CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Álgebra

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.4.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Introducción al Álgebra (solo Plan 2010) 8

Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016) 10

Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades 20

Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones 31

Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes 41

Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros 53

Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes 64

Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010) 76

Apéndice A · Formulario 86

Apéndice B · Exámenes 89

Apéndice C · Fe de erratas 95

Apéndice D · Fuentes 97

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 100

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Álgebra** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sirve a los dos planes de estudio con los que se imparte la asignatura:

- **Plan 2010**, con el programa aprobado en 2008: siete temas, de la introducción a las estructuras algebraicas.
- **Plan 2016**: seis temas. Empieza con trigonometría y no incluye estructuras algebraicas, que pasaron a Álgebra Lineal.

Los temas 2 a 6 son los mismos en los dos planes. El cuaderno sigue ese orden y agrega, marcadas, las unidades que son de un solo plan:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y **qué plan es el tuyo**.
1. Parte A: introducción al Álgebra (solo Plan 2010). Parte B: trigonometría (solo Plan 2016).
2. Números reales: inducción matemática y desigualdades.
3. Números complejos.
4. Polinomios.
5. Sistemas de ecuaciones lineales.
6. Matrices y determinantes.
7. Estructuras algebraicas (solo Plan 2010).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa).

- *Plan 2010:* «El alumno analizará y aplicará los conceptos de los sistemas numéricos para utilizarlos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, polinomios, matrices, determinantes y estructuras algebraicas, para que de manera conjunta estos conceptos permitan al alumno iniciar el estudio de la física y la matemática aplicada.»
- *Plan 2016:* «El alumno analizará las propiedades de los sistemas numéricos y las utilizará en la resolución de problemas de polinomios, sistemas de ecuaciones lineales y matrices y determinantes, para que de manera conjunta estos conceptos le permitan iniciar el estudio de la física y la matemática aplicada.»

De dónde salen los ejercicios.

- Se revisaron los **58 exámenes finales publicados** de la asignatura: 17 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), más 3 exámenes parciales del Plan 2016. Varios tienen versiones A, B, C y D o de turno matutino y vespertino.
- Ninguno tiene resolución publicada. **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.
- Los ejercicios de la Unidad 7 vienen de los finales del Plan 2010 y de la serie de ejercicios de ese tema que acompañaba al programa.

Sin calculadora. Todos los exámenes lo prohíben. Por eso las resoluciones usan aritmética exacta: fracciones, radicales y ángulos notables.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Formato de cada resolución. Planteamiento → pasos numerados → **resultado** en negritas. Las demostraciones por inducción siguen siempre el orden proposición, base, hipótesis, paso inductivo y conclusión. Las de estructuras algebraicas revisan una propiedad por renglón, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 dice qué unidades estudiar según tu plan y propone, para cada plan, una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

> **Instrucciones de emergencia**
>
> - **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
> - **Para qué:** saber qué plan es el tuyo, qué unidades estudiar y en qué orden.
> - Si eres de la Generación 2027 o posterior, tu plan es el 2026: usa *Curso de Emergencia, Álgebra y Geometría Analítica*.

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

Álgebra se imparte con dos programas. Los temas 2 a 6 son los mismos; cambian el primero y el último.

- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

	Plan 2010	Plan 2016
Estudia	Unidades 2 a 7; lee la 1A (una página)	Unidades 1B y 2 a 6
No estudies	Unidad 1B	Unidades 1A y 7
El examen trae	números reales, complejos, polinomios, sistema de ecuaciones, matrices y una estructura algebraica	trigonometría, números reales, complejos, polinomios, sistema de ecuaciones y matrices

Las unidades de un solo plan lo dicen en su título y en su recuadro de instrucciones.

0.2 Cómo es el examen

Según los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1):

- **Duración:** 2 horas (2.5 horas hasta 2011-1).
- **Problemas:** 6 (en contados exámenes, 7), de 10 a 20 puntos cada uno, que suman 100.
- **Material:** ninguno. Las instrucciones dicen «No se permite el uso de calculadora». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{6^n-1}{5}$, $2\operatorname{cis}135°$, $\sqrt{3}$. No hace falta sacar decimales.
- **Plantilla fija:** un problema por unidad y siempre en el mismo orden.
  - Plan 2010: (1) números reales, (2) complejos, (3) polinomios, (4) sistema de ecuaciones, (5) matrices, (6) estructura algebraica.
  - Plan 2016: (1) trigonometría, (2) números reales, (3) complejos, (4) polinomios, (5) sistema de ecuaciones, (6) matrices.
- **Demostraciones:** el problema de números reales es, la mitad de las veces, una demostración por inducción. Se califica la estructura (base, hipótesis y paso inductivo), no solo el resultado.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en los finales publicados. Las versiones del mismo examen (tipos A a D, turnos) cuentan por separado: 17 versiones de 10 aplicaciones en el Plan 2010 y 41 versiones de 21 aplicaciones en el Plan 2016.

Unidad	Tema	Plan 2010	Plan 2016
1A	Introducción al Álgebra	0 de 17	—
1B	Trigonometría: ecuaciones, triángulos, identidades	—	**40 de 41**
2	Inducción matemática y desigualdades	**17 de 17**	**41 de 41**
3	Números complejos	**17 de 17**	**41 de 41**
4	Polinomios	**17 de 17**	**41 de 41**
5	Sistemas de ecuaciones lineales	**17 de 17**	**41 de 41**
6	Matrices y determinantes	**17 de 17**	**41 de 41**
7	Estructuras algebraicas	**17 de 17**	—

Observaciones:

- Todas las unidades de tu plan salen en todos los exámenes, una vez cada una: **cada unidad vale alrededor de un sexto del examen**. No hay unidades que se puedan saltar; la diferencia está en los subtemas.
- Lo que más sale dentro de cada unidad:
  - Unidad 1B: ecuaciones trigonométricas (20 de 40) y triángulos o figuras (14 de 40).
  - Unidad 2: inducción (10 de 17 en el Plan 2010; 23 de 41 en el Plan 2016); el resto, desigualdades.
  - Unidad 3: una ecuación en los complejos que pide pasar entre las formas binómica, polar y exponencial; a menudo con datos en el diagrama de Argand.
  - Unidad 4: raíces de un polinomio a partir de una raíz o un factor dado.
  - Unidad 5: el problema de planteamiento (12 de 17 en el Plan 2010) y el sistema con parámetro (21 de 41 en el Plan 2016).
  - Unidad 6: una ecuación matricial (16 de 17 y 30 de 41).
  - Unidad 7: «¿es grupo?» y los idénticos e inversos de una operación.
- Del programa casi no se evalúan: la historia del Álgebra, los postulados de Peano y la construcción de los enteros y los racionales, el método de condensación y la regla de Cramer. Se mencionan, pero no se desarrollan.
- **Para el Plan 2010:** desde 2016 solo se publican exámenes del Plan 2016. Sus problemas de las unidades 2 a 6 son la referencia más reciente para los dos planes; por eso el cuaderno usa los dos bancos.

0.4 Orden de estudio

Como todas las unidades pesan lo mismo, el orden va por facilidad y por dependencia: el método de Gauss (Unidad 5) se usa en la Unidad 6, y la tabla de ángulos notables (sección

1B.1) en la forma polar de la Unidad 3. El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar así:

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	Unidad 0 y Unidad 5	Unidad 0 y Unidad 5
2	Unidad 6	Unidad 6
3	Tabla de ángulos notables (1B.1) y Unidad 3	Unidad 1B y Unidad 3
4	Unidades 4 y 2	Unidades 4 y 2
5	Unidad 7 y simulacro (Apéndice B)	Simulacro (Apéndice B)

Ruta de 2 semanas.

- **Plan 2010.** Primera semana: Unidades 5, 6, 3 y 7. Segunda semana: Unidades 4 y 2 y un simulacro. La Unidad 7 va pronto porque su procedimiento es mecánico (una propiedad por renglón) y vale un sexto del examen.
- **Plan 2016.** Primera semana: Unidades 5, 6 y 1B. Segunda semana: Unidades 3, 4 y 2 y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

1. las conversiones de forma que no pide el enunciado (Unidad 3);
2. la cota de raíces (Unidad 4);
3. los determinantes de orden 5 (Unidad 6);
4. los isomorfismos (Unidad 7).

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por el sistema de ecuaciones y la ecuación matricial: son procedimientos largos pero seguros.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: la hipótesis de inducción, el sistema con sus incógnitas definidas, la ecuación matricial despejada con letras.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.
5. Comprueba al final: sustituye la solución del sistema en las tres ecuaciones, multiplica la matriz por su inversa, evalúa el polinomio en las raíces que encontraste.

0.6 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

Unidad 1 · Parte A · Introducción al Álgebra (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno conocerá la importancia de los conocimientos del Álgebra a través de la historia, para comprender los fundamentos de la matemática utilizada en ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 la Unidad 1 es Trigonometría: salta a la Parte B.
- **Frecuencia:** no aparece en ninguno de los 17 finales del Plan 2010.
- **Tiempo:** 10 minutos de lectura. No tiene ejercicios.

1A.1 Qué es el Álgebra

El Álgebra estudia las operaciones y sus propiedades. Empezó como el arte de resolver ecuaciones y hoy estudia las estructuras que forman los conjuntos con sus operaciones.

- **Origen del nombre.** En el siglo IX, al-Juarismi escribió un tratado sobre cómo resolver ecuaciones por *al-jabr* (pasar un término restado al otro lado) y *al-muqabala* (reducir términos semejantes). De *al-jabr* viene «álgebra»; de su nombre, «algoritmo».
- **Las ecuaciones.** Los babilonios ya resolvían problemas que hoy son ecuaciones de segundo grado. En el siglo XVI, los matemáticos italianos encontraron las fórmulas para las de tercer y cuarto grado, y para escribirlas tuvieron que aceptar las raíces de números negativos: así nacieron los números complejos (Unidad 3).
- **La notación.** Vieta usó letras para las cantidades conocidas y Descartes fijó la costumbre de x, y, z para las incógnitas. Su regla de los signos se usa en la Unidad 4.
- **Los sistemas y las matrices.** Gauss sistematizó la eliminación que lleva su nombre (Unidad 5); en el siglo XIX, Cayley y Sylvester crearon el álgebra de matrices y los determinantes (Unidad 6).
- **Las estructuras.** Galois demostró que las ecuaciones de grado cinco o mayor no tienen una fórmula general con radicales, y para hacerlo estudió los grupos. De ahí viene el álgebra moderna: grupos, anillos y campos (Unidad 7).
- **Los números.** A finales del siglo XIX, Peano dio los axiomas de los números naturales y Dedekind construyó los reales. Esa construcción ordena la Unidad 2: de los naturales a los enteros, los racionales y los reales.

1A.2 Por qué importa en ingeniería

Cada unidad de este cuaderno es una herramienta que se usa después:

- la inducción, para demostrar que un algoritmo es correcto para cualquier tamaño de entrada;
- los números complejos, en circuitos de corriente alterna y en señales;
- los polinomios, en control y en interpolación;

- los sistemas de ecuaciones y las matrices, en casi todo: circuitos, estructuras, gráficos por computadora y métodos numéricos;
- las estructuras algebraicas, en criptografía, códigos de corrección de errores y teoría de la computación.

Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno reforzará los conceptos de trigonometría para lograr una mejor comprensión del álgebra.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2016. En el Plan 2010 la trigonometría no está en el programa: salta a la Unidad 2. La tabla de ángulos notables (sección 1B.1) sirve a todos para la forma polar de la Unidad 3.
- **Frecuencia:** aparece en 40 de los 41 finales del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1), casi siempre como problema 1, con un valor de 10 a 15 puntos. De esos 40 problemas, 20 son ecuaciones trigonométricas, 14 son triángulos o figuras (Pitágoras, ley de senos, ley de cosenos, perímetros, áreas, distancias), 4 son identidades y 2 piden evaluar una expresión con ángulos notables.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Aprende de memoria la tabla de la sección 1B.1 y las identidades del formulario 1B.8 (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 1B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1B.5.2, 1B.5.3, 1B.5.5 y 1B.5.6 con cronómetro (12 min cada uno).

1B.1 Conceptos y expresiones

Medida de ángulos. Un ángulo se mide en grados o en radianes: $180^\circ = \pi$ rad, así que $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$. El intervalo que pide el enunciado decide la unidad de la respuesta: $[0^\circ, 360^\circ)$ en grados, $[0, \pi]$ o $[-\pi, \pi]$ en radianes.

Funciones de un ángulo cualquiera. Se coloca el ángulo θ en posición normal (vértice en el origen, lado inicial sobre el eje x positivo) y se toma un punto (x, y) de su lado terminal, a distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del origen:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}.$$

En el triángulo rectángulo. Si θ es un ángulo agudo, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ y $\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$. El teorema de Pitágoras relaciona los lados: $a^2 + b^2 = c^2$, con c la hipotenusa.

Signos por cuadrante. El signo de cada función depende del cuadrante en el que cae el lado terminal (r siempre es positivo).

Cuadrante	I	II	III	IV
Ángulos	0° a 90°	90° a 180°	180° a 270°	270° a 360°
Positivas	todas	sen, csc	tan, cot	cos, sec

Ángulos notables. Sin calculadora, los valores exactos salen de esta tabla.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Para 180°, 270° y 360° basta el punto del lado terminal: $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(1,0)$. Así, $\operatorname{sen} 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{sen} 270^\circ = -1$ y $\cos 270^\circ = 0$.

Reducción al primer cuadrante. El *ángulo de referencia* θ_r es el ángulo agudo entre el lado terminal y el eje x. La función de θ vale lo mismo que la de θ_r, con el signo del cuadrante:

$$\text{II: } \theta_r = 180^\circ - \theta, \qquad \text{III: } \theta_r = \theta - 180^\circ, \qquad \text{IV: } \theta_r = 360^\circ - \theta.$$

Por ejemplo, $\cos 315^\circ = +\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cuarto cuadrante) y $\csc 330^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 330^\circ} = \frac{1}{-\operatorname{sen} 30^\circ} = -2$. A un ángulo negativo o mayor que 360° se le suman o restan vueltas completas: -60° y 300° tienen las mismas funciones.

Identidades fundamentales. Son igualdades que se cumplen para todo ángulo en el que ambos lados están definidos.

- Recíprocas y de cociente: $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.
- Pitagóricas: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.
- Suma y diferencia: $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ y $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
- Ángulo doble: $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.
- Ángulo mitad (para $\frac{x}{2}$): $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ y $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$.

Triángulos oblicuángulos. En un triángulo cualquiera con lados a, b, c opuestos a los ángulos A, B, C:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \text{(ley de senos)},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \text{(ley de cosenos)}.$$

Los ángulos interiores suman 180° y el área es $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$ (la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que forman).

Caso ambiguo. Si se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, la ley de senos da $\operatorname{sen} B$, y hay dos ángulos con ese seno: B y $180^\circ - B$. Se acepta cada uno solo si los ángulos del triángulo siguen sumando menos de 180°. Si el ángulo dado es obtuso, el otro ángulo es forzosamente agudo y la solución es única.

1B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determinar el valor de x» en una expresión con $\operatorname{sen} 315^\circ$, $\csc 330^\circ$, $\cos 180^\circ$…	Reducir al primer cuadrante y sustituir la tabla (1B.3.1)
«Valores de x en $[0^\circ, 360^\circ)$ que satisfacen…» con $\sec^2$, $\tan^2$, $\cos 2x$, $\cos^2$	Ecuación trigonométrica: una sola función, factorizar, listar ángulos (1B.3.2)
Triángulo con un ángulo recto o una altura marcada	Funciones en el triángulo rectángulo y Pitágoras (1B.3.3)
Triángulo con un ángulo obtuso, dos lados y un ángulo, o tres lados	Ley de senos o ley de cosenos (1B.3.3)
«Perímetro», «área», «altura», «distancia» en una figura	Resolver el triángulo y después sumar o multiplicar (1B.3.3)
Cubo, prisma o figura en el espacio	Buscar el triángulo plano que contiene al ángulo (1B.3.5)
«Compruebe», «verifique» o «demuestre» una igualdad	Identidad: transformar un solo lado hasta llegar al otro (1B.3.4)

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 Evaluar una expresión con ángulos notables

1. Para cada función, ubica el cuadrante y el ángulo de referencia.
2. Escribe el valor de la tabla con el signo del cuadrante. Las recíprocas (csc, sec, cot) se invierten al final.
3. Sustituye y simplifica con fracciones y radicales. Si la incógnita aparece multiplicando, despéjala al final.

1B.3.2 Resolver una ecuación trigonométrica

1. Pasa todo a **una sola función** con las identidades: $\sec^2 = 1 + \tan^2$, $\csc^2 = 1 + \cot^2$, $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ si aparece $\operatorname{sen} x$, o $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ si aparece $\cos x$.
2. Iguala a cero y factoriza (factor común o trinomio en $u = \cos x$ o $u = \operatorname{sen} x$). **No dividas** entre $\operatorname{sen} x$ ni $\cos x$: se pierden soluciones.
3. Cada factor da un valor básico: descarta los imposibles ($\operatorname{sen} x = -2$, $\cos x = 3$).
4. Para cada valor, busca el ángulo de referencia y los dos cuadrantes donde la función tiene ese signo.
5. Lista los ángulos **dentro del intervalo pedido**: revisa si sus extremos están incluidos ($(0^\circ, 360^\circ]$ incluye 360° y excluye 0°).

6. Comprueba un valor en la ecuación original, sobre todo si había sec, csc, tan o cot, que no existen en algunos ángulos.

1B.3.3 Resolver un triángulo

1. Marca en la figura lo que se conoce y lo que se pide. Nombra los lados con la letra minúscula del vértice opuesto.
2. Si hay un ángulo recto (o una altura), usa sen, cos, tan y Pitágoras en ese triángulo rectángulo.
3. Si no lo hay: con **dos lados y el ángulo entre ellos** o con **tres lados**, ley de cosenos; con **un lado y su ángulo opuesto** conocidos, ley de senos.
4. Si la ley de senos da un ángulo, revisa el caso ambiguo (sección 1B.1).
5. Perímetro: suma de los tres lados. Área: $\frac{1}{2}ab\,\operatorname{sen} C$ o $\frac{1}{2}\cdot$ base $\cdot$ altura.

1B.3.4 Comprobar una identidad

1. Elige el lado más complicado y transfórmalo; el otro no se toca.
2. Escribe todo en senos y cosenos.
3. Suma fracciones con común denominador, factoriza (diferencia de cuadrados, diferencia de cubos) y aplica $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$.
4. Termina cuando llegues exactamente al otro lado. **No pases términos de un lado al otro**: eso supone que la igualdad ya es cierta.

1B.3.5 Figuras en el espacio

1. Identifica los tres puntos del triángulo que contiene al ángulo pedido.
2. Calcula sus lados con Pitágoras: la diagonal de una cara de un cubo de arista a mide $a\sqrt{2}$ y la diagonal del cubo, $a\sqrt{3}$.
3. Si el triángulo resulta equilátero, rectángulo o isósceles, el ángulo sale directo; si no, aplica la ley de cosenos.

1B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Ecuación de segundo grado en coseno

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 1.

Resuelva la ecuación $2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1 = 0$ en el intervalo $(0^\circ, 360^\circ]$.

Resolución.

1. La ecuación ya tiene una sola función. Con $u = \cos\alpha$ queda $2u^2 + 3u + 1 = 0$.
2. Se factoriza: $(2u+1)(u+1) = 0$, así que $u = -\frac{1}{2}$ o $u = -1$.
3. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$: el ángulo de referencia es 60° y el coseno es negativo en los cuadrantes II y III, así que $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ y $\alpha = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.
4. $\cos\alpha = -1$: $\alpha = 180^\circ$.
5. Los tres ángulos están en $(0^\circ, 360^\circ]$. Comprobación con 120°: $2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$.
6. $\alpha \in \{120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ\}$.

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Expresión con ángulos notables

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 1.

Determine el valor de $x \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$x\sqrt{2}\cos 315^\circ + x\sqrt{2}\,\operatorname{sen} 135^\circ + 2\csc 330^\circ = \frac{4\operatorname{sen} 180^\circ \cos 30^\circ + 4\cos 180^\circ \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ}.$$

Resolución.

1. $\cos 315^\circ$: cuarto cuadrante, referencia 45°, coseno positivo: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\operatorname{sen} 135^\circ$: segundo cuadrante, referencia 45°, seno positivo: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\csc 330^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 330^\circ} = \frac{1}{-1/2} = -2$.
4. Lado izquierdo: $x\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + x\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2(-2) = x + x - 4 = 2x - 4$.
5. Lado derecho, con $\operatorname{sen} 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$: $\frac{0+4(-1)\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = -2$.
6. $2x - 4 = -2$, de donde $x = \mathbf{1}$.

Ejercicio 1B.5.2 · Ecuación con secante y tangente

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores de $\theta \in (0^\circ, 360^\circ]$ que satisfacen $2\sec^2\theta - 3 = \tan^2\theta$.

Resolución.

1. Una sola función con $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$: $2(1 + \tan^2\theta) - 3 = \tan^2\theta$.
2. $2 + 2\tan^2\theta - 3 = \tan^2\theta$, es decir, $\tan^2\theta = 1$ y $\tan\theta = \pm 1$.
3. $\tan\theta = 1$: referencia 45°, cuadrantes I y III: 45° y 225°.
4. $\tan\theta = -1$: cuadrantes II y IV: 135° y 315°.
5. En ninguno de los cuatro ángulos se anula el coseno, así que $\sec\theta$ y $\tan\theta$ existen.
6. $\theta \in \{45^\circ,\ 135^\circ,\ 225^\circ,\ 315^\circ\}$.

Ejercicio 1B.5.3 · Ecuación con ángulo doble

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores de $x \in [0^\circ, 360^\circ]$ que satisfacen $\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$.

Resolución.

1. Como aparece $\operatorname{sen} x$, se usa $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$: $1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$.
2. $-2\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x = 0$, o sea, $-2\operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x + 2) = 0$.
3. $\operatorname{sen} x + 2 = 0$ da $\operatorname{sen} x = -2$: imposible, porque el seno está entre -1 y 1.
4. $\operatorname{sen} x = 0$: $x = 0^\circ$, 180° y 360°. Los dos extremos entran porque el intervalo es cerrado.
5. Comprobación con 180°: $\cos 360^\circ = 1$ y $1 + 4\operatorname{sen} 180^\circ = 1$.
6. $x \in \{0^\circ,\ 180^\circ,\ 360^\circ\}$.

Ejercicio 1B.5.4 · Ecuación en radianes

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1.

Obtenga los valores de θ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ que satisfacen $4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 2 = 0$.

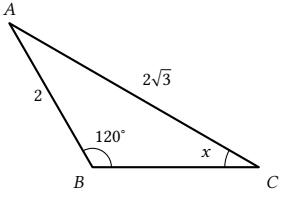
Resolución.

1. Se divide entre 2 y se toma $u = \cos\theta$: $2u^2 - u - 1 = 0$, que se factoriza como $(2u + 1)(u - 1) = 0$.
2. $\cos\theta = 1$: en $[-\pi, \pi]$ solo $\theta = 0$.
3. $\cos\theta = -\frac{1}{2}$: referencia $\frac{\pi}{3}$, coseno negativo en los cuadrantes II y III. En $[-\pi, \pi]$ el cuadrante III se escribe con ángulo negativo: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ y $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.
4. $\theta \in \left\{-\frac{2\pi}{3},\ 0,\ \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Ejercicio 1B.5.5 · Ley de senos con ángulo obtuso

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 1.

En el triángulo ABC de la figura, $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ y el ángulo en B mide 120°. Determine el ángulo x en el vértice C.



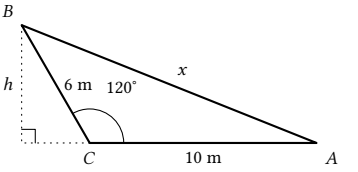
Resolución.

1. Se conoce el lado $AC = 2\sqrt{3}$ con su ángulo opuesto $B = 120^\circ$, y el lado $AB = 2$, opuesto a x: ley de senos.
2. $\frac{\operatorname{sen} x}{2} = \frac{\operatorname{sen} 120^\circ}{2\sqrt{3}}$, con $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\operatorname{sen} x = \frac{2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$.
4. Caso ambiguo: $x = 30^\circ$ o $x = 150^\circ$. Como $B = 120^\circ$ ya es obtuso, x es agudo.
5. $x = 30^\circ$. (El tercer ángulo también mide 30°: el triángulo es isósceles con $BC = 2$.)

Ejercicio 1B.5.6 · Ley de cosenos: perímetro y altura

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 1.

En el triángulo ABC de la figura, $CB = 6$ m, $CA = 10$ m y el ángulo en C mide 120°. La altura h es la distancia de B a la prolongación del lado CA. Determine: a) el perímetro del triángulo; b) la altura h.



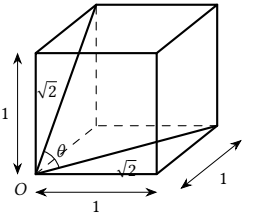
Resolución.

1. Dos lados y el ángulo entre ellos: ley de cosenos para $x = AB$.
2. $x^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos 120^\circ = 136 - 120\left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, así que $x = 14$ m.
3. a) Perímetro: $6 + 10 + 14 = \mathbf{30\ m}$.
4. b) La altura forma un triángulo rectángulo con hipotenusa $CB = 6$ y el ángulo exterior en C, $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
5. $h = 6\,\mathrm{sen}\,60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \mathbf{m}$.

Ejercicio 1B.5.7 · Ángulo en un cubo

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo A, problema 1.

En un cubo de arista 1 se trazan, desde un vértice O, la diagonal de la cara lateral y la diagonal de la base que salen de O (véase la figura); θ es el ángulo entre ellas. Obtenga el valor de $\tan^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta$.



Resolución.

1. Cada diagonal de cara mide $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
2. El tercer lado del triángulo une los extremos de las dos diagonales y es la diagonal de la cara posterior: también mide $\sqrt{2}$.
3. El triángulo es equilátero, así que $\theta = 60^\circ$.
4. $\tan^2 60^\circ + 4\,\mathrm{sen}^2\,60^\circ = (\sqrt{3})^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 + 3 = \mathbf{6}$.

Ejercicio 1B.5.8 · Identidad con fracciones

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 1.

Compruebe que

$$\frac{\tan x}{1 + \sec x} - \frac{2}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{-1 - \cos x}{\mathrm{sen}\,x}.$$

Resolución.

1. Se transforma el lado izquierdo. En senos y cosenos: $\frac{\tan x}{1+\sec x} = \frac{\operatorname{sen} x/\cos x}{(\cos x+1)/\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.
2. Se multiplica por $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$: $\frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
3. Con el común denominador $\operatorname{sen} x$: $\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos x-2}{\operatorname{sen} x} = \frac{-1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
4. Se llegó al lado derecho: **la identidad se cumple** (donde $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ y $\cos x \neq -1$: en $\cos x = 0$ no están definidas $\tan x$ ni $\sec x$).

1B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1B**.

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 1.

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 0$ en el intervalo $(0^\circ, 360^\circ]$.

Resultado: $\alpha \in \{120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ,\ 360^\circ\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 1.

Determine todos los valores de $x \in [0^\circ, 360^\circ)$ que satisfacen $8\cos 2x = 8\cos x - 8$.

