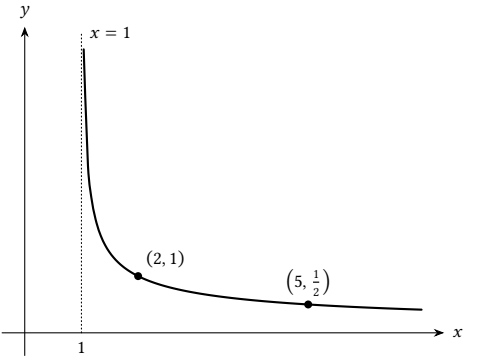
Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1A · Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos

Ejercicio 1A.6.1 ← volver

1. **Dominio:** la raíz está en el denominador: $x - 1 > 0$, es decir, $D_f = (1, \infty)$.
2. **Recorrido:** $\sqrt{x-1}$ toma todos los valores positivos, y su recíproco también: cuando $x \to 1^+$, $f(x) \to \infty$; cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$. Como f es continua y decreciente, $R_f = (0, \infty)$.
3. **Gráfica:** la de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ trasladada una unidad a la derecha; asíntota vertical $x = 1$ y horizontal $y = 0$. Pasa por $(2, 1)$ y $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.



Ejercicio 1A.6.2 ← volver

1. $f \circ g$: $f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$. Como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo x, $g(x) \in D_f$ siempre: dominio $\mathbb{R}$.
2. Recorrido de $f \circ g$: $x^2 + 1$ toma todos los valores de $[1, \infty)$, y su raíz, los de $[1, \infty)$. El mínimo es 1, en $x = 0$.
3. $f \cdot g$: $\sqrt{x}\,(x^2 + 1)$, con dominio $D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.
4. Recorrido de $f \cdot g$: es producto de dos funciones no negativas y crecientes en $[0, \infty)$, así que es creciente; vale 0 en $x = 0$ y crece sin límite: $[0, \infty)$.

Ejercicio 1A.6.3 ← volver

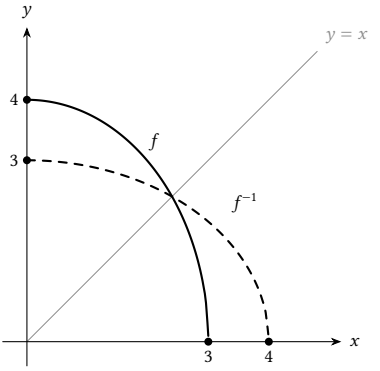
1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ (denominador $\neq 0$).
2. **Despeje:** $y(3x + 2) = x - 1 \Rightarrow 3xy - x = -1 - 2y \Rightarrow x(3y - 1) = -(2y + 1)$, y si $y \neq \frac{1}{3}$,

$$x = \frac{2y + 1}{1 - 3y}.$$

3. Con $y = \frac{1}{3}$ la ecuación queda $0 = -\frac{5}{3}$: no hay x. Entonces $R_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, y para cada otro y hay un único x: f es inyectiva.
4. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$, con $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.
5. Comprobación: $f(0) = -\frac{1}{2}$ y $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{5/2} = 0$.

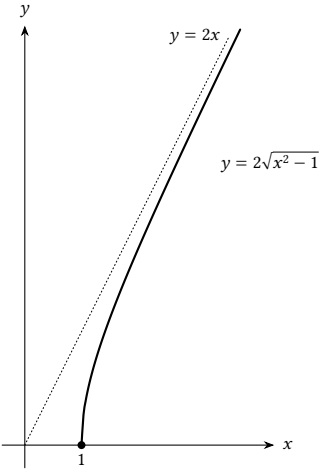
Ejercicio 1A.6.4 ← volver

1. **Forma cartesiana:** $\cos t = \frac{x}{3}$, $\operatorname{sen} t = \frac{y}{4}$ y $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Con $x \geq 0$, $y \geq 0$ es el cuarto de elipse del primer cuadrante: $y = \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [0, 3]$, con recorrido $[0, 4]$.
2. **Inyectividad:** en $[0, 3]$, $9 - x^2$ decrece, así que f es decreciente: tiene inversa.
3. **Despeje:** $x^2 = 9 - \frac{9y^2}{16} = \frac{9}{16}\left(16 - y^2\right)$ y, como $x \geq 0$, $x = \frac{3}{4}\sqrt{16 - y^2}$.
4. **Inversa:** $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, con $D_{f^{-1}} = [0, 4]$ y $R_{f^{-1}} = [0, 3]$.
5. **Gráficas:** f va de $(0, 4)$ a $(3, 0)$; f^{-1}, de $(0, 3)$ a $(4, 0)$: el cuarto de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Ejercicio 1A.6.5 ← volver

1. **Dominio:** $\cosh t$ es creciente para $t \geq 0$, con $\cosh 0 = 1$ y sin cota superior: $x \in [1, \infty)$.
2. **Recorrido:** $\operatorname{senh} t$ es creciente, $\operatorname{senh} 0 = 0$ y sin cota: $y \in [0, \infty)$.
3. **Forma cartesiana:** con $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Como $y \geq 0$, $y = 2\sqrt{x^2 - 1}$.
4. **Gráfica:** mitad superior de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$: empieza en el vértice $(1, 0)$ y se acerca a la asíntota $y = 2x$.



Ejercicio 1A.6.6 ← volver

1. El rectángulo más grande que se corta del tronco está inscrito en el círculo: su diagonal es el diámetro D.
2. Si h es el alto, por Pitágoras $x^2 + h^2 = D^2$, así que $h = \sqrt{D^2 - x^2}$.
3. Área: $A = xh = x\sqrt{D^2 - x^2}$.
4. Dominio: $x > 0$ y $h > 0$, es decir, $0 < x < D$.

