4. Comprobación: $B - \text{proy}_W B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, antisimétrica, ortogonal a toda matriz simétrica.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. a) $(a,b) \in W^\perp$ si $((a,b) \mid (1,1)) = 2a + b = 0$: $W^\perp = \{\alpha(1,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Con el producto usual habría salido $(1,-1)$.
2. b) $\vec{w} = \text{proy}_W(2,-1) = \frac{((2,-1)\mid(1,1))}{((1,1)\mid(1,1))}(1,1) = \frac{4-1}{2+1}(1,1) = (1,1)$.
3. $\vec{w}' = (2,-1) - (1,1) = (1,-2) \in W^\perp$.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. La base ya es ortogonal: $(1,2,1) \cdot (1,-1,1) = 1 - 2 + 1 = 0$.
2. $(\vec{v} \mid \vec{e}_1) = 4 + 4 - 3 = 5$, $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1) = 6$; $(\vec{v} \mid \vec{e}_2) = 4 - 2 - 3 = -1$, $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2) = 3$.
3. $\vec{p} = \frac{5}{6}(1,2,1) - \frac{1}{3}(1,-1,1) = \left(\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$.
4. Comprobación: $\vec{v} - \vec{p} = \left(\frac{7}{2}, 0, -\frac{7}{2}\right)$ es ortogonal a los dos vectores de la base.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. $\vec{e}_1 = 1$, $(1 \mid 1) = \int_{-1}^{1} dx = 2$.
2. $(x \mid 1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$: x ya es ortogonal a 1, así que $\vec{e}_2 = x$, con $(x \mid x) = \frac{2}{3}$.
3. $(x^2 \mid 1) = \frac{2}{3}$ y $(x^2 \mid x) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$.
4. $\vec{e}_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$.
5. Comprobación: $\left(x^2 - \frac{1}{3} \,\middle|\, 1\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. $W = \text{gen}\{g\}$ con $g(x) = x^2 + x - 1$: $g(0) = -1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 5$.
2. Para $p(x) = ax^2 + bx + c$: $p(0) = c$, $p(1) = a + b + c$, $p(2) = 4a + 2b + c$.
3. $(p \mid g) = -c + (a + b + c) + 5(4a + 2b + c) = 21a + 11b + 5c = 0$.
4. Dos parámetros libres: con $(a,b) = (5,0)$, $c = -21$; con $(a,b) = (0,5)$, $c = -11$. $W^\perp = \text{gen}\{5x^2 - 21,\ 5x - 11\}$, de dimensión $3 - 1 = 2$.

E.5 · Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. M es simétrica. $\det(M - \lambda I) = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$.
2. $\lambda = 6$: $-x + 2y = 0$, $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$. $\lambda = 1$: $4x + 2y = 0$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$.
3. $P_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_1^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $P_1 + P_2 = I$.
4. $S = 6P_1 + P_2$. Comprobación de la entrada $(1,1)$: $\frac{24}{5} + \frac{1}{5} = 5$.

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, simétrica; $\det(M - \lambda I) = (5-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 7)(\lambda - 3)$.
2. $\lambda = 7$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = 3$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.
3. $P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $S = 7P_1 + 3P_2$. Comprobación: $\frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$ y $\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$.

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^2 - 25 = (\lambda - 9)(\lambda + 1)$.
2. $\lambda = 9$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = -1$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.
3. Ecuación: $9x'^2 - y'^2 = 9$. Los valores propios tienen signos contrarios: hipérbola.

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda(\lambda - 4)$.
2. $\lambda = 0$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = 4$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.
3. Ecuación: $4y'^2 = 9$, o sea $y' = \pm\frac{3}{2}$. Un valor propio nulo da una cónica degenerada.
4. Comprobación: la ecuación original es $2(x-y)^2 = 9$, y $y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$, así que $4y'^2 = 2(x-y)^2$.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. $M = \begin{pmatrix} -2i & 3-i \\ -3-i & -4i \end{pmatrix}$.
2. Transpuesta: $\begin{pmatrix} -2i & -3-i \\ 3-i & -4i \end{pmatrix}$; conjugada: $M^* = \begin{pmatrix} 2i & -3+i \\ 3+i & 4i \end{pmatrix}$.
3. $-M = \begin{pmatrix} 2i & -3+i \\ 3+i & 4i \end{pmatrix} = M^*$. La diagonal es imaginaria pura, como debe ser.
4. $T^* = -T$: T es antihermitiano.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. Los espacios dados son ortogonales entre sí. Base ortonormal de $E(1)$: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$; de $E(7)$: $\{(0, 0, 1)\}$.
2. $P_1(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = (x, y, 0)$ y $P_7(x, y, z) = (0, 0, z)$. $P_1 + P_7 = I$.
3. $T = 1\,P_1 + 7\,P_7$: $T(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, 7z) = (x,\ y,\ 7z)$.