Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de la asignatura

- Programa de estudio de *Álgebra* del Plan 2010 (primer semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Siete temas: introducción, números reales, complejos, polinomios, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, y estructuras algebraicas.
- Programa de estudio de *Álgebra* del Plan 2016 (primer semestre, 8 créditos, 64 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Seis temas: trigonometría, números reales, complejos, polinomios, sistemas de ecuaciones, y matrices y determinantes.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Exámenes finales colegiados de la asignatura, sin resolución publicada: 17 del Plan 2010 (10 aplicaciones, de 2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (21 aplicaciones, de 2016-2 a 2026-1), más tres exámenes parciales del Plan 2016 (2024-1 y 2026-2). En cada ejercicio de este cuaderno se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2013-2, tipo A, problema 3». Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias.

Plan 2010. Complementaria

- Ayres, F. *Álgebra moderna*. México: McGraw-Hill, 1992.
- Barrera G., F. y Castañeda de I. P., É. *Cuaderno de ejercicios de álgebra. 1.ª parte*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 1994.
- Godínez C., H. y Herrera C., A. *Álgebra lineal. Teoría y ejercicios*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 1987.
- Martin-Gay, K. E. *Introductory and Intermediate Algebra*. Canadá: Prentice-Hall, 1999.
- Velázquez Torres, J. *Fascículo de inducción matemática*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2000.
- Williams, G. *Linear Algebra with Applications*. EUA: Jones and Bartlett, 2005.

Plan 2016. Básica (además de Rees, 2012; Solar y Speziale, *Álgebra I*, 2004; y Swokowski, 2007)

- Andrade, A. y Castañeda, É. *Antecedentes de geometría y trigonometría*. México: Trillas y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2010.
- León Cárdenas, J. *Álgebra*. México: Grupo Editorial Patria, 2011.

Plan 2016. Complementaria (además de Velázquez, 2008; y Williams, 8.ª ed., 2014)

- Arzamendi P., S. R. y otros. *Cuaderno de ejercicios de álgebra*, 2.ª ed. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2011.
- Kaufmann, J. E. y otros. *Álgebra*, 8.ª ed. México: Thomson Cengage Learning, 2010.
- Lehmann, C. H. *Álgebra*. México: Limusa Noriega Editores, 2011.
- Stewart, J. y otros. *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, 5.ª ed. México: Thomson Cengage Learning, 2007.

La notación de este cuaderno ($z = r \operatorname{cis} \theta$ con el ángulo en grados, $A^* = \bar{A}^T$, «compatible determinado», $(A, *)$ para un sistema algebraico) es la de los enunciados de los exámenes.

2. $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1(a-2) - 3(a^2+2) + (-1)(a+1) = -3a^2 - 9.$
3. $|A| = -a(-3a^2 - 9) = 3a(a^2+3)$.
4. $3a(a^2+3) = 0$: $a = 0$ o $a^2 = -3$, es decir, $a = 0$, $a = \pm\sqrt{3}\,i$.

Ejercicio 6.6.6 ← volver

1. $\operatorname{tr} A = 1 - 1 = 0$, y $\frac{1}{\det B}\operatorname{adj} B = B^{-1}$. La ecuación queda $B^{-1}A^* = B^{-1}AX - CX = (B^{-1}A - C)X$.
2. $B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3i & 3 \end{bmatrix}$, así que $B^{-1}A - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.
3. Entonces $X = B^{-1}A^*$, con $A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
4. $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

E.7 · Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010)

Ejercicio 7.6.1 ← volver

1. a) $9 = 3\cdot 3$ y $6 = 3\cdot 2$ están en T: $9 \star 6 = 9 + 6 + 4 = 19$. También $3 \star 3 = 3 + 3 + 4 = 10$. En cambio, 1 no es múltiplo de 3, así que $1 \star 6$ no está definida.
2. b) Con $x = 3m$ y $y = 3n$: $x \star y = 3(m+n) + 4$, que deja residuo 1 al dividirse entre 3, así que nunca está en T. Contraejemplo: $9 \star 6 = 19 \notin T$. **No es cerrada**.
3. c) $x + y + 4 = y + x + 4$: **es conmutativa**.