Ejercicio 1A.10.1 · Una función dada en forma implícita ← volver

1. Despeje: $9y^2 = 36 - 4x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9}\left(9 - x^2\right) \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$. La condición $y \leq 0$ elige el signo negativo.
2. **Dominio:** $9 - x^2 \geq 0 \iff -3 \leq x \leq 3$.
3. **Recorrido:** la raíz va de 0 (en $x = \pm 3$) a 3 (en $x = 0$), así que y va de -2 a 0: $[-2, 0]$. Es la mitad inferior de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ejercicio 1A.10.2 · Volumen de una caja como modelo ← volver

1. La base es un cuadrado de lado $30 - 2x$ y la altura es x: $V = x(30 - 2x)^2$.
2. Dominio: $x > 0$ y $30 - 2x > 0$, es decir, $0 < x < 15$.
3. $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000\ \text{cm}^3$. (El volumen máximo se obtiene en la Parte 2C: justamente $x = 5$.)

Ejercicio 1A.10.3 · Logaritmo de una cuadrática ← volver

1. **Dominio:** el argumento del logaritmo debe ser positivo: $4 - x^2 > 0 \iff -2 < x < 2$.
2. **Recorrido:** $4 - x^2$ toma todos los valores de $(0, 4]$ (el máximo, 4, en $x = 0$). Como ln es creciente, f toma todos los valores de $(-\infty, \ln 4]$: cerca de $x = \pm 2$ el argumento tiende a 0^+ y ln tiende a $-\infty$.

Ejercicio 1A.10.4 · Inversa de un coseno hiperbólico ← volver

1. $\cosh x$ es creciente en $[0,\infty)$ con $\cosh 0 = 1$: f es inyectiva y $R_f = [2,\infty)$.
2. Despeje con $u = e^x$: $y = u + \frac{1}{u} \Rightarrow u^2 - yu + 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$. Como $x \geq 0$, $u = e^x \geq 1$ y se toma el signo $+$.
3. $x = \ln \dfrac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}$; al intercambiar, $f^{-1}(x) = \ln \dfrac{x + \sqrt{x^2-4}}{2} = \operatorname{ang\,cosh} \dfrac{x}{2}$, con $D_{f^{-1}} = [2,\infty)$ y $R_{f^{-1}} = [0,\infty)$.

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes

Ejercicio 1B.6.1 ← volver

1. Las dos reglas son polinomios; el único punto en duda es $x = a$, con $a \geq -2$.
2. Condición 1: $f(a) = a^2 + 4$ (primera regla); se cumple.
3. Condición 2: $\lim_{x\to a^-} f(x) = a^2 + 4$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = (a-2)^2$. Se igualan: $a^2 + 4 = a^2 - 4a + 4$, de donde $4a = 0$ y $a = 0$.
4. Condición 3: con $a = 0$, el límite vale $4 = f(0)$; se cumple. Además $a = 0 \geq -2$.
5. Resultado: $a = 0$.

En el original la segunda regla se lee $(x-2)^2$.

Ejercicio 1B.6.2 ← volver

1. a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 4x}{\cot 3x} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x \cos 3x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen} 4x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \to \frac{3}{4}.$$

   El lateral por la derecha coincide con el límite bilateral.
2. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^3$, $t \to 2$ y $2x - 16 = 2(t^3 - 8)$.
3. Diferencia de cubos:

$$\frac{t-2}{2(t-2)(t^2+2t+4)} = \frac{1}{2(t^2+2t+4)} \to \frac{1}{2 \cdot 12} = \frac{1}{24}.$$

4. Resultado: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

Ejercicio 1B.6.3 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(1 - \sqrt{5-x})(1 + \sqrt{5-x}) = 1 - (5-x) = x - 4,$$
$$(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x}) = 9 - (5+x) = -(x-4).$$

2. Se cancela $x - 4$:

$$\frac{1 - \sqrt{5-x}}{3 - \sqrt{5+x}} = -\frac{3 + \sqrt{5+x}}{1 + \sqrt{5-x}} \to -\frac{3+3}{1+1} = -3.$$

3. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x} = \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 \cos x \to 1 \cdot 1 = 1.$$

4. Resultado: a) -3; b) 1.

Ejercicio 1B.6.4 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) = x - 9,$$
$$(4 - \sqrt{2x-2})(4 + \sqrt{2x-2}) = 18 - 2x = -2(x-9).$$

2. Se cancela $x - 9$:

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{4 - \sqrt{2x-2}} = -\frac{4 + \sqrt{2x-2}}{2(\sqrt{x}+3)} \to -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

3. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \cdot \frac{2x}{3x} \to \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

4. c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre x^2:

$$\frac{6 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}} \to 6.$$

5. Resultado: a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

Ejercicio 1B.6.5 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^2$ ($\sqrt{x} = t$, $t \to 1$):

$$\frac{t^4 - t}{t - 1} = \frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{t-1} = t(t^2+t+1) \to 3.$$

2. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \to \frac{2}{3}.$$

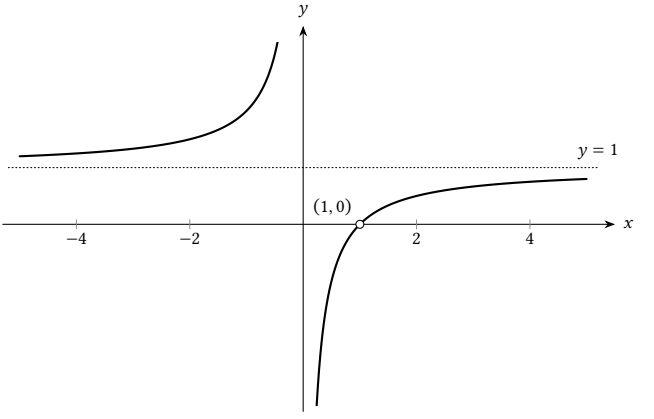
3. Resultado: a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 1B.6.6 ← volver

1. Dominio: $x^2 - x = x(x-1) \neq 0$, así que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Simplificación:

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \quad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

2. a) Asíntota vertical: en $x = 0$ el numerador simplificado vale -1; $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$. La recta $x = 0$ es asíntota vertical. En $x = 1$ el factor se canceló: no hay asíntota, hay un hueco.
3. Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$; la recta $y = 1$.
4. b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x} = \frac{0}{1} = 0$. La discontinuidad en $x = 1$ es evitable.
5. c) La gráfica es la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ sin el punto $(1, 0)$.