Resultado: $x \in \{60^\circ,\ 90^\circ,\ 270^\circ,\ 300^\circ\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo C, problema 1.

Obtenga la solución de la ecuación $2\sec^2 x - 3 = 1 - \sec^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

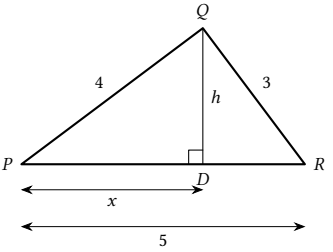
Resultado: $x \in \left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 1.

En el triángulo PQR de la figura, $PQ = 4$, $QR = 3$ y $PR = 5$. La altura QD cae sobre el lado PR. Calcule la longitud $x = PD$.



Resultado: $x = \frac{16}{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: 1er parcial 2026-2, tipo B, problema 1.

En un reloj, el minutero mide 10 cm y el horario 7 cm. Calcule la distancia entre los extremos de las manecillas cuando el reloj marca exactamente las 5:00.

Resultado: $d = \sqrt{149 + 70\sqrt{3}}$ cm.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.6

Adaptado de: 1er parcial 2026-2, tipo B, problema 2.

Determine si la siguiente igualdad es una identidad:

$$\frac{\cot^3 x - 1}{\cot x - 1} - \cot x = \csc^2 x.$$

Resultado: Sí es identidad (donde $\cot x \neq 1$ y $\operatorname{sen} x \neq 0$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

1B.7 Errores frecuentes

- **Dividir entre** $\operatorname{sen} x$ **o** $\cos x$**.** Se pierden las soluciones en las que ese factor vale cero. Se factoriza y se iguala cada factor a cero.
- **Olvidar el segundo ángulo.** Cada valor de sen, cos o tan (distinto de ± 1 y de 0) da *dos* ángulos por vuelta.
- **No respetar el intervalo.** $(0^\circ, 360^\circ]$ incluye 360° y no 0°; $[-\pi, \pi]$ pide ángulos negativos y en radianes.
- **Elegir la forma equivocada de** $\cos 2x$**.** Si en la ecuación aparece $\operatorname{sen} x$, usa $1 - 2\operatorname{sen}^2 x$; si aparece $\cos x$, usa $2\cos^2 x - 1$.
- **Signo de** $\cos C$ **en la ley de cosenos.** Con C obtuso, $\cos C$ es negativo y el término $-2ab\cos C$ *suma*.
- **Ignorar el caso ambiguo.** La ley de senos da un seno; el ángulo puede ser agudo u obtuso.

- **Mover términos en una identidad.** Se transforma un solo lado; pasar términos de un lado al otro supone lo que se quiere demostrar.

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $180^\circ = \pi$; tabla de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (sección 1B.1). Positivas: I todas, II sen, III tan, IV cos.
- Ángulo de referencia: II $180^\circ - \theta$, III $\theta - 180^\circ$, IV $360^\circ - \theta$.
- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.
- $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.
- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
- $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; área $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$.
- Cubo de arista a: diagonal de cara $a\sqrt{2}$, diagonal del cubo $a\sqrt{3}$.

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Lee el intervalo y la unidad (grados o radianes) antes de empezar, y subráyalos.
2. Ecuación: una sola función, factorizar, cada factor con su lista de ángulos, revisar extremos.
3. Triángulo: dibuja de nuevo la figura con los datos; decide entre triángulo rectángulo, ley de senos o ley de cosenos.
4. Identidad: todo en senos y cosenos, un solo lado, sin mover términos.
5. Comprueba un ángulo en la ecuación original y escribe el resultado como conjunto.

Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará las propiedades de los números reales y sus subconjuntos, para demostrar algunas proposiciones por medio del método de Inducción Matemática y para resolver inecuaciones. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1): inducción en 10 y desigualdad en 7. En los 41 finales del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1) salen 42 problemas: inducción 23 y desigualdades 19.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 (15 min) y la plantilla de inducción de la sección 2.3.1.
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro: 15 min cada uno.

2.1 Conceptos y expresiones

Los conjuntos numéricos. El programa construye los números paso a paso. Los *naturales* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ se definen con los postulados de Peano: el 1 es natural, todo natural tiene un sucesor y todo conjunto que contiene al 1 y al sucesor de cada uno de sus elementos contiene a todos los naturales. Los *enteros* $\mathbb{Z}$ se obtienen al agregar el cero y los negativos, y los *racionales* $\mathbb{Q}$ son los cocientes $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$; su expresión decimal es finita o periódica. Entre dos racionales siempre hay otro (densidad), pero la recta no se llena con ellos: $\sqrt{2}$, π y e son *irracionales*. Los *reales* $\mathbb{R}$ son racionales e irracionales juntos, y ya no tienen huecos (completitud). Esta parte casi no se evalúa: en los exámenes se pide demostrar por inducción o resolver una desigualdad.

Principio de inducción matemática. Sea $P(n)$ una proposición sobre los naturales. Si

1. $P(n_0)$ es verdadera (*base*), y
2. suponiendo verdadera $P(k)$ para un $k \geq n_0$ (*hipótesis de inducción*), se demuestra $P(k+1)$ (*paso inductivo*),

entonces $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$. Casi siempre $n_0 = 1$; cuando el enunciado dice «$\forall\, n \geq 2$», la base es $n = 2$.

El término general. En una suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, el último sumando escrito es el término general a_n. Para pasar de $P(k)$ a $P(k+1)$ se agrega *un* sumando: a_{k+1}, que se obtiene cambiando n por $k+1$ en el término general. Si el término general es 6^{n-1}, el sumando nuevo es 6^k; si es $(2n-1)^3$, es $(2k+1)^3$.

Propiedades de orden. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- si $a < b$, entonces $a + c < b + c$;
- si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$;

- si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$: **multiplicar por un negativo invierte la desigualdad**.

Por eso una desigualdad con x en el denominador no se «pasa multiplicando»: no se sabe el signo del denominador.

Valor absoluto. $|a| = a$ si $a \geq 0$ y $|a| = -a$ si $a < 0$. Para $c > 0$:

$$|A| < c \iff -c < A < c, \qquad |A| > c \iff A < -c \text{ o } A > c.$$

Además $|A| < |B| \iff A^2 < B^2$, porque ambos lados son no negativos; y $\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$.

Intervalos. El conjunto solución se escribe con intervalos: (a, b) no incluye los extremos, $[a, b]$ sí; $(-\infty, a)$ y (b, ∞) son no acotados; la unión se escribe con $\cup$. Los valores que anulan un denominador **nunca** pertenecen al conjunto solución.

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«demostrar por inducción», una suma con … y un $\forall\, n \in \mathbb{N}$	base, hipótesis y paso inductivo	2.3.1
la suma tiene potencias: $1 + 6 + 6^2 + \ldots$, $\frac{2n+1}{3^n}$, $n\,2^{n-2}$	inducción con potencias	2.3.2
un producto $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots$	inducción con productos	2.3.3
«$\forall\, n \geq 2$»	la base es $n = 2$	2.3.1
una desigualdad sin x en el denominador	despeje directo	2.3.4
x en un denominador: $\frac{3x-2}{4x+1} < 3$	puntos críticos y tabla de signos	2.3.5
$\|A\| < c$, $\|A\| > c$, $\left\|\frac{A}{B}\right\| < c$ o $\|A\| \leq \|B\|$	valor absoluto, elevando al cuadrado	2.3.6

2.3 Procedimientos

2.3.1 Plantilla de una demostración por inducción

1. **Proposición.** Escribe $P(n)$ completa e identifica el término general (el último sumando).
2. **Base.** Sustituye $n = 1$ (o $n = n_0$) en *los dos lados*: el lado izquierdo es solo el primer sumando. Escribe «Se cumple».
3. **Hipótesis.** Escribe $P(k)$: la misma igualdad con k en lugar de n.
4. **Tesis.** Escribe $P(k+1)$: con $k+1$ en lugar de n, simplificando solo lo obvio ($2(k+1)-1 = 2k+1$). Es lo que hay que obtener.
5. **Paso inductivo.** Parte del lado izquierdo de $P(k+1)$: es el lado izquierdo de $P(k)$ más el sumando nuevo. Sustituye la suma hasta k por el lado derecho de la hipótesis.
6. Opera hasta llegar al lado derecho de la tesis. Conviene **factorizar** lo común en lugar de desarrollar todo.
7. **Conclusión.** «Por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.»

2.3.2 Sumas con potencias

1. Escribe las potencias con la misma base: $\frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^k}$, $2^k = 2 \cdot 2^{k-1}$.
2. Lleva todo al denominador común más grande (3^{k+1}) o saca como factor la potencia más pequeña (2^{k-1}).
3. Agrupa el numerador y compáralo con el de la tesis.

2.3.3 Productos

1. El lado izquierdo de $P(k+1)$ es el producto hasta k **multiplicado** por el factor nuevo.
2. Sustituye el producto hasta k por la hipótesis y simplifica el factor nuevo a una sola fracción: $1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$.

2.3.4 Desigualdades sin variable en el denominador

1. Quita denominadores numéricos multiplicando por su mínimo común múltiplo (positivo: no cambia el sentido).
2. Despeja x. Si al final divides entre un número negativo, **invierte** el sentido.
3. Escribe el conjunto solución como intervalo.

2.3.5 Desigualdades racionales: puntos críticos

1. Pasa todo a un lado: $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ (o $\leq$, $>$, $\geq$). No multipliques por $D(x)$.
2. Une en una sola fracción y factoriza numerador y denominador en factores lineales. Si el coeficiente de x de un factor es negativo, multiplica ese factor por -1 e **invierte** el sentido.
3. **Puntos críticos:** las raíces del numerador y del denominador. Ordénalos en la recta.
4. **Tabla de signos:** un renglón por factor y una columna por intervalo. El signo del cociente es el producto de los signos.
5. Elige los intervalos con el signo pedido. Las raíces del numerador entran solo con $\leq$ o $\geq$; las del denominador nunca.

2.3.6 Desigualdades con valor absoluto

1. $|A| < c$ con $c > 0$: resuelve $-c < A < c$. $|A| > c$: resuelve $A < -c$ o $A > c$ y une.
2. Como los dos lados son no negativos, la desigualdad equivale a la de sus cuadrados:
   - $\left|\frac{A}{B}\right| < c$ (con $B \neq 0$): $A^2 < c^2 B^2$;
   - $|A| < |B|$: $A^2 < B^2$, sin ninguna constante.
3. Pasa todo a un lado y factoriza como **diferencia de cuadrados**: $A^2 - (cB)^2 = (A - cB)(A + cB)$ en el primer caso y $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ en el segundo.
4. Resuelve la desigualdad de dos factores lineales con la tabla de signos (sección 2.3.5) y quita los ceros de B.

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Inducción con una suma geométrica

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que

$$P(n): \quad 1+6+6^2+\cdots+6^{n-1}=\frac{6^n-1}{5}, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Resolución.

Proposición. El término general es 6^{n-1}; el sumando que se agrega al pasar de k a $k+1$ es 6^k.

Base ($n=1$). Lado izquierdo: $6^0=1$. Lado derecho: $\frac{6-1}{5}=1$. Se cumple.

Hipótesis ($n=k$). $1+6+\cdots+6^{k-1}=\frac{6^k-1}{5}$.

Tesis ($n=k+1$). $1+6+\cdots+6^{k-1}+6^k=\frac{6^{k+1}-1}{5}$.

Paso inductivo. Se parte del lado izquierdo de la tesis y se usa la hipótesis:

$$\begin{aligned}1+6+\cdots+6^{k-1}+6^k &= \frac{6^k-1}{5}+6^k=\frac{6^k-1+5\cdot 6^k}{5}\\ &= \frac{6\cdot 6^k-1}{5}=\frac{6^{k+1}-1}{5}.\end{aligned}$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo $n\in\mathbb{N}$.

Ejemplo resuelto · Desigualdad racional

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 1.

Obtenga el conjunto de valores de x que satisfacen $\frac{3x-2}{4x+1}<3$.

Resolución.

1. Todo a un lado y una sola fracción:

$$\frac{3x-2}{4x+1}-3<0 \;\Rightarrow\; \frac{3x-2-12x-3}{4x+1}<0 \;\Rightarrow\; \frac{-9x-5}{4x+1}<0.$$

2. El numerador tiene coeficiente negativo: se multiplica por -1 y se invierte el sentido: $\frac{9x+5}{4x+1}>0$.
3. Puntos críticos: $x=-\frac{5}{9}$ (numerador) y $x=-\frac{1}{4}$ (denominador). En la recta, $-\frac{5}{9}<-\frac{1}{4}$.
4. Tabla de signos:

	$x<-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{9}<x<-\frac{1}{4}$	$x>-\frac{1}{4}$
$9x+5$	$-$	$+$	$+$
$4x+1$	$-$	$-$	$+$
cociente	$+$	$-$	$+$

5. Se pide el cociente positivo, sin los extremos: $-\frac{5}{9}$ anula el numerador y la desigualdad es estricta, y $-\frac{1}{4}$ anula el denominador.

Resultado: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{9}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Suma de productos de tres consecutivos

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Resolución.

Proposición. Término general $n(n+1)(n+2)$; el sumando nuevo es $(k+1)(k+2)(k+3)$.

Base ($n = 1$). Izquierdo: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Derecho: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6$. Se cumple.

Hipótesis ($n = k$). $1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$.

Tesis ($n = k+1$). $1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$.

Paso inductivo. Se saca como factor común $(k+1)(k+2)(k+3)$:

$$\begin{aligned} &\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &\quad = (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4} + 1\right] = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}. \end{aligned}$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.5.2 · Suma de cubos de impares

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Resolución.

Proposición. Término general $(2n-1)^3$; el sumando nuevo es $(2(k+1)-1)^3 = (2k+1)^3$.

Base ($n = 1$). Izquierdo: $1^3 = 1$. Derecho: $1^2(2-1) = 1$. Se cumple.

Hipótesis ($n = k$). $1^3 + 3^3 + \cdots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$.

Tesis ($n = k+1$). $1^3 + \cdots + (2k+1)^3 = (k+1)^2\left(2(k+1)^2 - 1\right) = (k+1)^2(2k^2 + 4k + 1)$.

Paso inductivo. Aquí no hay factor común: se desarrollan los dos lados y se comparan.

$$\begin{aligned} k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3 &= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1. \end{aligned}$$

Lado derecho de la tesis:

$$\begin{aligned}(k^2+2k+1)(2k^2+4k+1) &= 2k^4+4k^3+k^2+4k^3+8k^2\\ &\quad +2k+2k^2+4k+1\\ &= 2k^4+8k^3+11k^2+6k+1.\end{aligned}$$

Son iguales.

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.5.3 · Suma con potencias de 3 en el denominador

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 1.

Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1+\frac{5}{9}+\frac{7}{27}+\cdots+\frac{2n+1}{3^n} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n (n+2)+2.$$

Resolución.

Proposición. Término general $\frac{2n+1}{3^n}$ (con $n=1$ da $\frac{3}{3}=1$). El sumando nuevo es $\frac{2k+3}{3^{k+1}}$. El lado derecho se escribe mejor como $2-\frac{n+2}{3^n}$.

Base ($n=1$). Izquierdo: $\frac{3}{3}=1$. Derecho: $2-\frac{3}{3}=1$. Se cumple.

Hipótesis ($n=k$). $1+\frac{5}{9}+\cdots+\frac{2k+1}{3^k} = 2-\frac{k+2}{3^k}$.

Tesis ($n=k+1$). $1+\frac{5}{9}+\cdots+\frac{2k+3}{3^{k+1}} = 2-\frac{k+3}{3^{k+1}}$.

Paso inductivo. Denominador común 3^{k+1}:

$$\begin{aligned}2-\frac{k+2}{3^k}+\frac{2k+3}{3^{k+1}} &= 2-\frac{3(k+2)-(2k+3)}{3^{k+1}}\\ &= 2-\frac{k+3}{3^{k+1}} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}(k+3)+2.\end{aligned}$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.5.4 · Producto que empieza en n = 2

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo A, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo natural $n \geq 2$,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Resolución.

Proposición. Es un producto: el factor general es $1-\frac{1}{n}$ y el factor nuevo es $1-\frac{1}{k+1}$. La base es $n=2$.

Base ($n = 2$). Izquierdo: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Derecho: $\frac{1}{2}$. Se cumple.

Hipótesis ($n = k \geq 2$). $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$.

Tesis ($n = k + 1$). $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$.

Paso inductivo.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo natural $n \geq 2$.

Ejercicio 2.5.5 · Suma con potencias de 2

Adaptado de: 1er final 2019-2, tipo C, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo natural $n \geq 2$,

$$P(n): \quad 2 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \cdots + n\left(2^{n-2}\right) = (n-1)\left(2^{n-1}\right).$$

Resolución.

Proposición. Término general $n\,2^{n-2}$ (con $n = 2$ da $2 \cdot 2^0 = 2$); el sumando nuevo es $(k+1)2^{k-1}$. La base es $n = 2$.

Base ($n = 2$). Izquierdo: 2. Derecho: $(2-1)2^1 = 2$. Se cumple.

Hipótesis ($n = k \geq 2$). $2 + 3 \cdot 2 + \cdots + k\,2^{k-2} = (k-1)2^{k-1}$.

Tesis ($n = k + 1$). $2 + 3 \cdot 2 + \cdots + (k+1)2^{k-1} = k\,2^k$.

Paso inductivo. Se saca como factor la potencia común 2^{k-1}:

$$(k-1)2^{k-1} + (k+1)2^{k-1} = 2^{k-1}(k - 1 + k + 1) = 2^{k-1} \cdot 2k = k\,2^k.$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo natural $n \geq 2$.

Ejercicio 2.5.6 · Desigualdad racional con mayor o igual

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $\frac{3x+2}{2x-12} \geq 1$.

Resolución.

1. Todo a un lado: $\frac{3x+2}{2x-12} - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{3x+2-2x+12}{2x-12} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x+14}{2x-12} \geq 0$.
2. Puntos críticos: $x = -14$ (numerador) y $x = 6$ (denominador).
3. Tabla de signos:

	$x < -14$	$-14 < x < 6$	$x > 6$
$x + 14$	$-$	$+$	$+$
$2x - 12$	$-$	$-$	$+$
cociente	$+$	$-$	$+$

4. Cociente positivo o cero: entra $x = -14$ (anula el numerador y la desigualdad admite la igualdad); $x = 6$ no, porque anula el denominador.

Resultado: $x \in (-\infty, -14] \cup (6, \infty)$.

Ejercicio 2.5.7 · Valor absoluto de un cociente

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 1.

Resuelva $\left|\frac{3x-2}{5x+1}\right| < 3$.

Resolución.

1. Restricción: $5x + 1 \neq 0$, es decir, $x \neq -\frac{1}{5}$.
2. Los dos lados son no negativos: $\frac{|3x-2|}{|5x+1|} < 3 \iff |3x-2| < 3|5x+1| \iff (3x-2)^2 < (15x+3)^2$.
3. Diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(3x-2)^2 - (15x+3)^2 &= (3x-2-15x-3)(3x-2+15x+3)\\ &= (-12x-5)(18x+1) < 0.\end{aligned}$$

4. Se multiplica por -1 y se invierte el sentido: $(12x+5)(18x+1) > 0$. Puntos críticos: $-\frac{5}{12}$ y $-\frac{1}{18}$.
5. Tabla de signos:

	$x < -\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{12} < x < -\frac{1}{18}$	$x > -\frac{1}{18}$
$12x+5$	$-$	$+$	$+$
$18x+1$	$-$	$-$	$+$
producto	$+$	$-$	$+$

6. El valor excluido $-\frac{1}{5}$ está entre $-\frac{5}{12}$ y $-\frac{1}{18}$, fuera de la solución.

Resultado: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{12}\right) \cup \left(-\frac{1}{18}, \infty\right)$.

Ejercicio 2.5.8 · Valor absoluto contra valor absoluto

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 2.

Obtenga el conjunto solución de $|3x-2| \leq |3+x|$.

Resolución.

1. Los dos lados son no negativos: $|3x-2| \leq |x+3| \iff (3x-2)^2 \leq (x+3)^2$.
2. Diferencia de cuadrados:

$$(3x-2)^2 - (x+3)^2 = (3x-2-x-3)(3x-2+x+3) = (2x-5)(4x+1) \leq 0.$$

3. Puntos críticos: $x = -\frac{1}{4}$ y $x = \frac{5}{2}$. El producto de dos factores con coeficiente positivo es negativo *entre* sus raíces, y vale cero en ellas.
4. Comprobación con $x = 0$: $|-2| = 2 \leq 3 = |3|$. Se cumple.

Resultado: $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right]$.

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{2}{2^{n-1}} = 2\left[\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}\right], \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Resultado: la base ($2 = 2$) y el paso inductivo se cumplen: $2\left[\frac{2^k-1}{2^{k-1}}\right] + \frac{2}{2^k} = 2\left[\frac{2^{k+1}-1}{2^k}\right]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d].$$

Resultado: la base ($a = a$) y el paso inductivo se cumplen: $\frac{k}{2}[2a + (k - 1)d] + a + kd = \frac{k+1}{2}[2a + kd]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 1er final 2020-2, tipo A, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n): \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots + \frac{1}{5^n} = -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}.$$

Resultado: la base ($\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$) y el paso inductivo se cumplen: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^k} + \frac{1}{5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^{k+1}}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 1.

Determine el conjunto solución de la desigualdad $5 - \frac{x}{4} > -6$.

Resultado: $x \in (-\infty, 44)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 1.

Resuelva la desigualdad $\left|\frac{3x-2}{5x+1}\right| > 3$.

Resultado: $x \in \left(-\frac{5}{12}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{18}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 2.

Obtenga el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $\left|\frac{2x+6}{x-4}\right| < 2$.

Resultado: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

2.7 Errores frecuentes

1. **Base con todos los sumandos.** En la base el lado izquierdo es *solo* el primer sumando: con $n = 1$, $1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1}$ vale $6^0 = 1$.
2. **Sumando nuevo mal escrito.** Se obtiene sustituyendo $n = k+1$ en el término general: si es 6^{n-1}, el nuevo es 6^k, no 6^{k+1}.
3. **Usar la tesis para demostrarla.** El paso inductivo parte del lado izquierdo de $P(k+1)$ y llega a su lado derecho; la tesis no se usa como si ya fuera cierta.
4. **Base equivocada.** Si el enunciado dice $\forall\, n \geq 2$, la base es $n = 2$: con $n = 1$ el factor $1 - \frac{1}{n}$ vale 0.
5. **Sumar en un producto.** En una inducción con productos, el factor nuevo *multiplica*.
6. **Multiplicar por el denominador.** En $\frac{3x-2}{4x+1} < 3$, pasar $4x + 1$ multiplicando supone que es positivo; se pierden soluciones.
7. **Olvidar invertir el sentido** al multiplicar o dividir entre un negativo.
8. **Incluir el cero del denominador.** Con $\geq$ o $\leq$ entran las raíces del numerador, nunca las del denominador.
9. **Valor absoluto con una sola rama.** $|A| > c$ son *dos* desigualdades unidas con «o»; $|A| < c$ es una desigualdad doble.
10. **Dejar el resultado sin intervalos.** El conjunto solución se escribe con intervalos y uniones.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Inducción: base $P(n_0)$ · hipótesis $P(k)$ · tesis $P(k+1)$ · conclusión.
- Sumando nuevo: término general con $n = k+1$. Lado izquierdo de $P(k+1)$ = lado izquierdo de $P(k)$ + sumando nuevo.
- Geométrica: $1+r+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ $(r \neq 1)$ · aritmética: $\sum_{j=1}^{n}[a+(j-1)d] = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$.
- $a < b$ y $c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$.
- $|A| < c \iff -c < A < c$ · $|A| > c \iff A < -c$ o $A > c$ (con $c > 0$).
- $|A| < |B| \iff A^2 < B^2 \iff (A-B)(A+B) < 0$ · $\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$.
- Racional: $\frac{N}{D} < 0$ (o $\leq, >, \geq$), puntos críticos, tabla de signos; los ceros de D siempre quedan fuera.
- Un producto $(x-a)(x-b)$ con $a < b$ es negativo entre a y b, y positivo fuera.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Inducción:** escribe los rótulos (Proposición, Base, Hipótesis, Tesis, Paso inductivo) antes de calcular; la tesis escrita orienta el álgebra.
2. En el paso inductivo, busca primero un **factor común**; si no lo hay, desarrolla los dos lados y compáralos.
3. Cierra con la conclusión completa: «por el principio de inducción matemática…».
4. **Desigualdad:** todo a un lado, una sola fracción, factores lineales, puntos críticos, tabla de signos.
5. Con valor absoluto de un cociente, o de un lado contra otro, eleva al cuadrado y factoriza como diferencia de cuadrados.
6. Comprueba con un valor de prueba de cada intervalo y escribe el resultado con intervalos.

Si no se termina el paso inductivo, la base, la hipótesis y la tesis bien escritas ya valen parte del problema.

Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno usará los números complejos en sus diferentes representaciones y sus propiedades, para resolver ecuaciones con una incógnita que contengan números complejos. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1). En el Plan 2010, 8 de 17 dan datos en un diagrama de Argand y 4 de 17 piden raíces n-ésimas; casi todos terminan en una potencia o raíz de la incógnita.
- **Tiempo:** de 2.5 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y ten a la mano la tabla de ángulos notables de la sección 1B.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5.4, 3.5.5 y 3.5.6 con cronómetro (15 min cada uno).

3.1 Conceptos y expresiones

Las tres formas. Un número complejo se escribe de tres maneras equivalentes:

$$z = a + bi, \qquad z = r\operatorname{cis}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \qquad z = re^{i\theta}.$$

Son las formas binómica, polar y exponencial. $a = \operatorname{Re} z$ es la parte real, $b = \operatorname{Im} z$ la parte imaginaria, $r = |z| \geq 0$ el *módulo* y θ el *argumento*. En los exámenes el argumento de la forma polar se da en grados y el de la exponencial en radianes: $2\operatorname{cis} 60^\circ = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Conversiones.

- Binómica a polar: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; θ es el ángulo cuyo coseno es a/r y cuyo seno es b/r. Se ubica el cuadrante por los signos de a y b y se usa el ángulo de referencia, cuya tangente es $|b/a|$.
- Polar a binómica: $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$, con los valores exactos de la tabla de ángulos notables (sección 1B.1).
- Polar a exponencial: el mismo r y θ en radianes: $180^\circ = \pi$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

Valores que conviene saber de memoria.

$$1 = \operatorname{cis} 0^\circ, \quad i = \operatorname{cis} 90^\circ, \quad -1 = \operatorname{cis} 180^\circ, \quad -i = \operatorname{cis} 270^\circ,$$

$$1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis} 45^\circ, \qquad 1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 60^\circ, \qquad \sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis} 30^\circ.$$

Potencias de i. Se repiten cada cuatro: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Para i^n se usa el residuo de dividir n entre 4: $i^{17} = i^1 = i$, $i^{20} = i^0 = 1$, $i^7 = i^3 = -i$.