Ejercicio 7.6.2 ← volver

1. **Cerradura.** Se cumple: $a + d$ y $ad - b$ son reales.
2. **Asociatividad.** No se cumple. Con $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,1)$: $[(1,0) * (0,1)] * (0,1) = (2,1) * (0,1) = (3,1)$, mientras que $(1,0) * [(0,1) * (0,1)] = (1,0) * (1,-1) = (0,-1)$.
3. **Idéntico.** No se cumple: $(a,b) * (e_1,e_2) = (a + e_2,\ ae_2 - b) = (a,b)$ exige $e_2 = 0$, y entonces $-b = b$ para todo b, imposible.
4. **Inversos.** No se cumple: no hay idéntico.
5. Además no es conmutativa: $(1,0) * (0,1) = (2,1)$ y $(0,1) * (1,0) = (0,-1)$.
6. **Conclusión:** $(B, *)$ no es un grupo.

Ejercicio 7.6.3 ← volver

1. **Cerradura.** Se cumple en $\mathbb{Q}$.
2. **Asociatividad.** Se cumple: los dos lados dan $x + y + z + \frac{xy+xz+yz}{3} + \frac{xyz}{9}$.
3. **Idéntico.** $x + e + \frac{xe}{3} = x$ da $e\left(1 + \frac{x}{3}\right) = 0$ para todo x: $e = 0$.
4. **Inversos.** No se cumple: $x + x' + \frac{xx'}{3} = 0$ da $x' = \frac{-3x}{x+3}$, que no existe para $x = -3$; en efecto, $(-3) \odot y = -3$ para todo y.
5. **Conmutatividad.** Se cumple.

3. Por la identidad pitagórica, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$: **sí es identidad**.

E.2 · Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. Término general $\frac{2}{2^{n-1}}$; el sumando nuevo es $\frac{2}{2^k}$.
2. **Base** ($n = 1$): izquierdo $\frac{2}{2^0} = 2$; derecho $2\left[\frac{1}{1}\right] = 2$. Se cumple.
3. **Hipótesis:** $2 + 1 + \cdots + \frac{2}{2^{k-1}} = \frac{2(2^k-1)}{2^{k-1}}$. **Tesis:** $2 + 1 + \cdots + \frac{2}{2^k} = \frac{2(2^{k+1}-1)}{2^k}$.
4. **Paso inductivo**, con denominador común 2^k:

$$\frac{2(2^k-1)}{2^{k-1}} + \frac{2}{2^k} = \frac{4(2^k-1)+2}{2^k} = \frac{2^{k+2}-2}{2^k} = \frac{2(2^{k+1}-1)}{2^k}.$$

5. **Conclusión:** por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. Término general $a + (n-1)d$; el sumando nuevo es $a + kd$.
2. **Base** ($n = 1$): izquierdo a; derecho $\frac{1}{2}(2a) = a$. Se cumple.
3. **Hipótesis:** la suma de los k primeros es $\frac{k}{2}[2a + (k-1)d]$. **Tesis:** la de los $k+1$ primeros es $\frac{k+1}{2}[2a + kd]$.
4. **Paso inductivo:**

$$\frac{k}{2}[2a + (k-1)d] + a + kd = \frac{2ak + k^2d - kd + 2a + 2kd}{2}$$
$$= \frac{2a(k+1) + kd(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}[2a + kd].$$

5. **Conclusión:** por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. Se simplifica el lado derecho: $-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = -\frac{1}{4\cdot 5^n}$, así que $P(n)$ dice $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^n}$.
2. **Base** ($n = 1$): izquierdo $\frac{1}{5}$; derecho $\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Se cumple.
3. **Hipótesis:** $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^k}$. **Tesis:** $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^{k+1}}$.
4. **Paso inductivo**, con denominador común $4 \cdot 5^{k+1}$:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^k} + \frac{1}{5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{5-4}{4\cdot 5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^{k+1}}$$
$$= -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+2} + \frac{1}{4}.$$

5. **Conclusión:** por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

$2 + (3k-1) = 3k+1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & k-4 & 1 \\ 0 & 0 & 3(k-1)(k-2) & 3k+1 \end{array}\right]$$

3. Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, hay tres pivotes: **a) compatible determinado.**
4. Si $k = 1$, el renglón es $0 = 4$; si $k = 2$, es $0 = 7$: **b) incompatible para $k = 1$ y $k = 2$.** Ningún valor da un sistema indeterminado.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. Se pone primero la cuarta ecuación y se escalona la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_1]{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3+2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tres pivotes y cuatro incógnitas: una libre, $d = t$.
3. $-c - 6t = 0 \Rightarrow c = -6t$; $-3b + 6t + 9t = 0 \Rightarrow b = 5t$; $a = -b + 3t = -2t$.
4. **Conjunto solución:** $\{(-2t, 5t, -6t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$**.** Comprobación con $t = 1$ en la primera: $-4 - 5 + 6 + 3 = 0$.