Ejercicio 1B.10.1 · Una constante para la continuidad en un intervalo ← volver

1. Para $x \neq 2$, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$: continua en $[0, 2)$ y en $(2, 3]$.
2. En $x = 2$: $\lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$. La función es continua ahí si $f(2) = k = 4$ (la discontinuidad es evitable).
3. $k = 4$.

Ejercicio 1B.10.2 · Diferencia de una raíz y una recta al infinito ← volver

1. Forma $\infty - \infty$. Se multiplica y divide por el conjugado:
$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}.$$
2. Se divide entre x (con $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$): $\dfrac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} \to \dfrac{3}{1 + 1}$.
3. **El límite vale $\frac{3}{2}$.**

Ejercicio 1B.10.3 · La asíntota de un modelo ← volver

1. $2^{-t/10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/10} \to 0$ cuando $t \to \infty$, porque la base está entre 0 y 1.
2. $\lim_{t\to\infty} T(t) = 20 + 70 \cdot 0 = 20$.
3. **La recta $T = 20$ es asíntota horizontal:** la temperatura se acerca a la del cuarto, 20 °C, pero $T(t) > 20$ para todo t.

E.2A · Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

Ejercicio 2A.6.1 ← volver

1. Punto: $y = \cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$. Con abscisa positiva, $x = \frac{1}{2}$: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.
2. Derivadas respecto a θ: $2x\frac{dx}{d\theta} = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\frac{dy}{d\theta} = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$.
3. Cociente: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta/x} = -2x$. (Lo mismo sale al eliminar el parámetro: $y = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - x^2$.)
4. En $x = \frac{1}{2}$: $m = -1$. Tangente: $y - \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4x + 4y - 5 = 0$.
5. En el otro punto de ordenada $\frac{3}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, la pendiente es 1 y la tangente es $4x-4y+5 = 0$.

Se agregó «y abscisa positiva» al original.

Ejercicio 2A.6.2 ← volver

1. Sea $P(a, a^2)$. La tangente tiene pendiente $m = 2a$; la recta, $m_2 = 3$.
2. $\tan 45^\circ = 1 = \left|\frac{3-2a}{1+6a}\right|$: dos casos.
3. $\frac{3-2a}{1+6a} = 1 \Rightarrow 3 - 2a = 1 + 6a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$, con $m = \frac{1}{2}$.
4. $\frac{3-2a}{1+6a} = -1 \Rightarrow 3 - 2a = -1 - 6a \Rightarrow a = -1$, con $m = -2$.
5. Comprobación: con $m = -2$, $\frac{3-(-2)}{1-6} = -1$; con $m = \frac{1}{2}$, $\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = 1$. En los dos el ángulo agudo es de 45°.
6. Puntos: $P(-1, 1)$ y $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

Ejercicio 2A.6.3 ← volver

1. Variables: y (recorrido de A), x (de B), h (distancia entre ellos). Datos: $\frac{dy}{dt} = 3$, $\frac{dx}{dt} = 5$ (m/s).
2. Instante: $y = 9$ a los $t = 3$ s; entonces $x = 5(3) = 15$ y $h = \sqrt{81 + 225} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$.
3. Ecuación: $h^2 = x^2 + y^2$. Derivando: $2h\frac{dh}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$.
4. Sustitución:
$$\frac{dh}{dt} = \frac{15(5) + 9(3)}{3\sqrt{34}} = \frac{102}{3\sqrt{34}} = \frac{34}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}\ \text{m/s}.$$
5. Comprobación: $h = \sqrt{(3t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{34}\,t$, que crece siempre a $\sqrt{34}$ m/s.

Ejercicio 2A.6.4 ← volver

1. a) Se simplifica primero: $\ln e^y = y$. La ecuación es $e^{xy} - x = y$.
2. Derivación implícita: $e^{xy}(y + xy') - 1 = y'$.
3. Se agrupa: $(x\,e^{xy} - 1)\,y' = 1 - y\,e^{xy} \Rightarrow y' = \frac{1-y\,e^{xy}}{x\,e^{xy}-1}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 9\cosh(3t)$ y $\frac{dy}{dt} = 6\operatorname{senh}(3t)$ (sin cambio de signo: $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\ u'$).
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{6\operatorname{senh}(3t)}{9\cosh(3t)} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

Ejercicio 2A.6.5 ← volver

1. Punto: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$; $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
2. Pendiente: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $m = -\frac{1}{4}$.
3. Tangente: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{x}{4} + 1$, o $x + 4y - 4 = 0$.
4. Intersecciones: con el eje x ($y = 0$), $x = 4$; con el eje y ($x = 0$), $y = 1$.
5. Área: $\frac{1}{2}(4)(1) = 2$.

Ejercicio 2A.6.6 ← volver

1. $A = \pi r^2$, así que $dA = 2\pi r\, dr$.
2. Con $r = 20$ y $dr = 0.02$: $dA = 2\pi(20)(0.02) = 0.8\pi$ cm^2.
3. Exacto: $\Delta A = \pi\left(20.02^2 - 20^2\right) = \pi(0.8004)$ cm^2.
4. La diferencia, $0.0004\pi = \pi(dr)^2$, es despreciable frente a dA.

Se cambió la pregunta del original, que pide la rapidez con que aumenta el área si el radio crece a razón de 0.02 cm/s: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 0.8\pi$ cm^2/s, el mismo número.

