1. En la base $\{x^2, x, 1\}$: $T(x^2) = 2x^2 - x + 1$, $T(x) = x$, $T(1) = 2x^2 + 3$. Entonces
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Por la segunda columna: $\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)\big[(2-\lambda)(3-\lambda)-2\big] = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$.
3. $\lambda = 1$: $M - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da $a = 0$ y $c = 0$, con $b$ libre: $E(1) = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, de dimensión 1.
4. $\lambda = 4$: $M - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da $c = a$ y $b = -\frac{a}{3}$. Con $a = 3$: $3x^2 - x + 3$. Comprobación: $T(3x^2 - x + 3) = 12x^2 - 4x + 12$.
5. c) $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1: $T$ **no** es diagonalizable.

**Ejercicio 3B.6.5** ← volver

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es triangular: valores propios 1, $-2$ y 3, distintos.
2. $\lambda = 1$: $2b = 0$, $-3b + c = 0$, $2c = 0$: $(1, 0, 0)$.
3. $\lambda = -2$: $3a + 2b = 0$, $c = 0$: $(2, -3, 0)$.
4. $\lambda = 3$: $-2a + 2b = 0$ y $-5b + c = 0$: $(1, 1, 5)$. Comprobación: $T(1, 1, 5) = (3, 3, 15)$.
5. c) Tres valores distintos: $D = \operatorname{diag}(1, -2, 3)$ en la base $\{(1, 0, 0), (2, -3, 0), (1, 1, 5)\}$.

## E.4 · Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección

**Ejercicio 4.6.1** ← volver

1. Sea $S(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Entonces $(\vec{x} \mid \vec{y}) = 6\,S(\vec{x})\,S(\vec{y})$.
2. Simetría: $6S(\vec{y})S(\vec{x}) = 6S(\vec{x})S(\vec{y})$. Se cumple.
3. Aditividad y homogeneidad: $S$ es lineal, $S(\vec{x} + \vec{z}) = S(\vec{x}) + S(\vec{z})$ y $S(\alpha\vec{x}) = \alpha S(\vec{x})$. Se cumplen.
4. Positividad: $(\vec{x} \mid \vec{x}) = 6S(\vec{x})^2 \geq 0$, pero $\vec{x} = (1, -1, 0, 0) \neq \vec{0}$ da $6 \cdot 0^2 = 0$. No se cumple.
5. No es un producto interno.

**Ejercicio 4.6.2** ← volver

1. Base de $W$: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son ortogonales entre sí; $(E_1 \mid E_1) = (E_3 \mid E_3) = 1$ y $(E_2 \mid E_2) = 2$.
2. $(B \mid E_1) = 1$, $(B \mid E_2) = 1 + 0 = 1$, $(B \mid E_3) = -1$.
3. $\operatorname{proy}_W B = 1\,E_1 + \frac{1}{2}E_2 - 1\,E_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.





## 5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

**Ejercicio 5.5.1 · Descomposición espectral de un operador simétrico en $\mathbb{R}^2$**

*Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 6.*

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla $S(x, y) = (4x + y,\ x + 4y)$. Obtenga la descomposición espectral de $S$.

**Resolución.**

1. $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica: hay descomposición espectral.
2. $\det(M - \lambda I) = (4 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$. Valores propios: 5 y 3.
3. $\lambda = 5$: $-x + y = 0$, vector $(1, 1)$, unitario $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = 3$: $x + y = 0$, vector $(1, -1)$, unitario $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Son ortogonales.
4. Proyecciones: $P_1 = \hat{e}_1\hat{e}_1^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P_2 = \hat{e}_2\hat{e}_2^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobación: $P_1 + P_2 = I$.
5. En forma de regla: $P_1(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$ y $P_2(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$.
6. **Resultado:** $S = 5P_1 + 3P_2$, es decir,
$$S(x, y) = 5\left(\tfrac{x+y}{2}, \tfrac{x+y}{2}\right) + 3\left(\tfrac{x-y}{2}, \tfrac{y-x}{2}\right).$$
Comprobación: la primera componente es $\frac{5x+5y+3x-3y}{2} = 4x + y$.

**Ejercicio 5.5.2 · Adjunto y normalidad en $\mathbb{C}^2$**

*Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 6.*

Sean el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2}$ y el operador lineal $S:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla $S(x, y) = (xi,\ 2iy)$.

- a) Obtenga el adjunto de $S$.
- b) Determine si $S$ es normal.

**Resolución.**

1. a) $M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$. Al transponer no cambia; al conjugar, $i \to -i$: $M^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$. Entonces $S^*(x, y) = (-ix,\ -2iy)$.
2. Comprobación con la definición: $(S(\vec{u}) \mid \vec{v}) = iu_1\overline{v_1} + 2iu_2\overline{v_2}$ y $(\vec{u} \mid S^*(\vec{v})) = u_1\overline{(-iv_1)} + u_2\overline{(-2iv_2)} = iu_1\overline{v_1} + 2iu_2\overline{v_2}$. Coinciden.
3. b) $MM^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = M^*M$: las matrices diagonales conmutan.
4. **Resultado:** $S^*(x, y) = (-ix,\ -2iy)$; $S$ es normal. Además $S^* = -S$: $S$ es antihermitiano.

**Ejercicio 5.5.3 · ¿Es normal? y la norma de $T^*(\vec{v})$**

*Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 7.*

Sea el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla $T(x, y) = (2x + iy,\ y - ix)$.

- a) Determine si $T$ es normal respecto al producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

2. a) $T\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \frac{a}{3}(2x-4) + \left(b + \frac{a}{3}\right)(4x-2) = (2a+4b)x + (-2a-2b)$.
3. Comprobación: con $a=3$, $b=-1$: $(6-4)x + (-6+2) = 2x-4$.
4. b) $2a+4b=0$ y $-2a-2b=0$ dan $b=0$ y $a=0$: $N(T)=\{0\}$ y $\dim T(M) = 2-0=2$.

**Ejercicio 3A.6.2** ← volver

1. Las imágenes de la base $\{x+1,\ 2x-1\}$ de $P$ son la base natural de $M$, así que $T$ es biyectiva y $T^{-1}$ manda cada matriz de esa base al polinomio correspondiente.
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a(x+1) + b(2x-1) = (a+2b)x + (a-b)$.
4. Comprobación: con $a=1$, $b=0$ da $x+1$; con $a=0$, $b=1$ da $2x-1$.

**Ejercicio 3A.6.3** ← volver

1. Las imágenes $x^2+x+1$, $x^2+1$ y $x^2$ son linealmente independientes (de la última se obtiene $x^2$; restando, 1 y luego $x$), así que $T$ es biyectiva.
2. $x^2 = T(1,1,1)$; $1 = (x^2+1) - x^2 = T(1,1,0) - T(1,1,1) = T(0,0,-1)$; $x = (x^2+x+1) - (x^2+1) = T(1,0,0) - T(1,1,0) = T(0,-1,0)$.
3. Entonces $T^{-1}(x^2) = (1,1,1)$, $T^{-1}(x) = (0,-1,0)$, $T^{-1}(1) = (0,0,-1)$, y

$$T^{-1}(ax^2+bx+c) = a(1,1,1) + b(0,-1,0) + c(0,0,-1) = (a,\ a-b,\ a-c).$$

4. Comprobación: $T^{-1}(x^2+1) = (1,1,0)$.

**Ejercicio 3A.6.4** ← volver

1. **Superposición.** $(A+B)^T = A^T + B^T$, así que $T(A+B) = A+B-A^T-B^T = (A-A^T)+(B-B^T) = T(A)+T(B)$. Se cumple.
2. **Homogeneidad.** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, así que $T(\alpha A) = \alpha A - \alpha A^T = \alpha\, T(A)$. Se cumple.
3. $T$ es lineal. (Su núcleo son las matrices simétricas y su recorrido, las antisimétricas: $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$.)