Ángulos fuera de $[0^\circ, 360^\circ)$. El argumento no es único: $r\,\mathrm{cis}\,\theta = r\,\mathrm{cis}(\theta + 360^\circ k)$ para todo entero k. Se reduce restando vueltas completas: $\mathrm{cis}\,1140^\circ = \mathrm{cis}(1140^\circ - 3\cdot 360^\circ) = \mathrm{cis}\,60^\circ$; $e^{2\pi i} = 1$; $\mathrm{cis}(-60^\circ) = \mathrm{cis}\,300^\circ$. Un coeficiente negativo se corrige sumando 180°: $-1\,\mathrm{cis}\,180^\circ = 1\,\mathrm{cis}\,0^\circ = 1$.

Conjugado y módulo. $\bar{z} = a - bi = r\,\mathrm{cis}(-\theta)$. Propiedades:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2, \qquad z\bar{z} = |z|^2,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Operaciones. La suma y la resta se hacen en forma binómica. El producto, el cociente y las potencias, en forma polar o exponencial:

$$r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1 \cdot r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2 = r_1 r_2\,\mathrm{cis}(\theta_1 + \theta_2), \qquad \frac{r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1}{r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{cis}(\theta_1 - \theta_2),$$

$$(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^n = r^n\,\mathrm{cis}\,n\theta \quad \text{(De Moivre)}.$$

El cociente en forma binómica se hace multiplicando por el conjugado del denominador: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Raíces n-ésimas. Todo $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta \neq 0$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}\ \frac{\theta + 360^\circ k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Todas tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ (raíz real positiva) y están repartidas cada $\frac{360^\circ}{n}$ sobre una circunferencia: forman un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Exponente racional. En los enunciados aparece $w^{p/q} = c$, que se entiende como $\left(\sqrt[q]{w}\right)^p = c$. Para despejar se eleva a la q y luego se sacan las raíces p-ésimas:

$$w^{p/q} = c \quad \Longrightarrow \quad w^p = c^q \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt[q]{c^q} \quad (p \text{ valores}).$$

Por ejemplo, $w^{2/3} = c$ da $w = \sqrt{c^3}$, dos valores; $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$, tres valores.

Igualdad de complejos. En forma binómica, $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$: una ecuación compleja con incógnitas *reales* da dos ecuaciones reales. En forma polar, $r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1 = r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2$ si y solo si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + 360^\circ k$.

Diagrama de Argand. Es el plano con la parte real en el eje horizontal y la imaginaria en el vertical. Un número se puede dar por sus coordenadas (a, b) o por su módulo (la longitud del segmento) y un ángulo. Ese ángulo puede estar medido desde cualquier semieje: hay que convertirlo al argumento medido desde el semieje real positivo, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

3.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento (sección)
«Obtener los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen $w^3 \ldots = \ldots$», datos en varias formas	Una sola forma (3.3.1), simplificar (3.3.2), raíces (3.3.3)
«z_1 y z_2 están en el diagrama de Argand»	Leer módulo y argumento de la figura (3.3.1)
$w^{3/2}$, $z^{4/3}$, $x^{2/3}$ en la ecuación	Exponente racional (3.3.3)
«Determinar $x, y \in \mathbb{R}$», «los valores de a y b»	Igualdad de complejos (3.3.4)
$\bar{z}$, $\lvert z \rvert$ o «el módulo sea igual a…» con incógnita	Escribir $z = a + bi$ (3.3.5)
«Una de las raíces cúbicas de z es…»	Repartir cada $360^\circ/n$ (3.3.3)
«En forma polar», «en forma binómica»	Convertir el resultado al final (3.1)

3.3 Procedimientos

3.3.1 Pasar los datos a una sola forma

1. Reduce las potencias de i con el residuo entre 4 y los argumentos a $[0^\circ, 360^\circ)$.
2. Si hay sumas o restas, hazlas en forma binómica: convierte a binómica los números que van a sumarse.
3. Todo lo que se multiplica, divide o eleva a potencia, pásalo a forma polar con el argumento en grados.
4. Diagrama de Argand: lee el módulo (la longitud) o las coordenadas, y convierte el ángulo marcado al argumento desde el semieje real positivo. Por ejemplo, un segmento de longitud 8 que forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, es $8 \operatorname{cis} 135^\circ$.

3.3.2 Simplificar el lado conocido

1. Calcula primero los paréntesis (sumas y restas en binómica) y pasa cada resultado a polar.
2. Multiplica módulos y suma argumentos; divide módulos y resta argumentos; con De Moivre, eleva el módulo y multiplica el argumento.
3. Reduce el argumento final a $[0^\circ, 360^\circ)$. El lado conocido debe quedar como $c = R \operatorname{cis} \Phi$.

3.3.3 Despejar la potencia y sacar las raíces

1. Despeja la potencia de la incógnita: $w^n = R \operatorname{cis} \Phi$.
2. Si el exponente es racional, $w^{p/q} = c$, cambia a $w^p = c^q$ (eleva c a la q con De Moivre).
3. Raíces: $w_k = \sqrt[n]{R} \operatorname{cis} \frac{\Phi + 360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Basta con calcular $\frac{\Phi}{n}$ y sumar $\frac{360^\circ}{n}$ cada vez.
4. Si te dan una raíz w_0 y piden las demás, solo suma $\frac{360^\circ}{n}$ al argumento; el número original es w_0^n.
5. Escribe el resultado en la forma que piden. Si te piden graficarlo, dibuja la circunferencia de radio $\sqrt[n]{R}$ y los n puntos.

3.3.4 Igualdad de complejos con incógnitas reales

1. Pasa todo a forma binómica y desarrolla los productos (recuerda $i^2 = -1$).
2. Separa: parte real del lado izquierdo igual a parte real del derecho; lo mismo con la imaginaria.
3. Resuelve el sistema de dos ecuaciones reales.

3.3.5 Ecuaciones con conjugado o con módulo

1. Si z aparece junto con $\bar{z}$ o con $|z|$, no sirve sacar raíces: escribe $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z|^2 = a^2 + b^2$.
2. Iguala partes reales e imaginarias y resuelve para a y b.
3. Si solo hay un módulo, usa $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ sin hacer la división.
4. Si z aparece en forma lineal (sin potencias), despéjala como en una ecuación real.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíces cúbicas con datos en varias formas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{w^3\,(z_3 z_2)}{z_4} = z_1,$$

donde $z_1 = -1 \operatorname{cis} 180^\circ$, $z_2 = i^{20}$, $z_3 = 2 \operatorname{cis} 1140^\circ$ y $z_4 = 2e^{2\pi i}$.

Resolución.

1. Una sola forma (polar):
   - $z_1 = -1 \operatorname{cis} 180^\circ = -(-1) = 1 = \operatorname{cis} 0^\circ$;
   - $z_2 = i^{20} = i^0 = 1$, porque $20 = 4 \cdot 5$;
   - $z_3 = 2 \operatorname{cis}(1140^\circ - 1080^\circ) = 2 \operatorname{cis} 60^\circ$;
   - $z_4 = 2e^{2\pi i} = 2 \operatorname{cis} 360^\circ = 2$.
2. Despejar: $w^3 = \frac{z_1 z_4}{z_3 z_2} = \frac{(1)(2)}{2 \operatorname{cis} 60^\circ} = \operatorname{cis}(-60^\circ) = \operatorname{cis} 300^\circ$.
3. Raíces cúbicas: $w_k = \sqrt[3]{1} \operatorname{cis} \frac{300^\circ + 360^\circ k}{3} = \operatorname{cis}(100^\circ + 120^\circ k)$.
4. **Resultado:** $w_0 = \operatorname{cis} 100^\circ$, $w_1 = \operatorname{cis} 220^\circ$, $w_2 = \operatorname{cis} 340^\circ$.
5. Comprobación: $w_0^3 = \operatorname{cis} 300^\circ$, y $\operatorname{cis} 300^\circ \cdot 2 \operatorname{cis} 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = \operatorname{cis} 360^\circ = 1 = z_1$.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Igualdad de complejos

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 2.

Determine los valores $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$(3 + 2i)(x + 4i) = (6 + 2yi)(1 + 2i).$$

Resolución.

1. Lado izquierdo: $3x + 12i + 2xi + 8i^2 = (3x - 8) + (2x + 12)i$.

2. Lado derecho: $6 + 12i + 2yi + 4yi^2 = (6 - 4y) + (12 + 2y)i$.
3. Partes reales: $3x - 8 = 6 - 4y$. Partes imaginarias: $2x + 12 = 12 + 2y$, es decir, $x = y$.
4. Sustituyendo: $3x - 8 = 6 - 4x \Rightarrow 7x = 14$.
5. **Resultado:** $x = 2$, $y = 2$.

Ejercicio 3.5.2 · Módulo con un parámetro

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que el módulo del número complejo $z = \frac{x+i}{1+i}$ sea igual a $\sqrt{5}$.

Resolución.

1. No hace falta dividir: $|z| = \frac{|x+i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}$.
2. Condición: $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9$.
3. **Resultado:** $x = 3$ o $x = -3$.
4. Comprobación con $x = 3$: $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$, y $|2 - i| = \sqrt{5}$.

Ejercicio 3.5.3 · Ecuación con conjugado y potencia

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^2 = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 + z_2},$$

donde $z_1 = \operatorname{cis} 45^\circ$, $z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$, $z_3 = 5e^{\pi i}$ y $z_4 = -5 + 2i$.

Resolución.

1. Numerador: $z_3 = 5 \operatorname{cis} 180^\circ = -5$ y $\bar{z}_4 = -5 - 2i$, así que $z_3 - \bar{z}_4 = 2i = 2 \operatorname{cis} 90^\circ$ y $(2i)^3 = 8 \operatorname{cis} 270^\circ$.
2. Denominador (suma en binómica): $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, y

   $$z_1 + z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i = 5 \operatorname{cis} 45^\circ,$$

   pues $r = \sqrt{2 \cdot \frac{50}{4}} = 5$ y las dos partes son iguales y positivas.
3. $z^2 = \frac{8 \operatorname{cis} 270^\circ}{5 \operatorname{cis} 45^\circ} = \frac{8}{5} \operatorname{cis} 225^\circ$.
4. Raíces cuadradas: $\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ y argumentos $\frac{225^\circ + 360^\circ k}{2}$, $k = 0, 1$.
5. **Resultado:** $z_0 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \operatorname{cis} 112.5^\circ$, $z_1 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \operatorname{cis} 292.5^\circ$.

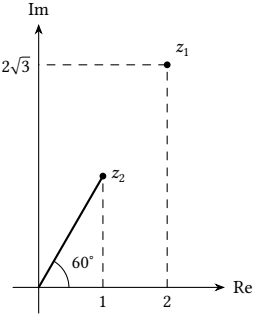
Ejercicio 3.5.4 · Datos en el diagrama de Argand: raíces cuartas

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 2.

Determine los valores de $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\frac{w^4}{z_3} = (z_1 - z_2)^3, \qquad z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i},$$

donde z_1 y z_2 están en el diagrama: z_1 es el punto de coordenadas $(2, 2\sqrt{3})$; z_2 está sobre la recta que forma 60° con el semieje real positivo y su parte real es 1.



Resolución.

1. Lectura: $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$. Para $z_2 = 1 + bi$, $\tan 60^\circ = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \sqrt{3}$: $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.
2. $z_1 - z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 60^\circ$; $(z_1 - z_2)^3 = 8\operatorname{cis} 180^\circ$.
3. $z_3 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$. Despejar: $w^4 = 2\operatorname{cis} 60^\circ \cdot 8\operatorname{cis} 180^\circ = 16\operatorname{cis} 240^\circ$.
4. Raíces cuartas: $\sqrt[4]{16} = 2$, argumentos $\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} = 60^\circ + 90^\circ k$.
5. **Resultado:** $w_0 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$, $w_1 = 2\operatorname{cis} 150^\circ$, $w_2 = 2\operatorname{cis} 240^\circ$, $w_3 = 2\operatorname{cis} 330^\circ$: los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 2.

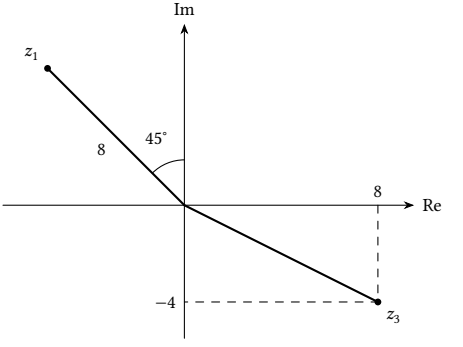
Ejercicio 3.5.5 · Exponente racional con datos en el diagrama

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 2.

Obtenga el o los valores de $x \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$x^{3/2} z_3 = 4\bar{z}_1 z_2 + 8x^{3/2}, \qquad z_2 = e^{\frac{3}{2}\pi i},$$

donde z_1 tiene módulo 8 y forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, y z_3 es el punto $(8, -4)$.



Resolución.

1. Lectura: el argumento de z_1 es $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$: $z_1 = 8\operatorname{cis}135^\circ$ y $\bar{z}_1 = 8\operatorname{cis}225^\circ$. $z_3 = 8 - 4i$ y $z_2 = \operatorname{cis}270^\circ$.
2. Agrupar las x: $x^{3/2}(z_3 - 8) = 4\bar{z}_1 z_2$, con $z_3 - 8 = -4i = 4\operatorname{cis}270^\circ$.
3. $x^{3/2} = \frac{4\cdot 8\operatorname{cis}225^\circ\cdot\operatorname{cis}270^\circ}{4\operatorname{cis}270^\circ} = 8\operatorname{cis}225^\circ$.
4. Exponente racional: $x = \sqrt[3]{(8\operatorname{cis}225^\circ)^2} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis}450^\circ} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis}90^\circ}$.
5. Raíces cúbicas: módulo 4, argumentos $30^\circ + 120^\circ k$.
6. **Resultado:** $x_0 = 4\operatorname{cis}30^\circ$, $x_1 = 4\operatorname{cis}150^\circ$, $x_2 = 4\operatorname{cis}270^\circ = -4i$.

Ejercicio 3.5.6 · Las otras raíces cúbicas

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3.

Si $z_1 = 2\operatorname{cis}60^\circ$ es una de las raíces cúbicas de z, determine las otras raíces cúbicas de z y expréselas en forma binómica y exponencial.

Resolución.

1. Las tres raíces tienen el mismo módulo y están separadas $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
2. Las otras dos: $2\operatorname{cis}180^\circ$ y $2\operatorname{cis}300^\circ$.
3. Binómica: $2\operatorname{cis}180^\circ = -2$; $2\operatorname{cis}300^\circ = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$.
4. Exponencial: $2e^{\pi i}$ y $2e^{\frac{5}{3}\pi i}$.
5. **Resultado:** $-2 = 2e^{\pi i}$ y $1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$. Además, $z = z_1^3 = 8\operatorname{cis}180^\circ = -8$.

Ejercicio 3.5.7 · Igualdad con forma polar

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 3.

Determine los valores reales de a y de b para que

$$\frac{a + 4i}{2 + bi} = 2\operatorname{cis}225^\circ.$$

Resolución.

1. $2\operatorname{cis}225^\circ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.
2. Quitar el denominador:

$$a + 4i = (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)(2 + bi) = (-2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,b) + (-2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b)i.$$

3. Partes imaginarias: $4 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b \Rightarrow b = \frac{-4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2$.
4. Partes reales: $a = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}(-2\sqrt{2} - 2) = -2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$.
5. **Resultado:** $a = -4 - 4\sqrt{2}$, $b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.5.8 · Ecuación lineal en z

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3.

Determine $z \in \mathbb{C}$ que resuelve la ecuación

$$2z = (3 + 3i)^2\left(\tfrac{1}{9}\operatorname{cis}300^\circ\right)\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right) + z.$$

Resolución.

1. z aparece sin potencias: se despeja como en los reales, $z = (3+3i)^2\left(\frac{1}{9}\operatorname{cis}300^\circ\right)\operatorname{cis}30^\circ$.
2. $(3+3i)^2 = 9+18i+9i^2 = 18i = 18\operatorname{cis}90^\circ$.
3. $z = 18\cdot\frac{1}{9}\operatorname{cis}(90^\circ+300^\circ+30^\circ) = 2\operatorname{cis}420^\circ = 2\operatorname{cis}60^\circ$.
4. **Resultado:** $z = 2\operatorname{cis}60^\circ = 1+\sqrt{3}\,i$.

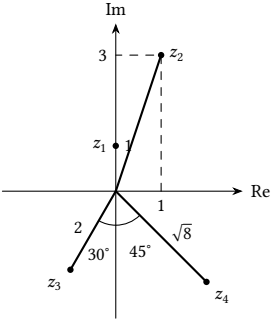
3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Los números z_1, z_2, z_3, z_4 están en el diagrama: z_1 sobre el eje imaginario a altura 1; z_2 en el punto $(1,3)$; z_3 con módulo 2 a 30° del semieje imaginario negativo, hacia la izquierda; z_4 con módulo $\sqrt{8}$ a 45° del semieje imaginario negativo, hacia la derecha. Obtenga los números $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_3^3 = \frac{2z_2-z_4}{z_1}$ y grafíquelos.



Resultado: $z^4 = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$ (un cuadrado inscrito en la circunferencia unitaria).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w\in\mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{3/2}z_1 = \frac{\sqrt{2}\,(z_2-\bar{z}_3)}{z_4\,i^{17}},$$

donde $z_1 = 1+i$, $z_2 = 3\operatorname{cis}180^\circ$, $z_3 = -3-6i$ y $z_4 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

Resultado: $w^{3/2} = 3$: $w = \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}0^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}120^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}240^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 2.

Determine los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^{4/3} = \frac{(i)^7 \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) + \left(-\sqrt{3} + 2i\right)}{-\operatorname{cis} 270^\circ}.$$

Resultado: $z^{4/3} = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

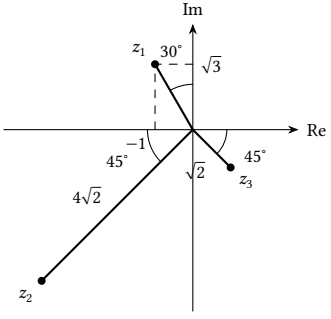
Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.

Determine los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{2/3} = \frac{6z_1 z_3}{[z_2 - 2\bar{z}_3]\,(e^{\pi i})},$$

donde, en el diagrama, z_1 es el punto $(-1, \sqrt{3})$ (a 30° del semieje imaginario positivo); z_2 tiene módulo $4\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real negativo; z_3 tiene módulo $\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real positivo.



Resultado: $w^{2/3} = 2 \operatorname{cis} 30^\circ$: $w = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ = 2 + 2i$ y $w = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 225^\circ = -2 - 2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sean $z_1 = 20e^{\pi i}$, $z_2 = 5 \operatorname{cis} 45^\circ$, $z_3 = 8 + 8\sqrt{3}\,i$ y $z_4 = 4 \operatorname{cis} 135^\circ$. Obtenga, en forma polar, los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_1 = z_2 z_3 z_4$.

Resultado: $z^4 = 16 \operatorname{cis} 60^\circ$: $z = 2 \operatorname{cis} 15^\circ,\ 2 \operatorname{cis} 105^\circ,\ 2 \operatorname{cis} 195^\circ,\ 2 \operatorname{cis} 285^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3.

Sean $z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$, $z_2 = 8e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_3 = 3\operatorname{cis}180^\circ$ y $z_4 = -3+4i$. Obtenga $z \in \mathbb{C}$ que satisface

$$z^{3/2} = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 z_2}.$$

Resultado: $z^{3/2} = 4\operatorname{cis}90^\circ$: $z = 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}60^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}180^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}300^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

3.7 Errores frecuentes

- **Sumar en forma polar.** $2\operatorname{cis}30^\circ + 2\operatorname{cis}60^\circ$ no es $4\operatorname{cis}90^\circ$. Las sumas y restas siempre en binómica.
- **Equivocar el cuadrante.** La tangente solo da el ángulo de referencia: $-1-i$ está en el tercer cuadrante, su argumento es 225°, no 45°.
- **Leer mal el ángulo del diagrama.** Un ángulo marcado desde el eje imaginario o desde el semieje real negativo hay que convertirlo: 45° desde el semieje imaginario positivo hacia la izquierda es 135°.
- **Olvidar raíces.** $w^n = c$ tiene n soluciones. Con una sola, el problema queda incompleto.
- **Dividir el argumento sin sumar vueltas.** Las raíces son $\frac{\Phi+360^\circ k}{n}$, no solo $\frac{\Phi}{n}$.
- **Exponente racional al revés.** $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$ (tres valores), no $w = \sqrt{c^3}$.
- **Conjugar mal.** $\overline{r\operatorname{cis}\theta} = r\operatorname{cis}(-\theta)$: cambia el signo del argumento, no el del módulo.
- **Potencias de i.** $i^{17} = i$, no $-i$: el residuo de 17 entre 4 es 1.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $z = a+bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta+180^\circ)$.
- $\bar{z} = a-bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$; $\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis}n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+360^\circ k}{n}$, $k = 0,\dots,n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^q}$.
- $a+bi = c+di$ si y solo si $a=c$ y $b=d$.
- $1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1+\sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3}+i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe cada dato en una línea propia y redúcelo: potencias de i, vueltas completas, coeficientes negativos.
2. Sumas y restas en binómica; luego todo a polar con el argumento en grados.
3. Despeja la potencia de la incógnita y deja el lado conocido como $R\operatorname{cis}\Phi$.
4. Saca las n raíces y escríbelas en una lista $w_0,\dots,w_{n-1}$, en la forma que pide el enunciado.
5. Si quedan 5 minutos, eleva w_0 a la n para comprobar.

Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno usará y analizará los conceptos del álgebra de los polinomios y sus propiedades para obtener raíces. El programa de 2016 dice lo mismo (sin mencionar las raíces conjugadas, que sus exámenes sí usan).

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema completo en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1; es el problema 3) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1; es el problema 4). En el Plan 2010: raíz compleja dada, 7 de 17; coeficientes desconocidos a partir de raíces o puntos, 2; polinomio a partir de su gráfica, 2; regla de Descartes, 2; producto de dos polinomios, 2; polinomio bicuadrado con cota de raíces, 2.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4.1 y 4.3.1 (división sintética, 20 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5.3, 4.5.6 y 4.5.7 con cronómetro (15 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Polinomio. Un polinomio de grado n en x es

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

con coeficientes reales o complejos. a_n es el *coeficiente principal* y a_0 el *término independiente*. Dos polinomios son iguales si tienen los mismos coeficientes en cada potencia.

Raíz. El número $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz (o cero) de p si $p(\alpha) = 0$. En la gráfica de un polinomio con coeficientes reales, las raíces reales son los puntos donde la curva toca o corta el eje x.

Algoritmo de la división. Para $p(x)$ y $d(x) \neq 0$ existen polinomios únicos $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (residuo) tales que

$$p(x) = d(x)\,q(x) + r(x), \qquad r = 0 \text{ o } \operatorname{grado} r < \operatorname{grado} d.$$

p es *divisible* entre d si $r(x) = 0$.

Teorema del residuo. El residuo de dividir $p(x)$ entre $x - c$ es $p(c)$.

Teorema del factor. $x - c$ es factor de $p(x)$ si y solo si $p(c) = 0$.

Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. En consecuencia, tiene exactamente n raíces, contando multiplicidades, y se escribe como producto de n factores lineales:

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Multiplicidad. α es raíz de multiplicidad k si $(x-\alpha)^k$ divide a p, pero $(x-\alpha)^{k+1}$ no. En la división sintética: α da residuo cero k veces seguidas. En la gráfica de un polinomio real, una raíz de multiplicidad impar *cruza* el eje; una de multiplicidad par lo *toca* sin cruzarlo.

Raíces conjugadas. Si los coeficientes son **reales** y $a+bi$ es raíz, también lo es $a-bi$. Las dos juntas dan un factor cuadrático real:

$$(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2).$$

Del mismo modo, si los coeficientes son **racionales** y $a+\sqrt{b}$ es raíz ($\sqrt{b}$ irracional), también lo es $a-\sqrt{b}$. Si algún coeficiente es complejo, el conjugado de una raíz **no** es necesariamente raíz.

Posibles raíces racionales. Si los coeficientes son enteros y $\frac{p}{q}$ (fracción reducida) es raíz, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n. La lista de candidatos es

$$\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}.$$

Regla de los signos de Descartes. Con p de coeficientes reales y $a_0 \neq 0$:

- el número de raíces reales **positivas** es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$, o menor que él en un número par;
- el número de raíces reales **negativas** es igual al número de cambios de signo de $p(-x)$, o menor en un número par.

Si $a_0 = 0$, primero se factoriza la potencia de x: $x = 0$ es raíz y Descartes se aplica al otro factor.

Cota de las raíces. Un número $c > 0$ es *cota superior* de las raíces reales si ninguna raíz real es mayor que c. Si al dividir sintéticamente p (con $a_n > 0$) entre $x - c$ todos los números del renglón de resultados son mayores o iguales que cero, c es cota superior. Una cota inferior de p es el negativo de una cota superior de $p(-x)$.

Relaciones entre raíces y coeficientes. Si $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (coeficiente principal 1), la suma de las raíces es $-a_{n-1}$ y su producto es $(-1)^n a_0$. Sirven para comprobar el resultado.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«si se sabe que $\alpha = i$ (o $1-3i$) es raíz»	dividir entre $x-\alpha$ y seguir	4.3.1, 4.3.4
«expresar como producto de factores lineales»	todas las raíces y a_n	4.3.1
coeficientes con i y una raíz dada	dividir solo entre $x-\alpha$, sin conjugado	4.3.4

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar A y B si 1 y -1 son raíces», «si contiene al punto», «si es divisible entre $x-2$»	ecuaciones para los coeficientes	4.3.5
«raíz de multiplicidad 2»	dos divisiones con residuo cero	4.3.5
«regla de los signos de Descartes», «posibilidades en que pueden presentarse las raíces»	tabla de posibilidades	4.3.3
«posibles raíces racionales»	lista $\pm p/q$	4.3.2
una gráfica y «el polinomio de menor grado»	raíces, multiplicidades y a_n	4.3.6
x^8+x^4-6, x^6+8x^3+12 (solo potencias múltiplos de una)	cambio de variable $u=x^k$	4.3.7
«una cota superior de las raíces»	división sintética con resultados ≥ 0	4.3.8
$f(x)=p(x)\,q(x)$	raíces de cada factor por separado	4.3.2

4.3 Procedimientos

4.3.1 División sintética

Para dividir $p(x)$ entre $x-c$:

1. Escribe en un renglón **todos** los coeficientes, de la potencia mayor a la menor, con cero en las potencias que faltan. Pon c a la izquierda.
2. Baja el primer coeficiente al renglón de resultados.
3. Multiplica ese resultado por c, escríbelo bajo el siguiente coeficiente y suma. Repite hasta el final.
4. El último número es el residuo, $p(c)$. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos.
5. Si el residuo es 0, c es raíz: sigue trabajando con el cociente (polinomio *deflactado*).

Por ejemplo, $x^3-6x^2+11x-6$ entre $x-1$:

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6).$$

4.3.2 Posibles raíces racionales y raíces reales

1. Si hay potencias de x en todos los términos, factoriza x^k: $x=0$ es raíz de multiplicidad k.
2. Si los coeficientes son fracciones, multiplica por el común denominador; las raíces no cambian.
3. Haz la lista $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.