E.6 · Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes

Ejercicio 6.6.1 ← volver

1. $\det C = 0 - (i)(-i) = i^2 = -1$; $\operatorname{tr} B = 8$.
2. $XB - 8XA = \det(C)\, C = -C$, o sea $X(B - 8A) = -C$.
3. $B - 8A = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $\det = 160$, $(B-8A)^{-1} = \dfrac{1}{160}\begin{bmatrix} 0 & 20 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix}$.
4. $X = -C(B-8A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{20} & 0 \\ 0 & \frac{i}{8} \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.6.2 ← volver

1. $(B+D)X = C^T - A$. X es de 3×2.
2. $B + D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; por el primer renglón, $\det(B+D) = 7(2-3) = -7$.

4. Raíces cuartas de 1: $\operatorname{cis}(90^\circ k)$, $k = 0, 1, 2, 3$: $1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. Lectura: $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 120^\circ$; $z_2 = 4\sqrt{2}\operatorname{cis} 225^\circ = -4 - 4i$; $z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis} 315^\circ = 1 - i$.
2. $z_2 - 2\bar{z}_3 = -4 - 4i - 2 - 2i = -6 - 6i$; por $e^{\pi i} = -1$, el denominador es $6 + 6i = 6\sqrt{2}\operatorname{cis} 45^\circ$.
3. Numerador: $6 \cdot 2\operatorname{cis} 120^\circ \cdot \sqrt{2}\operatorname{cis} 315^\circ = 12\sqrt{2}\operatorname{cis} 435^\circ = 12\sqrt{2}\operatorname{cis} 75^\circ$.
4. $w^{2/3} = 2\operatorname{cis} 30^\circ \Rightarrow w = \sqrt{(2\operatorname{cis} 30^\circ)^3} = \sqrt{8\operatorname{cis} 90^\circ}$.
5. Raíces cuadradas: módulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, argumentos 45° y 225°: $w = 2 + 2i$, $w = -2 - 2i$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. $z_1 = 20\operatorname{cis} 180^\circ$; $z_3 = 16\operatorname{cis} 60^\circ$ ($r = \sqrt{64 + 192} = 16$, primer cuadrante, $\tan\theta = \sqrt{3}$).
2. $z_2 z_3 z_4 = 5 \cdot 16 \cdot 4\operatorname{cis}(45^\circ + 60^\circ + 135^\circ) = 320\operatorname{cis} 240^\circ$.
3. $z^4 = \dfrac{320\operatorname{cis} 240^\circ}{20\operatorname{cis} 180^\circ} = 16\operatorname{cis} 60^\circ$.
4. Raíces cuartas: módulo 2, argumentos $15^\circ + 90^\circ k$.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. $z_3 - \bar{z}_4 = -3 - (-3 - 4i) = 4i$; $(4i)^3 = 64\operatorname{cis} 270^\circ$.
2. $z_1 = 2\operatorname{cis} 135^\circ$ y $z_2 = 8\operatorname{cis} 45^\circ$: $z_1 z_2 = 16\operatorname{cis} 180^\circ$.
3. $z^{3/2} = 4\operatorname{cis} 90^\circ \Rightarrow z = \sqrt[3]{(4\operatorname{cis} 90^\circ)^2} = \sqrt[3]{16\operatorname{cis} 180^\circ}$.
4. Módulo $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; argumentos $60^\circ + 120^\circ k$.

E.4 · Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. Cuatro cruces simples: grado 4, $q(x) = a\,x(x+3)(x+1)(x-2)$.
2. Punto $(1, -8)$: $a\,(1)(4)(2)(-1) = -8a = -8$, $a = 1$.
3. $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2)$. Como $(x+3)(x+1)(x-2) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $q(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. $h(x) = x^2\, g(x)$, con $g(x) = x^4 + (2-i)x^3 + (-3-2i)x^2 + (-6+3i)x + 6i$. $x = 0$ es raíz doble.
2. Coeficientes complejos: solo se divide entre $x - i$:

	1	$2-i$	$-3-2i$	$-6+3i$	$6i$
i		i	$2i$	$-3i$	$-6i$
	1	2	-3	-6	0

3. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = x^2(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(x^2-3)$.
4. Raíces: 0 (doble), i, -2, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; $h(x) = x^2(x-i)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. Las raíces de f son las de p junto con las de q. De p: $x = \pm i$.