**Ejercicio 3A.6.5** ← volver

1. a) $T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con coordenadas $(1,0,1)$; $T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $(0,1,0)$; $T(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $(-1,0,1)$. Son las columnas de $M_B^A(T)$.
2. b) Desarrollando por el segundo renglón, $\det M_B^A(T) = 1\cdot\big(1\cdot 1 - (-1)\cdot 1\big) = 2 \neq 0$: $T$ es biyectiva. Por sistema: $a-c=p$, $b=q$, $a+c=r$, de donde $a=\frac{p+r}{2}$, $b=q$, $c=\frac{r-p}{2}$.
3. $T^{-1}\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} = \frac{p+r}{2}x^2 + qx + \frac{r-p}{2}$. Comprobación: $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2$.

**Ejercicio 3A.6.6** ← volver





**Ejercicio 5.5.6 · ¿Es hermitiano?**

*Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 6.*

Determine si el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla $T(x,y) = (x-iy,\ ix+y)$ es hermitiano respecto al producto interno $((x_1,y_1)\mid(x_2,y_2)) = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2}$.

**Resolución.**

1. El producto interno es el usual, así que la base canónica es ortonormal y se puede usar la matriz.
2. $T(1,0) = (1,i)$ y $T(0,1) = (-i,1)$: $M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
3. Transpuesta: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$; conjugada: $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = M$.
4. **Resultado:** $T^* = T$: $T$ sí es hermitiano.

**Ejercicio 5.5.7 · Parámetro para que el operador sea antihermitiano**

*Adaptado de: 2º extraordinario 2023-1, problema 5.*

Determine, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{C}$ para que el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ con regla $T(a,b,c) = \big((-2+3i)b-c,\ ka-ic,\ a-ib\big)$ sea antihermitiano respecto al producto interno usual.

**Resolución.**

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & -2+3i & -1 \\ k & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$. Antihermitiano: $M^* = -M$, o sea $m_{ij} = -\overline{m_{ji}}$ para todas las entradas.
2. Diagonal: ceros, se cumple.
3. Entradas $(1,3)$ y $(3,1)$: $-1 = -\overline{1}$, se cumple. Entradas $(2,3)$ y $(3,2)$: $-i = -\overline{(-i)} = -i$, se cumple.
4. Entradas $(1,2)$ y $(2,1)$: $-2+3i = -\overline{k}$, así que $\overline{k} = 2-3i$ y $k = 2+3i$.
5. **Resultado:** $k = 2+3i$. Si se pidiera $k$ real, no existiría ningún valor.

**Ejercicio 5.5.8 · Cónica sin término mixto**

*Adaptado de: 2º final 2025-1, problema 6.*

Sea la cónica de ecuación $x^2 + xy + y^2 = 3$. Determine una ecuación de la cónica sin términos mixtos.

**Resolución.**

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$: el coeficiente de $xy$ es 1 y se reparte $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.
2. $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0$: $\lambda = \frac{3}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.
3. $\lambda = \frac{3}{2}$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. $\lambda = \frac{1}{2}$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. $P = [\,\hat{e}_1\ \hat{e}_2\,]$ tiene determinante 1: es un giro de 45°.
4. La ecuación queda $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$; al dividir entre 3, $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$.

**Ejercicio 1B.6.5** ← volver

1. Cerradura: $A + B - 3I$ es una matriz compleja de $2 \times 2$.
2. Asociatividad: $(A\#B)\#C = A + B + C - 6I = A\#(B\#C)$.
3. Idéntico: $A + E - 3I = A$ da $E = 3I$, que está en $M$.
4. Inverso: $A + A' - 3I = 3I$ da $A' = 6I - A$, que está en $M$.
5. Conmutatividad: $A + B - 3I = B + A - 3I$.
6. Es un grupo abeliano.

**Ejercicio 1B.6.6** ← volver

1. Cualquier real $u$ se escribe $\frac{u-1}{1} + 1$, así que $A = \mathbb{R}$. Con $u = \frac{x_1}{y_1} + 1$ y $v = \frac{x_2}{y_2} + 1$, la regla es $u * v = (u-1) + (v-1) + 1 = u + v - 1$.
2. Idéntico: $u + e - 1 = u$ da $e = 1$ (es decir, $\frac{0}{y} + 1$).
3. Inverso: $u + u' - 1 = 1$ da $u' = 2 - u \in \mathbb{R}$.
4. Conmutatividad: $u + v - 1 = v + u - 1$.
5. Con la cerradura y la asociatividad dadas, es un grupo abeliano.

## E.2 · Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

**Ejercicio 2.6.1** ← volver

1. a) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ generan un espacio de dimensión menor que 3 si su determinante es cero:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & k & -3 \end{pmatrix} = 1(-6+5k) - 0 + (-1)(3k-8) = 2k + 2 = 0,$$

   así que $k = -1$. Con ese valor, $(1,0,-1)$ y $(3,2,-5)$ son independientes y la dimensión es 2.
2. b) $(-1,3,-2) = \alpha(1,0,-1) + \beta(3,2,-5)$: de la segunda componente, $\beta = \frac{3}{2}$; de la primera, $\alpha = -1 - \frac{9}{2} = -\frac{11}{2}$; la tercera da $\frac{11}{2} - \frac{15}{2} = -2$. Se cumple: $\vec{w}$ **sí** pertenece.

**Ejercicio 2.6.2** ← volver

1. Coeficientes $(a,b,c)$ como renglones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3+R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1-R_2]{R_3-R_2,\ R_4+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





**Ejercicio propuesto 5.6.4**

*Adaptado de: 2º extraordinario 2021-1, problema 6.*

Dada la curva $C:\ 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 9$, exprese su ecuación sin el término mixto.

**Resultado:** $0\,x'^2 + 4y'^2 = 9$, es decir, $y' = \pm\frac{3}{2}$: dos rectas paralelas al eje $x'$ (dirección $(1,1)$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

**Ejercicio propuesto 5.6.5**

*Adaptado de: 1er final 2026-1, problema 6.*

Sean el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por $T(x,y) = \big(-2ix + (3-i)y,\ (-3-i)x - 4iy\big)$. Determine si $T$ es antihermitiano.

**Resultado:** sí: $M^* = -M$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

**Ejercicio propuesto 5.6.6**

*Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 6.*

Los valores característicos de un operador $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son $\lambda_{1,2} = 1$ y $\lambda_3 = 7$; los espacios característicos correspondientes son $E(1) = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y $E(7) = \{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Mediante la descomposición espectral de $T$, obtenga su regla de correspondencia (producto interno usual).