Ejercicio 2A.6.7 ← volver

1. $y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ (único en el intervalo). Punto $(0, 1)$.
2. $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ y $\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\,(-\operatorname{sen} 2t)(2) = -4\operatorname{sen} 2t \cos 2t$. En $t = \frac{\pi}{4}$ las dos valen 0: la fórmula da $\frac{0}{0}$.
3. Se simplifica antes de evaluar (para $\cos 2t \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2t}{-4\operatorname{sen} 2t \cos 2t} = -\frac{1}{2\operatorname{sen} 2t}.$$

   Cuando $t \to \frac{\pi}{4}$, el cociente tiende a $-\frac{1}{2}$.
4. Otra forma, sin el parámetro: $x = \cos^2 2t = 1 - \operatorname{sen}^2 2t = 1 - y^2$. Entonces $\frac{dx}{dy} = -2y$ y $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2}$ en $y = 1$.

Ejercicio 2A.10.1 · Velocidad y aceleración de un móvil ← volver

1. $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ y $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.
2. Reposo: $3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow t = 1$ y $t = 3$ s. Entre ellos, $v < 0$: la partícula regresa.
3. $a(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ s; $v(2) = 12 - 24 + 9 = -3$ m/s, la velocidad más negativa del recorrido.

Ejercicio 2A.10.2 · Una raíz cúbica con la diferencial ← volver

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $\mathrm{d}x = 0.12$; $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$, así que $f'(8) = \frac{1}{12}$.
2. $\mathrm{d}y = f'(8)\,\mathrm{d}x = \frac{0.12}{12} = 0.01$.
3. $\sqrt[3]{8.12} \approx f(8) + \mathrm{d}y = 2 + 0.01 = 2.01$.

E.2B · Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas

Ejercicio 2B.6.1 ← volver

1. Base $\to 1$, exponente $\csc x \to \infty$: forma 1^∞.
2. $\ln y = \csc x \, \ln(x + \cos x) = \dfrac{\ln(x + \cos x)}{\operatorname{sen} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(x + \cos x)\cos x} = 1.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + \cos x)^{\csc x} = e^1 = e$.

Ejercicio 2B.6.2 ← volver

1. Forma $\infty - \infty$. Común denominador: $\dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: $\dfrac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x}$, otra vez $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: $\dfrac{-e^x}{2e^x + xe^x} \to \dfrac{-1}{2}$.
4. **El límite vale $-\frac{1}{2}$.**

Ejercicio 2B.6.3 ← volver

1. Forma $\infty \cdot 0$. Como cociente: $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{4x}}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\cos\left(\frac{1}{2x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right)$; denominador $-\frac{1}{4x^2}$.
3. Cociente: $2\cos\left(\frac{1}{2x}\right) \to 2\cos 0$.
4. **El límite vale 2.**

Ejercicio 2B.6.4 ← volver

1. Base $\to 1$, exponente $\coth x \to \infty$: forma 1^∞.
2. $\ln y = \coth x \, \ln(1 - \operatorname{senh} x) = \dfrac{\ln(1 - \operatorname{senh} x)}{\tanh x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cosh x/(1 - \operatorname{senh} x)}{\operatorname{sech}^2 x} = -1.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - \operatorname{senh} x)^{\coth x} = e^{-1}$.

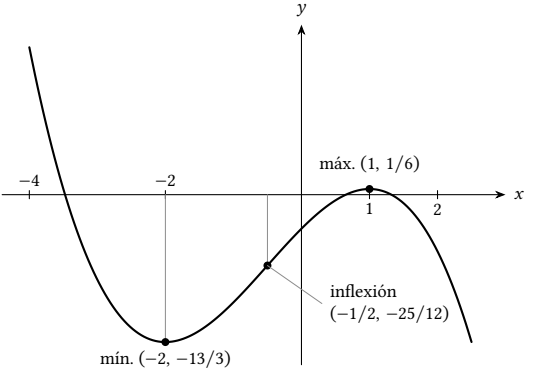
Ejercicio 2B.10.1 · L'Hôpital dos veces con la exponencial ← volver

1. Al sustituir: $\frac{1-1-0}{0} = \frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: $\dfrac{e^x - 1}{2x}$, otra vez $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: $\dfrac{e^x}{2} \to \dfrac{e^0}{2}$.
4. **El límite vale $\frac{1}{2}$.**

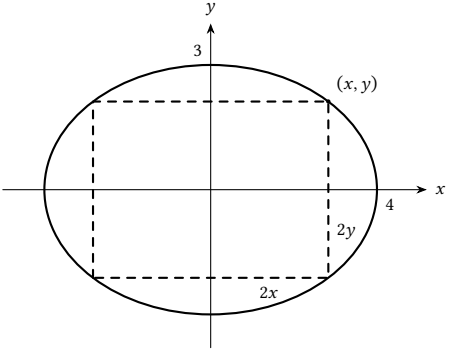
E.2C · Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación

Ejercicio 2C.6.1 ← volver

1. Dominio $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2 - x - x^2 = -(x^2 + x - 2) = -(x+2)(x-1)$. Críticos: $x = -2$ y $x = 1$.
2. a) $-(x+2)(x-1)$ es positivo entre las raíces y negativo fuera: decreciente en $(-\infty, -2)$, creciente en $(-2, 1)$, decreciente en $(1, \infty)$.
3. b) $f''(x) = -1 - 2x$, cero en $x = -\frac{1}{2}$: $f'' > 0$ si $x < -\frac{1}{2}$ (cóncava hacia arriba) y $f'' < 0$ si $x > -\frac{1}{2}$ (hacia abajo). Inflexión: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = -\frac{25}{12}$.
4. c) En $x = -2$, f' pasa de $-$ a $+$ y $f''(-2) = 3 > 0$: mínimo relativo $f(-2) = -1 - 4 - 2 + \frac{8}{3} = -\frac{13}{3}$. En $x = 1$, de $+$ a $-$ y $f''(1) = -3 < 0$: máximo relativo $f(1) = -1 + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
5. Para la gráfica: $f(0) = -1$, $f(-4) = \frac{13}{3}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx -4.33$.