4. Prueba primero los más pequeños (±1, ±2) con división sintética. Cada vez que uno sea raíz, sigue con el cociente.
5. Cuando el cociente sea de grado 2, usa la fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

4.3.3 Regla de los signos de Descartes

1. Si $a_0 = 0$, factoriza x^k y trabaja con el otro factor.
2. Cuenta los cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$ (los ceros se saltan): da las posibles raíces positivas.
3. Escribe $p(-x)$: cambian de signo los coeficientes de las potencias **impares**. Cuenta sus cambios: posibles raíces negativas.
4. Arma la tabla: positivas y negativas bajan de dos en dos; las complejas completan el grado y siempre son un número par. Por ejemplo, para un polinomio de grado 5 con 2 cambios en $p(x)$ y 1 en $p(-x)$:

	1ª	2ª
Positivas	2	0
Negativas	1	1
Complejas	2	4
Total	5	5

Descartes no da las raíces; solo dice cuáles candidatos racionales vale la pena probar: si no hay positivas posibles, no se prueban los candidatos positivos.

4.3.4 Raíz compleja dada

1. Revisa los coeficientes.
2. **Si son reales:** el conjugado también es raíz. Divide dos veces seguidas (entre $x - \alpha$ y entre $x - \bar{\alpha}$), o divide una vez entre el factor cuadrático $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$. El cociente tiene dos grados menos.
3. **Si alguno es complejo:** divide solo entre $x - \alpha$. El cociente puede quedar con coeficientes reales; a partir de ahí, posibles raíces racionales o fórmula general.
4. En la división sintética con complejos, multiplica con $i^2 = -1$ y suma partes reales con reales e imaginarias con imaginarias. El residuo debe salir exactamente 0; si no, hay un error de cuentas.

4.3.5 Coeficientes desconocidos

Cada dato se convierte en una ecuación lineal para los coeficientes:

- «c es raíz», «$x - c$ es factor», «es divisible entre $x - c$», «la gráfica corta el eje en c»: $p(c) = 0$.
- «la gráfica contiene al punto (a, b)»: $p(a) = b$. Si $a = 0$, da directo el término independiente.
- «α es raíz de multiplicidad 2»: dos divisiones sintéticas seguidas entre $x - \alpha$, cada una con residuo 0 (equivale a $p(\alpha) = 0$ y $p'(\alpha) = 0$).

Resuelve el sistema, sustituye los valores en $p(x)$ y **comprueba** cada dato antes de buscar las raíces.

4.3.6 Polinomio a partir de su gráfica

1. Lee las raíces reales: los cortes con el eje x.
2. Asigna multiplicidad: si la curva *cruza* el eje, 1 (o impar); si lo *toca* y regresa, 2 (o par). El polinomio de menor grado usa la menor multiplicidad posible.
3. Escribe $p(x) = a(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots$.
4. Calcula a con un punto de la gráfica que no sea raíz: $p(x_0) = y_0$.
5. Comprueba el signo de a con el comportamiento de los extremos: si la curva sube a la derecha, $a > 0$.

4.3.7 Polinomios con potencias múltiplos de una

Si solo aparecen x^{2k}, x^k y constante ($x^8 + x^4 - 6$, $x^6 + 8x^3 + 12$):

1. Sustituye $u = x^k$: queda una cuadrática en u.
2. Resuelve para u (factorización o fórmula general).
3. Regresa: $x^k = u_1$ y $x^k = u_2$. Cada ecuación tiene k raíces, que son las raíces k-ésimas de u (Unidad 3).

4.3.8 Cota superior de las raíces

1. Con $a_n > 0$, divide sintéticamente entre $x - c$ para $c = 1, 2, 3, \ldots$
2. El primer c cuyo renglón de resultados (cociente y residuo) no tenga números negativos es una cota superior: ninguna raíz real es mayor que c.
3. Para la cota inferior, aplica lo mismo a $p(-x)$ y cambia el signo.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíz imaginaria dada en un polinomio real

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 3.

Determine todas las raíces del polinomio

$$f(x) = 2x^6 - x^5 - 2x^2 + x,$$

si se sabe que $\alpha = i$ es una de ellas.

Resolución.

1. No hay término independiente: $f(x) = x\,(2x^5 - x^4 - 2x + 1)$. Primera raíz: $x = 0$.
2. Los coeficientes son reales, así que $\bar{\alpha} = -i$ también es raíz. Se divide $g(x) = 2x^5 - x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ entre $x - i$ y luego entre $x + i$:

	2	-1	0	0	-2	1
i		$2i$	$-2-i$	$1-2i$	$2+i$	-1
	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i	0

	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i
$-i$		$-2i$	i	$2i$	$-i$
	2	-1	-2	1	0

3. Queda $2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Se agrupa: $x^2(2x - 1) - (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(x - 1)(x + 1)$.

4. Comprobación con raíces racionales: los candidatos son $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$, y los tres que salen están en la lista.
5. **Raíces:** $0,\ i,\ -i,\ \frac{1}{2},\ 1,\ -1$. Son seis, como el grado.

$$f(x) = 2x\,(x-i)(x+i)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x-1)(x+1).$$

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Coeficientes a partir de dos raíces

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 3.

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - Ax + 2B$, determine:

- a) los valores de A y B si 1 y -1 son raíces de P;
- b) la expresión de $P(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $P(1) = 1 + 1 - 7 - A + 2B = 0 \ \Rightarrow\ -A + 2B = 5$.
2. $P(-1) = 1 - 1 - 7 + A + 2B = 0 \ \Rightarrow\ A + 2B = 7$.
3. Sumando: $4B = 12$, $B = 3$; entonces $A = 7 - 6 = 1$. a) $A = 1,\ B = 3$.
4. $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Se divide entre $x - 1$ y el cociente entre $x + 1$:

	1	1	−7	−1	6
1		1	2	−5	−6
−1	1	2	−5	−6	0
		−1	−1	6	
	1	1	−6	0	

5. $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$.
6. b) $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$. Comprobación: producto de raíces $1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3) = 6 = (-1)^4 a_0$.

Ejercicio 4.5.2 · Coeficientes a partir de tres puntos de la gráfica

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 3.

La gráfica del polinomio $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$ contiene a los puntos $(-1, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 0)$. Determine:

- a) los valores de $A, B, C \in \mathbb{R}$;
- b) todas las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. $p(0) = A = 2$.
2. $p(1) = A + B + C + A = 0 \ \Rightarrow\ B + C = -4$.
3. $p(-1) = -A + B - C + A = -6 \ \Rightarrow\ B - C = -6$.
4. Sumando: $2B = -10$, $B = -5$; $C = -4 + 5 = 1$. a) $A = 2,\ B = -5,\ C = 1$.

5. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$. El punto $(1, 0)$ dice que $x = 1$ es raíz:

	2	−5	1	2
1		2	−3	−2
	2	−3	−2	0

6. $2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$.
7. b) **Raíces:** $1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4.5.3 · Coeficientes complejos con una raíz dada

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 3.

Para el polinomio

$$P(x) = x^5 + (-2 + i)x^4 + (-6 - i)x^3 + (8 - 7i)x^2 + (5 + i)x + (-6 + 6i),$$

determine sus raíces, si una de ellas es $1 - i$, y represéntelo como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. Hay coeficientes complejos: $1+i$ **no** tiene por qué ser raíz. Se divide solo entre $x-(1-i)$:

	1	$-2+i$	$-6-i$	$8-7i$	$5+i$	$-6+6i$
$1-i$		$1-i$	$-1+i$	$-7+7i$	$1-i$	$6-6i$
	1	-1	-7	1	6	0

   Por ejemplo, en la segunda columna: $(1 - i)(1) = 1 - i$ y $(-2 + i) + (1 - i) = -1$.
2. El cociente es real: $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$. Candidatos racionales: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
3. $x = 1$ y luego $x = -1$:

	1	−1	−7	1	6
1		1	0	−7	−6
−1	1	0	−7	−6	0
		−1	1	6	
	1	−1	−6	0	

4. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.
5. **Raíces:** $1 - i,\ 1,\ -1,\ 3,\ -2$.

$$P(x) = (x - 1 + i)(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2).$$

Ejercicio 4.5.4 · Polinomio bicuadrado y cota superior

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces del polinomio $p(x) = x^8 + x^4 - 6$ y una cota superior de sus raíces reales.

Resolución.

1. Con $u = x^4$: $u^2 + u - 6 = (u + 3)(u - 2) = 0$, así que $u = 2$ o $u = -3$.
2. $x^4 = 2$: raíces cuartas de $2 = 2\,\mathrm{cis}\,0^\circ$. Módulo $\sqrt[4]{2}$, ángulos $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$:

$$x = \sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[4]{2}\,i, \quad -\sqrt[4]{2}, \quad -\sqrt[4]{2}\,i.$$

3. $x^4 = -3 = 3\operatorname{cis}180°$: módulo $\sqrt[4]{3}$, ángulos $\frac{180°+360°k}{4} = 45°, 135°, 225°, 315°$. En forma binómica, $\sqrt[4]{3}\operatorname{cis}45° = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1+i)$, y las otras tres son

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1-i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1-i).$$

4. **Ocho raíces:** $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm\sqrt[4]{2}\,i$ y $\sqrt[4]{3}\operatorname{cis}\theta$ con $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$.
5. Cota superior. Con $c = 1$ el residuo es negativo:

	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
1		1	1	1	1	2	2	2	2
	1	1	1	1	2	2	2	2	−4

Con $c = 2$, todos los resultados son positivos:

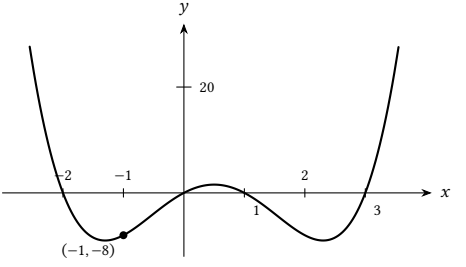
	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
2		2	4	8	16	34	68	136	272
	1	2	4	8	17	34	68	136	266

6. **Cota superior:** $c = 2$**.** En efecto, la única raíz real positiva es $\sqrt[4]{2} < 2$.

Ejercicio 4.5.5 · Polinomio de menor grado a partir de su gráfica

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -2, 0, 1 y 3 (en los cuatro puntos lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(-1, -8)$.



Resolución.

1. Cuatro cruces del eje, cada uno de multiplicidad 1 (la curva atraviesa el eje): el menor grado es 4.
2. $p(x) = a\,(x+2)\,x\,(x-1)(x-3)$.
3. Punto $(-1,-8)$: $a\,(1)(-1)(-2)(-4) = -8a = -8$, así que $a = 1$. Es positivo, como indican los extremos que suben.
4. $p(x) = x(x+2)(x-1)(x-3) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$.

Ejercicio 4.5.6 · Regla de los signos de Descartes y factores lineales

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 3.

Para el polinomio $h(x) = x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $h(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $h(x) = x^3\, q(x)$ con $q(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. $x = 0$ es raíz de multiplicidad 3.
2. Descartes en q. Signos de $q(x)$: $+\ +\ +\ +\ +$, 0 cambios: **ninguna raíz positiva**.
3. $q(-x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$: signos $+\ -\ +\ -\ +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 raíces negativas.

	1ª	2ª	3ª
Positivas	0	0	0
Negativas	4	2	0
Complejas	0	2	4
Total	4	4	4

   (Contando $x = 0$, h tiene además tres raíces nulas.)
4. Candidatos racionales de q: $\pm 1, \pm 2$; solo se prueban los negativos.

	1	3	3	3	2
-1		-1	-2	-1	-2
-2	1	2	1	2	0
		-2	0	-2	
	1	0	1	0	

5. Queda $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la segunda posibilidad de la tabla.
6. $h(x) = x^3(x+1)(x+2)(x-i)(x+i)$.

Ejercicio 4.5.7 · Raíz de multiplicidad 2

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 4.

Sea $p(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + kx^2 + mx - m$.

- a) Obtenga k y m si $\alpha = 1$ es raíz de multiplicidad 2.
- b) Con esos valores, determine las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. Primera división entre $x - 1$:

	1	-1	-5	k	m	$-m$
1		1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$
	1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$	$k-5$

   Residuo $k - 5 = 0$: $k = 5$. El cociente es $x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + m$.
2. Segunda división entre $x - 1$:

	1	0	-5	0	m
1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	$m-4$

   Residuo $m - 4 = 0$: $m = 4$.

3. Queda $x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x-2)(x+2)$.
4. b) **Raíces:** 1 (doble), -1, 2, -2: $p(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2)(x+2)$.

Ejercicio 4.5.8 · Raíz compleja de un polinomio real

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 4.

Sea $p(x) = x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18$. Determine todas sus raíces si $\alpha_1 = 1 - i$ es una de ellas.

Resolución.

1. Coeficientes reales: $\alpha_2 = 1 + i$ también es raíz. Factor cuadrático: $(x - 1 + i)(x - 1 - i) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.
2. Al dividir, $x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)$. Se comprueba multiplicando: $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 9x^2 - 18x + 18$.
3. $x^2 + 9 = 0$: $x = \pm 3i$.
4. **Raíces:** $1 - i$, $1 + i$, $3i$, $-3i$.

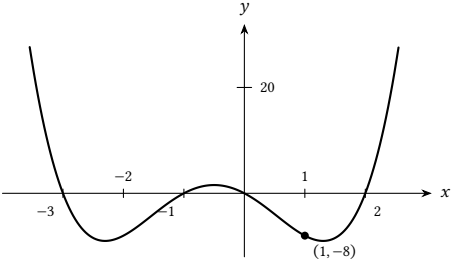
4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo B, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -3, -1, 0 y 2 (en los cuatro lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(1, -8)$.



Resultado: $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 3.

Exprese el polinomio $h(x) = x^6 + (2-i)x^5 + (-3-2i)x^4 + (-6+3i)x^3 + 6ix^2$ como producto de factores lineales, si se sabe que i es una de sus raíces.

Resultado: $h(x) = x^2(x-i)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $f(x) = p(x)\,q(x)$, donde $p(x) = x^2+1$ y $q(x) = x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 20x^3$.

Resultado: $i,\ -i,\ 0$ (triple), $4,\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 3.

Para $g(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $g(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resultado: Posibilidades (positivas, negativas, complejas) del factor de grado 4: $(4,0,0)$, $(2,0,2)$, $(0,0,4)$. $g(x) = x^3(x-1)(x-2)(x-i)(x+i)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 4.

Sea $p(x) = Ax^3 + 2x^2 - Bx + 2$. Determine:

- a) los valores de A y $B \in \mathbb{R}$ si $p(1) = -4$ y $p(2) = 0$;
- b) las raíces de $p(x)$ con esos valores.

Resultado: a) $A = 1$, $B = 9$. b) $2,\ -2+\sqrt{5},\ -2-\sqrt{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $p(x) = x^5 - (1-3i)x^4 + 5x^3 - (5-15i)x^2 + 4x - (4-12i)$, si se sabe que $1-3i$ es raíz.

Resultado: $1-3i,\ i,\ -i,\ 2i,\ -2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

4.7 Errores frecuentes

- **Olvidar los ceros en la división sintética.** En $2x^5 - x^4 - 2x + 1$ faltan x^3 y x^2: sus coeficientes son 0 y deben escribirse.
- **Usar el conjugado con coeficientes complejos.** Si algún coeficiente tiene i, el conjugado de una raíz no es raíz en general. Se divide solo entre $x - \alpha$.
- **No usar el conjugado con coeficientes reales.** Si son reales, el conjugado sí es raíz y ahorra una búsqueda.
- **Perder la raíz $x = 0$.** Cuando no hay término independiente, x^k se factoriza primero y cuenta como raíz de multiplicidad k.

- **Aplicar Descartes con $a_0 = 0$.** Primero se factoriza la potencia de x.
- **Equivocar $p(-x)$.** Cambian de signo solo los coeficientes de las potencias impares.
- **Contar mal las raíces.** Deben ser tantas como el grado, contando multiplicidades. Si faltan, falta una división.
- **Olvidar el coeficiente principal.** El producto de factores lineales lleva a_n al frente: $2x^6 - \cdots = 2x(x - i)\cdots$
- **Gráfica: suponer $a = 1$.** El coeficiente principal se calcula con un punto de la gráfica que no sea raíz.
- **Cuentas con i.** En la división sintética con complejos, $i \cdot i = -1$; un residuo distinto de 0 indica un error.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x - a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\leq$ cambios de $p(x)$; negativas $\leq$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe el grado: es el número de raíces que debes entregar.
2. Factoriza x^k si no hay término independiente.
3. Mira los coeficientes: ¿reales (usa el conjugado) o complejos (no)?
4. Divide entre cada raíz conocida con división sintética, mostrando la tabla.
5. Con el cociente real, lista los candidatos racionales; si piden Descartes, haz la tabla antes de probar.
6. Llega a grado 2 y usa la fórmula general.
7. Escribe las raíces en una lista y el polinomio como producto de factores lineales, con a_n al frente. Comprueba con suma o producto de raíces.

Si no se encuentra el camino, la división sintética entre la raíz dada con residuo 0 y el cociente bien escrito ya valen buena parte del problema.

Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno formulará, como modelo matemático de problemas, sistemas de ecuaciones lineales y los resolverá aplicando el método de Gauss. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1). En el Plan 2010 domina el planteamiento (12 de 17), seguido de la solución general y particular (3) y el sistema con parámetro (2). En el Plan 2016 domina el sistema con parámetro (21 de 41), seguido del conjunto solución (10), el planteamiento (9) y construir un sistema a partir de su solución (1).
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 5.1 y 5.3 (25 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (15 min cada uno).

5.1 Conceptos y expresiones

Ecuación y sistema lineal. Una ecuación es *lineal* si cada incógnita aparece a la primera potencia y sin multiplicarse por otra: $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$. Un *sistema* de m ecuaciones lineales con n incógnitas se escribe con su *matriz aumentada*, que guarda los coeficientes y, separados por una barra, los términos independientes:

$$\begin{aligned} x+y+z&=200\\ 2x-y-2z&=0\\ 8x+5y+15z&=1640 \end{aligned} \quad\longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200\\ 2 & -1 & -2 & 0\\ 8 & 5 & 15 & 1640 \end{array}\right]$$

Una *solución* es una lista de valores que satisface todas las ecuaciones a la vez; el *conjunto solución* reúne todas.

Clasificación. Todo sistema cae en uno de tres casos:

Tipo	Qué se ve al terminar Gauss
Incompatible	ninguna solución: aparece un renglón $0\ 0\ 0 \mid c$ con $c \neq 0$. Se revisa primero
Compatible determinado	sin ese renglón, una sola solución: hay un pivote en cada columna de incógnita
Compatible indeterminado	sin ese renglón, infinitas soluciones: hay menos pivotes que incógnitas (con o sin renglones $0=0$)

Sistema homogéneo. Si todos los términos independientes son cero, el sistema siempre es compatible: tiene al menos la *solución trivial* $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Tiene otras (infinitas) soluciones cuando, al escalonar, quedan menos renglones no nulos que incógnitas.

Transformaciones elementales. Estas tres operaciones con los renglones dan un sistema *equivalente* (con las mismas soluciones):

- intercambiar dos renglones: $R_1 \leftrightarrow R_2$;
- multiplicar un renglón por un número distinto de cero: $-R_2$, $2R_3$;
- sumar a un renglón un múltiplo de otro: $R_2 - 2R_1$.

Método de Gauss. Con esas operaciones se hacen ceros debajo de cada pivote hasta llegar a la forma *escalonada*; después se despeja de abajo hacia arriba (sustitución regresiva). Si además se hacen ceros arriba de los pivotes, se llega a la forma escalonada reducida (Gauss-Jordan).

Solución general y particular. En un sistema compatible indeterminado, las incógnitas sin pivote son *libres* (parámetros); las demás se despejan en función de ellas. Esa expresión es la *solución general*. Una *solución particular* se obtiene al dar un valor a cada parámetro.

5.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
Una historia con compras, producción, personas o inversiones y pregunta «¿cuántos…?»	Planteamiento (5.3.1) y Gauss (5.3.2)
Una tabla de horas, costos o insumos por tipo de producto	Planteamiento por renglones de la tabla (5.3.1)
«Determine los valores de k para que el sistema sea compatible determinado, indeterminado o incompatible»	Sistema con parámetro (5.3.3)
«Obtenga la solución general y una particular» o «el conjunto solución»	Solución general (5.3.4)
«Sistema homogéneo» (todos los términos independientes son cero)	Solución general (5.3.4); la trivial siempre existe
«Obtenga un sistema cuyo conjunto solución sea…»	Construir el sistema (5.3.5)

5.3 Procedimientos

5.3.1 Planteamiento de un problema

1. Nombra las incógnitas con palabras: «x: kilogramos de plátano». Debe haber tantas incógnitas como cantidades se piden.
2. Escribe una ecuación por cada dato que relacione cantidades: un total de piezas, un total de dinero (precio por cantidad), una comparación («es el doble de…», «excede en 5 a…»).
3. Pasa todas las incógnitas a la izquierda y ordénalas siempre igual: x, y, z.
4. Escribe la matriz aumentada y resuelve por Gauss (5.3.2).

5. Comprueba en el enunciado (no solo en las ecuaciones) y responde con palabras y unidades.

Traducciones frecuentes. «A es igual a B más la mitad de C»: $A = B + \frac{1}{2}C$, es decir, $2A - 2B - C = 0$. «A es el doble de B más tres»: $A = 2B + 3$. «Hay 10 menos de C que el total de los otros dos»: $C = A + B - 10$. En una tabla de horas por producto, cada *renglón* (cada máquina) da una ecuación: horas por unidad de cada tipo multiplicadas por las unidades, igual al total de horas.

5.3.2 Método de Gauss

1. Escribe la matriz aumentada. Si conviene, intercambia renglones para que el primer pivote sea 1.
2. Haz ceros debajo del primer pivote con operaciones $R_i - cR_1$.
3. Repite con el segundo pivote en los renglones de abajo, y así hasta la forma escalonada. Escribe cada operación sobre la flecha.
4. Lee el último renglón: si es $0\ 0\ 0 \mid c$ con $c \neq 0$, el sistema es incompatible.
5. Despeja de abajo hacia arriba y comprueba en las ecuaciones originales.

5.3.3 Sistema con parámetro

1. Escalona la matriz aumentada sin dividir entre expresiones que tengan el parámetro (podrían valer cero). Si un renglón tiene el parámetro, déjalo abajo.
2. Al final, el último renglón queda como $0\ 0\ f(k) \mid g(k)$.
3. Resuelve $f(k) = 0$. Si $f(k) \neq 0$: compatible determinado.
4. Para cada raíz k_0 de f: si $g(k_0) = 0$, el renglón es $0 = 0$ y el sistema es compatible indeterminado; si $g(k_0) \neq 0$, es incompatible.
5. Responde los tres incisos, aunque alguno sea «ningún valor de k».

Comprobación con el determinante. Si el sistema es cuadrado, el determinante de la matriz de coeficientes vale cero justo en las raíces de $f(k)$. Sirve para comprobar, pero no sustituye la lectura del último renglón: con $\det = 0$ el sistema puede ser indeterminado o incompatible.

5.3.4 Solución general y particular

1. Escalona hasta que se vean los pivotes.
2. Las incógnitas sin pivote son libres: $z = t$, $y = s$, con $t, s \in \mathbb{R}$.
3. Despeja las demás en función de los parámetros.
4. Escribe la solución general como terna (o cuarteta) y elige valores sencillos de los parámetros para una particular. Comprueba la particular en las ecuaciones originales.

5.3.5 Construir un sistema a partir de su solución

Si el conjunto solución es $\{(x, y, z) = (\dots)\}$ con un parámetro, elimina el parámetro: despéjalo de una coordenada y sustitúyelo en las otras dos. Cada igualdad que ya no lo contiene es una ecuación del sistema. Una tercera ecuación puede ser la suma de las dos primeras: el sistema sigue teniendo las mismas soluciones.

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Planteamiento: compra de fruta

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 4.

Un comerciante compró 200 kg de fruta entre plátanos, melones y piñas. Los kilogramos de plátano son iguales a los de piña más la mitad de los de melón. El kilogramo de plátano cuesta \$8, el de melón \$5 y el de piña \$15, y en total pagó \$1640. Determine cuántos kilogramos compró de cada fruta.

Resolución.

1. Incógnitas: x, y, z: kilogramos de plátano, melón y piña.
2. Ecuaciones: $x+y+z=200$; $x=z+\frac{1}{2}y$, es decir, $2x-y-2z=0$; $8x+5y+15z=1640$.
3. Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 8 & 5 & 15 & 1640 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-8R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -4 & -400 \\ 0 & -3 & 7 & 40 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -4 & -400 \\ 0 & 0 & 11 & 440 \end{array}\right]$$

4. Sustitución regresiva: $11z=440 \Rightarrow z=40$; $-3y-160=-400 \Rightarrow y=80$; $x=200-80-40=80$.
5. Comprobación: $80=40+\frac{1}{2}(80)$ y $8(80)+5(80)+15(40)=640+400+600=1640$.
6. **Compró 80 kg de plátano, 80 kg de melón y 40 kg de piña.**

Ejemplo resuelto · Sistema con parámetro

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 4.

Determine, si existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$4x-y+2z=3, \qquad x-2y-2z=0, \qquad x-y+kz=2$$

es a) compatible determinado, b) compatible indeterminado, c) incompatible.

Resolución.

1. Se pone primero la ecuación que empieza con x y se deja abajo la que tiene k:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & k & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & k+2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-7R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 2 \\ 0 & 0 & -7k-4 & -11 \end{array}\right]$$

2. El último renglón es $(-7k-4)z=-11$. El coeficiente se anula en $k=-\frac{4}{7}$.
3. Si $k \neq -\frac{4}{7}$, hay tres pivotes: **a) compatible determinado para todo $k \neq -\frac{4}{7}$.**

4. Si $k = -\frac{4}{7}$, el renglón queda $0 = -11$: **c) incompatible para $k = -\frac{4}{7}$.**
5. El término independiente -11 nunca vale cero: **b) ningún valor de k lo hace compatible indeterminado.**
6. Comprobación: $\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} = -7k - 4$, que se anula en el mismo valor.

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Material de acero para un edificio

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 4.

Para un edificio se compraron 420 kg de acero entre lámina, ángulo y solera, y se pagaron \$4720. El kilogramo de lámina costó \$15, el de ángulo \$7 y el de solera \$4. Los kilogramos de lámina son iguales a los de ángulo más el doble de los de solera. Determine cuántos kilogramos se compraron de cada material.

Resolución.

1. x, y, z: kilogramos de lámina, ángulo y solera.
2. Ecuaciones: $x + y + z = 420$; $x = y + 2z$, o sea, $x - y - 2z = 0$; $15x + 7y + 4z = 4720$.
3. Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 15 & 7 & 4 & 4720 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 15R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -2 & -3 & -420 \\ 0 & -8 & -11 & -1580 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -2 & -3 & -420 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

4. $z = 100$; $-2y - 300 = -420 \Rightarrow y = 60$; $x = 420 - 60 - 100 = 260$.
5. Comprobación: $260 = 60 + 2(100)$ y $15(260) + 7(60) + 4(100) = 3900 + 420 + 400 = 4720$.
6. **Lámina 260 kg, ángulo 60 kg y solera 100 kg.**

Ejercicio 5.5.2 · Armadora: tabla de horas por máquina

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 4.

