CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Álgebra Lineal

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.3.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué plan es el tuyo y qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Introducción al álgebra lineal (solo Plan 2010) 11

Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016) 13

Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición 23

Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa 35

Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización 47

Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección 58

Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral 69

Apéndice A · Formulario 79

Apéndice B · Qué vino en cada examen 81

Apéndice C · Fe de erratas 87

Apéndice D · Fuentes y bibliografía 89

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 91

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Álgebra Lineal** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o tras varias semanas sin estudiar la materia. Sirve para los **dos planes de estudio** en que se imparte la asignatura: el Plan 2010 y el Plan 2016. La Unidad 0 explica cómo saber cuál es el tuyo y qué partes del libro te tocan.

Sigue el orden de los temas del programa:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen, qué plan es el tuyo y lo que se usa de Álgebra.
1. Parte A: Introducción al álgebra lineal (solo Plan 2010). Parte B: Grupos y campos (solo Plan 2016).
2. Espacios vectoriales.
3. Transformaciones lineales. Parte A: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa. Parte B: valores y vectores propios; diagonalización.
4. Espacios con producto interno.
5. Operadores lineales en espacios con producto interno.

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa). El alumno analizará los conceptos básicos del álgebra lineal, ejemplificándolos mediante sistemas ya conocidos, haciendo énfasis en el carácter general de los resultados, a efecto de que adquiera elementos que le permitan fundamentar diversos métodos empleados en la resolución de problemas de ingeniería. (El programa del Plan 2016 dice «sistemas algebraicos ya conocidos»; el resto es igual.)

De dónde salen los ejercicios.

- Del **Plan 2010**: los 8 exámenes finales de Álgebra Lineal que se conservan, de 2010-2 a 2015-1.
- Del **Plan 2016**: 13 finales, 16 extraordinarios y 5 parciales, de 2017-1 a 2026-1.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Las resoluciones son propias y todas se verificaron con un sistema de álgebra computacional. Solo uno de esos exámenes tiene una resolución publicada; las diferencias con ella, y las erratas de los enunciados, se anotan en el Apéndice C (Fe de erratas).

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: a qué plan corresponde (si es de uno solo), cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos.**

7. **Ejercicios propuestos**, solo con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Marcas de plan. Las unidades que pertenecen a un solo plan lo dicen en el título, «(solo Plan 2010)» o «(solo Plan 2016)». Dentro de una unidad común, un párrafo que solo pide un plan lleva el rótulo SOLO PLAN 2010. Si no es tu plan, sáltalo.

Material necesario: lápiz y papel. Todas las cuentas del cuaderno se hacen a mano, con fracciones; conviene trabajar así, sin redondear.

Rutas de estudio. La Unidad 0 trae una ruta de 5 semanas y una de 2 semanas para cada plan. En las dos, la Unidad 3B (valores y vectores propios) va primero, porque es lo que más sale y lo que más se reutiliza.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué plan es el tuyo y qué viene en el examen

↑ Volver al índice

> **Instrucciones de emergencia**
>
> - **Tiempo:** 30 minutos para las secciones 0.1 a 0.5. El repaso de Álgebra (0.6) se usa como consulta.
> - **Para qué:** saber qué unidades te tocan y dónde invertir el tiempo. No todos los temas valen lo mismo.

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

La asignatura se imparte con dos programas. Tu historia académica dice cuál es el tuyo; busca el número de Álgebra Lineal: **0062** es el Plan 2010 y **1220** es el Plan 2016. Si no la tienes a mano: en general, quien ingresó antes de que entrara en vigor el Plan 2016 sigue en el Plan 2010.

	Plan 2010 (clave 0062)	Plan 2016 (clave 1220)
Estudia	2, 3A, 3B, 4 y 5; la 1A solo se lee	1B, 2, 3A, 3B, 4 y 5
No estudies	1B (en tu plan es de Álgebra)	1A
Párrafos con rótulo SOLO PLAN 2010	sí	sáltalos
El examen trae (6 problemas, 2 horas)	1 o 2 de espacios vectoriales, 2 de transformaciones (uno de valores propios), 1 o 2 de producto interno y 1 de operadores	lo mismo y, casi siempre, un problema 1 de grupos y campos (de 10 a 16 puntos)

Las diferencias entre los dos programas son pocas. El Plan 2016 cambió la Unidad 1 (de la historia del álgebra lineal a grupos y campos) y quitó el criterio del wronskiano y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Todo lo demás es igual: los temas 2 a 5 coinciden subtema por subtema. Por eso, desde 2016 solo se publican exámenes del Plan 2016, y esos exámenes son también la mejor referencia reciente para el Plan 2010.