**Resultado:** $T(x,y,z) = (x,\ y,\ 7z)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

### 5.7 Errores frecuentes

1. **Transponer sin conjugar** en un espacio complejo. El adjunto es $\overline{M}^T$: las dos operaciones.
2. **Usar $M^*$ con un producto interno que no es el usual.** La regla «adjunto = conjugada transpuesta» solo vale en una base ortonormal respecto a ese producto.
3. **Conjugar el argumento equivocado.** Con la convención de este libro, $(\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$.
4. **Confundir los nombres:** simétrico y antisimétrico son de espacios reales; hermitiano y antihermitiano, de complejos. Un real simétrico es también hermitiano.
5. **Decir «no es normal» porque no es simétrico.** Normal se comprueba con $MM^* = M^*M$.
6. **Proyecciones con vectores sin normalizar.** $P = \hat{e}\,\overline{\hat{e}}^T$ exige $\|\hat{e}\| = 1$; con $\vec{v}$ sin normalizar, $P = \dfrac{\vec{v}\,\overline{\vec{v}}^T}{(\vec{v} \mid \vec{v})}$. En un espacio real la conjugación no cambia nada; en uno complejo es obligatoria.
7. **Olvidar la mitad del término mixto** al formar la matriz de la cónica: $xy$ con coeficiente $b$ va como $\frac{b}{2}$ en las dos posiciones.

- Speziale San Vicente, L. *Teorema de proyección*, 2.ª ed. Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002 (Plan 2010, tema 4).
- Speziale San Vicente, L. *Transformaciones lineales*. Facultad de Ingeniería, UNAM: 2007 (Plan 2010); 2002 (Plan 2016) (tema 3).
- Strang, G. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, 4.ª ed. Thomson, 2006 (Plan 2016).
- Williams, G. *Linear Algebra with Applications*. Jones and Bartlett: 5th ed., 2005 (Plan 2010); 8th ed., 2014 (Plan 2016).






# Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del libro, y la tabla de ángulos notables que usan las matrices de rotación y las cónicas.

### Unidad 1B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

- Grupo: cerradura, asociatividad, idéntico $a * e = e * a = a$, inversos $a * a' = a' * a = e$ · abeliano: además $a * b = b * a$
- Tabla: idéntico = renglón y columna que repiten los encabezados · conmutativa = simétrica · grupo: sin repetidos por renglón ni columna
- Campo $(K, \oplus, \odot)$: $(K, \oplus)$ grupo abeliano, $(K \setminus \{0\}, \odot)$ grupo abeliano, $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$
- En $\{0, 1, 2\}$ módulo 3: $-1 = 2$, $-2 = 1$, $2^{-1} = 2$
- $x * y = x + y + xy$: $x * y + 1 = (x + 1)(y + 1)$, $e = 0$, $x' = -\frac{x}{1+x}$
- $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$, $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

### Unidad 2 · Espacios vectoriales

- Subespacio: $\vec{0} \in W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W$, $\alpha\vec{u} \in W$
- $\dim \mathbb{R}^n = n$ · $\dim P_n = n + 1$ · $\dim M_{m\times n} = mn$ · $\dim \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R} = 2$
- $n$ vectores de $\mathbb{R}^n$ son base $\iff \det \neq 0$
- Vectores como renglones → escalonar → renglones no nulos = base del generado
- $(\vec{v})_B = M_B^A(\vec{v})_A \cdot (M_B^A)^{-1} = M_A^B \cdot M_C^A = M_C^B M_B^A \cdot M_B^A = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$
- rango $N$ = dim espacio renglón = dim espacio columna
- Wronskiano ( SOLO PLAN 2010 ): $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ independientes
- $\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \cdot \cos(x + \pi) = -\cos x$

### Unidad 3A · Transformaciones lineales

- Lineal: $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ y $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$ · $T(\vec{0}) = \vec{0}$
- $N(T) = \{\vec{v} \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ · $T(V) = \operatorname{gen}\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$
- $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V)$ · $\dim T(V) = \operatorname{rango} M(T)$
- Inyectiva $\iff N(T) = \{\vec{0}\}$ · biyectiva $\iff M(T)$ cuadrada con $\det \neq 0$
- $M_B^A(T)$: columna $j = (T(\vec{v}_j))_B \cdot (T(\vec{v}))_B = M_B^A(T)(\vec{v})_A$
- $M(S + T) = M(S) + M(T)$ · $M(R \circ T) = M(R)M(T)$ · $M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$
- Rotación: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ · área por $|\det M|$

### Unidad 3B · Valores y vectores propios

- $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ · $E(\lambda) = N(M - \lambda I)$ · $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$
- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr} M$ · $\prod \lambda_i = \det M$ · triangular: los valores propios están en la diagonal
- $\dim E(\lambda) = n - \operatorname{rango}(M - \lambda I)$ · $1 \leq$ m. geométrica $\leq$ m. algebraica
- Diagonalizable $\iff \sum \dim E(\lambda_i) = n$ · $n$ valores distintos $\Rightarrow$ diagonalizable
- $D = P^{-1}MP$, columnas de $P$ = vectores propios en el orden de $D$ · $M = PDP^{-1}$

### C.5 · Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

**2º extraordinario 2023-1, problema 5:** el enunciado dice que el operador va de un espacio de dimensión 2 en sí mismo, pero la regla tiene tres variables y tres componentes; el operador es de $\mathbb{C}^3$ en $\mathbb{C}^3$.





## Apéndice B · Qué vino en cada examen

↑ Volver al índice

La unidad indicada es la de este libro: 1B (grupos y campos), 2, 3A (transformaciones), 3B (valores y vectores propios), 4 y 5. Los problemas van en el orden del examen.

### B.1 Plan 2010: los 8 finales de 2010-2 a 2015-1

| Examen | Problemas (unidad del libro: tema) |
|---|---|
| 1er final 2010-2, tipo C | U2: ¿subespacio? base y dimensión (polinomios) · U2: matriz de transición en un espacio complejo · U3B: matriz asociada a partir de vectores propios · U3A: recorrido, núcleo e inversa · U4: producto interno $k\,\mathrm{tr}(AB^T)$: distancia · U4: mínimos cuadrados (parábola) · U5: operador simétrico, espacios característicos, descomposición espectral |
| 2º final 2010-2, tipo A | U2: ¿subespacio? (potencias pares) · U2: matriz de transición y coordenadas · U3A: regla de correspondencia desde imágenes; núcleo · U3B: diagonalización ($P^{-1}MP$) · U4: ¿es producto interno? · U4: ¿conjunto ortogonal? (demostración) · U5: operador normal; adjunto |
| 1er final 2014-1, tipo B | U2: ¿subespacio? · U2: espacio renglón, espacio columna y rango · U3A: suma de transformaciones con matrices asociadas · U3B: valores y espacios característicos; diagonalización · U4: base ortogonal (Gram-Schmidt), complemento, proyección · U5: adjunto; ¿normal? (en $\mathbb{C}^2$) |
| 1er final 2014-2, tipo A | U2: matriz de transición ($\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$) · U3A: regla, núcleo y recorrido · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: complemento ortogonal · U4: demostración con vectores ortogonales (Pitágoras) · U5: adjunto; ¿normal? |
| 1er final 2014-2, tipo B | U2: matriz de transición y coordenadas (en $\mathbb{C}^2$) · U3A: regla de correspondencia · U4: ¿es producto interno? · U4: vector de $W$ más cercano (proyección) · U3B: polinomio característico, diagonalización y descomposición espectral · U5: adjunto; ¿antisimétrico? |
| 2º final 2014-2, tipo A | U2: espacio generado, base, dimensión, pertenencia · U2: bases y coordenadas (transición) · U3A: ¿biyectiva? inversa · U3B: diagonalizable a partir de valores propios; regla · U4: proyección sobre un plano · U5: descomposición espectral |
| 1er final 2015-1, tipo A | U2: axiomas de espacio vectorial (operaciones no usuales) · U2: rango y espacio columna · U3A: matriz asociada e inversa · U4: producto interno complejo; desigualdad del triángulo · U4: proyección ortogonal en matrices · U5: descomposición espectral |