Una armadora produce tres tipos de automóvil, A, B y C, y cada uno pasa por tres máquinas. Las horas que cada máquina dedica a una unidad de cada tipo son:

Máquina	A	B	C
1	3	2	3
2	1	3	4
3	2	7	2

A la semana, la máquina 1 trabaja 35 h; la 2, 27 h, y la 3, 46 h. Determine cuántos automóviles de cada tipo se fabrican por semana.

Resolución.

1. x, y, z: automóviles de tipo A, B y C por semana. Cada máquina (renglón de la tabla) da una ecuación: $3x + 2y + 3z = 35$, $x + 3y + 4z = 27$, $2x + 7y + 2z = 46$.
2. Se pone primero la ecuación de la máquina 2, que empieza con 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 3 & 2 & 3 & 35 \\ 2 & 7 & 2 & 46 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 0 & -7 & -9 & -46 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & -7 & -9 & -46 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+7R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -51 & -102 \end{array}\right]$$

3. $z = 2$; $y = -8 + 6(2) = 4$; $x = 27 - 3(4) - 4(2) = 7$.
4. Comprobación con la máquina 1: $3(7) + 2(4) + 3(2) = 21 + 8 + 6 = 35$.
5. **Se fabrican 7 autos del tipo A, 4 del B y 2 del C por semana.**

Ejercicio 5.5.3 · Ingenieros por especialidad

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 4.

En una reunión hay 33 ingenieros civiles, mecánicos y petroleros. Los mecánicos son el doble de los petroleros más tres. El doble de los mecánicos más el triple de los petroleros, menos uno, es igual al doble de los civiles más diez. ¿Cuántos ingenieros de cada especialidad hay?

Resolución.

1. c, m, p: ingenieros civiles, mecánicos y petroleros.
2. Ecuaciones: $c + m + p = 33$; $m = 2p + 3$, o sea, $m - 2p = 3$; $2m + 3p - 1 = 2c + 10$, o sea, $-2c + 2m + 3p = 11$.
3. Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 77 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 65 \end{array}\right]$$

4. $p = 5$; $m = 3 + 2(5) = 13$; $c = 33 - 13 - 5 = 15$.
5. Comprobación: $2(13) + 3(5) - 1 = 40$ y $2(15) + 10 = 40$.
6. **Hay 15 civiles, 13 mecánicos y 5 petroleros.**

Ejercicio 5.5.4 · Inventario de una librería: cuatro incógnitas

Adaptado de: 2º final 2019-1, problema 5.

Una librería tiene 30 000 libros de Física, Química, Matemáticas y Termodinámica. Los de Física son tantos como los de Matemáticas y Termodinámica juntos. Si al doble de los de Matemáticas se le suman 10 000, se obtienen los de Química. Los de Química, Matemáticas y Termodinámica suman 23 000. ¿Cuántos ejemplares hay de cada materia?

Resolución.

1. F, Q, M, T: libros de Física, Química, Matemáticas y Termodinámica.
2. Ecuaciones: $F+Q+M+T=30\,000$; $F=M+T$; $Q=2M+10\,000$; $Q+M+T=23\,000$.
3. Con cuatro incógnitas y dos ecuaciones ya despejadas, conviene sustituir (Gauss da lo mismo). En la cuarta: $(2M+10\,000)+M+T=23\,000 \Rightarrow 3M+T=13\,000$.
4. En la primera: $(M+T)+(2M+10\,000)+M+T=30\,000 \Rightarrow 4M+2T=20\,000 \Rightarrow 2M+T=10\,000$.
5. Restando: $(3M+T)-(2M+T)=13\,000-10\,000 \Rightarrow M=3000$; $T=10\,000-6000=4000$.
6. $Q=2(3000)+10\,000=16\,000$; $F=3000+4000=7000$. Comprobación: $7000+16\,000+3000+4000=30\,000$.
7. **Física 7000, Química 16 000, Matemáticas 3000 y Termodinámica 4000 libros.**

Ejercicio 5.5.5 · Parámetro, solución general y particular

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 4.

Sea el sistema

$$x+y+\alpha z=2, \qquad 3x+4y+2z=\alpha, \qquad 2x+3y-z=1.$$

Obtenga: a) $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea compatible indeterminado; b) la solución general del sistema con ese valor; c) la solución particular con $z=1$.

Resolución.

1. Gauss sin dividir entre expresiones con α:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 3-\alpha \end{array}\right]$$

2. El último renglón es $(\alpha-3)z=3-\alpha$. Si $\alpha \neq 3$, $z=-1$ y el sistema es determinado. Si $\alpha=3$, queda $0=0$: **a)** $\alpha=3$**.** Ningún valor lo hace incompatible.
3. Con $\alpha=3$: $y-7z=-3$ y $x+y+3z=2$. Con $z=t$: $y=-3+7t$, $x=2-(-3+7t)-3t=5-10t$.
4. **b)** $(x,y,z)=(5-10t,\ -3+7t,\ t)$**,** $t\in\mathbb{R}$**.**
5. **c) Con** $z=t=1$**:** $(x,y,z)=(-5,\ 4,\ 1)$**.** Comprobación: $-5+4+3=2$, $-15+16+2=3=\alpha$, $-10+12-1=1$.

Ejercicio 5.5.6 · Parámetro: un caso que nunca es determinado

Adaptado de: 1er final 2019-2, tipo A, problema 5.

Determine los valores de $m\in\mathbb{R}$ para los que el sistema

$$x+y+2z=2, \qquad 2x+3y-z=5, \qquad 3x+4y+z=m$$

es a) compatible determinado, b) compatible indeterminado, c) incompatible.

Resolución.

1. Gauss:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & m \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & m-6 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$
2. El último renglón no tiene pivote para ningún m: en sus coeficientes, la tercera ecuación es la suma de las dos primeras. **a) Ningún valor de** m da un sistema compatible determinado.
3. **b) Compatible indeterminado si** $m = 7$**:** el renglón es $0 = 0$. Su conjunto solución es $z = t$, $y = 1 + 5t$, $x = 2 - y - 2t = 1 - 7t$.
4. **c) Incompatible si** $m \neq 7$**:** el renglón es $0 = m - 7 \neq 0$.
5. Comprobación: el determinante de los coeficientes vale 0, lo que confirma a).

Ejercicio 5.5.7 · Parámetro: un caso que nunca es incompatible

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo C, problema 5.

Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$x - 2y - 3z = -7, \qquad 3x - ky - 5z = -21, \qquad y + z = k - 2$$

es a) compatible determinado, b) compatible indeterminado, c) incompatible.

Resolución.

1. Gauss, dejando abajo el renglón que tiene k en el pivote:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 3 & -k & -5 & -21 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 6-k & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 6-k & 4 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_3-(6-k)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & k-2 & (k-6)(k-2) \end{array}\right]$$
2. Tercer renglón: $4 - (6 - k) = k - 2$ y $0 - (6 - k)(k - 2) = (k - 6)(k - 2)$. Queda $(k - 2)z = (k - 6)(k - 2)$.
3. **a) Compatible determinado para** $k \neq 2$**:** $z = k-6$, $y = k-2-z = 4$, $x = -7+2y+3z = 3k - 17$.
4. **b) Compatible indeterminado para** $k = 2$**:** el renglón queda $0 = 0$.
5. **c) Incompatible: ningún valor de** k, porque cuando el coeficiente se anula también se anula el término independiente.

Ejercicio 5.5.8 · Sistema homogéneo con cuatro incógnitas

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 4.

Determine la solución general y una particular del sistema

$$\begin{aligned} 7w + 5x + 10y - 2z &= 0 \\ -6w - 2x - 4y + 4z &= 0 \\ 2w + x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

Resolución.

1. Es homogéneo: basta escalonar la matriz de coeficientes (la columna de ceros no cambia). Se pone primero la tercera ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 10 & -2 \\ -6 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+3R_1]{2R_2-7R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-3R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Quedan dos ecuaciones con cuatro incógnitas: $2w + x + 2y - z = 0$ y $x + 2y + z = 0$. Hay dos incógnitas libres: $y = s$, $z = t$.
3. $x = -2s - t$; $2w = -x - 2y + z = 2s + t - 2s + t = 2t \Rightarrow w = t$.
4. **Solución general:** $(w, x, y, z) = (t,\ -2s - t,\ s,\ t)$**, con** $s, t \in \mathbb{R}$**.**
5. **Una particular** $(s = t = 1)$: $(w, x, y, z) = (1, -3, 1, 1)$. Comprobación en la primera: $7 - 15 + 10 - 2 = 0$.

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 4.

Se compraron 65 cajas de los productos A, B y C. La caja de A costó \$17, la de B \$30 y la de C \$48, y se pagaron \$1830 en total. Las cajas de A son tantas como las de B y C juntas, menos 5. ¿Cuántas cajas se compraron de cada producto?

Resultado: 30 cajas de A, 20 de B y 15 de C.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 4.

Un panadero vendió 120 piezas entre conchas, panqués y cocoles. Las conchas más los panqués son el doble de los cocoles. Las conchas y los cocoles cuestan \$3 y los panqués \$5. Si reunió \$420, ¿cuántas piezas vendió de cada tipo?

Resultado: 50 conchas, 30 panqués y 40 cocoles.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 4.

Un asesor bancario ofrece inversiones de tres tipos, A, B y C. De las de tipo C hay 10 unidades menos que el total de las de los otros dos tipos, y las de tipo A son el doble de las de tipo B. Si debe colocar 500 inversiones al mes, ¿cuántas de cada tipo debe vender?

Resultado: 170 del tipo A, 85 del B y 245 del C.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 4.

Para el sistema

$$a + 2b - c = 2, \qquad 4a + b + c = 3, \qquad 3a + 6b - 3c = 6,$$

determine a) una solución general y b) una solución particular.

Resultado: a) $(a, b, c) = \left(\frac{4-3t}{7},\ \frac{5+5t}{7},\ t\right), t \in \mathbb{R}$; b) con $t = -1$: $(1, 0, -1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: 1er final 2020-2, tipo C, problema 5.

Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$-2x + 4y + kz = 1, \qquad x - 3y - 2z = 0, \qquad kx - y + z = 1$$

es a) compatible determinado y b) incompatible.

Resultado: a) $k \neq 1$ y $k \neq 2$; b) $k = 1$ o $k = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.6

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 5.

Obtenga el conjunto solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2a - b - c + 3d &= 0 \\ -2a - 2b - c &= 0 \\ -a + 2b + c - 6d &= 0 \\ a + b - 3d &= 0 \end{aligned}$$

Resultado: $\{(a, b, c, d) = (-2t,\ 5t,\ -6t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

5.7 Errores frecuentes

- **Traducir mal una comparación.** «A es el doble de B más tres» es $A = 2B + 3$, no $A = 2(B + 3)$. Escribe la igualdad con palabras antes de pasarla a símbolos.
- **Desordenar las incógnitas.** Al pasar $x = z + \frac{1}{2}y$ a la matriz, cada coeficiente va en la columna de su incógnita: $2x - y - 2z = 0$.
- **Dividir entre una expresión con el parámetro.** Dividir entre $k - 2$ supone $k \neq 2$ y pierde justo el caso que se pregunta. Combina renglones en cruz, como $2R_3 + (3k-1)R_2$.
- **Decidir solo con el determinante.** det $= 0$ dice «no es determinado», pero no distingue entre indeterminado e incompatible: hay que leer el último renglón.
- **Olvidar un inciso.** Si ningún valor da un sistema indeterminado, se escribe «ningún valor de k».
- **Dar una sola solución en un sistema indeterminado.** La solución general lleva parámetros; la particular es un ejemplo.
- **No comprobar.** Sustituir la solución en una ecuación original toma un minuto y detecta casi todos los errores de signo.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Operaciones de renglón: $R_i \leftrightarrow R_j$; cR_i con $c \neq 0$; $R_i + cR_j$.
- Forma escalonada con último renglón $0\ 0\ a \mid b$:
  - $a \neq 0$: compatible determinado;
  - $a = 0$ y $b = 0$: compatible indeterminado;
  - $a = 0$ y $b \neq 0$: incompatible.
- Homogéneo: siempre compatible; tiene soluciones no triviales si hay menos pivotes que incógnitas.
- Sistema cuadrado: $\det A \neq 0$ si y solo si es compatible determinado.
- Número de parámetros de la solución general = incógnitas − pivotes.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Planteamiento: escribe qué es cada incógnita y una ecuación por dato. Revisa que cada ecuación sume cosas del mismo tipo (piezas con piezas, pesos con pesos).
2. Ordena las ecuaciones para que el primer pivote sea 1 y deja abajo el renglón con el parámetro.
3. Escribe cada operación sobre la flecha: si te equivocas, se puede seguir el razonamiento.
4. Con parámetro: lleva el último renglón a la forma $f(k)\,z = g(k)$ y analiza las raíces de f una por una.
5. Comprueba en las ecuaciones originales y responde con palabras.

Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará los conceptos fundamentales de las matrices, determinantes y sus propiedades a problemas que requieran de ellos para su resolución. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (18 problemas; en 16 exámenes es una **ecuación matricial**) y en los 41 finales del Plan 2016 (43 problemas; ecuación matricial en 30). Los demás piden un determinante con parámetro, la existencia de la inversa, cofactores o matrices simétricas y antisimétricas.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 6.1 y el procedimiento 6.3.1 (30 min).
  2. Sigue los ejemplos 6.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 6.5.1, 6.5.3 y 6.5.7 con cronómetro (15 min cada uno).

6.1 Conceptos y expresiones

Matriz. Una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$ es un arreglo de m renglones y n columnas; a_{ij} es el elemento del renglón i y la columna j. Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y los mismos elementos.

Operaciones. La suma y la multiplicación por un escalar se hacen elemento a elemento. El producto AB existe si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B; el elemento ij de AB es el renglón i de A por la columna j de B:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}.$$

- El producto es asociativo, $A(BC) = (AB)C$, y distributivo, $A(B + C) = AB + AC$.
- **No es conmutativo:** en general $AB \neq BA$. Por eso en una ecuación matricial importa de qué lado se multiplica.
- La identidad I cumple $AI = IA = A$.
- $AB = 0$ no implica $A = 0$ ni $B = 0$.

Inversa. A (cuadrada) es invertible si existe A^{-1} con $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Existe si y solo si $\det A \neq 0$. Propiedades:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A, \qquad (kA)^{-1} = \tfrac{1}{k}A^{-1}, \qquad (A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}.$$

Para 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Transpuesta, conjugada y conjugada transpuesta. A^T cambia renglones por columnas; $\bar{A}$ conjuga cada elemento; $A^* = \bar{A}^T$. Si A es real, $A^* = A^T$.

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T, \qquad (A^T)^T = A, \qquad (AB)^* = B^* A^*.$$

Matrices especiales.

Nombre	Condición
Diagonal, $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$	$a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
Triangular superior (inferior)	ceros debajo (encima) de la diagonal
Simétrica	$A^T = A$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$
Antisimétrica	$A^T = -A$: diagonal de ceros y $a_{ij} = -a_{ji}$
Ortogonal	$A^T A = I$, es decir, $A^{-1} = A^T$
Hermitiana	$A^* = A$ (diagonal real)
Antihermitiana	$A^* = -A$ (diagonal imaginaria pura o cero)
Unitaria	$A^* A = I$, es decir, $A^{-1} = A^*$

Traza. $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii}$, la suma de la diagonal. Cumple $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ y $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$. Es un **número**: en una ecuación matricial, $\operatorname{tr}(B)\, C$ es un escalar por una matriz.

Determinante. Es un número asociado a una matriz cuadrada.

- Orden 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- Orden 3, regla de Sarrus: suma de los productos de las tres diagonales que bajan hacia la derecha menos la suma de las tres que suben.
- Cualquier orden, desarrollo por cofactores sobre el renglón i: $\det A = \sum_j a_{ij} C_{ij}$, con el **cofactor** $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ y el **menor** M_{ij}, que es el determinante que queda al quitar el renglón i y la columna j. Lo mismo vale por columnas.

Propiedades del determinante.

- $\det A^T = \det A$, $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$, $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.
- $\det(kA) = k^n \det A$ si A es de orden n. Cuidado: $\det(2A) = 4 \det A$ en 2×2.
- Un renglón (o columna) de ceros, o dos renglones iguales o proporcionales: $\det = 0$.
- Intercambiar dos renglones cambia el signo. Multiplicar un renglón por k multiplica el determinante por k.
- Sumar a un renglón un múltiplo de otro **no** cambia el determinante (es la base del método de condensación).
- Triangular o diagonal: el determinante es el producto de la diagonal.

Adjunta. $\operatorname{adj} A$ es la transpuesta de la matriz de cofactores: $(\operatorname{adj} A)_{ij} = C_{ji}$. Cumple

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\det A)\, I, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \qquad \operatorname{adj} A = (\det A)\, A^{-1}.$$

Sistemas en forma matricial. El sistema $AX = B$ con $\det A \neq 0$ tiene solución única $X = A^{-1}B$. La regla de Cramer da cada incógnita como $x_k = \det A_k / \det A$, donde A_k es

A con la columna k cambiada por B. En los exámenes casi no se pide; Gauss (Unidad 5) es más rápido.

6.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«obtener la matriz X que satisface la ecuación»	despejar X	6.3.1
la ecuación trae det, tr, adj o A^*	calcular esos números o matrices primero	6.3.1
X^T en la ecuación	despejar X^T y transponer al final	6.3.1
«obtener A^{-1}» o una inversa de 3×3	Gauss-Jordan o adjunta	6.3.2, 6.3.3
«calcular el determinante» de orden 4 o 5	cofactores sobre la línea con más ceros	6.3.4
«valores de k para que exista A^{-1}», «para que $\det A = 0$»	determinante en función del parámetro	6.3.5
«los cofactores de A son…»	ecuaciones con los cofactores	6.3.3
«para que A sea simétrica (antisimétrica)»	igualar a_{ij} con $\pm a_{ji}$	6.3.6

6.3 Procedimientos

6.3.1 Despejar una ecuación matricial

1. Calcula primero los **números** que aparecen: $\det A$, $\operatorname{tr} B$, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, $\det(2B^{-1}) = 2^n/\det B$. Calcula también A^*, A^T o $\operatorname{adj} B$ si aparecen.
2. Pasa todos los términos con X a un lado y los demás al otro, **respetando el lado**: XA tiene X a la izquierda; AX, a la derecha.
3. Factoriza X del mismo lado en todos los términos:

$$XA - XB = X(A-B), \qquad AX + BX = (A+B)X, \qquad kX = kIX = XkI.$$

   Si un término trae X a la izquierda y otro a la derecha (AX y XB), no se puede factorizar: el método no aplica.
4. Multiplica por la inversa **del mismo lado**:

$$MX = N \;\Rightarrow\; X = M^{-1}N, \qquad XM = N \;\Rightarrow\; X = NM^{-1}.$$

5. Si la incógnita aparece como X^T, despeja X^T y transpón al final: $X = (X^T)^T$.
6. Comprueba con una entrada: sustituye X en la ecuación original y verifica al menos un elemento.

6.3.2 Inversa por Gauss-Jordan

1. Escribe la matriz aumentada $[\,A \mid I\,]$.
2. Con operaciones de renglón (intercambiar, multiplicar por $k \neq 0$, sumar un múltiplo de otro renglón) lleva el lado izquierdo a I: primero ceros debajo de la diagonal, luego unos en la diagonal, luego ceros encima.
3. Lo que queda a la derecha es A^{-1}: $[\,A \mid I\,] \to [\,I \mid A^{-1}\,]$.
4. Si aparece un renglón de ceros a la izquierda, A no tiene inversa.

6.3.3 Cofactores, adjunta e inversa por la adjunta

1. Para cada elemento, tacha su renglón y su columna; el determinante que queda es el menor M_{ij}.
2. Aplica el signo de tablero de ajedrez: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, con + en la esquina $(1,1)$.
3. adj A es la matriz de cofactores **transpuesta**.
4. det A se obtiene con un renglón de A por los cofactores de ese mismo renglón.
5. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. Comprueba con un elemento de $AA^{-1} = I$.

6.3.4 Determinantes de orden 4 o 5

1. Busca el renglón o la columna con más ceros.
2. Si no hay suficientes, crea ceros sumando múltiplos de un renglón a otro; eso no cambia el determinante.
3. Desarrolla por cofactores sobre esa línea: solo cuentan los elementos distintos de cero. Cuida el signo $(-1)^{i+j}$.
4. Repite hasta llegar a orden 3 (Sarrus) u orden 2.

6.3.5 Determinante o inversa con parámetro

1. Calcula det A como polinomio en el parámetro, desarrollando por la línea que más simplifique.
2. Factoriza el polinomio. Las raíces son los valores con $\det A = 0$.
3. «Existe A^{-1}» si y solo si $\det A \neq 0$: la respuesta son todos los valores **excepto** esas raíces.
4. Si el parámetro es complejo ($a \in \mathbb{C}$), incluye las raíces complejas.

6.3.6 Simétrica y antisimétrica con incógnitas

1. Simétrica: iguala cada par $a_{ij} = a_{ji}$ (fuera de la diagonal). La diagonal queda libre.
2. Antisimétrica: la diagonal es cero ($a_{ii} = 0$) y $a_{ij} = -a_{ji}$.
3. Resuelve el sistema que resulta e indica qué incógnitas quedan libres.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Ecuación matricial

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 6.

Determine la matriz X que satisface $AX + D = C - BX$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Planteamiento. Las dos X están a la derecha de su coeficiente: $AX + BX = C - D$, así que $(A + B)X = C - D$ y $X = (A + B)^{-1}(C - D)$.

Resolución.

1. $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, con $\det(A + B) = 6 - 5 = 1$.
2. $(A + B)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.
3. $C - D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
4. $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-1 & 4-3 \\ -15+3 & -10+9 \end{bmatrix}$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}$.

Comprobación (elemento 11): $AX + D$ da $2(5) + 1(-12) + 1 = -1$; $C - BX$ da $4 - [1(5) + 0] = -1$.

Ejemplo resuelto · Determinante de orden 5

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 5.

Calcule el valor del determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Planteamiento. La columna 4 tiene un solo elemento distinto de cero, el $a_{34} = 1$. Se desarrolla por esa columna y luego por la columna con más ceros del menor.

Resolución.

1. Por la columna 4: $\det A = (-1)^{3+4}(1)\, M_{34} = -M_{34}$, con

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. En M_{34}, la columna 2 solo tiene el 4 en la posición $(1, 2)$:

$$M_{34} = (-1)^{1+2}(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Sarrus: $(20 + 14 + 54) - (12 + 63 + 20) = 88 - 95 = -7$.
4. $M_{34} = (-4)(-7) = 28$, y $\det A = -28$.

Resultado: $\det A = -28$.

6.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 6.5.1 · G a la izquierda, con $\det A$

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 5.

Obtenga la matriz G que satisface la ecuación matricial $GA + 3(\det A)B = GB - A^2 - 2B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. Números y potencias: $\det A = -1$; $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.
2. G está a la izquierda en los dos términos: $GA - GB = -A^2 - 2B - 3(\det A)B$, o sea $G(A - B) = -I - 2B + 3B = B - I$.
3. $B - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$; $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(A - B) = -4 + 3 = -1$.
4. $(A - B)^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.
5. $G = (B - I)(A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Resultado: $G = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.2 · Factor común y simplificación

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 5.

Obtenga la matriz X tal que $(XAB - XC)C = C^2$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. Factor común a la izquierda: $X(AB - C)C = C^2$.
2. $\det C = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Se multiplica por C^{-1} a la derecha: $X(AB - C) = C$.
3. $AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$, $AB - C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(AB - C) = 16 - 18 = -2$.
4. $(AB - C)^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{9}{2} & -2 \end{bmatrix}$.
5. $X = C(AB - C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{9}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 9 & 1 - 4 \\ -2 + \frac{27}{2} & 1 - 6 \end{bmatrix}$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ \frac{23}{2} & -5 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.3 · Ecuación con A^*

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 5.

Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

obtenga la matriz X que satisface $XA^* - 2I = (X + C)B$.

Resolución.

1. A es real, así que $A^* = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
2. Se desarrolla el lado derecho: $XA^* - 2I = XB + CB$. Con X a la izquierda: $X(A^* - B) = 2I + CB$.
3. $A^* - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det = 3 - 2 = 1$, $(A^* - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
4. $CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $2I + CB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.
5. $X = (2I + CB)(A^* - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.4 · X^T e inversa de 3×3 por Gauss-Jordan

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 5.

Resuelva la ecuación matricial $AX^T = B + 2C$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. $B+2C = \begin{bmatrix} 3-2 & 0 & 1-1 \\ -1+1 & 5-4 & 0 \\ 4-4 & 3-3 & -2+3 \end{bmatrix} = I$. La ecuación queda $AX^T = I$, así que $X^T = A^{-1}$ y $X = (A^{-1})^T$.
2. Gauss-Jordan sobre $[\, A \mid I \,]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3+3R_2]{R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

3. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Comprobación: $\det A = 4$ y el primer renglón de A por la primera columna de A^{-1} da $\frac{1}{4}(1 - 3 + 6) = 1$.
4. Se transpone.

Resultado: $X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.5 · Traza, determinante de la inversa y complejos

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

Obtenga la matriz X que satisface $XA + \operatorname{tr}(B)\,C = \det(A^{-1})\,XB$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. Números: $\operatorname{tr} B = 8$; $\det A = 0 + 2 = 2$, así que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$.
2. $XA - \frac{1}{2}XB = -8C$, o sea $X\left(A - \frac{1}{2}B\right) = -8C$.
3. $A - \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} 1-4 & 2+2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, con determinante $0 + 4 = 4$.
4. $\left(A - \frac{1}{2}B\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.
5. $X = -8C \cdot \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} i & -3i \\ 0 & 4i \end{bmatrix}$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} -2i & 6i \\ 0 & -8i \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.6 · Simétrica y antisimétrica

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 5.

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} w & 0 & z \\ x & 0 & y \\ 3 & z & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine x, y, z y w para que A sea: a) simétrica; b) antisimétrica.

Resolución.

1. a) Simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$: $a_{12} = a_{21} \Rightarrow 0 = x$; $a_{13} = a_{31} \Rightarrow z = 3$; $a_{23} = a_{32} \Rightarrow y = z = 3$. La diagonal no impone nada: w es libre.

2. b) Antisimétrica: diagonal nula, $w = 0$. Además $a_{12} = -a_{21} \Rightarrow 0 = -x$, $x = 0$; $a_{13} = -a_{31} \Rightarrow z = -3$; $a_{23} = -a_{32} \Rightarrow y = -z = 3$.

Resultado: a) $x = 0$, $y = z = 3$, $w \in \mathbb{R}$ cualquiera. b) $w = 0$, $x = 0$, $y = 3$, $z = -3$.

Ejercicio 6.5.7 · Existencia de la inversa con parámetro

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 6.

Sea la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & k & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenga los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que existe C^{-1}.

Resolución.

1. C^{-1} existe si y solo si $\det C \neq 0$.
2. Por el primer renglón:

$$\begin{aligned} \det C &= 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0+2) - k(0-2) - (-3+1) = 2k + 6. \end{aligned}$$

3. $2k + 6 = 0$ solo si $k = -3$.