Si tu clave no aparece en la programación de exámenes extraordinarios, pide que se dé de alta antes del periodo de aclaraciones.

0.2 Cómo es el examen

Según los 8 finales del Plan 2010 (2010-2 a 2015-1) y los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016 (2017-1 a 2026-1):

- **Duración y problemas:** 6 problemas en 2 horas. Los finales de 2010-2 tenían 7 problemas en 2.5 horas; el 1er final 2025-1 y el 2º extraordinario 2023-1 traen 5.

- **Plantilla fija:** los problemas van en el orden del programa. En el Plan 2016 casi siempre abre un problema de grupos y campos, de 10 a 16 puntos; los demás valen de 10 a 20 puntos y suman 100.
- **Una excepción:** el 1er extraordinario 2025-1 fue de 20 reactivos de opción múltiple con justificación. Los temas fueron los mismos.
- **Estilo de los enunciados:** el espacio se da con su regla, $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$; las transformaciones, con su «regla de correspondencia»; se piden «valores y espacios característicos», «la matriz asociada respecto a las bases A y B», «la descomposición espectral». Las respuestas se justifican: «¿es subespacio?» se contesta condición por condición.
- **Sin calculadora:** todas las cuentas salen con fracciones pequeñas.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Número de exámenes en que aparece cada unidad (cada problema cuenta en su tema principal):

Unidad	Tema	Plan 2010 (8 finales)	Plan 2016 (29 finales y extraord.)
1A	Introducción (historia y aplicaciones)	0	—
1B	Grupos y campos	—	**17**
2	Espacios vectoriales	**8**	**29**
3A	Transformaciones: núcleo, recorrido, matriz asociada, inversa	**8**	**27**
3B	Valores y vectores propios; diagonalización	**6**	**25**
4	Espacios con producto interno	**8**	**29**
5	Operadores: adjunto, tipos, descomposición espectral	**8**	**28**

Observaciones:

- Las unidades 2 a 5 salen en prácticamente todos los exámenes de los dos planes: el examen es una plantilla.
- Los subtemas que más se repiten son la matriz de transición y las coordenadas (6 de 8 finales del Plan 2010), los valores propios, el complemento ortogonal con la proyección, el adjunto con el tipo de operador, y la descomposición espectral (5 de 8 en el Plan 2010).
- Casi no se evalúan: la historia (1A), los efectos geométricos de las transformaciones, el criterio del wronskiano y la desigualdad de Cauchy-Schwarz por nombre. Los mínimos cuadrados salieron una sola vez (2010-2).
- **Los problemas se reciclan:** los mismos planteamientos vuelven con otros números. Resolver exámenes anteriores es la mejor preparación.

0.4 Orden de estudio y rutas

El libro sigue el orden del programa, pero conviene estudiarlo en otro orden. La Unidad 3B va primero: es el subtema más frecuente y la Unidad 5 y las cónicas lo reutilizan.

Ruta de 5 semanas (unas 10 horas por semana):

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	0 (repaso de Álgebra) y 3B	0 (repaso de Álgebra), 1B y 3B
2	2	2
3	3A	3A
4	4	4
5	5 y un examen completo del Apéndice B (Plan 2010)	5 (con formas cuádricas) y un examen completo del Apéndice B (Plan 2016)

Ruta de 2 semanas:

- **Plan 2010.** Primera semana: 3B, 2 y 3A. Segunda semana: 4, 5 y un examen completo.
- **Plan 2016.** Primera semana: 1B, 3B, 2 y 3A. Segunda semana: 4, 5 y un examen completo. La 1B es corta y mecánica, y casi siempre es el problema 1.