Ejercicio 2C.6.2 ← volver



1. **Variables.** Por simetría, el vértice del primer cuadrante es (x, y), con lados $2x$ y $2y$.
2. **Función objetivo:** $A = 4xy$. **Restricción:** el vértice está en la elipse, $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.
3. **Una variable:** $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$, con $0 < x < 4$.
4. **Crítico:**

$$A'(x) = 3\sqrt{16 - x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{3(16 - 2x^2)}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{2}.$$

5. **Justificación:** el numerador $3(16 - 2x^2)$ pasa de positivo a negativo en $x = 2\sqrt{2}$: máximo. (Además $A \to 0$ en los extremos $x = 0$ y $x = 4$.)
6. $y = \frac{3}{4}\sqrt{8} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Lados: $2x = 4\sqrt{2}$ y $2y = 3\sqrt{2}$.
7. Resultado: $A = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$ unidades de área (en general, $2ab$).

Ejercicio 2C.6.3 ← volver

1. **Restricción.** Volumen: área del triángulo por la longitud, $\frac{L^2}{2}h = 3 \;\Rightarrow\; h = \frac{6}{L^2}$.
2. **Función objetivo.** Dos triángulos de área $\frac{L^2}{2}$; dos rectángulos $L \times h$ (los catetos) y uno $\sqrt{2}L \times h$ (la hipotenusa):

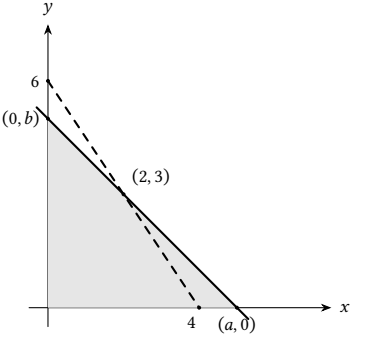
$$S = L^2 + (2 + \sqrt{2})Lh = L^2 + \frac{6(2 + \sqrt{2})}{L}, \qquad L > 0.$$

3. **Crítico:**

$$S'(L) = 2L - \frac{6(2 + \sqrt{2})}{L^2} = 0 \;\Rightarrow\; L^3 = 3(2 + \sqrt{2}) = 6 + 3\sqrt{2}.$$

4. **Justificación:** $S''(L) = 2 + \frac{12(2+\sqrt{2})}{L^3} > 0$: mínimo.
5. $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}} \approx 2.17$ m. Como $L^3 = 3(2 + \sqrt{2})$, $h = \frac{6}{L^2} = \frac{6L}{L^3} = \frac{2L}{2+\sqrt{2}} = (2 - \sqrt{2})L \approx 1.27$ m.
6. Si la cara de la hipotenusa quedara abierta, $S = L^2 + \frac{12}{L}$ y el mínimo estaría en $L = \sqrt[3]{6}$ m.

Ejercicio 2C.6.4 ← volver



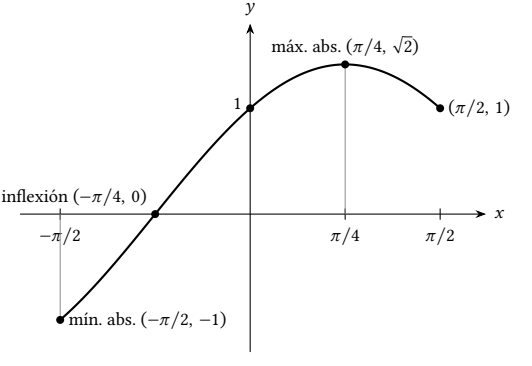
1. **Variables.** La recta corta los ejes en $(a, 0)$ y $(0, b)$, con $a, b > 0$; su ecuación es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
2. **Restricción.** Pasa por $(2, 3)$: $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{3a}{a-2}$, con $a > 2$ para que $b > 0$.
3. **Función objetivo:** $A = \frac{ab}{2} = \frac{3a^2}{2(a-2)}$, $a > 2$.
4. **Crítico:**
$$A'(a) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a(a-2) - a^2}{(a-2)^2} = \frac{3a(a-4)}{2(a-2)^2} = 0 \Rightarrow a = 4.$$
5. **Justificación:** para $2 < a < 4$, $A' < 0$; para $a > 4$, $A' > 0$: mínimo.
6. $b = \frac{12}{2} = 6$ y $A = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$. La recta es $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, y $(2, 3)$ es el punto medio del segmento entre los ejes.

Ejercicio 2C.6.5 ← volver

1. A está en la gráfica: $g(1) = a + b = 2$.
2. Inflexión en $x = 1$: $g''(x) = 6ax + 2b$ y $g''(1) = 6a + 2b = 0$, es decir, $b = -3a$.
3. Sustituyendo: $a - 3a = 2 \Rightarrow a = -1$ y $b = 3$.
4. Comprobación: $g(x) = -x^3 + 3x^2$, $g''(x) = -6x + 6$ cambia de + a − en $x = 1$, y $g(1) = 2$. Es inflexión.

Ejercicio 2C.6.6 ← volver

1. a) $m'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$, que existe siempre. $m'(x) = 0 \iff \tan x = 1$; en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la única solución es $x = \frac{\pi}{4}$.
2. b) m es continua en el intervalo cerrado (teorema de Weierstrass). Valores:
$$m\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$
Máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$; mínimo absoluto -1 en $-\frac{\pi}{2}$.
3. c) $m''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x = -m(x)$; se anula donde $\tan x = -1$: $x = -\frac{\pi}{4}$. Para $x < -\frac{\pi}{4}$, $m < 0$ y $m'' > 0$ (cóncava hacia arriba); para $x > -\frac{\pi}{4}$, $m'' < 0$ (hacia abajo). Inflexión en $\left(-\frac{\pi}{4}, m\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.
4. d) Además $m(0) = 1$. La gráfica sube de $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ a $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y baja a $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.