Periodo	Examen	Versiones	Problemas
Plan 2010			
2010-1	2º final	A	6
2010-2	1er final	matutino (A) y vespertino	6
2010-2	2º final	única	7
2011-1	1er final	A	6
2013-1	1er final	A, B	6
2013-1	2º final	A, B	6
2013-2	1er final	A, B	6
2013-2	2º final	A, B	6
2014-1	1er final	A, B	6
2014-1	2º final	A, B	6
Plan 2016			
2016-2	1er final	A, B, C, D	6
2016-2	2º final	única	6
2017-1	1er final	A, B, C, D	6
2017-1	2º final	única	6
2017-2	1er final	A, B (matutino); C, D (vespertino)	6
2017-2	2º final	A, C	6
2018-1	1er final	A, B, C, D	6
2018-1	2º final	única	6
2018-2	1er final	A, B, C, D	6
2018-2	2º final	única	6
2019-1	1er final	A, B	6
2019-1	2º final	única	6
2019-2	1er final	A, C	6 y 7
2019-2	2º final	única	6
2020-1	1er final	A, C	6
2020-1	2º final	única	6
2020-2	1er final	A, C	6
2024-1	2º final	única	6
2024-2	2º final	única	7
2025-2	1er final	B	6
2026-1	2º final	única	6

Duración: dos horas y media hasta 2011-1 y dos horas desde 2013-1. Ningún examen permite calculadora.

Series de ejercicios. Para la Unidad 7 se usó también la serie de ejercicios del tema 7 (estructuras algebraicas) que acompañaba al programa de 2008.

Bibliografía de los programas

Plan 2010. Básica

- Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. México: Fondo de Cultura Económica, 1995.
- Sestier, A. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. México: Limusa, 1996.
- Rees, P. K. *Álgebra*. México: Reverté, 2000.
- Solar G., E. y Speziale de G., L. *Álgebra I*, 3.ª ed. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- Solar G., E. y Speziale de G., L. *Apuntes de Álgebra Lineal*, 3.ª ed. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1999.
- Swokowski, E. W. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson, 2007.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016)

Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. Factor común: $\operatorname{sen}\alpha\,(2\cos\alpha+1)=0$.
2. $\operatorname{sen}\alpha=0$: 0°, 180° y 360°; el 0° queda fuera de $(0^\circ, 360^\circ]$.
3. $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$: referencia 60°, cuadrantes II y III: 120° y 240°.
4. $\alpha\in\{120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ,\ 360^\circ\}$.

Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. Se divide entre 8 y, como aparece $\cos x$, se usa $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$: $2\cos^2 x-1=\cos x-1$.
2. $2\cos^2 x-\cos x=0$, es decir, $\cos x\,(2\cos x-1)=0$.
3. $\cos x=0$: 90° y 270°.
4. $\cos x=\frac{1}{2}$: referencia 60°, cuadrantes I y IV: 60° y 300°.
5. $x\in\{60^\circ,\ 90^\circ,\ 270^\circ,\ 300^\circ\}$.

Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. $3\sec^2 x=4$, así que $\sec^2 x=\frac{4}{3}$ y $\cos^2 x=\frac{3}{4}$: $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$: referencia $\frac{\pi}{6}$; en $[0,\pi]$ (cuadrantes I y II) solo $x=\frac{\pi}{6}$.
3. $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$: en $[0,\pi]$, cuadrante II: $x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.
4. $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. Ley de cosenos para el ángulo en P: $3^2=4^2+5^2-2(4)(5)\cos P$, de donde $\cos P=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$.
2. (También: $3^2+4^2=5^2$, así que el triángulo es rectángulo en Q y $\cos P=\frac{4}{5}$.)
3. En el triángulo rectángulo PDQ, $x=PQ\cos P=4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$.