Si el tiempo no alcanza, se recorta en este orden: los efectos geométricos, los mínimos cuadrados, las formas cuádricas (solo si tu plan es el 2010: en el Plan 2016 salen más) y la demostración de que un conjunto es ortogonal. No conviene recortar la matriz de transición, los valores propios, la proyección ni el adjunto.

0.5 Notación de este cuaderno

- **Vectores con flecha:** $\vec{u}$, $\vec{v}$. En los exámenes los vectores llevan barra ($\bar{u}$); aquí se usa la flecha para no confundirlos con el **conjugado**, que es lo único que lleva barra: $\overline{z}$, $\overline{A}$.
- **Vector de coordenadas** de $\vec{v}$ en la base B: $(\vec{v})_B$, escrito como columna.
- **Matriz de transición** de la base A a la base B: M_B^A, de modo que $(\vec{v})_B = M_B^A(\vec{v})_A$.
- **Matriz asociada** a $T : V \to W$ respecto a las bases A de V y B de W: $M_B^A(T)$. Núcleo $N(T)$, recorrido $T(V)$.
- **Producto interno:** $(\vec{u} \mid \vec{v})$. En los espacios complejos es lineal en el primer argumento y conjugado en el segundo: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i \overline{v_i}$, como en los exámenes.
- gen{… } es el espacio generado; rango A, el rango; tr A, la traza.

0.6 Lo que se usa de Álgebra

Álgebra Lineal da por sabido casi todo el curso de Álgebra. Esta sección repasa solo lo que se usa, con un procedimiento y un ejemplo corto por punto. Para lo demás, véase el cuaderno *Curso de Emergencia, Álgebra*; sus unidades 3 a 6 tienen el mismo número en los dos planes.

De Álgebra	Se usa aquí para…	Libro de Álgebra
Gauss, sistemas homogéneos, solución con parámetros	dependencia lineal, bases, núcleo, espacios característicos	Unidad 5
Matrices, transpuesta, inversa	matriz de transición, matriz asociada, $P^{-1}MP$	Unidad 6
Determinantes	polinomio característico, independencia de n vectores	Unidad 6
Raíces de polinomios, división sintética	valores propios con polinomio de grado 3	Unidad 4
Números complejos	espacios $\mathbb{C}^n$, producto interno complejo, adjunto	Unidad 3
Conjugada transpuesta; matrices simétricas, hermitianas, ortogonales, unitarias	tipos de operador (Unidad 5)	Unidad 6
Grupo y campo	definición de espacio vectorial sobre un campo	Plan 2010: Unidad 7. Plan 2016: Unidad 1B de este libro
Seno y coseno de ángulos notables	matrices de rotación, cónicas	Plan 2016: Unidad 1, Parte B. Plan 2010: Apéndice A de este libro

0.6.1 Sistemas homogéneos por Gauss

1. Escribe la matriz de coeficientes (en un sistema homogéneo, la columna de términos independientes es de ceros y no cambia).
2. Escalona: haz ceros debajo de cada pivote con operaciones de renglón $R_i - kR_j$.
3. Cada columna sin pivote es una variable libre. Despeja las demás en términos de ellas.
4. Escribe la solución general como combinación de vectores con un parámetro por variable libre.

Ejemplo. $x + 2y - z = 0,\ 2x + 4y + z = 0,\ x + 2y + 2z = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1,\ R_3-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

El segundo renglón da $z = 0$; el primero, $x = -2y$. La variable libre es $y = \alpha$: la solución es $\{\alpha(-2, 1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, una recta. El rango es 2 y hay $3 - 2 = 1$ parámetro.

0.6.2 Inversa de una matriz

1. De 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, si $ad - bc \neq 0$.
2. De 3×3 o más: escalona $[\ A \mid I\ ]$ hasta $[\ I \mid A^{-1}\ ]$ (Gauss-Jordan).

3. Comprueba siempre $AA^{-1} = I$ con un renglón y una columna.

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$: $\det A = 6 - 5 = 1$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Comprobación del primer renglón por la primera columna: $3(2) + 1(-5) = 1$.

0.6.3 Determinantes

1. Desarrolla por el renglón o la columna con más ceros: $\det A = \sum_j a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$.
2. Propiedades útiles: un renglón de ceros, o dos renglones proporcionales, dan $\det = 0$; sumar a un renglón un múltiplo de otro no cambia el determinante; el de una matriz triangular es el producto de la diagonal.
3. $\det A \neq 0$ si y solo si A es invertible, si y solo si sus renglones (o columnas) son linealmente independientes.