Ejercicio 2C.10.1 · Terreno junto a un río ← volver

1. Variables: x, los dos lados perpendiculares al río, y y, el lado paralelo. Restricción: $2x + y = 240 \Rightarrow y = 240 - 2x$.
2. Objetivo: $A(x) = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2$, con dominio $0 < x < 120$.
3. Crítico: $A'(x) = 240 - 4x = 0 \Rightarrow x = 60$. Como $A''(x) = -4 < 0$, es un máximo.
4. $y = 240 - 120 = 120$ y $A = 60 \cdot 120 = 7200\ \text{m}^2$.

Ejercicio 2C.10.2 · La caja de volumen máximo ← volver

1. $V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$.
2. En $(0, 15)$, $30 - 2x > 0$; el único crítico es $x = 5$.
3. Signo de V': positivo en $(0, 5)$ y negativo en $(5, 15)$. Por el criterio de la primera derivada, $x = 5$ es un máximo.
4. $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000\ \text{cm}^3$.

E.3A · Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas

Ejercicio 3A.6.1 ← volver

1. $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$, $f(x_i) = 2 + \frac{2i}{n}$.
2. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\, n + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 4 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

3. $\lim_{n\to\infty} S_n = 4 + 2 = 6$.
4. Comprobación: $\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^3 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$.
5. $\int_1^3 (x + 1)\, \mathrm{d}x = 6$.

Ejercicio 3A.6.2 ← volver

1. $f(t) = \cos t$; límite superior $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$; límite inferior $h(x) = x$, $h'(x) = 1$.
2. TFC: $F'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x - \cos x \cdot 1$.
3. Comprobación: $F(x) = \operatorname{sen} t\big|_x^{x^2} = \operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen} x$, cuya derivada es $2x\cos(x^2) - \cos x$.
4. $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$.

Ejercicio 3A.6.3 ← volver

1. Con $u = 1 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-2\sqrt{1-x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. $\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^b = 2 - 2\sqrt{1-b}$.

3. $2 - 2\sqrt{1-b} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$.
4. $b = \frac{3}{4} < 1$: el integrando es continuo en $[0, \frac{3}{4}]$.
5. $b = \frac{3}{4}$.

Ejercicio 3A.6.4 ← volver

1. Con $u = \operatorname{sen} x$, $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$: $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\,\mathrm{d}x = e^{\operatorname{sen} x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$.
2. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \cos x\,\mathrm{d}x = e^{\operatorname{sen}(\pi/2)} - e^{\operatorname{sen} 0} = e - 1$.
3. $\bar{f} = \dfrac{e-1}{\pi/2} = \dfrac{2(e-1)}{\pi}$.

Ejercicio 3A.6.5 ← volver

1. En $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \geq 0$, así que $|\tan x| = \tan x$.
2. Con $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$$

   Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
3. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.
4. **a)** $\bar{f} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln 2}{\pi/4} = \dfrac{2\ln 2}{\pi}$.
5. **b)** $\tan c = \frac{2\ln 2}{\pi} \Rightarrow c = \operatorname{ang}\tan\frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$, que está en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \approx [0,\ 0.785]$.

Ejercicio 3A.10.1 · Sumas por la derecha y por la izquierda ← volver

1. $\Delta x = \frac{1}{4}$; puntos $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.
2. Derecha: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16}\right) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$.
3. Izquierda: $\frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right) = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$.
4. $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Como f es creciente en $[0,1]$, la suma por la derecha la sobrestima y la de la izquierda la subestima: $\frac{7}{32} < \frac{1}{3} < \frac{15}{32}$.

Ejercicio 3A.10.2 · La suma por la derecha con cien rectángulos ← volver

1. $S_{100} = \frac{101\cdot 201}{6\cdot 10\,000} = \frac{20\,301}{60\,000} = \frac{6767}{20\,000} = 0.33835$.
2. $S_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$.
3. Es $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$: con 100 rectángulos el error es menor que 0.006.

E.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo

Ejercicio 3B.6.1 ← volver

1. Cortes: $4x^3 = 8x^2 \Rightarrow 4x^2(x-2) = 0$, así que $x = 0$ (raíz doble: las curvas se tocan) y $x = 2$.
2. En $x = 1$: $8x^2 = 8 > 4 = 4x^3$; arriba está la parábola.
3. $A = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\mathrm{d}x = \left(\frac{8}{3}x^3 - x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{64}{3} - 16$.
4. $A = \frac{16}{3}\,[u^2]$.

Ejercicio 3B.6.2 ← volver

1. Región: entre el eje y y la curva $x = y^3$, para $0 \le y \le 1$. Toca el eje de giro.
2. Discos horizontales de radio $R = y^3$: $V = \pi \int_0^1 y^6 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{7}$.
3. Comprobación con capas: $2\pi \int_0^1 x\left(1 - x^{1/3}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.
4. $V = \frac{\pi}{7}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.3 ← volver

1. El sólido es como un tronco de cono curvo: radio 1 en $x = 0$ y $\frac{1}{2}$ en $x = \ln 2$. Discos verticales de radio $R = e^{-x}$.
2. $V = \pi \int_0^{\ln 2} e^{-2x}\mathrm{d}x = \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$.
3. $V = \frac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.4 ← volver

1. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 6\theta$; $r^2 + (r')^2 = 9\theta^4 + 36\theta^2 = 9\theta^2(\theta^2 + 4)$.
2. Con $\theta \ge 0$, la raíz es $3\theta\sqrt{\theta^2+4}$: $L = \int_0^{\pi} 3\theta\sqrt{\theta^2+4}\,\mathrm{d}\theta$.
3. Con $u = \theta^2 + 4$, $\mathrm{d}u = 2\theta\mathrm{d}\theta$: $L = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_4^{\pi^2+4} = (\pi^2+4)^{3/2} - 8$.
4. $L = (\pi^2+4)^{3/2} - 8\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\theta^2+4)^{3/2} = 3\theta\sqrt{\theta^2+4}$.