Ejercicio 1B.6.5

← volver

1. Cada hora del reloj corresponde a $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$. A las 5:00 el minutero apunta al 12 y el horario al 5: forman $5\cdot 30^\circ=150^\circ$.
2. Ley de cosenos: $d^2=10^2+7^2-2(10)(7)\cos 150^\circ=149-140\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=149+70\sqrt{3}$.
3. $d=\sqrt{149+70\sqrt{3}}$ **cm**.

Ejercicio 1B.6.6

← volver

1. Diferencia de cubos: $\cot^3 x-1=(\cot x-1)(\cot^2 x+\cot x+1)$.
2. El lado izquierdo queda $\cot^2 x+\cot x+1-\cot x=\cot^2 x+1$.

6. **Conclusión:** $(\mathbb{Q},\odot)$ no es un grupo abeliano.

Ejercicio 7.6.4

← volver

1. La segunda operación es $\oplus$. Idéntico: $x+e+xe=x$ da $e(1+x)=0$ para todo x, así que $e=0$.
2. Inverso: $x+x'+xx'=0$ da $x'(1+x)=-x$, es decir, $x'=\dfrac{-x}{1+x}$.
3. No existe para $x=-1$. Es lo esperado: el cero del campo es el idéntico de la primera operación ($x+e+1=x$ da $e=-1$), y el cero no tiene inverso para la segunda.
4. Comprobación con $x=1$: $x'=-\frac{1}{2}$ y $1+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

Ejercicio 7.6.5

← volver

1. Idéntico de $\odot$: $a+e-\sqrt{5}=a$ da $e=\sqrt{5}$.
2. Un isomorfismo lleva el idéntico al idéntico: el de $*$ es $f(\sqrt{5})=10^{\sqrt{5}}$.
3. Comprobación: la operación inducida es $x*y=\dfrac{xy}{10^{\sqrt{5}}}$, porque $10^{a+b-\sqrt{5}}=\frac{10^a\,10^b}{10^{\sqrt{5}}}$; y $x*10^{\sqrt{5}}=x$.

Ejercicio 7.6.6

← volver

1. a) $(A\triangle B)\triangle C=(A+B+I)+C+I=A+B+C+2I$ y $A\triangle(B\triangle C)=A+(B+C+I)+I=A+B+C+2I$: **es asociativa**.
2. b) Idéntico: $A+E+I=A$ da $E=-I=\operatorname{diag}(-1,-1)$, que está en M.
3. Inverso: $A+A'+I=-I$ da $A'=-A-2I=\operatorname{diag}(-a-2,\ -b-2)$, con entradas enteras: está en M.
4. Comprobación: $\operatorname{diag}(a,b)+\operatorname{diag}(-a-2,-b-2)+I=\operatorname{diag}(-1,-1)=-I$.

Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. Se multiplica por 4 (positivo, no cambia el sentido): $20 - x > -24$.
2. Se resta 20: $-x > -44$.
3. Se multiplica por -1 y se invierte el sentido: $x < 44$.
4. Resultado: $x \in (-\infty, 44)$.

Ejercicio 2.6.5 ← volver

1. Restricción: $x \neq -\frac{1}{5}$.
2. Igual que en el ejercicio 2.5.7: $|3x-2| > 3|5x+1| \iff (3x-2)^2 > (15x+3)^2 \iff (12x+5)(18x+1) < 0$.
3. El producto es negativo entre las raíces: $-\frac{5}{12} < x < -\frac{1}{18}$.
4. Se quita $x = -\frac{1}{5}$, que está en ese intervalo y anula el denominador.
5. Resultado: $x \in \left(-\frac{5}{12}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{18}\right)$.

Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. Restricción: $x \neq 4$.
2. $|2x+6| < 2|x-4| \iff (2x+6)^2 < (2x-8)^2$.
3. Diferencia de cuadrados: $(2x+6-2x+8)(2x+6+2x-8) = 14(4x-2) < 0$.
4. Como $14 > 0$: $4x - 2 < 0$, es decir, $x < \frac{1}{2}$. El valor excluido $x = 4$ ya queda fuera.
5. Comprobación con $x = 0$: $\left|\frac{6}{-4}\right| = \frac{3}{2} < 2$. Se cumple.
6. Resultado: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