Ejemplo. $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$: por el tercer renglón, $4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 4(6) = 24$.

0.6.4 Raíces de un polinomio de grado 3

1. Las posibles raíces enteras dividen al término independiente.
2. Prueba cada una; cuando una da cero, divide entre $(\lambda - r)$ con división sintética.
3. Resuelve la cuadrática que queda con la fórmula general.

Ejemplo. $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$: las candidatas son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Con $\lambda = 1$: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. División sintética de los coeficientes $1, -6, 11, -6$ entre $\lambda - 1$: quedan $1, -5, 6$ y residuo 0. Entonces $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

0.6.5 Números complejos

- $z = a + bi$, conjugado $\overline{z} = a - bi$, módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $z\overline{z} = |z|^2$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; z es real si y solo si $z = \overline{z}$, e imaginario puro si y solo si $z = -\overline{z}$.
- División: se multiplica arriba y abajo por el conjugado del denominador.

Ejemplo. $z = 2 + i$, $w = 1 - i$: $z\overline{w} = (2 + i)(1 + i) = 2 + 2i + i + i^2 = 1 + 3i$ y $|z|^2 = 4 + 1 = 5$.

0.6.6 Conjugada transpuesta y matrices especiales

- A^T: transpuesta; $\overline{A}$: conjugar cada elemento; $A^* = \overline{A}^T$: conjugada transpuesta.
- Reales: simétrica $A^T = A$; antisimétrica $A^T = -A$; ortogonal $A^T A = I$.
- Complejas: hermitiana $A^* = A$; antihermitiana $A^* = -A$; unitaria $A^* A = I$.
- La diagonal de una hermitiana es real; la de una antihermitiana es imaginaria pura.

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} = A$. Es hermitiana.

0.7 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y **reparte el tiempo según la puntuación**: unos 18 minutos por problema de 16 a 20 puntos.

2. Empieza por los que reconozcas mejor, normalmente valores propios y grupos y campos.
3. Escribe el planteamiento antes de las cuentas: la matriz que vas a escalonar, el sistema, la fórmula de la proyección. Cada inciso se califica por separado.
4. En «¿es subespacio?», «¿es producto interno?», «¿es grupo?»: condición por condición, con «se cumple» o «no se cumple» y un contraejemplo concreto.
5. Comprueba con una línea: $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $AA^{-1} = I$, $(\vec{u} \mid \vec{w}) = 0$.
6. Reserva 10 minutos al final para revisar signos y que cada resultado esté escrito con su espacio (un polinomio, una matriz o un vector, no solo coordenadas).

0.8 Formulario de emergencia

El formulario completo de todas las unidades está en el **Apéndice A**. Conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día: copiarlo es también estudiarlo.

Unidad 1 · Parte A · Introducción al álgebra lineal (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno identificará acontecimientos relevantes de la historia del álgebra lineal, y algunas de las aplicaciones del álgebra lineal en ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 la Unidad 1 es Grupos y campos (Parte B).
- **Frecuencia:** no aparece en ninguno de los 8 finales del Plan 2010.
- **Tiempo:** 10 minutos de lectura. No tiene ejercicios.

1A.1 Historia breve

- **Hace unos dos mil años**, el texto chino *Los nueve capítulos sobre el arte matemático* resolvía sistemas de ecuaciones lineales acomodando los coeficientes en un arreglo rectangular y eliminando incógnitas: el mismo método que hoy se llama de Gauss.
- **1805–1809.** Legendre y Gauss publican el método de *mínimos cuadrados* para ajustar órbitas a observaciones astronómicas; Gauss sistematiza la eliminación para resolver las ecuaciones que resultan.
- **1843–1844.** Hamilton inventa los cuaterniones y Grassmann publica su teoría de la extensión, donde aparecen por primera vez la combinación lineal, la independencia y la dimensión en general, no solo para el plano y el espacio.
- **1850–1858.** Sylvester introduce la palabra *matriz*; Cayley define el álgebra de matrices (suma, producto, inversa) y estudia lo que hoy se llama el polinomio característico.
- **1888.** Peano da la definición axiomática de *espacio vectorial* que se usa en la Unidad 2: un conjunto con dos operaciones que cumplen una lista de axiomas, sin importar si sus elementos son flechas, polinomios, matrices o funciones.
- **Siglo XX.** Hilbert y sus sucesores llevan el producto interno y la teoría espectral a espacios de funciones; con las computadoras, el álgebra lineal numérica se vuelve la herramienta de cálculo más usada en ingeniería.