2. Determine si $W = \{(x, y, z) \mid 4x - y = 0,\ 5x - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo, obtenga una base y su dimensión. *Resultado:* sí; $W = \{\alpha(1, 4, 5)\}$, con base $\{(1, 4, 5)\}$ y dimensión 1 (procedimiento 2.3.2).
3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x, y, z) = (2x + 4y + z,\ -z,\ 2z)$. a) Determine una base del recorrido. b) Obtenga la dimensión del núcleo. *Resultado:* a) $\{(1, 0, 0), (1, -1, 2)\}$; b) $\dim N(T) = 1$, con $N(T) = \text{gen}\{(-2, 1, 0)\}$ (procedimiento 3A.3.3).
4. Sean $P = \{ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $T : P \to P$ con $T(ax+b) = (2a+b)x+(6a+b)$. Determine una matriz asociada, los espacios característicos, y una matriz diagonal y la base a la que está referida. *Resultado:* en la base $\{x, 1\}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; $E(4) = \{\alpha(x + 2)\}$ y $E(-1) = \{\beta(x - 3)\}$; $D = \text{diag}(4, -1)$ en la base $\{x + 2,\ x - 3\}$ (procedimientos 3B.3.4 y 3B.3.6).
5. Sean $P_2$, $W = \{ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ y el producto interno $(p \mid q) = \sum_{i=-1}^{1} p(i)q(i)$. Determine el polinomio $h \in W$ más próximo a $m(x) = x^2 + 1$. *Resuelto en el ejercicio 4.5.8.*
6. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual, sea $S$ con matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en la base canónica. a) Obtenga el adjunto de $S$. b) Determine si $S$ es normal. *Resultado:* a) $S^*(x, y) = (x + 3y,\ 2x + 4y)$; b) no: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \neq M^T M = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$ (procedimientos 5.3.1 y 5.3.2).





| Examen | Problemas (unidad del libro: tema) |
|---|---|
| 1er extraordinario 2023-1 | U2: demostrar que un conjunto es base · U3A: dimensión del núcleo · U3B: ¿diagonalizable? · U4: vector más próximo (polinomios) · U4: complemento ortogonal (matrices) · U5: adjunto |
| 2º extraordinario 2023-1 | U2: verdadero/falso (dimensión, transición, combinación lineal) · U3A: composición: ¿biyectiva? · U3B: valores y vectores propios · U4: ángulo y complemento ortogonal · U5: ¿antihermitiano? (parámetro) |
| 3er extraordinario 2023-1 | U1B: grupo abeliano · U2: bases y transición en un subespacio de matrices · U3A: transformación $P_2 \to M_2$ · U3B: valores y espacios característicos · U4: complemento ortogonal ($\text{tr}(A^T B)$) · U5: adjunto |
| 1er extraordinario 2023-2 | U2: transición entre tres bases · U2: espacio columna y rango (parámetro) · U3A: regla a partir de la matriz asociada · U3B: ¿diagonalizable? · U4: vector a distancia mínima · U5: adjunto; ¿normal? |
| 2º extraordinario 2023-2 | U2: dimensión del generado (parámetro) · U2: transición · U3A: transformación $\mathbb{R}^3 \to P_2$ · U3B: operador a partir de sus espacios característicos · U4: ángulo con base ortonormal · U4: vectores ortogonales con dos productos internos |
| 3er extraordinario 2023-2 | U2: ¿subespacio? · U2: dependencia lineal de funciones · U3A: transformación $M \to P$ · U3B: ¿diagonalizable? · U4: complemento ortogonal · U5: adjunto y tipo de operador en $\mathbb{C}^2$ |
| 1er extraordinario 2024-1 | U1B: ecuaciones en un campo finito · U2: dependencia lineal, dimensión, base · U3A: matriz asociada e inversa · U3B: diagonalizable (parámetro $k$) · U4: polinomio ortogonal y ángulo · U5: ¿hermitiano? |
| 1er final 2024-1 | U1B: ¿grupo? $x * y = x + y + xy$ · U2: bases y transición (polinomios) · U3A: transformación entre espacios de matrices · U3A: álgebra de transformaciones · U4: complemento ortogonal y base · U5: ¿simétrico? espacios característicos, descomposición espectral |
| 2º extraordinario 2024-1 | U2: vectores de las bases a partir de la transición · U2: dimensión con parámetro; base · U3A: núcleo, matriz asociada, inversa · U3B: valores propios a partir de imágenes; regla · U4: complemento ortogonal (producto interno ponderado) · U5: ¿antihermitiano? |
| 2º final 2024-1 | U2: ¿subespacio? ($y = \lvert x \rvert$) · U2: dependencia lineal de funciones · U3A: inversa y núcleo · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: vector de $W$ más cercano · U5: descomposición espectral y regla de correspondencia |

- b) Obtenga $\|T^*(1+i,\ 1-i)\|$.

**Resolución.**

1. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Transpuesta: $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$; conjugada: $M^* = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = M$.
2. $T^* = T$: $T$ es hermitiano y, por lo tanto, normal.
3. b) $T^*(1+i,\ 1-i) = T(1+i,\ 1-i) = \big(2(1+i)+i(1-i),\ (1-i)-i(1+i)\big) = (3+3i,\ 2-2i)$.
4. $\|(3+3i,\ 2-2i)\|^2 = |3+3i|^2 + |2-2i|^2 = 18+8 = 26$.
5. **Resultado:** $T$ es normal (es hermitiano); $\|T^*(1+i, 1-i)\| = \sqrt{26}$.

### Ejercicio 5.5.4 · Adjunto y ¿antisimétrico? en $\mathbb{R}^3$

*Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 6.*

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $S(x, y, z) = (2x + 3y,\ 3x + 2y,\ 5z)$.

- a) Obtenga el adjunto de $S$.
- b) Determine si $S$ es antisimétrico.

**Resolución.**

1. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M^T$. Por lo tanto $S^*(x, y, z) = (2x+3y,\ 3x+2y,\ 5z) = S(x, y, z)$.
2. b) Antisimétrico exige $S^* = -S$, es decir, $M^T = -M$, y en particular una diagonal de ceros. Aquí la diagonal es $2, 2, 5$.
3. **Resultado:** $S^* = S$; $S$ **no** es antisimétrico (es simétrico).

### Ejercicio 5.5.5 · Valores propios y descomposición espectral de una matriz singular

*Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 5.*

Sea $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada al operador $H:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica (producto interno usual). Determine: a) el polinomio característico; b) los valores característicos; c) una base de cada espacio característico; d) una matriz diagonalizadora; e) la descomposición espectral de $H$.