Resultado: existe C^{-1} para todo $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq -3$.

Ejercicio 6.5.8 · Cofactores e inversa por la adjunta

Adaptado de: 2º final 2017-2, tipo A, problema 6.

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & b \\ a & -1 & -3 \\ -2 & c & -4 \end{bmatrix}.$$

- a) Si $C_{23} = 23$, $C_{13} = -12$ y $C_{31} = 5$ son cofactores de A, determine a, b y $c \in \mathbb{R}$.
- b) Si $a = b = -1$ y $c = 0$, obtenga A^{-1} con el método de la adjunta.

Resolución.

1. a) $C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & c \end{vmatrix} = -(3c - 8) = 8 - 3c = 23$, así que $c = -5$.
2. $C_{13} = (+1)\begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & c \end{vmatrix} = ac - 2 = -12$, así que $ac = -10$ y $a = 2$.
3. $C_{31} = (+1)\begin{vmatrix} -4 & b \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 12 + b = 5$, así que $b = -7$.
4. b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Cofactores, renglón por renglón:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 4, & C_{12} = 2, & C_{13} = -2; \\ C_{21} = -16, & C_{22} = -14, & C_{23} = 8; \\ C_{31} = 11, & C_{32} = 10, & C_{33} = -7. \end{array}$$

5. $\det A = 3(4) + (-4)(2) + (-1)(-2) = 6$.
6. $\operatorname{adj} A$ es la matriz de cofactores transpuesta:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -16 & 11 \\ 2 & -14 & 10 \\ -2 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Resultado: a) $a = 2$, $b = -7$, $c = -5$. b) $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -16 & 11 \\ 2 & -14 & 10 \\ -2 & 8 & -7 \end{bmatrix}$.

6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.6**.

Ejercicio propuesto 6.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo B, problema 5.

Obtenga la matriz X que satisface $XB - \det(C)\,C = \operatorname{tr}(B)\,XA$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} \frac{i}{20} & 0 \\ 0 & \frac{i}{8} \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 6.6.2

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 5.

Obtenga, si existe, la matriz X que satisface $BX - C^T = -DX - A$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $X = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -23 \\ -14 & 17 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 6.6.3

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 5.

Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenga la matriz X que satisface

$$\left(\tfrac{1}{4}X^T + \tfrac{i}{4}A^*\right)^T = \frac{1}{\det(2B^{-1})}\,B^{-1}.$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 6.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 5.

Obtenga, si es posible, la adjunta de la matriz R que satisface $C^{-1}R = A - B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 9 \\ -9 & -13 & -12 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $\operatorname{adj} R = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 6.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 6.

Obtenga los valores de $a \in \mathbb{C}$ para que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ a & 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Resultado: $|A| = 3a(a^2 + 3)$; $a = 0$, $a = \sqrt{3}\,i$, $a = -\sqrt{3}\,i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 6.6.6

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 6.

Obtenga la matriz X que satisface

$$(\operatorname{tr} A)\,X + \frac{1}{\det B}(\operatorname{adj} B)\,A^* = B^{-1}AX - CX,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3i & 2 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

6.7 Errores frecuentes

- **Dividir entre una matriz.** No existe «$X = N/M$». Se multiplica por M^{-1}, y del lado correcto.
- **Multiplicar por la inversa del lado equivocado.** De $XM = N$ sale $X = NM^{-1}$, no $M^{-1}N$. Con $AB \neq BA$, el resultado es otro.
- **Factorizar X de lados distintos.** $AX + XB$ no es $(A + B)X$.
- **Olvidar la identidad.** $XA - 2X$ es $X(A - 2I)$, no $X(A - 2)$.
- **Confundir** $\det(kA)$ **con** $k \det A$**.** En orden n, $\det(kA) = k^n \det A$.
- **Transponer mal un producto.** $(AB)^T = B^T A^T$: se invierte el orden.
- **Olvidar conjugar en A^*.** A^* es la transpuesta **de la conjugada**; solo si A es real coincide con A^T.
- **Adjunta sin transponer.** adj A es la matriz de cofactores **transpuesta**.
- **Signo del cofactor.** $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$: en C_{23} el signo es negativo.
- **Responder la condición al revés.** «Para que exista A^{-1}» pide $\det A \neq 0$: todos los valores menos las raíces.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $MX = N \Rightarrow X = M^{-1}N \cdot XM = N \Rightarrow X = NM^{-1} \cdot XA - XB = X(A - B) \cdot kX = kIX$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot [\, A \mid I \,] \to [\, I \mid A^{-1} \,]$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \cdot (AB)^T = B^T A^T \cdot A^* = \bar{A}^T \cdot (A^T)^T = A$
- $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii} \cdot \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \cdot \operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$
- $\det(AB) = \det A \det B \cdot \det A^{-1} = 1/\det A \cdot \det A^T = \det A \cdot \det(kA) = k^n \det A$
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \cdot \det A = \sum_j a_{ij} C_{ij} \cdot \operatorname{adj} A = [C_{ij}]^T \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$
- Simétrica $A^T = A \cdot$ antisimétrica $A^T = -A \cdot$ ortogonal $A^{-1} = A^T \cdot$ hermitiana $A^* = A \cdot$ unitaria $A^{-1} = A^*$
- A^{-1} existe $\iff \det A \neq 0$

6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe primero el despeje con letras, hasta $X = M^{-1}N$ o $X = NM^{-1}$. Ese paso vale buena parte de los puntos.
2. Calcula los números (det, tr) y las matrices auxiliares (A^*, A^T, adj) por separado, cada una en su renglón.
3. Comprueba $\det M \neq 0$ antes de invertir.
4. Haz la multiplicación final con cuidado, renglón por columna, y comprueba un elemento en la ecuación original.
5. En los determinantes grandes, marca la línea con más ceros y escribe el signo $(-1)^{i+j}$ de cada término.

Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno analizará y manejará las operaciones binarias y sus propiedades dentro de una estructura algebraica.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 este tema está en Álgebra Lineal; si tu plan es el 2016, salta esta unidad.
- **Frecuencia:** aparece en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1), siempre como último problema: ¿es grupo o grupo abeliano? (7), operación binaria y sus propiedades (5), anillo (2), campo (2) e isomorfismo (1). Vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 7.1 y el formulario de la sección 7.8 (20 min).
  2. Sigue los ejemplos 7.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 7.5.3, 7.5.4 y 7.5.6 con cronómetro (12 min cada uno).

7.1 Conceptos y expresiones

Operación binaria. Una operación binaria $*$ en un conjunto A asigna a cada par ordenado (a, b) de elementos de A un único elemento $a * b$. Se da con una *regla* ($a * b = a + b + ab$) o con una *tabla*: el resultado de $a * b$ está en el renglón de a y la columna de b. El par $(A, *)$ se llama *sistema algebraico*.

Propiedades de una operación en $(A, *)$:

Propiedad	Se cumple si…
Cerradura	$a * b \in A$ para todos $a, b \in A$
Asociatividad	$(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in A$
Conmutatividad	$a * b = b * a$ para todos $a, b \in A$
Elemento idéntico	existe $e \in A$ con $a * e = e * a = a$ para todo $a \in A$
Elementos inversos	para cada $a \in A$ existe $a' \in A$ con $a * a' = a' * a = e$

Si solo se cumple $e * a = a$, e es idéntico *izquierdo*; si solo $a * e = a$, idéntico *derecho*. Lo mismo con los inversos: $a * a' = e$ define un inverso derecho. El idéntico, si existe, es único; en un grupo, cada elemento tiene un único inverso.

Grupo. $(G, *)$ es un *grupo* si $*$ es cerrada y asociativa en G, tiene idéntico en G y cada elemento tiene inverso en G. Si además es conmutativa, el grupo es *abeliano*. Un *subgrupo* es un subconjunto $H \subseteq G$ que es grupo con la misma operación; basta comprobar que H no es vacío, que es cerrado y que contiene el inverso de cada uno de sus elementos.

Anillo. $(A, +, \cdot)$ es un *anillo* si:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano; su idéntico es el *cero* del anillo;
2. la segunda operación es cerrada y asociativa;
3. la segunda operación es distributiva sobre la primera por los dos lados: $a{\cdot}(b{+}c) = a{\cdot}b{+}a{\cdot}c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Tipos de anillo. *Conmutativo*, si la segunda operación conmuta. *Con unidad*, si la segunda operación tiene idéntico (la *unidad*, distinta del cero). Un *dominio entero* es un anillo conmutativo con unidad y sin divisores de cero: si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Ejemplo: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Campo. $(K, +, \cdot)$ es un *campo* si es un anillo conmutativo con unidad en el que todo elemento distinto del cero tiene inverso para la segunda operación. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con la suma y el producto usuales son campos; $\mathbb{Z}$ no lo es (2 no tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}$).

Homomorfismo e isomorfismo. Una función $f : G \to H$ entre los grupos $(G, *)$ y $(H, \#)$ es un *homomorfismo* si

$$f(a * b) = f(a) \# f(b) \qquad \text{para todos } a, b \in G.$$

Si además es biyectiva, es un *isomorfismo*. Un homomorfismo lleva el idéntico de G al idéntico de H, y el inverso de a al inverso de $f(a)$.

7.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«la operación está definida en la siguiente tabla»	propiedades leídas en la tabla	7.3.2
«$a * b = \ldots$ para todos $a, b \in A$», «calcular $9 * 6$»	evaluar y revisar propiedades	7.3.1
«¿es grupo?», «¿tiene estructura de grupo abeliano?», «qué propiedades no cumple»	los axiomas uno por uno	7.3.3
los elementos son pares ordenados (a, b)	lo mismo, componente por componente	7.3.3
«el sistema $(A, +, *)$ es anillo o campo; el cero, la unidad, los inversos»	idénticos e inversos de cada operación	7.3.4
«f es un isomorfismo; determinar la operación #»	operación inducida	7.3.5

7.3 Procedimientos

7.3.1 Operación dada con una regla

1. **Evaluar.** Sustituye en la regla. Si un operando no pertenece al conjunto, la operación *no está definida* para él.
2. **Cerradura.** Toma a, b genéricos de A con la forma que exige A ($a = 3m$, $a > 0$, $a = (x, y)$…) y comprueba que $a{*}b$ tiene esa misma forma. Si falla, basta **un contraejemplo numérico**.

3. **Asociatividad.** Desarrolla $(a * b) * c$ y $a * (b * c)$ por separado y compara. Si salen distintos, da un contraejemplo con números.
4. **Conmutatividad.** Compara $a * b$ con $b * a$.
5. **Idéntico.** Resuelve $a * e = a$ despejando e. El valor no debe depender de a y debe pertenecer a A; comprueba también $e * a = a$.
6. **Inversos.** Resuelve $a * a' = e$ despejando a'. Revisa para qué valores de a existe (denominador distinto de cero) y si $a' \in A$.

7.3.2 Operación dada con una tabla

1. **Cerradura:** todos los resultados de la tabla son elementos del conjunto.
2. **Idéntico:** busca el renglón que repite el encabezado de las columnas y la columna que repite el encabezado de los renglones, con el mismo elemento e.
3. **Inversos:** en el renglón de a busca la casilla con e; la columna dice a'. Comprueba que también $a' * a = e$.
4. **Conmutatividad:** la tabla es simétrica respecto a la diagonal principal.
5. **Asociatividad:** no se lee a simple vista; para negarla basta una terna con $(a * b) * c \neq a * (b * c)$.

7.3.3 ¿Es grupo? ¿Es grupo abeliano?

1. Escribe los axiomas en este orden: **cerradura**, **asociatividad**, **idéntico**, **inversos** y, si se pregunta por grupo abeliano, **conmutatividad**.
2. Para cada uno escribe «Se cumple: …» con el desarrollo general, o «No se cumple: …» con un contraejemplo.
3. Revisa todos los axiomas aunque uno falle: el enunciado suele pedir *cuáles* propiedades no se cumplen.
4. Si no hay idéntico, tampoco hay inversos.
5. Cierra con la **Conclusión**: «$(A, *)$ es (no es) un grupo (abeliano)».

7.3.4 Anillos y campos: cero, unidad e inversos

1. Identifica cuál es la primera operación (la «suma») y cuál la segunda (el «producto»); el orden lo da la escritura $(A, +, \cdot)$.
2. El **cero** es el idéntico de la primera operación; la **unidad**, el de la segunda. Se obtienen como en 7.3.1 o 7.3.2.
3. Los **inversos de la primera** existen para todos los elementos. Los **de la segunda**, para todos menos el cero (en un campo); en un anillo pueden faltar.
4. Para decidir si es anillo: grupo abeliano con la primera, cerradura y asociatividad de la segunda y **las dos** distributividades.

7.3.5 Isomorfismos: operación inducida

1. Escribe la condición $f(a * b) = f(a) \# f(b)$ con la regla de f.
2. Llama $x = f(a)$, $y = f(b)$ y despeja a y b en términos de x, y.
3. Sustituye en $f(a * b)$ para obtener $x \# y$ en términos de x y y.
4. El idéntico de $\#$ es $f(e)$, con e el idéntico de $*$. Comprueba con la regla obtenida.

7.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · ¿Es grupo $(\mathbb{Z}, \oplus)$?

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 7.

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros con la operación $a \oplus b = a + 2ab + b$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$. Determine si $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es un grupo.

Resolución.

1. **Cerradura.** Se cumple: sumas y productos de enteros son enteros, así que $a + 2ab + b \in \mathbb{Z}$.
2. **Asociatividad.** Se cumple:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + 2ab + b) + 2(a + 2ab + b)c + c \\ &= a + b + c + 2ab + 2ac + 2bc + 4abc, \\ a \oplus (b \oplus c) &= a + 2a(b + 2bc + c) + (b + 2bc + c) \\ &= a + b + c + 2ab + 2ac + 2bc + 4abc.\end{aligned}$$

3. **Idéntico.** Se cumple: $a \oplus e = a + 2ae + e = a$ da $e(2a + 1) = 0$, y como $2a + 1 \neq 0$ para todo entero, $e = 0 \in \mathbb{Z}$. Además $0 \oplus a = a$.
4. **Inversos.** No se cumple: $a \oplus a' = a + 2aa' + a' = 0$ da $a' = \dfrac{-a}{2a + 1}$. Para $a = 1$, $a' = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Solo $a = 0$ y $a = -1$ tienen inverso entero (cada uno es su propio inverso).

Conclusión: $(\mathbb{Z}, \oplus)$ **no es un grupo**: no todo elemento tiene inverso en $\mathbb{Z}$. (La operación sí es conmutativa.)

Ejemplo resuelto · Anillo dado por tablas

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 6.

El sistema $(A, +, *)$, con $A = \{a, b\}$, es un anillo con las operaciones

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

Determine: a) el cero y la unidad del anillo; b) si existen los inversos de a y de b para cada operación.

Resolución.

1. a) El **cero** es el idéntico de $+$: el renglón de a repite el encabezado ($a + a = a$, $a + b = b$) y la columna de a también. Cero: a.
2. La **unidad** es el idéntico de $*$: el renglón de b es a, b y la columna de b también ($a * b = a$, $b * b = b$). Unidad: b.
3. b) Inversos para $+$ (se busca el cero, a): $a + a = a$ y $b + b = a$. El inverso aditivo de a es a, y el de b es b.
4. Inversos para $*$ (se busca la unidad, b): $b * b = b$, así que el inverso de b es b. En el renglón de a no aparece b: a **no tiene inverso** para $*$, como corresponde al cero de un anillo.

7.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 7.5.1 · Operación dada con una tabla

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 6.

Sea el sistema $(\alpha, \triangle)$ con $\alpha = \{a, b, c, u\}$ y la operación $\triangle$ dada por la tabla

$\triangle$	a	b	c	u
a	b	c	u	a
b	a	u	c	b
c	u	a	b	c
u	a	b	c	u

Determine si $\triangle$: a) es cerrada; b) tiene elemento idéntico, y cuál es; c) tiene elementos inversos, y cuáles son.

Resolución.

1. a) Todas las casillas de la tabla son elementos de α: la operación **es cerrada**.
2. b) El renglón de u es a, b, c, u, igual al encabezado, y la columna de u es a, b, c, u, igual a los renglones. El idéntico es u.
3. c) En cada renglón se busca u: $a \triangle c = u$, $b \triangle b = u$, $c \triangle a = u$ y $u \triangle u = u$. Por el otro lado también: $c \triangle a = u$ y $a \triangle c = u$.
4. Inversos: $a' = c$, $b' = b$, $c' = a$ y $u' = u$. **Todos los elementos tienen inverso.**
5. Observación: la tabla no es simétrica ($a \triangle b = c$, pero $b \triangle a = a$), así que $\triangle$ no es conmutativa.

Ejercicio 7.5.2 · Operación en las mitades de los naturales

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo B, problema 6.

Sea $S = \left\{s \mid s = \frac{n}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ y la operación $x \ \ y = x + y + 4$ para todos $x, y \in S$. a) Calcule, cuando estén definidas, $2\ \ 3$, $8\ \ 6$ y $20\ \ 4$. b) Obtenga el elemento idéntico izquierdo de , si existe. c) ¿Es conmutativa en S? d) Obtenga el elemento inverso derecho de , si existe.

Resolución.

1. a) $2, 3, 8, 6, 20, 4 \in S$ (son $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \ldots$), así que las tres están definidas: $2\ \ 3 = \mathbf{9}$, $8\ \ 6 = \mathbf{18}$ y $20\ \ 4 = \mathbf{28}$.
2. Cerradura (se usa abajo): si $x = \frac{n}{2}$ y $y = \frac{m}{2}$, entonces $x\ \ y = \frac{n+m+8}{2} \in S$.
3. b) Idéntico izquierdo: $e\ \ x = e + x + 4 = x$ da $e = -4$. Pero $-4 \notin S$, cuyos elementos son positivos: **no existe** idéntico izquierdo en S.
4. c) $x\ \ y = x + y + 4 = y + x + 4 = y\ \ x$: **sí es conmutativa**.
5. d) El inverso se define respecto al idéntico; como no hay idéntico en S, **no existe** inverso derecho. (Con $e = -4$ se tendría $x' = -8 - x$, que tampoco está en S.)

Ejercicio 7.5.3 · ¿Es grupo? con pares ordenados

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Sea $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ con la operación $(a, b) \triangle (c, d) = (a + c,\ bc + da)$. Determine si $(A, \triangle)$ tiene estructura de grupo; en caso contrario, determine qué propiedades no cumple.

Resolución.

1. **Cerradura.** Se cumple: $a + c$ y $bc + da$ son reales.
2. **Asociatividad.** No se cumple. Contraejemplo con $(0,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$:

$$[(0,1)\triangle(0,1)]\triangle(1,0) = (0,0)\triangle(1,0) = (1,0),$$
$$(0,1)\triangle[(0,1)\triangle(1,0)] = (0,1)\triangle(1,1) = (1,1).$$

3. **Idéntico.** No se cumple: $(a,b)\triangle(e_1,e_2) = (a + e_1,\ be_1 + e_2a) = (a,b)$ exige $e_1 = 0$ y entonces $e_2a = b$ para todos a, b, lo cual es imposible (con $a = 0$, $b = 1$ da $0 = 1$).
4. **Inversos.** No se cumple: sin idéntico no hay inversos.
5. Observación: sí es conmutativa, porque $(c,d)\triangle(a,b) = (c + a,\ da + bc)$.

Conclusión: $(A, \triangle)$ **no es un grupo**; no cumple la asociatividad, el idéntico ni los inversos.

Ejercicio 7.5.4 · ¿Es grupo abeliano en $\mathbb{Q}$?

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 6.

En $\mathbb{Q}$ se define $a \otimes b = a + b + \dfrac{ab}{2}$. Determine si $(\mathbb{Q}, \otimes)$ es un grupo abeliano.

Resolución.

1. **Cerradura.** Se cumple: sumas, productos y mitades de racionales son racionales.
2. **Asociatividad.** Se cumple: los dos lados dan

$$a + b + c + \frac{ab + ac + bc}{2} + \frac{abc}{4}.$$

3. **Idéntico.** Se cumple: $a + e + \frac{ae}{2} = a$ da $e\left(1 + \frac{a}{2}\right) = 0$ para todo a, así que $e = 0 \in \mathbb{Q}$.
4. **Inversos.** No se cumple: $a + a' + \frac{aa'}{2} = 0$ da $a' = \dfrac{-2a}{a+2}$, que no existe para $a = -2$. De hecho $(-2) \otimes b = -2 + b - b = -2 \neq 0$ para todo b.
5. **Conmutatividad.** Se cumple: la regla es simétrica en a y b.

Conclusión: $(\mathbb{Q}, \otimes)$ **no es un grupo abeliano**: -2 no tiene inverso. (Sin el -2, $(\mathbb{Q} - \{-2\}, \otimes)$ sí lo es.)

Ejercicio 7.5.5 · Grupo abeliano en los reales positivos

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 6.

Sea $H = \{h \mid h > 0,\ h \in \mathbb{R}\}$ con la operación $a \boxplus b = ab$ (el producto usual, escrito con otro símbolo). Determine si $(H, \boxplus)$ es un grupo abeliano.

Resolución.

1. **Cerradura.** Se cumple: el producto de dos positivos es positivo.
2. **Asociatividad.** Se cumple: $(ab)c = a(bc)$.
3. **Idéntico.** Se cumple: $ae = a$ da $e = 1 \in H$.
4. **Inversos.** Se cumple: $aa' = 1$ da $a' = \frac{1}{a}$, que es positivo.
5. **Conmutatividad.** Se cumple: $ab = ba$.

Conclusión: $(H, \boxplus)$ **es un grupo abeliano**, con idéntico 1 e inverso $\frac{1}{a}$.

Ejercicio 7.5.6 · Idénticos e inversos de dos operaciones

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 6.

En $\mathbb{R}$ se definen $a \otimes b = \sqrt{3}\,ab$ y $a \oplus b = a + b - 2$. Determine: a) el elemento idéntico de cada operación; b) los elementos inversos de cada operación.

Resolución.

1. a) Para $\otimes$: $\sqrt{3}\,ae = a$ para todo a da $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
2. Para $\oplus$: $a + e - 2 = a$ da $e = 2$.
3. b) Para $\otimes$: $\sqrt{3}\,aa' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ da $a' = \dfrac{1}{3a}$, para $a \neq 0$. El 0 no tiene inverso: $0 \otimes b = 0$.
4. Para $\oplus$: $a + a' - 2 = 2$ da $a' = 4 - a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
5. Comprobación: $\sqrt{3}\,a \cdot \frac{1}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $a + (4 - a) - 2 = 2$.

Resultado: idénticos $\frac{\sqrt{3}}{3}$ para $\otimes$ y 2 para $\oplus$; inversos $\frac{1}{3a}$ (con $a \neq 0$) y $4 - a$.

Ejercicio 7.5.7 · ¿Es anillo? con pares ordenados

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 6.

Sea $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 b_2,\ b_1 b_2).$$

Si $(A, +)$ es un grupo abeliano y $*$ es cerrada y asociativa en A, determine si $(A, +, *)$ es un anillo.

Resolución.

1. Falta comprobar las dos leyes distributivas. Sean $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$ y $R = (e, f)$.
2. **Por la izquierda.** Se cumple:

$$P * (Q + R) = (a, b) * (c + e,\ d + f) = (ad + af,\ bd + bf),$$
$$P * Q + P * R = (ad,\ bd) + (af,\ bf) = (ad + af,\ bd + bf).$$

3. **Por la derecha.** Se cumple:

$$(P + Q) * R = (a + c,\ b + d) * (e, f) = (af + cf,\ bf + df),$$
$$P * R + Q * R = (af,\ bf) + (cf,\ df) = (af + cf,\ bf + df).$$

4. Observación: no es conmutativo, pues $(1, 2) * (3, 4) = (4, 8)$ y $(3, 4) * (1, 2) = (6, 8)$; tampoco tiene unidad, porque $(u_1, u_2) * (a, b) = (u_1 b,\ u_2 b)$ no puede ser (a, b) para todos a, b.

Conclusión: $(A, +, *)$ **es un anillo**, no conmutativo y sin unidad.

Ejercicio 7.5.8 · Operación inducida por un isomorfismo

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 6.

Sean los grupos $(\mathbb{R}, \oplus)$, con $a \oplus b = a + b - 1$, y $(\mathbb{R}^+, \#)$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(a) = 10^a$, es un isomorfismo, determine: a) la operación $\#$; b) el elemento idéntico de $\oplus$ y el de $\#$.

Resolución.

1. a) Condición de isomorfismo: $f(a \oplus b) = f(a) \# f(b)$, es decir, $10^{a+b-1} = 10^a \# 10^b$.
2. Con $x = 10^a$ y $y = 10^b$, que recorren $\mathbb{R}^+$: $10^{a+b-1} = \dfrac{10^a\, 10^b}{10} = \dfrac{xy}{10}$.
3. Por lo tanto, $x \# y = \dfrac{xy}{10}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.
4. b) Idéntico de $\oplus$: $a + e - 1 = a$ da $e = 1$.
5. Idéntico de #: $f(1) = 10$. Comprobación: $x \# 10 = \frac{10x}{10} = x$.

Resultado: $x \# y = \frac{xy}{10}$; idénticos 1 para $\oplus$ y 10 para #.

7.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.7**.

Ejercicio propuesto 7.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 6.

Sea $T = \{t \mid t = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$ y la operación $x \star y = x + y + 4$ para todos $x, y \in T$. a) Calcule, cuando estén definidas, $9 \star 6$, $1 \star 6$ y $3 \star 3$. b) Determine si la operación es cerrada en T. c) ¿Es conmutativa en T?

Resultado: a) $9 \star 6 = 19$ y $3 \star 3 = 10$; $1 \star 6$ no está definida ($1 \notin T$). b) No es cerrada: $19 \notin T$. c) Sí es conmutativa.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 7.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo B, problema 6.

Sea $B = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ con la operación $(a, b) * (c, d) = (a + d,\ ad - b)$. Determine si $(B, *)$ tiene estructura de grupo; en caso contrario, determine qué propiedades no cumple.

Resultado: No es grupo: es cerrada, pero no es asociativa ni tiene idéntico (ni, por tanto, inversos). Tampoco es conmutativa.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 7.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo B, problema 6.

En $\mathbb{Q}$ se define $x \odot y = x + y + \dfrac{xy}{3}$. Determine si $(\mathbb{Q}, \odot)$ es un grupo abeliano.

Resultado: No: es cerrada, asociativa y conmutativa, con idéntico 0, pero -3 no tiene inverso ($x' = \frac{-3x}{x+3}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 7.6.4

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 6.

El sistema $(\mathbb{R}, \otimes, \oplus)$ tiene estructura de campo, con $x \otimes y = x + y + 1$ y $x \oplus y = x + y + xy$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Determine el elemento idéntico y el elemento inverso para la segunda operación.

Resultado: Idéntico de $\oplus$: 0. Inverso: $x' = \frac{-x}{1+x}$, para $x \neq -1$ (-1 es el cero del campo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 7.6.5

Adaptado de: Serie de ejercicios del tema 7, ejercicio 3.

Sean los grupos $(\mathbb{R}, \odot)$, con $a \odot b = a + b - \sqrt{5}$, y $(\mathbb{R}^+, *)$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(a) = 10^a$, es un isomorfismo, determine el elemento idéntico de cada grupo.