1A.2 Aplicaciones en ingeniería

- **Circuitos y estructuras:** las leyes de Kirchhoff o el equilibrio de los nodos de una armadura dan sistemas lineales; su solución es un problema de núcleo y recorrido (Unidades 2 y 3A).
- **Gráficas por computadora:** rotaciones, escalamientos y reflexiones son transformaciones lineales; componerlas es multiplicar sus matrices (Unidad 3A).
- **Vibraciones y estabilidad:** las frecuencias naturales de un sistema mecánico o eléctrico son valores propios (Unidad 3B).
- **Ajuste de datos:** la recta o la parábola que mejor se ajusta a mediciones se obtiene por mínimos cuadrados, que es una proyección ortogonal (Unidad 4).
- **Búsqueda y compresión:** el orden de las páginas en un buscador se obtiene de un vector propio, y la compresión de imágenes usa bases ortogonales y la descomposición

espectral (Unidades 4 y 5).

Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

↑ Volver al índice

> **Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2016).** El alumno determinará si una función es una operación binaria y analizará las estructuras algebraicas de grupo, grupo abeliano y campo.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2016. En el Plan 2010 este tema es de Álgebra; salta a la Unidad 2.
- **Frecuencia:** aparece en 17 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016, casi siempre como problema 1, con un valor de 10 a 16 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1B.1 (15 min).
  2. Sigue el ejemplo 1B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1B.5 con cronómetro (10 min cada uno).

1B.1 Conceptos y expresiones

Operación binaria. Una *operación binaria* $*$ en un conjunto A es una regla que asigna a cada pareja ordenada (a, b) de elementos de A un único resultado $a * b$. Se dice que A es *cerrado* bajo $*$ (o que se cumple la *cerradura*) si $a * b \in A$ para todos $a, b \in A$. Si para alguna pareja el resultado no existe o cae fuera de A, la regla no es una operación binaria en A. Un conjunto con una o más operaciones se llama *sistema algebraico* y se escribe $(A, *)$.

Propiedades de una operación.

- *Asociatividad:* $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in A$.
- *Elemento idéntico:* existe $e \in A$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in A$. Si existe, es único.
- *Elementos inversos:* para cada $a \in A$ existe $a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$. En un grupo, cada elemento tiene un único inverso.
- *Conmutatividad:* $a * b = b * a$ para todos $a, b \in A$.

Grupo y grupo abeliano. $(A, *)$ es un *grupo* si cumple cerradura, asociatividad, idéntico e inversos. Si además es conmutativo, es un *grupo abeliano*. Ejemplos: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, las matrices de $m \times n$ con la suma. No son grupo: $(\mathbb{N}, +)$ (sin inversos) ni $(\mathbb{R}, \cdot)$ (el 0 no tiene inverso).

Tabla de la operación. En un conjunto finito, la operación se da con una tabla: el renglón es el primer operando y la columna el segundo. En la tabla se lee:

- *Cerradura:* todas las entradas pertenecen al conjunto.
- *Idéntico:* un elemento e cuyo renglón y cuya columna repiten los encabezados.
- *Inversos:* en el renglón de a aparece e; la columna donde aparece es el inverso de a.
- *Conmutatividad:* la tabla es simétrica respecto a la diagonal principal.
- En un grupo, cada elemento aparece exactamente una vez en cada renglón y en cada

columna.

La asociatividad no se ve en la tabla. Los exámenes casi siempre la dan por cierta («considerando que se cumple la asociatividad»); si no, se comprueba con la regla.