**Resolución.**

1. a) $\det(N - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$.
2. b) $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$. (det $N = 0$: era de esperarse un valor propio nulo.)
3. c) $\lambda = 0$: $x + 2y = 0$: base $\{(2, -1)\}$. $\lambda = 5$: $-4x + 2y = 0$: base $\{(1, 2)\}$.
4. d) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, con $P^{-1}NP = \operatorname{diag}(0, 5)$.
5. e) $N$ es simétrica. Unitarios: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. $P_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
6. **Resultado:** $H = 0\,P_1 + 5\,P_2 = 5P_2$, es decir, $H(x, y) = 5\big(\frac{x+2y}{5}\big)(1, 2) = (x+2y,\ 2x+4y)$. El término de $\lambda = 0$ no aporta nada, pero se escribe.





1. Se busca $(a, b)$ con $a - 3b = 7$, $2a + b = 7$ y $a - b = 5$.
2. Restando la primera de la tercera: $2b = -2$, $b = -1$, y $a = 5 + b = 4$.
3. La ecuación que sobra se cumple: $2(4) + (-1) = 7$. El sistema es compatible.
4. $p(x)$ **sí** pertenece al recorrido: $T(4, -1) = 7x^2 + 7x + 5$.

## E.3B · Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

### Ejercicio 3B.6.1

← volver

1. a) $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Por el segundo renglón: $\det(M - \lambda I) = (-5-\lambda)\big[(-2-\lambda)(-3-\lambda) - 6\big] = (-5-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda) = -\lambda(\lambda + 5)^2$.
3. b) $\lambda = 0$: $y = 0$ y $-2x + z = 0$: $E(0) = \operatorname{gen}\{(1, 0, 2)\}$.
4. $\lambda = -5$: $M + 5I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, de rango 1: $z = -3x$, con $x$ y $y$ libres. $E(-5) = \operatorname{gen}\{(0, 1, 0), (1, 0, -3)\}$, de dimensión 2, igual a la multiplicidad algebraica.
5. c) $D = \operatorname{diag}(0, -5, -5)$, referida a $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0), (1, 0, -3)\}$.

### Ejercicio 3B.6.2

← volver

1. En la base $\{x, 1\}$: $F(x) = x - 2$ y $F(1) = -2x + 1$, así que $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$: valores propios 3 y $-1$.
3. $\lambda = -1$: $2a - 2b = 0$, vector $(1, 1)$, es decir, $x + 1$. $\lambda = 3$: $-2a - 2b = 0$, vector $(1, -1)$, es decir, $x - 1$.
4. Comprobación: $F(x + 1) = (1 - 2)x + (1 - 2) = -(x + 1)$ y $F(x - 1) = 3x - 3 = 3(x - 1)$.
5. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $\{x + 1,\ x - 1\}$.

### Ejercicio 3B.6.3

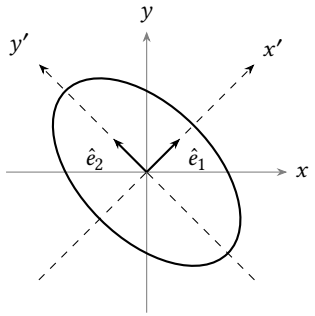
← volver

1. a) Por el tercer renglón: $\det(M - \lambda I) = (3 - \lambda)\big[(2 - \lambda)^2 - 1\big] = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)$. Valores propios: 1 y 3, este con multiplicidad algebraica 2.
2. b) $M - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, así que $\dim E(3) = 3 - 1 = 2$: $E(3) = \operatorname{gen}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Para $\lambda = 1$: $E(1) = \operatorname{gen}\{(1, -1, 0)\}$.
3. Las dimensiones suman 3: $T$ **sí** es diagonalizable. (Además $M$ es simétrica; en la Unidad 5 se verá que toda matriz real simétrica es diagonalizable.)

### Ejercicio 3B.6.4

← volver

5. **Resultado:** $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$, una elipse con semiejes $\sqrt{2}$ sobre el eje $x'$ (dirección $(1,1)$) y $\sqrt{6}$ sobre el eje $y'$ (dirección $(-1,1)$).




## 5.6 Ejercicios propuestos

### Ejercicio propuesto 5.6.1

*Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 6.*

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y la base $B = \{(1,0),(0,1)\}$. La matriz asociada al operador lineal $S:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto a $B$ es $M(S) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Obtenga la descomposición espectral de $S$.

**Resultado:** $S = 6P_1 + 1P_2$, con $P_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (sobre $\text{gen}\{(2,1)\}$) y $P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (sobre $\text{gen}\{(-1,2)\}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

### Ejercicio propuesto 5.6.2

*Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 6.*

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y el operador $S:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla $S(a,b) = (5a + 2b,\ 2a + 5b)$. Obtenga la descomposición espectral de $S$.

**Resultado:** $S = 7P_1 + 3P_2$, con $P_1(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ y $P_2(a,b) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

### Ejercicio propuesto 5.6.3

*Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 6.*

Sea la cónica de ecuación $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$. Determine una ecuación de la cónica sin término mixto.

**Resultado:** $9x'^2 - y'^2 = 9$, es decir, $x'^2 - \frac{y'^2}{9} = 1$: una hipérbola, con $x'$ en la dirección de $(1,1)$ y $y'$ en la de $(-1,1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.





2. a) Base $\{x^2 - 1,\ x + 4\}$ y $\dim W = 2$.
3. b) $\alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 4) = \alpha x^2 + \beta x + (4\beta - \alpha)$: $W = \{ax^2 + bx + c \mid c = 4b - a\}$. Comprobación: $x^2 + x + 3$ cumple $3 = 4 - 1$.

### Ejercicio 2.6.3

← volver

1. Como $A$ es la base canónica, las columnas de $M_A^B = (M_B^A)^{-1}$ son los vectores de $B$.
2. La inversa de la triangular se obtiene escalonando $\left[\, M_B^A \mid I \,\right]$: $M_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobación: $M_B^A M_A^B = I$.
3. $\vec{b}_1 = (1,0,0), \vec{b}_2 = (1,1,0), \vec{b}_3 = (1,1,1)$. Comprobación: $\hat{\jmath} = -\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, que es la segunda columna de $M_B^A$.

### Ejercicio 2.6.4

← volver

1. Identidad: $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$.
2. $2(5\tan^2 x) + 5(-2\sec^2 x) = 10(\tan^2 x - \sec^2 x) = -10$, y $-10 = 10 \cdot (-1)$. Por lo tanto,
$$2(5\tan^2 x) + 5(-2\sec^2 x) - 10(-1) = 0 \quad \text{para toda } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$$
3. Hay una combinación con coeficientes no nulos que da la función cero: el conjunto es **linealmente dependiente**.

### Ejercicio 2.6.5

← volver

1. a) $8x + 3 = \alpha(x + 3) + \beta(2x - 1)$: $\alpha + 2\beta = 8$ y $3\alpha - \beta = 3$, de donde $\alpha = 2$, $\beta = 3$.
2. $5x + 1 = \alpha(x + 3) + \beta(2x - 1)$: $\alpha + 2\beta = 5$ y $3\alpha - \beta = 1$, de donde $\alpha = 1$, $\beta = 2$.
3. Las columnas: $M_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
4. b) $(3x+2)_A = M_A^B(1,-1)^T = (2-1,\ 3-2)^T = (1,1)^T$. Comprobación: $(x+3)+(2x-1) = 3x + 2$.