Resultado: Idéntico de $\odot$: $\sqrt{5}$. Idéntico de $*$: $10^{\sqrt{5}}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 7.6.6

Adaptado de: Serie de ejercicios del tema 7, ejercicio 10.

Sea M el conjunto de las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, y la operación $A \triangle B = A + B + I$, donde I es la identidad de orden 2. Determine: a) si $\triangle$ es asociativa en M; b) el elemento idéntico y los inversos.

Resultado: a) Sí. b) Idéntico $-I$; el inverso de $\text{diag}(a, b)$ es $\text{diag}(-a-2,\ -b-2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

7.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar que el idéntico debe estar en el conjunto.** En $\{x > 0\}$ con $x + y + 4$, el despeje da $e = -4$, que no pertenece al conjunto: no hay idéntico.
2. **Dar un idéntico que depende de a.** Si al despejar queda $e = \frac{b}{a}$ o algo con a, no hay idéntico: debe ser el mismo para todos.
3. **Revisar los inversos sin excepciones.** $a' = \frac{-2a}{a+2}$ no existe para $a = -2$; un solo elemento sin inverso basta para que no sea grupo.
4. **Probar la asociatividad con un ejemplo.** Un ejemplo que cumple no demuestra nada; un contraejemplo sí basta para negarla. Para afirmarla, desarrolla los dos lados en general.
5. **Detenerse en el primer axioma que falla** cuando se pide «qué propiedades no cumple».
6. **Confundir cero y unidad.** El cero es el idéntico de la *primera* operación escrita en $(A, +, \cdot)$, aunque su regla parezca un producto.
7. **Leer la tabla al revés.** $a * b$ está en el renglón de a y la columna de b.
8. **Olvidar una distributividad.** En un anillo no conmutativo hay que comprobar las dos.

7.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Grupo: cerradura · asociatividad · idéntico $a * e = e * a = a$ · inversos $a * a' = a' * a = e$. Abeliano: además $a * b = b * a$.
- Anillo $(A, +, \cdot)$: $(A, +)$ grupo abeliano (su idéntico es el cero) · · cerrada y asociativa · $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$.

- Con unidad: $\cdot$ tiene idéntico $\cdot$ conmutativo: $ab = ba$ $\cdot$ dominio entero: conmutativo, con unidad y $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$.
- Campo: anillo conmutativo con unidad y con inverso de $\cdot$ para todo elemento distinto del cero.
- Idéntico: despeja e de $a * e = a$ $\cdot$ inverso: despeja a' de $a * a' = e$.
- $a * b = a + b + k$: $e = -k$, $a' = -a - 2k$ $\cdot$ $a * b = kab$: $e = \frac{1}{k}$, $a' = \frac{1}{k^2 a}$ $(a \neq 0)$.
- $a * b = a + b + kab$: $e = 0$, $a' = \frac{-a}{1+ka}$ (no existe para $a = -\frac{1}{k}$).
- Isomorfismo: $f(a * b) = f(a) \# f(b)$ $\cdot$ idéntico de #: $f(e)$ $\cdot$ inverso de $f(a)$: $f(a')$.

7.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Copia el conjunto con la forma de sus elementos ($3n$, $h > 0$, (a, b)) y la regla de la operación.
2. Escribe los axiomas como encabezados, en orden, aunque no se pidan todos.
3. Para cada uno: desarrollo general si se cumple, contraejemplo numérico si no.
4. Al obtener un idéntico o un inverso, comprueba que pertenece al conjunto. El idéntico, además, no debe depender del elemento; el inverso sí depende de él (en el ejercicio 7.5.5 es $1/a$).
5. Termina con una **Conclusión** en una línea: «es (no es) un grupo abeliano porque…».

Si no se encuentra el camino, los axiomas escritos y el idéntico despejado ya valen buena parte del problema.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Cada plan estudia solo sus unidades (sección 0.1).

A.1 Trigonometría (Unidad 1B) (solo Plan 2016)

- $180^\circ = \pi$; tabla de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (sección 1B.1). Positivas: I todas, II sen, III tan, IV cos.
- Ángulo de referencia: II $180^\circ - \theta$, III $\theta - 180^\circ$, IV $360^\circ - \theta$.
- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.
- $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.
- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
- $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; área $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$.
- Cubo de arista a: diagonal de cara $a\sqrt{2}$, diagonal del cubo $a\sqrt{3}$.

A.2 Números reales: inducción y desigualdades (Unidad 2)

- Inducción: base $P(n_0)$ · hipótesis $P(k)$ · tesis $P(k+1)$ · conclusión.
- Sumando nuevo: término general con $n = k+1$. Lado izquierdo de $P(k+1)$ = lado izquierdo de $P(k)$ + sumando nuevo.
- Geométrica: $1+r+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ $(r \neq 1)$ · aritmética: $\sum_{j=1}^{n}[a+(j-1)d] = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$.
- $a < b$ y $c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$.
- $|A| < c \iff -c < A < c \cdot |A| > c \iff A < -c$ o $A > c$ (con $c > 0$).
- $|A| < |B| \iff A^2 < B^2 \iff (A-B)(A+B) < 0 \cdot \left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$.
- Racional: $\frac{N}{D} < 0$ (o $\leq, >, \geq$), puntos críticos, tabla de signos; los ceros de D siempre quedan fuera.
- Un producto $(x-a)(x-b)$ con $a < b$ es negativo entre a y b, y positivo fuera.

A.3 Números complejos (Unidad 3)

- $z = a + bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$.
- $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$; $\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis} n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^q}$.
- $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.
- $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

A.4 Polinomios (Unidad 4)

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x - a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\leq$ cambios de $p(x)$; negativas $\leq$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

A.5 Sistemas de ecuaciones lineales (Unidad 5)

- Operaciones de renglón: $R_i \leftrightarrow R_j$; cR_i con $c \neq 0$; $R_i + cR_j$.
- Forma escalonada con último renglón $0\ 0\ a \mid b$:
  - $a \neq 0$: compatible determinado;
  - $a = 0$ y $b = 0$: compatible indeterminado;
  - $a = 0$ y $b \neq 0$: incompatible.
- Homogéneo: siempre compatible; tiene soluciones no triviales si hay menos pivotes que incógnitas.
- Sistema cuadrado: $\det A \neq 0$ si y solo si es compatible determinado.
- Número de parámetros de la solución general = incógnitas − pivotes.

A.6 Matrices y determinantes (Unidad 6)

- $MX = N \Rightarrow X = M^{-1}N \cdot XM = N \Rightarrow X = NM^{-1} \cdot XA - XB = X(A - B) \cdot kX = kIX$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot [\,A \mid I\,] \to [\,I \mid A^{-1}\,]$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \cdot (AB)^T = B^T A^T \cdot A^* = \bar{A}^T \cdot (A^T)^T = A$
- $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii} \cdot \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \cdot \operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$
- $\det(AB) = \det A \det B \cdot \det A^{-1} = 1/\det A \cdot \det A^T = \det A \cdot \det(kA) = k^n \det A$
- $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \cdot \det A = \sum_j a_{ij}C_{ij} \cdot \operatorname{adj} A = [C_{ij}]^T \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$
- Simétrica $A^T = A$ · antisimétrica $A^T = -A$ · ortogonal $A^{-1} = A^T$ · hermitiana $A^* = A$ · unitaria $A^{-1} = A^*$
- A^{-1} existe $\iff \det A \neq 0$

A.7 Estructuras algebraicas (Unidad 7) (solo Plan 2010)

- Grupo: cerradura · asociatividad · idéntico $a * e = e * a = a$ · inversos $a * a' = a' * a = e$. Abeliano: además $a * b = b * a$.
- Anillo $(A, +, \cdot)$: $(A, +)$ grupo abeliano (su idéntico es el cero) · · cerrada y asociativa · $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$.
- Con unidad: · tiene idéntico · conmutativo: $ab = ba$ · dominio entero: conmutativo, con unidad y $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$.
- Campo: anillo conmutativo con unidad y con inverso de · para todo elemento distinto

del cero.

- Idéntico: despeja e de $a * e = a$ · inverso: despeja a' de $a * a' = e$.
- $a * b = a + b + k$: $e = -k$, $a' = -a - 2k$ · $a * b = kab$: $e = \frac{1}{k}$, $a' = \frac{1}{k^2 a}$ $(a \neq 0)$.
- $a * b = a + b + kab$: $e = 0$, $a' = \frac{-a}{1+ka}$ (no existe para $a = -\frac{1}{k}$).
- Isomorfismo: $f(a * b) = f(a) \# f(b)$ · idéntico de #: $f(e)$ · inverso de $f(a)$: $f(a')$.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 58 finales publicados, agrupados por aplicación. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad y, si está en este cuaderno, el ejemplo, el ejercicio resuelto o el ejercicio propuesto donde se trabaja. Las versiones del mismo examen suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta, la otra se practica con el mismo procedimiento.

Plan 2010

2º final 2010-1

- **Tipo A:** (1) desigualdad racional [U2]; (2) ecuación en forma binómica (igualdad de complejos) [U3; ejercicio 3.5.1]; (3) coeficientes a partir de raíces dadas; factores lineales [U4; ejercicio 4.5.1]; (4) sistema con parámetro: compatible indeterminado, solución general y particular [U5; ejercicio 5.5.5]; (5) ecuación matricial [U6; ejercicio 6.5.2]; (6) operación por tabla: cerradura, idéntico, inversos [U7; ejercicio 7.5.1].

1er final 2010-2

- **Turno matutino, tipo A:** (1) desigualdad lineal [U2; propuesto 2.6.4]; (2) ecuación con radicación (formas polar y exponencial) [U3; propuesto 3.6.2]; (3) raíces de un polinomio de grado 6 con raíz i dada [U4; ejemplo 4.4]; (4) planteamiento (compra de acero), Gauss [U5; ejercicio 5.5.1]; (5) ecuación matricial con conjugada transpuesta A^* [U6; ejercicio 6.5.3]; (6) isomorfismo entre grupos: operación inducida e idénticos [U7; ejercicio 7.5.8].
- **Turno vespertino:** (1) desigualdad racional [U2; ejemplo 2.4]; (2) ecuación con potencias en formas exponencial y polar [U3; propuesto 3.6.3]; (3) polinomio por tres puntos (sistema) y sus raíces [U4; ejercicio 4.5.2]; (4) planteamiento (compra de fruta) [U5; ejemplo 5.4]; (5) ecuación matricial con $\det A$ [U6; ejercicio 6.5.1]; (6) ¿es anillo? [U7; ejercicio 7.5.7].

2º final 2010-2

- **Versión única:** (1) inducción (suma con potencias de 1/3) [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) raíces cuartas con datos en el diagrama de Argand [U3; ejercicio 3.5.4]; (3) polinomio con coeficientes complejos, raíz dada; factores lineales [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) sistema homogéneo: solución general y particular [U5; ejercicio 5.5.8]; (5) determinante de orden 5 [U6; ejemplo 6.4]; (6) ecuación matricial $AX + D = C - BX$ [U6; ejemplo 6.4]; (7) ¿es grupo? ($a \oplus b = a + 2ab + b$ en $\mathbb{Z}$) [U7; ejemplo 7.4].

1er final 2011-1

- **Tipo A:** (1) inducción (suma de productos de tres consecutivos) [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) ecuación polar con dato en el diagrama de Argand [U3]; (3) polinomio con coeficientes complejos, raíz $-2i$ dada [U4]; (4) sistema con parámetro k (tres casos) [U5; ejemplo 5.4]; (5) matriz simétrica y antisimétrica (incógnitas) [U6; ejercicio 6.5.6]; (6) anillo por tablas: cero, unidad, inversos [U7; ejemplo 7.4].

1er final 2013-1

- **Tipo A:** (1) inducción [U2; propuesto 2.6.2]; (2) módulo de un complejo con parámetro [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) factores lineales con una raíz dada [U4; propuesto 4.6.2]; (4) planteamiento (cajas de tres productos) [U5; propuesto 5.6.1]; (5) traza de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6]; (6) campo: idéntico e inverso de la segunda operación [U7; propuesto 7.6.4].

- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) módulo de un complejo con parámetro [U3]; (3) factores lineales con una raíz dada [U4]; (4) planteamiento (cajas de tres productos) [U5]; (5) traza de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6]; (6) campo: idéntico e inverso de la primera operación [U7].

2º final 2013-1

- **Tipo A:** (1) inducción [U2; ejercicio 2.5.2]; (2) ecuación con conjugado [U3; ejercicio 3.5.3]; (3) raíces de un polinomio a partir de una relación entre polinomios [U4; propuesto 4.6.3]; (4) planteamiento (armadora, tabla de horas-máquina) [U5; ejercicio 5.5.2]; (5) adjunta de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6; propuesto 6.6.4]; (6) operación binaria: cálculo, cerradura, conmutatividad, asociatividad [U7; propuesto 7.6.1].
- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) ecuación con conjugado [U3]; (3) raíces de un polinomio a partir de una relación entre polinomios [U4]; (4) planteamiento (armadora) [U5]; (5) adjunta de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6]; (6) operación binaria: idéntico izquierdo, conmutatividad, inverso derecho [U7; ejercicio 7.5.2].

1er final 2013-2

- **Tipo A:** (1) inducción (serie geométrica) [U2; ejemplo 2.4]; (2) raíces cúbicas con datos en cis y exponencial [U3; ejemplo 3.4]; (3) raíces de $x^8 + x^4 - 6$ y cota superior [U4; ejercicio 4.5.4]; (4) planteamiento (inversiones) [U5; propuesto 5.6.3]; (5) ecuación matricial con traza, $\det(A^{-1})$ [U6; ejercicio 6.5.5]; (6) ¿es grupo? (operación en pares ordenados) [U7; ejercicio 7.5.3].
- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) raíces cúbicas con datos en cis y exponencial [U3]; (3) raíces y cota superior [U4]; (4) planteamiento (inversiones) [U5]; (5) ecuación matricial [U6; propuesto 6.6.1]; (6) ¿es grupo? [U7; propuesto 7.6.2].

2º final 2013-2

- **Tipo A:** (1) desigualdad [U2; ejercicio 2.5.6]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3; propuesto 3.6.4]; (3) polinomio de menor grado a partir de su gráfica [U4; ejercicio 4.5.5]; (4) planteamiento (ingenieros por especialidad) [U5; ejercicio 5.5.3]; (5) ecuación matricial [U6; propuesto 6.6.2]; (6) ¿es grupo abeliano? (operación en $\mathbb{Q}$) [U7; ejercicio 7.5.4].
- **Tipo B:** (1) desigualdad [U2]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3]; (3) polinomio de menor grado a partir de su gráfica [U4; propuesto 4.6.1]; (4) planteamiento (médicos por especialidad) [U5]; (5) ecuación matricial [U6]; (6) ¿es grupo abeliano? (operación en $\mathbb{Q}$) [U7; propuesto 7.6.3].

1er final 2014-1

- **Tipo A:** (1) inducción [U2; propuesto 2.6.1]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand; graficar soluciones [U3; propuesto 3.6.1]; (3) raíces con raíz compleja dada $(1 - 3i)$ [U4; propuesto 4.6.6]; (4) planteamiento (panadería) [U5; propuesto 5.6.2]; (5) ecuación matricial [U6; ejercicio 6.5.4]; (6) ¿es grupo abeliano? (reales positivos) [U7; ejercicio 7.5.5].
- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand; graficar soluciones [U3]; (3) raíces con raíz compleja dada $(-1 + 3i)$ [U4]; (4) planteamiento (panadería) [U5]; (5) ecuación matricial [U6]; (6) ¿es grupo abeliano? (reales no negativos) [U7].

2º final 2014-1

- **Tipo A:** (1) desigualdad [U2; ejercicio 2.5.7]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3; ejercicio 3.5.5]; (3) regla de los signos de Descartes; factores lineales [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) solución general y particular [U5]; (5) ecuación matricial con A^*, transpuesta, inversa y determinante [U6; propuesto 6.6.3]; (6) idéntico e inversos de dos operaciones en $\mathbb{R}$ [U7; ejercicio 7.5.6].
- **Tipo B:** (1) desigualdad [U2; propuesto 2.6.5]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3]; (3) regla de los signos de Descartes; factores lineales [U4; propuesto 4.6.4]; (4) solución general y particular [U5; propuesto 5.6.4]; (5) ecuación matricial con A^*, transpuesta, inversa y determinante [U6]; (6) idéntico e inversos de dos operaciones en $\mathbb{R}$ [U7].

Plan 2016

1er final 2016-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (cubo) [U1B; ejercicio 1B.5.7]; (2) inducción (producto) [U2; ejercicio 2.5.4]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) Descartes y raíces [U4]; (5) sistema 4×4: conjunto solución y tipo [U5]; (6) ecuación matricial con det, traza y diag [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (cubo) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) Descartes y raíces [U4]; (5) sistema 4×4: conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; propuesto 1B.6.3]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) polinomio a partir de su gráfica [U4]; (5) planteamiento (viviendas) [U5]; (6) determinante igual a cero (parámetro) [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) polinomio a partir de su gráfica [U4]; (5) planteamiento (viviendas) [U5]; (6) determinante igual a cero (parámetro) [U6].

2º final 2016-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; ejercicio 1B.5.4]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial con adjunta, A^* e inversa [U6; propuesto 6.6.6].

1er final 2017-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (valores notables) [U1B; ejercicio 1B.5.1]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3; propuesto 3.6.5]; (4) coeficientes por factor y raíz dados [U4]; (5) planteamiento (edades) [U5]; (6) ecuación matricial con complejos [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (valores notables) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) coeficientes por factor y raíz dados [U4]; (5) planteamiento (edades) [U5]; (6) ecuación matricial con complejos [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación polar con datos en Argand [U3]; (4) coeficientes por puntos de la gráfica; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial con matriz ortogonal y A^* [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación polar [U3]; (4) coeficientes por puntos; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial con matriz ortogonal [U6].

2º final 2017-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (triángulo) [U1B; ejercicio 1B.5.5]; (2) inducción (serie geométrica) [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) raíces con raíz compleja dada [U4]; (5) sistema con parámetro m [U5]; (6) ecuación matricial con transpuesta y C^* [U6].

1er final 2017-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (perímetro de triángulo) [U1B; ejercicio 1B.5.6]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación polar con datos en Argand [U3]; (4) polinomio de grado 4 por puntos y raíz compleja [U4]; (5) planteamiento (componentes electrónicos) [U5]; (6) ecuación matricial con det [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (perímetro de triángulo) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación polar con datos en Argand [U3]; (4) polinomio por puntos y raíz compleja [U4]; (5) planteamiento (componentes electrónicos) [U5]; (6) ecuación matricial con det [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (figura) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación con varias formas [U3]; (4) parámetro por factor dado; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro k (tres casos) [U5; ejercicio 5.5.7]; (6) ecuación matricial con inversa y det [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (figura) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación con varias formas [U3]; (4) parámetro por factor dado; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial con inversa y det [U6].

2º final 2017-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (distancia) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) raíz de multiplicidad 2 (parámetro) [U4]; (5) planteamiento (prototipos) [U5]; (6) cofactores e inversa por adjunta [U6; ejercicio 6.5.8].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (distancia) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) raíz de multiplicidad 2 (parámetro) [U4]; (5) construir un sistema dada su solución [U5]; (6) propiedad del determinante (demostración) [U6].

1er final 2018-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (triángulo) [U1B; propuesto 1B.6.4]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) coeficientes por divisibilidad y punto [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial con traza y diag [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (triángulo) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) coeficientes por divisibilidad y punto [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (identidad) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíces con factor dado [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) determinante igual a cero ($a \in \mathbb{C}$) [U6; propuesto 6.6.5].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (identidad) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíces con factor dado [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) determinante igual a cero [U6].

2º final 2018-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (área) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3; ejercicio 3.5.8]; (4) raíces con raíz compleja dada [U4; ejercicio 4.5.8]; (5) sistema con parámetro: compatible indeterminado [U5]; (6) existencia de la inversa (parámetro) [U6; ejercicio 6.5.7].

1er final 2018-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; ejemplo 1B.4]; (2) inducción [U2]; (3) igualdad de complejos (a, b) [U3]; (4) parámetro y raíces [U4]; (5) sistema con parámetro: incompatible [U5]; (6) ecuación matricial con det K [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (ecuaciones) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) igualdad de complejos [U3]; (4) parámetro y raíces [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; propuesto 1B.6.1]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) coeficientes y raíces [U4; propuesto 4.6.5]; (5) sistema homogéneo: conjunto solución [U5; propuesto 5.6.6]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) coeficientes y raíces [U4]; (5) sistema homogéneo [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2018-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (identidad) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) raíces cúbicas a partir de una dada [U3; ejercicio 3.5.6]; (4) Descartes, raíces racionales, raíz i [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

1er final 2019-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuaciones) [U1B; ejercicio 1B.5.2]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces con raíz dada [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (ecuaciones) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces con raíz dada [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2019-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) parámetro por valor del polinomio [U4]; (5) planteamiento (librería, 4 incógnitas) [U5; ejercicio 5.5.4]; (6) elementos a partir de A^{-1} y A^T [U6].

1er final 2019-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces [U4]; (5) sistema con parámetro m [U5; ejercicio 5.5.6]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2; ejercicio 2.5.5]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces de un polinomio bicuadrado [U4]; (5) parámetro y conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6]; (7) inversa de una matriz ortogonal [U6].

2º final 2019-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; propuesto 1B.6.2]; (2) desigualdad [U2; propuesto 2.6.6]; (3) ecuación en C [U3; propuesto 3.6.6]; (4) Descartes; factores con raíz $2i$ y factor dado [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

1er final 2020-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; ejercicio 1B.5.3]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíz de multiplicidad 2 (k, m) [U4; ejercicio 4.5.7]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) igualdad de complejos (a, b) [U3; ejercicio 3.5.7]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2020-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (identidad) [U1B; ejercicio 1B.5.8]; (2) desigualdad [U2; ejercicio 2.5.8]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro α [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

1er final 2020-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2; propuesto 2.6.3]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíces [U4]; (5) planteamiento (renta de películas) [U5]; (6) traza, cofactor y determinante [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) parámetro por raíz i y punto [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5; propuesto 5.6.5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2024-1

- **Versión única:** (1) inducción [U2]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes, raíces racionales, factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) $\det(A - \lambda I) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) [U6].

2º final 2024-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (perímetro) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes, raíces racionales, factor irracional [U4]; (5) parámetros a, b, c y tipo de sistema [U5]; (6) inversa de una matriz [U6]; (7) determinante [U6].

1er final 2025-2

- **Tipo B:** (1) trigonometría (ley de senos, postes) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) divisibilidad, raíces y factores [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2026-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema homogéneo por Gauss; dos soluciones particulares [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne un ejercicio propuesto por unidad, en el orden del examen de tu plan. Resuélvelo en **2 horas**, sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

Simulacro	1	2	3	4	5	6
Plan 2010, 1	2.6.1	3.6.1	4.6.6	5.6.2	6.6.1	7.6.2
Plan 2010, 2	2.6.5	3.6.4	4.6.1	5.6.4	6.6.3	7.6.3
Plan 2016, 1	1B.6.1	2.6.3	3.6.5	4.6.5	5.6.5	6.6.5
Plan 2016, 2	1B.6.2	2.6.6	3.6.6	4.6.2	5.6.6	6.6.6

Las columnas 1 a 6 son los problemas del examen; los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). Cuatro problemas del primer simulacro del Plan 2010 (2.6.1, 3.6.1, 4.6.6 y 5.6.2) vienen del mismo examen real, el 1er final 2014-1, tipo A.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen de la asignatura tiene resolución publicada: todas las resoluciones de este cuaderno son propias. Este apéndice solo registra erratas de los *enunciados* (datos incompatibles o numeración).

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016)

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades

2º final 2013-1, tipo B, problema 1: La versión B pide demostrar $2^3 + 2(3)^3 + 2(5)^3 + \cdots + 2(2n-1)^3 = 2n^2(2n^2-1)$. Con $n = 1$ el lado derecho vale 2, así que el primer sumando debe ser $2(1)^3 = 2$, no $2^3 = 8$. Con esa corrección es el doble de la proposición de la versión A y se demuestra igual.

2º final 2010-2, problema 1: El tercer sumando aparece como $\frac{2}{27}$. Con el término general $\frac{2n+1}{3^n}$ y $n = 3$ es $\frac{7}{27}$, y solo con ese valor la igualdad se cumple para $n = 3$. En este cuaderno se escribe $\frac{7}{27}$.

C.3 · Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4 · Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.5 · Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.6 · Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.7 · Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010)

1er final 2010-2, turno matutino, problema 6: El enunciado presenta el segundo grupo como $(\mathbb{R}, \#)$, pero la función va de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ ($10^a > 0$): el segundo grupo es $(\mathbb{R}^+, \#)$. En el ejercicio 7.5.8 se escribe así.

2º final 2013-1, tipo A, problema 6: El inciso b) pide demostrar que la operación es cerrada en T, pero no lo es: $3m + 3n + 4$ nunca es múltiplo de 3 (por ejemplo, $9 \star 6 = 19$). En el ejercicio propuesto 7.6.1 se pregunta si es cerrada y se omite el inciso de asociatividad, que en T no tiene sentido sin cerradura.

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de la asignatura

- Programa de estudio de *Álgebra* del Plan 2010 (primer semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Siete temas: introducción, números reales, complejos, polinomios, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, y estructuras algebraicas.
- Programa de estudio de *Álgebra* del Plan 2016 (primer semestre, 8 créditos, 64 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Seis temas: trigonometría, números reales, complejos, polinomios, sistemas de ecuaciones, y matrices y determinantes.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Exámenes finales colegiados de la asignatura, sin resolución publicada: 17 del Plan 2010 (10 aplicaciones, de 2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (21 aplicaciones, de 2016-2 a 2026-1), más tres exámenes parciales del Plan 2016 (2024-1 y 2026-2). En cada ejercicio de este cuaderno se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2013-2, tipo A, problema 3». Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias.

Periodo	Examen	Versiones	Problemas
Plan 2010			
2010-1	2º final	A	6
2010-2	1er final	matutino (A) y vespertino	6
2010-2	2º final	única	7
2011-1	1er final	A	6
2013-1	1er final	A, B	6
2013-1	2º final	A, B	6
2013-2	1er final	A, B	6
2013-2	2º final	A, B	6
2014-1	1er final	A, B	6
2014-1	2º final	A, B	6
Plan 2016			
2016-2	1er final	A, B, C, D	6
2016-2	2º final	única	6
2017-1	1er final	A, B, C, D	6
2017-1	2º final	única	6
2017-2	1er final	A, B (matutino); C, D (vespertino)	6
2017-2	2º final	A, C	6
2018-1	1er final	A, B, C, D	6
2018-1	2º final	única	6
2018-2	1er final	A, B, C, D	6
2018-2	2º final	única	6
2019-1	1er final	A, B	6
2019-1	2º final	única	6
2019-2	1er final	A, C	6 y 7
2019-2	2º final	única	6
2020-1	1er final	A, C	6
2020-1	2º final	única	6
2020-2	1er final	A, C	6
2024-1	2º final	única	6
2024-2	2º final	única	7
2025-2	1er final	B	6
2026-1	2º final	única	6

Duración: dos horas y media hasta 2011-1 y dos horas desde 2013-1. Ningún examen permite calculadora.