Campo. Un sistema $(K, \oplus, \odot)$ con dos operaciones es un *campo* si:

1. $(K, \oplus)$ es un grupo abeliano, con idéntico 0 (el cero del campo);
2. $(K \setminus \{0\}, \odot)$ es un grupo abeliano, con idéntico 1;
3. $\odot$ es distributiva sobre $\oplus$: $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Ejemplos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con la suma y el producto usuales. $\mathbb{Z}$ no es campo: el 2 no tiene inverso multiplicativo entero. El conjunto $\{0, 1, 2\}$ con la suma y el producto *módulo 3* (se toma el residuo de dividir entre 3) sí es un campo. Los campos importan en Álgebra Lineal porque los escalares de un espacio vectorial se toman de un campo (Unidad 2).

1B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determine si cumple la cerradura», «¿es una operación binaria?»	cerradura con la regla	1B.3.1
una tabla y «¿es grupo abeliano?», «elemento idéntico», «inversos»	leer la tabla	1B.3.2
una regla ($x * y = \ldots$, matrices, funciones) y «¿es grupo?»	axioma por axioma	1B.3.3
«complete la tabla para que sea grupo abeliano»	idéntico, simetría y renglones sin repetir	1B.3.4
«sabiendo que es grupo abeliano, resuelva la ecuación»	despejar con el inverso	1B.3.5
«sea el campo…», tablas de $\oplus$ y $\odot$, ecuaciones	resolver en el campo	1B.3.6

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 Cerradura

1. Toma dos elementos genéricos del conjunto, con la forma que da el enunciado (por ejemplo, (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con entradas enteras).
2. Aplica la regla y revisa que el resultado tenga la misma forma y cumpla las mismas condiciones (entradas enteras, un cero en el mismo lugar, denominador distinto de cero, $x \neq -1$…).
3. Si alguna pareja da un resultado fuera del conjunto, da ese contraejemplo con números: «No se cumple».

1B.3.2 Grupo a partir de una tabla

1. **Cerradura:** todas las entradas están en el conjunto.

2. **Idéntico:** busca el renglón que repite el encabezado de columnas; comprueba que su columna también repite el de renglones.
3. **Inversos:** en cada renglón, localiza el idéntico; el encabezado de esa columna es el inverso. Si algún renglón no tiene al idéntico, no hay grupo.
4. **Asociatividad:** si el enunciado la da por cierta, dilo. Si no, hay que probarla para todas las ternas $(a * b) * c = a * (b * c)$ o reconocer la operación (por ejemplo, la suma módulo n, que es asociativa). Comprobar unas cuantas ternas no la demuestra; en cambio, una sola terna que falle basta para decir que no se cumple.
5. **Conmutatividad:** compara la tabla con su transpuesta (simetría respecto a la diagonal).
6. Conclusión: grupo abeliano si se cumplen los cinco puntos.

1B.3.3 Grupo a partir de una regla

1. Escribe los axiomas uno por uno: cerradura, asociatividad, idéntico, inversos y, si se pide grupo abeliano, conmutatividad.
2. Para cada uno, plantea la igualdad con elementos genéricos y resuélvela. Para el idéntico, despeja e de $a * e = a$ y verifica que no dependa de a y que pertenezca al conjunto. Para el inverso, despeja a' de $a * a' = e$ y verifica que pertenezca al conjunto para **todo** a.
3. Escribe «Se cumple» o «No se cumple: contraejemplo …» en cada axioma. Un solo contraejemplo basta para negar.
4. Si el enunciado pide «todos los axiomas que no se cumplen», revisa todos aunque uno ya haya fallado.

1B.3.4 Completar la tabla de un grupo abeliano

1. Encuentra el idéntico: si $a * b = b$ para algún b dado, el candidato es a. Llena su renglón y su columna con los encabezados.
2. Usa la simetría: lo que esté en la posición (a, b) va también en (b, a).
3. Completa cada renglón y cada columna con los elementos que falten: en un grupo ninguno se repite.
4. Comprueba que en cada renglón aparezca el idéntico y que la tabla final sea simétrica.

1B.3.5 Ecuaciones en un grupo abeliano

1. Calcula el lado conocido con la regla.
2. Despeja la incógnita operando por la izquierda con el inverso: si $a * b = c$, entonces $a = c * b'$.
3. Si la regla tiene una forma escondida, úsala. Por ejemplo, $x * y = x + y + xy$ cumple $x * y + 1 = (x + 1)(y + 1)$.
4. Comprueba sustituyendo.