### Ejercicio 2.6.6

← volver

1. Cero: $(0,0)$ cumple $0 = |0|$. Se cumple.
2. Suma: $(1,1)$ y $(-1,1)$ están en $A$, pero $(1,1) + (-1,1) = (0,2)$ no, porque $2 \neq |0|$. No se cumple.
3. Producto: $-1 \cdot (1,1) = (-1,-1)$ no está en $A$, porque $-1 \neq |-1|$. No se cumple.
4. $A$ **no** es subespacio de $\mathbb{R}^2$: la condición tiene un valor absoluto, que no es lineal.

## E.3A · Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

### Ejercicio 3A.6.1

← volver

1. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \frac{a}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left(b + \frac{a}{3}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: la entrada $(2,2)$ da $-\frac{a}{3} + b + \frac{a}{3} = b$.

8. **No comprobar.** $\sum P_i = I$ y $\sum \lambda_i P_i = M$ se verifican en una línea.

### 5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i \overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$
- $(T(\vec{u}) \mid \vec{v}) = (\vec{u} \mid T^*(\vec{v}))$ · en base ortonormal $M(T^*) = \overline{M}^T$
- Normal: $MM^* = M^*M$ · hermitiano (simétrico): $M^* = M$ · antihermitiano (antisimétrico): $M^* = -M$ · unitario (ortogonal): $M^*M = I$
- Teorema espectral: normal (simétrico, en real) $\iff$ base ortonormal de vectores propios
- $T = \sum \lambda_i P_i \cdot P_i = \sum \hat{e}\,\overline{\hat{e}}^T$ (base ortonormal de $E(\lambda_i)$) $\cdot \sum P_i = I$ · con base ortonormal de vectores propios de $V$, $T(\vec{v}) = \sum_j \mu_j (\vec{v} \mid \hat{e}_j)\hat{e}_j$
- Cónica: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$

### 5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. El producto interno y la frase «la base canónica es ortonormal respecto a él».
2. La matriz $M$, su transpuesta y su conjugada, en ese orden.
3. La regla de $T^*$ y la condición del tipo de operador con su conclusión.
4. Para la descomposición espectral: valores propios, vectores unitarios, cada $P_i$, y la comprobación $\sum P_i = I$.
5. Para la cónica: la matriz $A$ con la mitad del término mixto, los valores propios, la nueva ecuación y el nombre de la cónica.

Si no sale la descomposición completa, los valores y vectores propios unitarios bien calculados ya valen buena parte del problema.





# Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

## E.1B · Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

### Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. Cerradura: todas las entradas están en $A$. Asociatividad: dada.
2. Idéntico: el renglón y la columna de 1 repiten los encabezados; $e = 1$.
3. Inversos: 1#1 = 1, 2#3 = 1, 3#2 = 1. Todos tienen inverso.
4. Conmutatividad: la tabla es simétrica (2#3 = 1 = 3#2).
5. $(A, \#)$ es un grupo abeliano.

### Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. Cerradura: todas las entradas están en $K$. Asociatividad: dada.
2. Idéntico: el renglón de $z$ es $x, y, z, w$ y su columna también; $e = z$.
3. Inversos: $z$ aparece en el renglón de $x$ bajo $y$, en el de $y$ bajo $x$, en el de $z$ bajo $z$ y en el de $w$ bajo $w$.
4. Conmutatividad: $x\Delta y = z = y\Delta x$, $x\Delta w = y = w\Delta x$, $y\Delta w = x = w\Delta y$; la tabla es simétrica.
5. Es un grupo abeliano.

### Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. El renglón y la columna de $\mu$ son $\mu, a, b$.
2. Renglón de $a$: ya tiene $a$ (columna $\mu$) y $b$ (columna $a$); en la columna $b$ solo queda $\mu$. Por simetría, $b\,\Delta\,a = \mu$.
3. Tabla:

| $\Delta$ | $\mu$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $\mu$ |
| $b$ | $b$ | $\mu$ | $a$ |

4. b) $\mu$ es su propio inverso; $a\,\Delta\,b = \mu$, así que $a' = b$ y $b' = a$.

### Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. a) El renglón de $j$ en la tabla de $*$ es $i, j, k$: el idéntico es $j$. $i * k = j$, así que $i' = k$ y $k' = i$; $j' = j$.
2. b) En la tabla de $+$, el renglón de $k$ es $i, j, k$: el idéntico de $+$ es $k$. Como $i + j = k$, $-i = j$ y $-j = i$.
3. $-i + k = j + k = j$ y $-j + j = i + j = k$.
4. $(-j + j) * k = k * k = i$, y luego $j * i = i$.
5. El resultado es $i$.

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

**Unidad 4 · Espacios con producto interno**

- Axiomas: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \overline{(\vec{v} \mid \vec{u})} \cdot (\vec{u}+\vec{v} \mid \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{w})+(\vec{v} \mid \vec{w}) \cdot (\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (\vec{v} \mid \vec{v}) > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$
- Usual en $\mathbb{C}^n$: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i\overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (A \mid B) = \operatorname{tr}(A^T B)$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} \mid \vec{v})} \cdot d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \cdot |(\vec{u} \mid \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- Gram-Schmidt: $\vec{e}_k = \vec{v}_k - \sum_{i<k} \frac{(\vec{v}_k|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$
- $W^\perp = \{\vec{v} \mid (\vec{v} \mid \vec{w}_i) = 0\} \cdot \dim W + \dim W^\perp = \dim V$
- $\operatorname{proy}_W \vec{v} = \sum \frac{(\vec{v}|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$ (base ortogonal) · distancia mínima $= \|\vec{v} - \operatorname{proy}_W \vec{v}\|$
- Mínimos cuadrados: $A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}$

**Unidad 5 · Operadores lineales**

- $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i\overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$
- $(T(\vec{u}) \mid \vec{v}) = (\vec{u} \mid T^*(\vec{v})) \cdot$ en base ortonormal $M(T^*) = \overline{M}^T$
- Normal: $MM^* = M^*M \cdot$ hermitiano (simétrico): $M^* = M \cdot$ antihermitiano (antisimétrico): $M^* = -M \cdot$ unitario (ortogonal): $M^*M = I$
- Teorema espectral: normal (simétrico, en real) $\iff$ base ortonormal de vectores propios
- $T = \sum \lambda_i P_i \cdot P_i = \sum \hat{e}\,\bar{\hat{e}}^T$ (base ortonormal de $E(\lambda_i)) \cdot \sum P_i = I \cdot$ con base ortonormal de vectores propios de $V$, $T(\vec{v}) = \sum_j \mu_j(\vec{v} \mid \hat{e}_j)\hat{e}_j$
- Cónica: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$

**Ángulos notables**

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen}\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Matriz de rotación por un ángulo $\theta$ en sentido antihorario: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.