Series de ejercicios. Para la Unidad 7 se usó también la serie de ejercicios del tema 7 (estructuras algebraicas) que acompañaba al programa de 2008.

Bibliografía de los programas

Plan 2010. Básica

- Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. México: Fondo de Cultura Económica, 1995.
- Sestier, A. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. México: Limusa, 1996.
- Rees, P. K. *Álgebra*. México: Reverté, 2000.
- Solar G., E. y Speziale de G., L. *Álgebra I*, 3.ª ed. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- Solar G., E. y Speziale de G., L. *Apuntes de Álgebra Lineal*, 3.ª ed. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1999.
- Swokowski, E. W. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson, 2007.

Plan 2010. Complementaria

- Ayres, F. *Álgebra moderna*. México: McGraw-Hill, 1992.
- Barrera G., F. y Castañeda de I. P., É. *Cuaderno de ejercicios de álgebra. 1.ª parte*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 1994.
- Godínez C., H. y Herrera C., A. *Álgebra lineal. Teoría y ejercicios*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 1987.
- Martin-Gay, K. E. *Introductory and Intermediate Algebra*. Canadá: Prentice-Hall, 1999.
- Velázquez Torres, J. *Fascículo de inducción matemática*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2000.
- Williams, G. *Linear Algebra with Applications*. EUA: Jones and Bartlett, 2005.

Plan 2016. Básica (además de Rees, 2012; Solar y Speziale, *Álgebra I*, 2004; y Swokowski, 2007)

- Andrade, A. y Castañeda, É. *Antecedentes de geometría y trigonometría*. México: Trillas y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2010.
- León Cárdenas, J. *Álgebra*. México: Grupo Editorial Patria, 2011.

Plan 2016. Complementaria (además de Velázquez, 2008; y Williams, 8.ª ed., 2014)

- Arzamendi P., S. R. y otros. *Cuaderno de ejercicios de álgebra*, 2.ª ed. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2011.
- Kaufmann, J. E. y otros. *Álgebra*, 8.ª ed. México: Thomson Cengage Learning, 2010.
- Lehmann, C. H. *Álgebra*. México: Limusa Noriega Editores, 2011.
- Stewart, J. y otros. *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, 5.ª ed. México: Thomson Cengage Learning, 2007.

La notación de este cuaderno ($z = r \operatorname{cis} \theta$ con el ángulo en grados, $A^* = \bar{A}^T$, «compatible determinado», $(A, *)$ para un sistema algebraico) es la de los enunciados de los exámenes.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016)

Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. Factor común: $\operatorname{sen}\alpha\,(2\cos\alpha+1)=0$.
2. $\operatorname{sen}\alpha=0$: 0°, 180° y 360°; el 0° queda fuera de $(0^\circ,360^\circ]$.
3. $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$: referencia 60°, cuadrantes II y III: 120° y 240°.
4. $\alpha\in\{120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ,\ 360^\circ\}$.

Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. Se divide entre 8 y, como aparece $\cos x$, se usa $\cos 2x=2\cos^2 x-1$: $2\cos^2 x-1=\cos x-1$.
2. $2\cos^2 x-\cos x=0$, es decir, $\cos x\,(2\cos x-1)=0$.
3. $\cos x=0$: 90° y 270°.
4. $\cos x=\frac{1}{2}$: referencia 60°, cuadrantes I y IV: 60° y 300°.
5. $x\in\{60^\circ,\ 90^\circ,\ 270^\circ,\ 300^\circ\}$.

Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. $3\sec^2 x=4$, así que $\sec^2 x=\frac{4}{3}$ y $\cos^2 x=\frac{3}{4}$: $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$: referencia $\frac{\pi}{6}$; en $[0,\pi]$ (cuadrantes I y II) solo $x=\frac{\pi}{6}$.
3. $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$: en $[0,\pi]$, cuadrante II: $x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.
4. $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. Ley de cosenos para el ángulo en P: $3^2=4^2+5^2-2(4)(5)\cos P$, de donde $\cos P=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$.
2. (También: $3^2+4^2=5^2$, así que el triángulo es rectángulo en Q y $\cos P=\frac{4}{5}$.)
3. En el triángulo rectángulo PDQ, $x=PQ\cos P=4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$.

Ejercicio 1B.6.5

← volver

1. Cada hora del reloj corresponde a $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$. A las 5:00 el minutero apunta al 12 y el horario al 5: forman $5\cdot 30^\circ=150^\circ$.
2. Ley de cosenos: $d^2=10^2+7^2-2(10)(7)\cos 150^\circ=149-140\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=149+70\sqrt{3}$.
3. $d=\sqrt{149+70\sqrt{3}}$ **cm**.

Ejercicio 1B.6.6

← volver

1. Diferencia de cubos: $\cot^3 x-1=(\cot x-1)(\cot^2 x+\cot x+1)$.
2. El lado izquierdo queda $\cot^2 x+\cot x+1-\cot x=\cot^2 x+1$.

3. Por la identidad pitagórica, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$: **sí es identidad**.

E.2 · Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. Término general $\frac{2}{2^{n-1}}$; el sumando nuevo es $\frac{2}{2^k}$.
2. **Base** ($n = 1$): izquierdo $\frac{2}{2^0} = 2$; derecho $2\left[\frac{1}{1}\right] = 2$. Se cumple.
3. **Hipótesis:** $2 + 1 + \cdots + \frac{2}{2^{k-1}} = \frac{2(2^k-1)}{2^{k-1}}$. **Tesis:** $2 + 1 + \cdots + \frac{2}{2^k} = \frac{2(2^{k+1}-1)}{2^k}$.
4. **Paso inductivo**, con denominador común 2^k:

$$\frac{2(2^k-1)}{2^{k-1}} + \frac{2}{2^k} = \frac{4(2^k-1)+2}{2^k} = \frac{2^{k+2}-2}{2^k} = \frac{2(2^{k+1}-1)}{2^k}.$$

5. **Conclusión:** por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. Término general $a + (n-1)d$; el sumando nuevo es $a + kd$.
2. **Base** ($n = 1$): izquierdo a; derecho $\frac{1}{2}(2a) = a$. Se cumple.
3. **Hipótesis:** la suma de los k primeros es $\frac{k}{2}[2a + (k-1)d]$. **Tesis:** la de los $k+1$ primeros es $\frac{k+1}{2}[2a + kd]$.
4. **Paso inductivo:**

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}[2a + (k-1)d] + a + kd &= \frac{2ak + k^2d - kd + 2a + 2kd}{2} \\ &= \frac{2a(k+1) + kd(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}[2a + kd].\end{aligned}$$

5. **Conclusión:** por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. Se simplifica el lado derecho: $-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = -\frac{1}{4\cdot 5^n}$, así que $P(n)$ dice $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^n}$.
2. **Base** ($n = 1$): izquierdo $\frac{1}{5}$; derecho $\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Se cumple.
3. **Hipótesis:** $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^k}$. **Tesis:** $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^{k+1}}$.
4. **Paso inductivo**, con denominador común $4 \cdot 5^{k+1}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^k} + \frac{1}{5^{k+1}} &= \frac{1}{4} - \frac{5-4}{4\cdot 5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^{k+1}} \\ &= -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+2} + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

5. **Conclusión:** por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. Se multiplica por 4 (positivo, no cambia el sentido): $20 - x > -24$.
2. Se resta 20: $-x > -44$.
3. Se multiplica por -1 y se invierte el sentido: $x < 44$.
4. Resultado: $x \in (-\infty, 44)$.

Ejercicio 2.6.5 ← volver

1. Restricción: $x \neq -\frac{1}{5}$.
2. Igual que en el ejercicio 2.5.7: $|3x-2| > 3|5x+1| \iff (3x-2)^2 > (15x+3)^2 \iff (12x+5)(18x+1) < 0$.
3. El producto es negativo entre las raíces: $-\frac{5}{12} < x < -\frac{1}{18}$.
4. Se quita $x = -\frac{1}{5}$, que está en ese intervalo y anula el denominador.
5. Resultado: $x \in \left(-\frac{5}{12}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{18}\right)$.

Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. Restricción: $x \neq 4$.
2. $|2x+6| < 2|x-4| \iff (2x+6)^2 < (2x-8)^2$.
3. Diferencia de cuadrados: $(2x+6-2x+8)(2x+6+2x-8) = 14(4x-2) < 0$.
4. Como $14 > 0$: $4x - 2 < 0$, es decir, $x < \frac{1}{2}$. El valor excluido $x = 4$ ya queda fuera.
5. Comprobación con $x = 0$: $\left|\frac{6}{-4}\right| = \frac{3}{2} < 2$. Se cumple.
6. Resultado: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

E.3 · Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. Lectura: $z_1 = i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = 2\,\mathrm{cis}(270^\circ - 30^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,240^\circ$; $z_4 = \sqrt{8}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 2 - 2i$.
2. $2z_2 - z_4 = 2 + 6i - 2 + 2i = 8i$ y $\frac{8i}{i} = 8$.
3. $z_3^3 = 8\,\mathrm{cis}\,720^\circ = 8$.
4. $8z^4 = 8 \Rightarrow z^4 = 1 = \mathrm{cis}\,0^\circ$; raíces cuartas: $\mathrm{cis}(90^\circ k)$.
5. **Resultado:** $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. $z_2 - \bar{z}_3 = -3 - (-3 + 6i) = -6i = 6\,\mathrm{cis}\,270^\circ$; numerador: $6\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,270^\circ$.
2. $i^{17} = i = \mathrm{cis}\,90^\circ$; denominador: $2\,\mathrm{cis}\,135^\circ \cdot \mathrm{cis}\,90^\circ = 2\,\mathrm{cis}\,225^\circ$.
3. Lado derecho: $3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$. Como $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$, $w^{3/2} = 3$.
4. $w = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9\,\mathrm{cis}\,0^\circ}$: módulo $\sqrt[3]{9}$, argumentos $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

1. $i^7 = i^3 = -i = \mathrm{cis}\,270^\circ$; $(-i)(2\,\mathrm{cis}\,60^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,330^\circ = \sqrt{3} - i$.
2. Numerador: $(\sqrt{3} - i) + (-\sqrt{3} + 2i) = i$. Denominador: $-\,\mathrm{cis}\,270^\circ = -(-i) = i$.
3. $z^{4/3} = 1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{1^3} = \sqrt[4]{\mathrm{cis}\,0^\circ}$.

4. Raíces cuartas de 1: $\operatorname{cis}(90^\circ k)$, $k = 0, 1, 2, 3$: $1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. Lectura: $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}120^\circ$; $z_2 = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}225^\circ = -4 - 4i$; $z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}315^\circ = 1 - i$.
2. $z_2 - 2\bar{z}_3 = -4 - 4i - 2 - 2i = -6 - 6i$; por $e^{\pi i} = -1$, el denominador es $6 + 6i = 6\sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$.
3. Numerador: $6 \cdot 2\operatorname{cis}120^\circ \cdot \sqrt{2}\operatorname{cis}315^\circ = 12\sqrt{2}\operatorname{cis}435^\circ = 12\sqrt{2}\operatorname{cis}75^\circ$.
4. $w^{2/3} = 2\operatorname{cis}30^\circ \Rightarrow w = \sqrt{(2\operatorname{cis}30^\circ)^3} = \sqrt{8}\operatorname{cis}90^\circ$.
5. Raíces cuadradas: módulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, argumentos 45° y 225°: $w = 2 + 2i$, $w = -2 - 2i$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. $z_1 = 20\operatorname{cis}180^\circ$; $z_3 = 16\operatorname{cis}60^\circ$ ($r = \sqrt{64 + 192} = 16$, primer cuadrante, $\tan\theta = \sqrt{3}$).
2. $z_2 z_3 z_4 = 5 \cdot 16 \cdot 4\operatorname{cis}(45^\circ + 60^\circ + 135^\circ) = 320\operatorname{cis}240^\circ$.
3. $z^4 = \dfrac{320\operatorname{cis}240^\circ}{20\operatorname{cis}180^\circ} = 16\operatorname{cis}60^\circ$.
4. Raíces cuartas: módulo 2, argumentos $15^\circ + 90^\circ k$.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. $z_3 - \bar{z}_4 = -3 - (-3 - 4i) = 4i$; $(4i)^3 = 64\operatorname{cis}270^\circ$.
2. $z_1 = 2\operatorname{cis}135^\circ$ y $z_2 = 8\operatorname{cis}45^\circ$: $z_1 z_2 = 16\operatorname{cis}180^\circ$.
3. $z^{3/2} = 4\operatorname{cis}90^\circ \Rightarrow z = \sqrt[3]{(4\operatorname{cis}90^\circ)^2} = \sqrt[3]{16\operatorname{cis}180^\circ}$.
4. Módulo $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; argumentos $60^\circ + 120^\circ k$.

E.4 · Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. Cuatro cruces simples: grado 4, $q(x) = a\,x(x+3)(x+1)(x-2)$.
2. Punto $(1, -8)$: $a\,(1)(4)(2)(-1) = -8a = -8$, $a = 1$.
3. $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2)$. Como $(x+3)(x+1)(x-2) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $q(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. $h(x) = x^2\,g(x)$, con $g(x) = x^4 + (2-i)x^3 + (-3-2i)x^2 + (-6+3i)x + 6i$. $x = 0$ es raíz doble.
2. Coeficientes complejos: solo se divide entre $x - i$:

	1	$2 - i$	$-3 - 2i$	$-6 + 3i$	$6i$
i		i	$2i$	$-3i$	$-6i$
	1	2	-3	-6	0

3. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = x^2(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(x^2 - 3)$.
4. Raíces: 0 (doble), i, -2, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; $h(x) = x^2(x-i)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. Las raíces de f son las de p junto con las de q. De p: $x = \pm i$.

2. $q(x) = x^3(x^3 - 3x^2 - 9x + 20)$: $x = 0$ triple.
3. Candidatos de $x^3 - 3x^2 - 9x + 20$: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$. Con $x = 4$:

	1	−3	−9	20
4		4	4	−20
	1	1	−5	0

4. $x^2 + x - 5 = 0$: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.
5. Son 8 raíces, el grado de f.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. $g(x) = x^3\, q(x)$, $q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$; $x = 0$ triple.
2. $q(x)$: signos $+ - + - +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 positivas. $q(-x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$: 0 cambios, ninguna negativa.
3. Posibilidades: $(4, 0, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(0, 0, 4)$.
4. Se prueban solo candidatos positivos $(1, 2)$:

	1	−3	3	−3	2
1		1	−2	1	−2
2	1	−2	1	−2	0
		2	0	2	
	1	0	1	0	

5. $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la posibilidad $(2, 0, 2)$.
6. $g(x) = x^3(x - 1)(x - 2)(x - i)(x + i)$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. $p(1) = A + 2 - B + 2 = -4 \Rightarrow A - B = -8$.
2. $p(2) = 8A + 8 - 2B + 2 = 0 \Rightarrow 8A - 2B = -10 \Rightarrow 4A - B = -5$.
3. Restando la primera de la segunda: $3A = 3$, $A = 1$, $B = 9$.
4. $p(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 2$, con raíz $x = 2$ (dato $p(2) = 0$):

	1	2	−9	2
2		2	8	−2
	1	4	−1	0

5. $x^2 + 4x - 1 = 0$: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. Coeficientes complejos: se divide solo entre $x - (1 - 3i)$:

	1	$-1 + 3i$	5	$-5 + 15i$	4	$-4 + 12i$
$1 - 3i$		$1 - 3i$	0	$5 - 15i$	0	$4 - 12i$
	1	0	5	0	4	0

2. Cociente bicuadrado: $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$.
3. $x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$; $x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$.
4. Raíces: $1 - 3i,\ i,\ -i,\ 2i,\ -2i$.

E.5 · Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. x, y, z: cajas de A, B y C. Ecuaciones: $x+y+z=65$; $x=y+z-5$, o sea, $x-y-z=-5$; $17x+30y+48z=1830$.
2. Sumando las dos primeras: $2x=60\Rightarrow x=30$. Entonces $y+z=35$.
3. En la tercera: $510+30y+48z=1830\Rightarrow 30y+48z=1320$. Con $y=35-z$: $1050+18z=1320\Rightarrow z=15$, $y=20$.
4. **30 cajas de A, 20 de B y 15 de C.** Comprobación: $510+600+720=1830$.

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. x, y, z: conchas, panqués y cocoles. Ecuaciones: $x+y+z=120$; $x+y=2z$; $3x+5y+3z=420$.
2. Sustituyendo la segunda en la primera: $2z+z=120\Rightarrow z=40$; entonces $x+y=80$.
3. En la tercera: $3x+5y+120=420\Rightarrow 3x+5y=300$. Con $x=80-y$: $240+2y=300\Rightarrow y=30$, $x=50$.
4. **50 conchas, 30 panqués y 40 cocoles.** Comprobación: $150+150+120=420$.

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. a, b, c: inversiones de tipo A, B y C. Ecuaciones: $c=a+b-10$; $a=2b$; $a+b+c=500$.
2. Sustituyendo la primera en la tercera: $2(a+b)-10=500\Rightarrow a+b=255$.
3. Con $a=2b$: $3b=255\Rightarrow b=85$, $a=170$, $c=255-10=245$.
4. **170 del tipo A, 85 del B y 245 del C.**

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. Gauss:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
La tercera ecuación es el triple de la primera: compatible indeterminado.
2. Con $c=t$: $-7b+5t=-5\Rightarrow b=\frac{5+5t}{7}$; $a=2-2b+t=\frac{14-10-10t+7t}{7}=\frac{4-3t}{7}$.
3. **a)** $(a,b,c)=\left(\frac{4-3t}{7},\frac{5+5t}{7},t\right)$**. b) Con** $t=-1$**:** $(1,0,-1)$**.** Comprobación: $1+0+1=2$, $4+0-1=3$.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. Se pone primero la segunda ecuación:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & k & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-kR_1]{R_2+2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & k-4 & 1 \\ 0 & 3k-1 & 2k+1 & 1 \end{array}\right]$$
2. Para no dividir entre $3k-1$ se hace $2R_3+(3k-1)R_2$. El tercer coeficiente es $2(2k+1)+(3k-1)(k-4)=3k^2-9k+6=3(k-1)(k-2)$ y el término independiente es

$2+(3k-1)=3k+1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & k-4 & 1 \\ 0 & 0 & 3(k-1)(k-2) & 3k+1 \end{array}\right]$$

3. Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, hay tres pivotes: **a) compatible determinado.**
4. Si $k = 1$, el renglón es $0 = 4$; si $k = 2$, es $0 = 7$: **b) incompatible para $k = 1$ y $k = 2$.** Ningún valor da un sistema indeterminado.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. Se pone primero la cuarta ecuación y se escalona la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_1]{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3+2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tres pivotes y cuatro incógnitas: una libre, $d = t$.
3. $-c-6t=0 \Rightarrow c=-6t$; $-3b+6t+9t=0 \Rightarrow b=5t$; $a=-b+3t=-2t$.
4. **Conjunto solución:** $\{(-2t, 5t, -6t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$**.** Comprobación con $t = 1$ en la primera: $-4-5+6+3=0$.

E.6 · Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes

Ejercicio 6.6.1 ← volver

1. $\det C = 0-(i)(-i) = i^2 = -1$; $\operatorname{tr} B = 8$.
2. $XB-8XA = \det(C)\,C = -C$, o sea $X(B-8A) = -C$.
3. $B-8A=\begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $\det = 160$, $(B-8A)^{-1} = \dfrac{1}{160}\begin{bmatrix} 0 & 20 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix}$.
4. $X = -C(B-8A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{20} & 0 \\ 0 & \frac{i}{8} \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.6.2 ← volver

1. $(B+D)X = C^T - A$. X es de 3×2.
2. $B+D=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; por el primer renglón, $\det(B+D) = 7(2-3) = -7$.

3. Cofactores: $C_{11}=-1, C_{12}=1, C_{13}=2; C_{21}=0, C_{22}=7, C_{23}=-21; C_{31}=0, C_{32}=-7, C_{33}=14$. Entonces
$$(B+D)^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 7 & -7\\ 2 & -21 & 14\end{bmatrix}.$$
4. $C^T-A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -3\\ 1 & -6\end{bmatrix}$.
5. $X=(B+D)^{-1}(C^T-A)=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}0 & -2\\ -7 & 23\\ 14 & -17\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 7 & -23\\ -14 & 17\end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.6.3 ← volver

1. Lado izquierdo: $\left(\frac{1}{4}X^T+\frac{i}{4}A^*\right)^T=\frac{1}{4}X+\frac{i}{4}(A^*)^T=\frac{1}{4}X+\frac{i}{4}\bar{A}$.
2. $\det B=1$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ y $\det(2B^{-1})=2^2\cdot 1=4$.
3. $\frac{1}{4}X+\frac{i}{4}\bar{A}=\frac{1}{4}B^{-1}$, así que $X=B^{-1}-i\bar{A}$.
4. $\bar{A}=\begin{bmatrix}1-i & 0\\ 0 & -2i\end{bmatrix}$, $i\bar{A}=\begin{bmatrix}i+1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.
5. $X=\begin{bmatrix}1-1-i & 0\\ -3 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i & 0\\ -3 & -1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.6.4 ← volver

1. Se multiplica por C a la izquierda: $R=C(A-B)$.
2. $A-B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -3 & -5 & -5\\ 11 & 18 & 19\end{bmatrix}$ y
$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -3 & -5 & -5\\ 11 & 18 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 9\end{bmatrix}.$$
3. $\det R=1(27-32)-1(18-20)+1(16-15)=-5+2+1=-2\neq 0$; también $\det R=\det C\det(A-B)=1(-2)$.
4. Cofactores: $C_{11}=-5, C_{12}=2, C_{13}=1; C_{21}=-1, C_{22}=4, C_{23}=-3; C_{31}=1, C_{32}=-2, C_{33}=1$.
5. Transpuesta de los cofactores: $\operatorname{adj} R=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$. Comprobación: $R\operatorname{adj}R=-2I$.

Ejercicio 6.6.5 ← volver

1. La columna 2 solo tiene a en la posición $(3,2)$: $|A|=(-1)^{3+2}a\,M_{32}=-a\,M_{32}$.

2. $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1(a-2) - 3(a^2+2) + (-1)(a+1) = -3a^2 - 9.$
3. $|A| = -a(-3a^2 - 9) = 3a(a^2+3)$.
4. $3a(a^2+3) = 0$: $a = 0$ o $a^2 = -3$, es decir, $a = 0$, $a = \pm\sqrt{3}\,i$.

Ejercicio 6.6.6 ← volver

1. $\operatorname{tr} A = 1 - 1 = 0$, y $\frac{1}{\det B} \operatorname{adj} B = B^{-1}$. La ecuación queda $B^{-1}A^* = B^{-1}AX - CX = (B^{-1}A - C)X$.
2. $B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3i & 3 \end{bmatrix}$, así que $B^{-1}A - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.
3. Entonces $X = B^{-1}A^*$, con $A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
4. $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

E.7 · Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010)

Ejercicio 7.6.1 ← volver

1. a) $9 = 3 \cdot 3$ y $6 = 3 \cdot 2$ están en T: $9 \star 6 = 9 + 6 + 4 = 19$. También $3 \star 3 = 3 + 3 + 4 = 10$. En cambio, 1 no es múltiplo de 3, así que $1 \star 6$ no está definida.
2. b) Con $x = 3m$ y $y = 3n$: $x \star y = 3(m+n) + 4$, que deja residuo 1 al dividirse entre 3, así que nunca está en T. Contraejemplo: $9 \star 6 = 19 \notin T$. **No es cerrada**.
3. c) $x + y + 4 = y + x + 4$: **es conmutativa**.

Ejercicio 7.6.2 ← volver

1. **Cerradura.** Se cumple: $a + d$ y $ad - b$ son reales.
2. **Asociatividad.** No se cumple. Con $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,1)$: $[(1,0) * (0,1)] * (0,1) = (2,1) * (0,1) = (3,1)$, mientras que $(1,0) * [(0,1) * (0,1)] = (1,0) * (1,-1) = (0,-1)$.
3. **Idéntico.** No se cumple: $(a,b) * (e_1,e_2) = (a + e_2,\ ae_2 - b) = (a,b)$ exige $e_2 = 0$, y entonces $-b = b$ para todo b, imposible.
4. **Inversos.** No se cumple: no hay idéntico.
5. Además no es conmutativa: $(1,0) * (0,1) = (2,1)$ y $(0,1) * (1,0) = (0,-1)$.
6. **Conclusión:** $(B, *)$ no es un grupo.

Ejercicio 7.6.3 ← volver

1. **Cerradura.** Se cumple en $\mathbb{Q}$.
2. **Asociatividad.** Se cumple: los dos lados dan $x + y + z + \frac{xy+xz+yz}{3} + \frac{xyz}{9}$.
3. **Idéntico.** $x + e + \frac{xe}{3} = x$ da $e\left(1 + \frac{x}{3}\right) = 0$ para todo x: $e = 0$.
4. **Inversos.** No se cumple: $x + x' + \frac{xx'}{3} = 0$ da $x' = \dfrac{-3x}{x+3}$, que no existe para $x = -3$; en efecto, $(-3) \odot y = -3$ para todo y.
5. **Conmutatividad.** Se cumple.

6. **Conclusión:** $(\mathbb{Q}, \odot)$ no es un grupo abeliano.

Ejercicio 7.6.4 ← volver

1. La segunda operación es $\oplus$. Idéntico: $x + e + xe = x$ da $e(1 + x) = 0$ para todo x, así que $e = 0$.
2. Inverso: $x + x' + xx' = 0$ da $x'(1 + x) = -x$, es decir, $x' = \dfrac{-x}{1 + x}$.
3. No existe para $x = -1$. Es lo esperado: el cero del campo es el idéntico de la primera operación ($x + e + 1 = x$ da $e = -1$), y el cero no tiene inverso para la segunda.
4. Comprobación con $x = 1$: $x' = -\frac{1}{2}$ y $1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Ejercicio 7.6.5 ← volver

1. Idéntico de $\odot$: $a + e - \sqrt{5} = a$ da $e = \sqrt{5}$.
2. Un isomorfismo lleva el idéntico al idéntico: el de $*$ es $f(\sqrt{5}) = 10^{\sqrt{5}}$.
3. Comprobación: la operación inducida es $x * y = \dfrac{xy}{10^{\sqrt{5}}}$, porque $10^{a+b-\sqrt{5}} = \frac{10^a\, 10^b}{10^{\sqrt{5}}}$; y $x * 10^{\sqrt{5}} = x$.

Ejercicio 7.6.6 ← volver

1. a) $(A \triangle B) \triangle C = (A + B + I) + C + I = A + B + C + 2I$ y $A \triangle (B \triangle C) = A + (B + C + I) + I = A + B + C + 2I$: **es asociativa**.
2. b) Idéntico: $A + E + I = A$ da $E = -I = \mathrm{diag}(-1, -1)$, que está en M.
3. Inverso: $A + A' + I = -I$ da $A' = -A - 2I = \mathrm{diag}(-a - 2,\ -b - 2)$, con entradas enteras: está en M.
4. Comprobación: $\mathrm{diag}(a, b) + \mathrm{diag}(-a - 2, -b - 2) + I = \mathrm{diag}(-1, -1) = -I$.