E.3 · Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. Lectura: $z_1 = i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = 2\,\mathrm{cis}(270^\circ - 30^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,240^\circ$; $z_4 = \sqrt{8}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 2 - 2i$.
2. $2z_2 - z_4 = 2 + 6i - 2 + 2i = 8i$ y $\frac{8i}{i} = 8$.
3. $z_3^3 = 8\,\mathrm{cis}\,720^\circ = 8$.
4. $8z^4 = 8 \Rightarrow z^4 = 1 = \mathrm{cis}\,0^\circ$; raíces cuartas: $\mathrm{cis}(90^\circ k)$.
5. **Resultado:** $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. $z_2 - \bar{z}_3 = -3 - (-3 + 6i) = -6i = 6\,\mathrm{cis}\,270^\circ$; numerador: $6\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,270^\circ$.
2. $i^{17} = i = \mathrm{cis}\,90^\circ$; denominador: $2\,\mathrm{cis}\,135^\circ \cdot \mathrm{cis}\,90^\circ = 2\,\mathrm{cis}\,225^\circ$.
3. Lado derecho: $3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$. Como $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$, $w^{3/2} = 3$.
4. $w = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9\,\mathrm{cis}\,0^\circ}$: módulo $\sqrt[3]{9}$, argumentos $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. $i^7 = i^3 = -i = \mathrm{cis}\,270^\circ$; $(-i)(2\,\mathrm{cis}\,60^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,330^\circ = \sqrt{3} - i$.
2. Numerador: $(\sqrt{3} - i) + (-\sqrt{3} + 2i) = i$. Denominador: $-\,\mathrm{cis}\,270^\circ = -(-i) = i$.
3. $z^{4/3} = 1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{1^3} = \sqrt[4]{\mathrm{cis}\,0^\circ}$.

3. Cofactores: $C_{11} = -1$, $C_{12} = 1$, $C_{13} = 2$; $C_{21} = 0$, $C_{22} = 7$, $C_{23} = -21$; $C_{31} = 0$, $C_{32} = -7$, $C_{33} = 14$. Entonces
$$(B+D)^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -7 \\ 2 & -21 & 14 \end{bmatrix}.$$
4. $C^T - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$.
5. $X = (B+D)^{-1}(C^T - A) = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -7 & 23 \\ 14 & -17 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -23 \\ -14 & 17 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.6.3 ← volver

1. Lado izquierdo: $\left(\frac{1}{4}X^T + \frac{i}{4}A^*\right)^T = \frac{1}{4}X + \frac{i}{4}(A^*)^T = \frac{1}{4}X + \frac{i}{4}\bar{A}$.
2. $\det B = 1$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ y $\det(2B^{-1}) = 2^2 \cdot 1 = 4$.
3. $\frac{1}{4}X + \frac{i}{4}\bar{A} = \frac{1}{4}B^{-1}$, así que $X = B^{-1} - i\bar{A}$.
4. $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$, $i\bar{A} = \begin{bmatrix} i+1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
5. $X = \begin{bmatrix} 1-1-i & 0 \\ -3 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.6.4 ← volver

1. Se multiplica por C a la izquierda: $R = C(A - B)$.
2. $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -5 \\ 11 & 18 & 19 \end{bmatrix}$ y
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -5 \\ 11 & 18 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$
3. $\det R = 1(27-32) - 1(18-20) + 1(16-15) = -5 + 2 + 1 = -2 \neq 0$; también $\det R = \det C \det(A - B) = 1(-2)$.
4. Cofactores: $C_{11} = -5$, $C_{12} = 2$, $C_{13} = 1$; $C_{21} = -1$, $C_{22} = 4$, $C_{23} = -3$; $C_{31} = 1$, $C_{32} = -2$, $C_{33} = 1$.
5. Transpuesta de los cofactores: $\mathrm{adj}\,R = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Comprobación: $R\ \mathrm{adj}\,R = -2I$.

Ejercicio 6.6.5 ← volver

1. La columna 2 solo tiene a en la posición $(3,2)$: $|A| = (-1)^{3+2} a\, M_{32} = -a\, M_{32}$.

2. $q(x) = x^3(x^3 - 3x^2 - 9x + 20)$: $x = 0$ triple.
3. Candidatos de $x^3 - 3x^2 - 9x + 20$: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$. Con $x = 4$:

	1	−3	−9	20
4		4	4	−20
	1	1	−5	0

4. $x^2 + x - 5 = 0$: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.
5. Son 8 raíces, el grado de f.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. $g(x) = x^3\, q(x)$, $q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$; $x = 0$ triple.
2. $q(x)$: signos $+\ -\ +\ -\ +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 positivas. $q(-x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$: 0 cambios, ninguna negativa.
3. Posibilidades: $(4, 0, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(0, 0, 4)$.
4. Se prueban solo candidatos positivos $(1, 2)$:

	1	−3	3	−3	2
1		1	−2	1	−2
2	1	−2	1	−2	0
		2	0	2	
	1	0	1	0	

5. $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la posibilidad $(2, 0, 2)$.
6. $g(x) = x^3(x - 1)(x - 2)(x - i)(x + i)$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. $p(1) = A + 2 - B + 2 = -4 \Rightarrow A - B = -8$.
2. $p(2) = 8A + 8 - 2B + 2 = 0 \Rightarrow 8A - 2B = -10 \Rightarrow 4A - B = -5$.
3. Restando la primera de la segunda: $3A = 3$, $A = 1$, $B = 9$.
4. $p(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 2$, con raíz $x = 2$ (dato $p(2) = 0$):

	1	2	−9	2
2		2	8	−2
	1	4	−1	0

5. $x^2 + 4x - 1 = 0$: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. Coeficientes complejos: se divide solo entre $x - (1 - 3i)$:

	1	$-1 + 3i$	5	$-5 + 15i$	4	$-4 + 12i$
$1 - 3i$		$1 - 3i$	0	$5 - 15i$	0	$4 - 12i$
	1	0	5	0	4	0

2. Cociente bicuadrado: $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$.
3. $x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$; $x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$.
4. Raíces: $1 - 3i$, i, $-i$, $2i$, $-2i$.

E.5 · Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. x, y, z: cajas de A, B y C. Ecuaciones: $x + y + z = 65$; $x = y + z - 5$, o sea, $x - y - z = -5$; $17x + 30y + 48z = 1830$.
2. Sumando las dos primeras: $2x = 60 \Rightarrow x = 30$. Entonces $y + z = 35$.
3. En la tercera: $510 + 30y + 48z = 1830 \Rightarrow 30y + 48z = 1320$. Con $y = 35 - z$: $1050 + 18z = 1320 \Rightarrow z = 15$, $y = 20$.
4. **30 cajas de A, 20 de B y 15 de C.** Comprobación: $510 + 600 + 720 = 1830$.

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. x, y, z: conchas, panqués y cocoles. Ecuaciones: $x + y + z = 120$; $x + y = 2z$; $3x + 5y + 3z = 420$.
2. Sustituyendo la segunda en la primera: $2z + z = 120 \Rightarrow z = 40$; entonces $x + y = 80$.
3. En la tercera: $3x + 5y + 120 = 420 \Rightarrow 3x + 5y = 300$. Con $x = 80 - y$: $240 + 2y = 300 \Rightarrow y = 30$, $x = 50$.
4. **50 conchas, 30 panqués y 40 cocoles.** Comprobación: $150 + 150 + 120 = 420$.

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. a, b, c: inversiones de tipo A, B y C. Ecuaciones: $c = a + b - 10$; $a = 2b$; $a + b + c = 500$.
2. Sustituyendo la primera en la tercera: $2(a + b) - 10 = 500 \Rightarrow a + b = 255$.
3. Con $a = 2b$: $3b = 255 \Rightarrow b = 85$, $a = 170$, $c = 255 - 10 = 245$.
4. **170 del tipo A, 85 del B y 245 del C.**

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   La tercera ecuación es el triple de la primera: compatible indeterminado.
2. Con $c = t$: $-7b + 5t = -5 \Rightarrow b = \frac{5+5t}{7}$; $a = 2 - 2b + t = \frac{14-10-10t+7t}{7} = \frac{4-3t}{7}$.
3. **a)** $(a, b, c) = \left(\frac{4-3t}{7}, \frac{5+5t}{7}, t\right)$**. b) Con** $t = -1$**:** $(1, 0, -1)$**.** Comprobación: $1 + 0 + 1 = 2$, $4 + 0 - 1 = 3$.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. Se pone primero la segunda ecuación:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & k & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - kR_1]{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & k - 4 & 1 \\ 0 & 3k - 1 & 2k + 1 & 1 \end{array}\right]$$

2. Para no dividir entre $3k - 1$ se hace $2R_3 + (3k - 1)R_2$. El tercer coeficiente es $2(2k + 1) + (3k - 1)(k - 4) = 3k^2 - 9k + 6 = 3(k - 1)(k - 2)$ y el término independiente es