1B.3.6 Ecuaciones en un campo finito

1. Identifica el 0 (idéntico de $\oplus$), el 1 (idéntico de $\odot$), los inversos aditivos (en la tabla de $\oplus$, dónde aparece el 0) y los multiplicativos (en la tabla de $\odot$, dónde aparece el 1).
2. Resuelve el sistema como en los reales (sustitución o eliminación), cambiando cada resta por «sumar el inverso aditivo» y cada división por «multiplicar por el inverso multiplicativo».

3. En un campo pequeño, comprueba la solución en las dos ecuaciones; también se puede probar con todas las parejas posibles (en $\{0,1,2\}$ son 9).

1B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo B, problema 1.

Sean el conjunto $C=\{0,1,2,3\}$ y la operación binaria $\bullet$ definida por la tabla

$\bullet$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Determine: a) si la operación es conmutativa; b) si existe elemento idéntico; c) si $(C,\bullet)$ es un grupo abeliano (considere que la asociatividad se cumple).

Datos. Conjunto finito con tabla; la asociatividad se da por cierta.

Planteamiento. Leer en la tabla la simetría, el idéntico y los inversos (1B.3.2).

Resolución.

1. a) La tabla es simétrica respecto a la diagonal: $1\bullet 2=3=2\bullet 1$, $1\bullet 3=0=3\bullet 1$, $2\bullet 3=1=3\bullet 2$, y las demás parejas igual. **Es conmutativa.**
2. b) El renglón de 0 es $0,1,2,3$, igual al encabezado, y su columna también. **El idéntico es $e=0$.**
3. c) Cerradura: todas las entradas están en C. Se cumple.
4. Inversos: el 0 aparece en el renglón de 0 bajo la columna 0, en el de 1 bajo la columna 3, en el de 2 bajo la columna 2 y en el de 3 bajo la columna 1. Entonces $0'=0$, $1'=3$, $2'=2$, $3'=1$. Se cumple.
5. Asociatividad: dada por el enunciado. Conmutatividad: inciso a).
6. **Resultado:** $(C,\bullet)$ es un grupo abeliano con idéntico 0. La tabla es la suma de residuos módulo 4.

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Matrices de rotación con el producto

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 1.

Determine si el sistema $(M,*)$ es un grupo, donde

$$M=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\,\middle|\,\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

y $*$ es la multiplicación usual de matrices. Considere que la asociatividad se cumple.

Resolución. Sea $R(\theta)$ la matriz de M con ángulo θ.

1. **Cerradura.** Con las fórmulas del coseno y el seno de una suma:

$$R(\alpha)R(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)\\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{pmatrix}=R(\alpha+\beta).$$

Como $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, el producto está en M. Se cumple.
2. **Asociatividad.** Dada por el enunciado (el producto de matrices es asociativo).
3. **Idéntico.** $R(0) = I \in M$, y $R(\theta)I = IR(\theta) = R(\theta)$. Se cumple.
4. **Inversos.** $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I$, y $R(-\theta) \in M$. Se cumple: el inverso de una rotación de θ es la rotación de $-\theta$.
5. **Resultado:** $(M, *)$ **es un grupo**. Además es abeliano, porque $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta) = R(\beta)R(\alpha)$.

Ejercicio 1B.5.2 · Ecuación en el grupo $x * y = x + y + xy$

Adaptado de: 1er final 2024-1, problema 1.

Sea $S = \{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x \neq -1\}$ con la operación binaria $x * y = x + y + xy$. Sabiendo que $(S, *)$ es un grupo abeliano, obtenga el valor de a que satisface

$$a * \tfrac{7}{4} = \tfrac{1}{5} * \tfrac{7}{4} * \tfrac{3}{2}.$$

Resolución.