Ejercicio 3B.6.5 ← volver

1. $f'(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{x}$; $[f'(x)]^2 = 4x$.
2. $L = \int_0^{1/4}\sqrt{1+4x}\,\mathrm{d}x$. Con $u = 1 + 4x$: $L = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.
3. $L = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{6}(1+4x)^{3/2} = \sqrt{1+4x}$.

Ejercicio 3B.10.1 · El mismo resorte, en un tramo ← volver

1. $W = \int_{0.2}^{0.4} 50x\,\mathrm{d}x = 25x^2\Big|_{0.2}^{0.4} = 25(0.16 - 0.04)$.
2. $W = 25(0.12) = 3$ **J.** Es más que el trabajo de 0 a 0.2 (1 J): el resorte se resiste más mientras más se estira.

Ejercicio 3B.10.2 · Vaciar un tanque cilíndrico ← volver

1. Eje y vertical, con $y = 0$ en el fondo. La capa a la altura y, de grosor $\mathrm{d}y$, tiene volumen $\pi(1)^2\mathrm{d}y$ y peso $\rho g\pi\,\mathrm{d}y = 9810\pi\,\mathrm{d}y$ newtons.
2. Esa capa sube $3 - y$ metros hasta el borde: su trabajo es $9810\pi(3-y)\,\mathrm{d}y$.

3. Suma de todas las capas:

$$W = 9810\pi \int_0^3 (3-y)\,\mathrm{d}y = 9810\pi \left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3 = 9810\pi \cdot \frac{9}{2}.$$

4. $W = 44\,145\pi$ **J** $\approx 138\,686$ **J.**

E.3C · Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia

Ejercicio 3C.6.1 ← volver

1. En $x = 5$ el denominador se anula y $\ln(x-5) \to -\infty$: $\int_5^6 = \lim_{t\to 5^+} \int_t^6$.
2. Con $u = \ln(x-5)$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x-5}$:

$$\int \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln^2(x-5) + C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{1}{4}\ln^2(x-5)\right]' = \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}$.
3. Evaluación: $\lim_{t\to 5^+}\left[\frac{1}{4}\ln^2 1 - \frac{1}{4}\ln^2(t-5)\right] = 0 - \infty$.
4. **La integral diverge.**

Ejercicio 3C.10.1 · Una exponencial decreciente ← volver

1. $\int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}\,\mathrm{d}x$; antiderivada $-\frac{1}{2}e^{-2x}$.
2. $\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2}$.
3. **La integral converge y vale $\frac{1}{2}$.**

Ejercicio 3C.10.2 · Una integral p que diverge ← volver

1. $\int_1^b x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\big|_1^b = 2\sqrt{b} - 2$.
2. $\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b} - 2\right) = \infty$.
3. **La integral diverge.** Coincide con el criterio p: $p = \frac{1}{2} \le 1$.

E.4A · Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

Ejercicio 4A.6.1 ← volver

1. Partes con $u = \operatorname{sen}(\ln x)$, $\mathrm{d}u = \frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$:

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

2. Otra vez partes, con $u = \cos(\ln x)$, $v = x$:

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I$$

3. Integral cíclica: $I = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$, de donde $2I = x\big[\,\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big]$.
4. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\big[\,\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + C$. Comprobación:

$$\tfrac{1}{2}\big[\,\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + \tfrac{1}{2}\big[\,\cos(\ln x) + \mathrm{sen}(\ln x)\big] = \mathrm{sen}(\ln x)$$

Ejercicio 4A.6.2 ← volver

1. Partes con $u = (\ln x)^2$, $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$I = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x\,\mathrm{d}x$$

2. Partes otra vez, con $u = \ln x$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

3. $\int x(\ln x)^2\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$. Comprobación: $x(\ln x)^2 + x\ln x - x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x(\ln x)^2$.

Ejercicio 4A.6.3 ← volver

1. Se desarrolla el cuadrado y se usa $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$(\tan x - \sec x)^2 = 2\sec^2 x - 1 - 2\sec x \tan x$$

2. Las tres son inmediatas: $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x$, $\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x$.
3. $\int(\tan x - \sec x)^2\mathrm{d}x = 2\tan x - 2\sec x - x + C$. Comprobación: $2\sec^2 x - 2\sec x\tan x - 1 = \tan^2 x - 2\sec x\tan x + \sec^2 x$.

Ejercicio 4A.6.4 ← volver

1. $\frac{1}{\sec(x^2)} = \cos(x^2)$. Con $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$:

$$I = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}^2 u \cos u\,\mathrm{d}u$$

2. Potencia impar del coseno (exponente 1): $w = \mathrm{sen}\,u$, $\mathrm{d}w = \cos u\,\mathrm{d}u$; $\frac{1}{2}\int w^2\mathrm{d}w = \frac{1}{6}w^3$.
3. $\int \frac{x\,\mathrm{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}^3(x^2) + C$. Comprobación: $\frac{1}{6}\cdot 3\,\mathrm{sen}^2(x^2)\cos(x^2)\cdot 2x = x\,\mathrm{sen}^2(x^2)\cos(x^2)$.

Ejercicio 4A.6.5 ← volver

1. El cuadrado ya está completo: $u = x + 3$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, y queda $\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+9)^{3/2}}$.
2. Raíz de $u^2 + a^2$ con $a = 3$: $u = 3\tan\theta$, $\mathrm{d}u = 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{u^2+9} = 3\sec\theta$.

$$I = \int \frac{3\sec^2\theta}{27\sec^3\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\,\mathrm{sen}\,\theta + C$$

3. Triángulo: opuesto u, adyacente 3, hipotenusa $\sqrt{u^2+9}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+9}}$.
4. $I = \frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$. Comprobación (en u): $\frac{1}{9}\cdot\frac{(u^2+9)-u^2}{(u^2+9)^{3/2}} = \frac{1}{(u^2+9)^{3/2}}$.