# Apéndice D · Fuentes y bibliografía

↑ Volver al índice

**Exámenes de los que se adaptaron los ejercicios** (Facultad de Ingeniería, UNAM):

- **Plan 2010.** Primeros exámenes finales de *Álgebra Lineal* de 2010-2, 2014-1, 2014-2 (tipos A y B) y 2015-1 (tipos A y C); segundos exámenes finales de 2010-2 y 2014-2.
- **Plan 2016, finales.** Primeros finales de 2017-1, 2018-1, 2020-1 (tipos A y C), 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2 y 2026-1; segundos finales de 2017-1, 2020-1, 2024-1 y 2025-1.
- **Plan 2016, extraordinarios.** 2020-1; 2021-1; 2023-1 (primero, segundo y tercero); 2023-2 (primero, segundo y tercero); 2024-1 (primero, segundo y tercero); 2024-2 (primero y segundo); 2025-1; 2025-2; 2026-1 (primero y tercero). El primer extraordinario 2024-1 incluye su resolución.
- **Plan 2016, parciales.** Primeros parciales de 2024-2 y 2026-1; segundos parciales de 2024-2, 2025-1 y 2025-2.

**Programas de la asignatura:**

- *Álgebra Lineal*, clave 0062, plan de estudios 2010 (aprobado el 19 de noviembre de 2008). Facultad de Ingeniería, UNAM.
- *Álgebra Lineal*, clave 1220, plan de estudios 2016. Facultad de Ingeniería, UNAM.

**Bibliografía de los dos programas** (cuando un título aparece en los dos, se indican ambas ediciones):


- Anton, H. *Introducción al álgebra lineal.* Limusa: 3.ª ed., 2003 (Plan 2010); Limusa Wiley, 5.ª ed., 2011 (Plan 2016).
- Arzamendi Pérez, S. R., et al. *Cuaderno de ejercicios de álgebra.* Facultad de Ingeniería, UNAM, 2011 (Plan 2016, tema 1).
- Ayres, F. *Álgebra moderna.* McGraw-Hill, 1991 (Plan 2010).
- Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. Fondo de Cultura Económica, 1995 (Plan 2010, tema 1).
- Cárdenas, H., et al. *Álgebra superior*, 2.ª ed. Trillas, 1990 (Plan 2010).
- Godínez Cabrera, H.; Herrera Camacho, A. *Álgebra lineal: teoría y ejercicios.* Facultad de Ingeniería, UNAM: 1987 (Plan 2010); 2005 (Plan 2016).
- Grossman, S. I. *Álgebra lineal.* McGraw-Hill: 5.ª ed., 1996 (Plan 2010); con J. J. Flores G., 7.ª ed., 2012 (Plan 2016).
- Larson, R.; Falvo, D. C. *Fundamentos de álgebra lineal*, 6.ª ed. Cengage Learning, 2010 (Plan 2016).
- Lay, D. C. *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Prentice Hall, 3.ª ed., 2007 (Plan 2010); Pearson, 4.ª ed., 2012 (Plan 2016).
- Nakos, G.; Joyner, D. *Álgebra lineal con aplicaciones.* Thomson, 1999 (Plan 2010).
- Poole, D. *Álgebra lineal*, 2.ª ed. Thomson, 2006 (Plan 2010). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*, 2.ª ed. Cengage Learning, 2011 (Plan 2016).
- Solar G., E.; Speziale de G., L. *Apuntes de álgebra lineal*, 3.ª ed. Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1996 (Plan 2010).
- Speziale San Vicente, L. *Espacios con producto interno.* Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009 (Plan 2016, tema 4).

| Examen | Problemas (unidad del libro: tema) |
|---|---|
| 1er final 2015-1, tipo C | U2: axiomas de espacio vectorial · U2: matriz de transición (funciones $xe^x$, $e^x$) · U3A: núcleo con parámetro; recorrido · U3A: inversa · U4: ¿es producto interno? (espacio complejo) · U5: descomposición espectral |

### B.2 Plan 2016: los 29 finales y extraordinarios de 2017-1 a 2026-1

El 2º final 2024-1 y el 3er extraordinario 2024-1 fueron el mismo examen; aparece una vez, como 2º final. Los parciales (2024-2 a 2026-1) cubren solo media materia y no se incluyen.

| Examen | Problemas (unidad del libro: tema) |
|---|---|
| 1er final 2017-1, tipo B | U1B: grupo abeliano por tabla · U2: ¿subespacio? (polinomios) · U3B: matriz asociada, espacios característicos, ¿diagonalizable? · U4: ¿es producto interno? (matrices) · U4: base ortonormal (Gram-Schmidt) · U5: adjunto |
| 2º final 2017-1 | U1B: operación en matrices · U2: bases y coordenadas (transición) · U3A: núcleo y recorrido · U4: proyección sobre un plano · U5: ¿simétrico? · U5: formas cuádricas: cónica sin término mixto |
| 1er final 2018-1, tipo D | U1B: grupo abeliano · U2: ¿subespacio? (matrices) · U3A: inversa y composición · U3B: valores y espacios propios; matriz diagonal · U4: componentes en $W$ y mínima distancia · U5: tipo de operador en $\mathbb{C}^2$ con producto interno dado |
| 1er extraordinario 2020-1 | U2: pertenencia al espacio renglón · U3A: núcleo, recorrido e inversa · U3B: valor y vectores característicos · U4: ¿es producto interno? norma · U4: base ortogonal y proyección · U5: adjunto; ¿normal? |
| 1er final 2020-1, tipo A | U1B: completar tabla de grupo abeliano · U2: matriz de transición entre tres bases · U3A: álgebra de transformaciones ($2T \circ T - T + 3I$) · U3B: espacios característicos · U4: Gram-Schmidt · U5: adjunto |
| 1er final 2020-1, tipo C | U1B: idéntico e inversos por tabla · U2: relacionar columnas (independencia, base, dimensión) · U2: matriz de transición en $\mathbb{C}^2$ · U3B: espacios característicos · U4: complemento ortogonal y vector más cercano · U5: ¿normal? |
| 2º final 2020-1 | U1B: ¿grupo? matrices de rotación · U2: base del generado; pertenencia · U3A: núcleo, recorrido, matriz asociada · U3B: valores y espacios característicos; diagonalizar · U4: vector más cercano · U5: ¿simétrico? |
| 2º extraordinario 2021-1 | U1B: inversos · U2: ¿bases? · U2: coordenadas y transición · U3B: valores y espacios característicos; ¿diagonalizable? · U4: proyección ortogonal · U5: cónica sin término mixto |





## Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Diferencias entre la única resolución publicada de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno, y erratas en los enunciados.

### C.1B · Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

**2º extraordinario 2021-1, problema 1:** en la tabla de + del enunciado, el renglón de $k$ dice $k + i = j$, pero la columna de $k$ dice $i + k = i$: la tabla no es simétrica y $k$ no sería idéntico. Aquí se toma $k + i = i$, con lo que + es conmutativa y $k$ es su idéntico; el inciso b) lo necesita, porque usa los inversos $-i$ y $-j$ respecto a +.

### C.2 · Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

Sin erratas registradas en esta unidad.

### C.3A · Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

**1er final 2014-1, tipo B, problema 3:** el enunciado define $T$ y $S$ de $\mathbb{R}^2$ en $P_2$, pero la base $A$ del dominio tiene tres vectores de $\mathbb{R}^3$; el dominio es $\mathbb{R}^3$.