Ejercicio 4A.6.6 ← volver

1. $u = e^x$, $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$: $I = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(u-1)}$, racional.
2. $\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$, es decir, $1 = A(u^2+1) + (Bu+C)(u-1)$.
3. Con $u = 1$: $A = \frac{1}{2}$. Coeficiente de u^2: $A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Término independiente: $A - C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.
4. Integrando: $\frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln(u^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} u$.
5. $I = \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} e^x + C$. Comprobación (en u):

$$\frac{1}{2(u-1)} - \frac{u+1}{2(u^2+1)} = \frac{(u^2+1)-(u^2-1)}{2(u-1)(u^2+1)} = \frac{1}{(u-1)(u^2+1)}$$

Ejercicio 4A.6.7 ← volver

1. Raíz de x^2+a^2 con $a = 2$: $x = 2\tan\theta$, $\mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{x^2+4} = 2\sec\theta$.
2. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C \end{aligned}$$

3. Triángulo: opuesto x, adyacente 2, hipotenusa $\sqrt{x^2+4}$; $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$. Comprobación:

$$-\frac{1}{4x^2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

Ejercicio 4A.6.8 ← volver

1. Se cambia toda la raíz: $u = \sqrt{e^{2x}-1}$, $u^2 = e^{2x}-1$, $2u\,\mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x$, así que $\mathrm{d}x = \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1}$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \operatorname{ang\,tan} u + C$$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1} + C$. Comprobación: $\frac{1}{1+(e^{2x}-1)}\cdot\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Ejercicio 4A.10.1 · Partes en una integral impropia ← volver

1. Partes con $u = x$, $\mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = -e^{-x}$.
2. $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$. Comprobación: $\left[-(x+1)e^{-x}\right]' = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x}$.

3. Impropia (Parte 3C): $\lim_{b\to\infty}\left[-(b+1)e^{-b}+1\right] = 0+1$, porque $\frac{b+1}{e^b} \to 0$ (L'Hôpital, Parte 2B).
4. **La integral converge y vale 1.**

E.4B · Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor

Ejercicio 4B.6.1 ← volver

1. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{3}.$$
2. $|x-4|<3 \Rightarrow 1<x<7$. Centro 4, radio 3.
3. $x=7$: $\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$, serie p con $p=2$: converge.
4. $x=1$: $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, que converge absolutamente por el paso anterior.
5. **Intervalo de convergencia:** $1 \le x \le 7$**.**

Ejercicio 4B.6.2 ← volver

1. Es alternada con $b_n = \frac{1}{n+\sqrt[1]{7}} = 7^{-1/(n+1)} > 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 7^0 = 1 \neq 0$: no se cumple la segunda condición de Leibniz.
3. Además b_n crece (el exponente $-\frac{1}{n+1}$ aumenta hacia 0), así que tampoco decrece.
4. Los términos $a_n = (-1)^{n+1}b_n$ oscilan cerca de 1 y -1: $\lim a_n$ no existe.
5. **La serie diverge por el criterio del término** n**-ésimo.**

Ejercicio 4B.6.3 ← volver

1. $0.777\ldots = \frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.
2. Geométrica con $a=\frac{7}{10}$ y $r=\frac{1}{10}$; como $|r|<1$, converge.
3. Suma: $\dfrac{7/10}{1-1/10} = \dfrac{7/10}{9/10} = \dfrac{7}{9}$.
4. **Converge y** $0.777\ldots = \frac{7}{9}$**.** Comprobación: $9\cdot 0.777\ldots = 7.000\ldots$

Ejercicio 4B.6.4 ← volver

1. Simplifica: $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x)$.
2. Derivadas: $f' = \frac{1}{3}(1+x)^{-1}$, $f'' = -\frac{1}{3}(1+x)^{-2}$, $f''' = \frac{2}{3}(1+x)^{-3}$. En general,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3(1+x)^n},$$
y $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3}$, con $f(0)=0$.
3. Coeficiente: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$.
4. $\ln\sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{3n} = \frac{x}{3}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{9}-\ldots$, que es un tercio de la serie de $\ln(1+x)$ (sección 4B.4) y converge en $(-1,1]$.

Ejercicio 4B.6.5 ← volver

1. Como $(x-1)^2 = (1-x)^2$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. Serie conocida: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$. Derivando término a término:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

3. Por derivadas da lo mismo: $g^{(n)}(0) = \frac{(n+1)!}{2}$, y $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n+1}{2}$.
4. $g(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \ldots$, para $-1 < x < 1$. Comprobación: $g(0) = \frac{1}{2}$, que es el primer término.

Ejercicio 4B.10.1 · Una serie con logaritmo ← volver

1. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ es continua, positiva y decreciente en $[2, \infty)$ (el denominador crece).
2. Con $u = \ln x$: $\displaystyle\int_2^b \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^b = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \to \infty$.
3. **La serie diverge**, por el criterio de la integral. (El cociente da $L = 1$ y no decide.)

Ejercicio 4B.10.2 · Una serie con exponencial ← volver

1. $f(x) = x e^{-x^2}$ es continua y positiva; $f'(x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) < 0$ para $x \geq 1$: es decreciente.
2. Con $u = x^2$: $\displaystyle\int_1^{\infty} x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right)\Big|_1^b = 0 + \frac{1}{2e}$.
3. **La serie converge.**

Ejercicio 4B.10.3 · El error de la aproximación del péndulo ← volver

1. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$ Para $x = 0.1$ es una serie alternada cuyos términos decrecen a cero: cumple Leibniz.
2. Al cortar en x, el primer término omitido es $\frac{x^3}{6} = \frac{0.001}{6} \approx 1.67 \times 10^{-4}$: el error es menor que eso.
3. El error verdadero es $0.1 - \operatorname{sen} 0.1 \approx 1.666 \times 10^{-4}$, justo debajo de la cota.