**1er final 2024-1, problema 3:** en el enunciado publicado, las matrices de $M$, de $N$ y de la regla aparecen escritas en un solo renglón, por ejemplo ($a\ b\ c\ d$), y la regla dice «$T = (\dots) = (\dots)$». Aquí se leen como matrices de $2 \times 2$ por renglones; así la imagen es simétrica, como deben ser los elementos de $N$.

### C.3B · Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

**1er final 2014-2, tipo A, problema 3:** el enunciado dice $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pero la regla tiene tres variables; el operador es de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

**2º extraordinario 2023-2, problema 4:** el enunciado nombra $E(1)$ al espacio generado por $(1, -3)$, pero la matriz diagonal dada tiene los valores $-1$ y 2. Aquí se toma $E(-1)$, de acuerdo con $D$.

**1er extraordinario 2024-1, problema 4 (resolución publicada):** en el paso 4, el sistema del espacio propio de $\lambda = 1$ aparece como $-2a - 2b + 5 = 0$; la ecuación correcta es $-2a + 2b + 5c = 0$. El espacio propio final que se da, $\{(k_1, k_2, \frac{2}{5}(k_1 - k_2))\}$, sí es correcto. En el paso 9 se dice que «la dimensión del espacio propio es tres»: lo que suma tres son las dimensiones de los dos espacios propios.

### C.4 · Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección

Sin erratas registradas en esta unidad.

| Examen | Problemas (unidad del libro: tema) |
|---|---|
| 1er extraordinario 2024-2 | U2: ¿subespacio? (funciones) · U2: transición (polinomios) · U3A: núcleo y recorrido · U3B: espacio característico; diagonalizar · U4: Gram-Schmidt (producto interno ponderado) · U5: descomposición espectral |
| 1er final 2024-2 | U1B: grupo abeliano por tabla · U2: transición (polinomios complejos) · U3A: recorrido, base y dimensión; núcleo · U3A: álgebra de transformaciones · U4: base ortogonal, complemento, coordenadas · U5: vectores característicos y descomposición espectral |
| 2º extraordinario 2024-2 | U2: ¿subespacio? · U2: independencia lineal (parámetro) · U3A: ¿es lineal? ($2p'' - 3p'$) · U3B: valores y vectores característicos; diagonalizar · U4: complemento ortogonal ($\text{tr}(AB^T)$) · U5: tipo de operador a partir de su matriz |
| 1er extraordinario 2025-1 | U1B: (2 reactivos) · U2: (5 reactivos: subespacio, generador, combinación lineal, transición, espacio renglón) · U3A y U3B: (6 reactivos: transformación, matriz asociada de $2T^{-1}$, imagen con vectores propios, inversa, álgebra de transformaciones, diagonalización) · U4: (4 reactivos: complemento, funciones ortogonales, norma en $\mathbb{C}^3$, base de $W$) · U5: (3 reactivos: tipo de operador, parámetro, clasificar una matriz) (20 reactivos) |
| 1er final 2025-1 | U1B: composición de funciones · U2: dimensión con parámetro; base · U3A: regla de correspondencia a partir de imágenes · U4: complemento ortogonal · U5: descomposición espectral |
| 2º final 2025-1 | U2: dimensión del generado con parámetro · U2: bases y transición en $\mathbb{C}^2$ · U3A: inversa · U3B: matriz asociada y valores propios · U4: distancia con producto interno complejo · U5: formas cuádricas: cónica sin términos mixtos |
| 1er extraordinario 2025-2 | U1B: cerradura · U2: ¿es base? · U3A: ¿pertenece al recorrido? · U3B: valores y vectores propios · U4: complemento ortogonal (producto interno ponderado) · U5: operador simétrico: descomposición espectral |
| 1er final 2025-2 | U1B: grupo abeliano · U2: ¿subespacio? base y dimensión · U3A: base del recorrido; núcleo · U3B: matriz asociada; diagonalización · U4: polinomio más próximo · U5: adjunto y tipo de operador |
| 1er extraordinario 2026-1 | U1B: completar tabla de grupo abeliano · U2: base y dimensión · U3A: núcleo y dimensión del recorrido · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: complemento ortogonal en $P_2$ (producto interno por evaluación) · U5: ¿normal? |





| Examen | Problemas (unidad del libro: tema) |
|---|---|
| 1er final 2026-1 | U1B: grupo abeliano por tabla · U2: vectores de una base a partir de la transición · U3A: núcleo, dimensión · U3B: matriz diagonal · U4: complemento ortogonal · U5: tipo de operador en $\mathbb{C}^2$ |
| 3er extraordinario 2026-1 | U2: espacio generado y dimensión (matrices) · U2: coordenadas con transición · U3A: $T(A) = A - A^T$ · U3B: valores y espacios propios · U4: Gram-Schmidt en $P_2$ con producto interno integral · U5: ¿normal? (en $\mathbb{C}^2$) |

### B.3 Dos exámenes completos para practicar

Resuelve cada examen en 2 horas, sin consultar, y después compara. Al final de cada problema se indica dónde está resuelto en este libro o, si no lo está, el resultado y el procedimiento que lo resuelve.

*Plan 2010: 1er final 2014-1, tipo B (6 problemas, 2 horas)*

1. Sean el espacio vectorial real $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $D = \{p(x) \mid p(0) = 3\}$ un subconjunto de $P_2$. Determine si $D$ es un subespacio de $P_2$. *Resultado:* no lo es; el polinomio cero no está en $D$, porque $0 \neq 3$ (procedimiento 2.3.2).
2. El espacio renglón de $N = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ 3 & b & 5 \\ 5 & c & 3 \end{pmatrix}$ es $\{(m, n, m+n) \mid m, n \in \mathbb{R}\}$. a) Determine $a$, $b$ y $c$. b) Con esos valores, determine el espacio columna de $N$. c) Obtenga el rango de $N$. *Resuelto en el ejercicio 2.5.3.*
3. Sean $P_2$ y las transformaciones lineales $T, S : \mathbb{R}^3 \to P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a las bases $A = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B = \{1, x, x^2\}$ son $M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M_B^A(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenga la regla de correspondencia de $S + T$. *Resuelto en el ejercicio 3A.5.3.*
4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $F(x, y) = (4x - 5y,\ 2x - 3y)$. Determine una matriz asociada, los valores y espacios característicos, una matriz diagonal y una diagonalizadora. *Resuelto en el ejemplo de la sección 3B.4.*
5. En $\mathbb{R}^3$ con $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$, sea $W$ con base $\{(1,0,1), (0,1,-1)\}$. Determine una base ortogonal de $W$, el complemento ortogonal de $W$ y la proyección de $\vec{u} = (1,1,1)$ sobre $W$. *Resuelto en el ejercicio 4.5.6.*
6. En $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual, sea $S(x, y) = (xi,\ 2iy)$. Obtenga el adjunto de $S$ y determine si $S$ es normal. *Resuelto en el ejercicio 5.5.2.*

*Plan 2016: 1er final 2025-2 (6 problemas, 2 horas)*

1. Para el conjunto $B = \{e^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ y la operación $e^{x_1} * e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$, determine si $(B, *)$ es un grupo abeliano. *Resultado:* sí; el idéntico es $e^0 = 1$ y el inverso de $e^x$ es $e^{-x}$ (procedimiento 1B.3.3).