1. **Idéntico:** $x * e = x + e + xe = x$ da $e(1 + x) = 0$; como $x \neq -1$, $e = 0$.
2. **Inverso:** $x + x' + xx' = 0$ da $x' = -\dfrac{x}{1+x}$, que existe porque $x \neq -1$.
3. **Forma escondida:** $x * y + 1 = 1 + x + y + xy = (1 + x)(1 + y)$. Con ella:

$$\tfrac{1}{5} * \tfrac{7}{4} * \tfrac{3}{2} = \left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{11}{4}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right) - 1 = \tfrac{33}{4} - 1 = \tfrac{29}{4}.$$

4. La ecuación queda $(a + 1) \cdot \frac{11}{4} - 1 = \frac{29}{4}$, es decir, $(a + 1) \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{4}$ y $a + 1 = 3$.
5. Comprobación: $2 * \frac{7}{4} = 2 + \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{29}{4}$.
6. **Resultado:** $a = 2$.

Ejercicio 1B.5.3 · Completar la tabla de un grupo abeliano

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Complete la tabla considerando que (P, δ) es un grupo abeliano, donde $P = \{3, 2, 1, 0\}$ y δ es una operación binaria en P:

δ	3	2	1	0
3			1	
2	2	3		
1		0		2
0	0	1		

Resolución.

1. **Idéntico.** $2\,\delta\,3 = 2$ y $0\,\delta\,3 = 0$: operar con 3 deja igual. Además $3\,\delta\,1 = 1$. El idéntico es $e = 3$: su renglón y su columna son 3, 2, 1, 0.
2. **Simetría.** De $2\,\delta\,2 = 3$, $1\,\delta\,2 = 0$, $0\,\delta\,2 = 1$ y $1\,\delta\,0 = 2$ salen $2\,\delta\,1 = 0$, $2\,\delta\,0 = 1$ y $0\,\delta\,1 = 2$.
3. **Renglones sin repetir.** Al renglón de 1 le falta $1\,\delta\,1$ y solo queda el 3. Al renglón de 0 le falta $0\,\delta\,0$ y solo queda el 3.

4. **Resultado:**

δ	3	2	1	0
3	3	2	1	0
2	2	3	0	1
1	1	0	3	2
0	0	1	2	3

Cada elemento es su propio inverso. Es la única forma de completar la tabla como grupo abeliano.

Ejercicio 1B.5.4 · Sistema de ecuaciones en el campo $\{0, 1, 2\}$

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 1.

Sea el campo formado por $\mathbb{F} = \{0, 1, 2\}$ con la suma $\oplus$ y la multiplicación $\odot$ definidas por

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

El idéntico de $\oplus$ es 0 y el de $\odot$ es 1. Encuentre $x, y \in \mathbb{F}$ que satisfacen

$$(2 \odot x) \oplus (1 \odot y) = 1, \qquad x \oplus y = 0.$$

Resolución.

1. Inversos aditivos: $-0 = 0$, $-1 = 2$, $-2 = 1$. Inversos multiplicativos: $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$ (porque $2 \odot 2 = 1$).
2. De la segunda ecuación, $y = -x$. Como $1 \odot y = y$, la primera queda $(2 \odot x) \oplus (-x) = 1$.
3. Por distributividad, $(2 \odot x) \oplus (-x) = (2 \odot x) \oplus (2 \odot x) = (2 \oplus 2) \odot x = 1 \odot x = x$, porque $-x = 2 \odot x$ (el inverso aditivo de 1 es 2). Entonces $x = 1$.
4. $y = -1 = 2$.
5. Comprobación: $(2 \odot 1) \oplus (1 \odot 2) = 2 \oplus 2 = 1$ y $1 \oplus 2 = 0$.
6. **Resultado:** $x = 1$, $y = 2$. Coincide con la resolución publicada.

Ejercicio 1B.5.5 · Pares con producto componente a componente

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo D, problema 1.

Sea el sistema $(C, *)$, donde $C = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$. Determine si $(C, *)$ es un grupo abeliano, considerando que se cumple la asociatividad.

Resolución.

1. **Cerradura.** $ac, bd \in \mathbb{R}$. Se cumple.
2. **Asociatividad.** Dada por el enunciado.
3. **Idéntico.** $(a, b) * (e_1, e_2) = (ae_1, be_2) = (a, b)$ para todo (a, b) da $e = (1, 1)$. Se cumple.
4. **Inversos.** $(a, b) * (c, d) = (1, 1)$ exige $ac = 1$ y $bd = 1$. Para $(0, 1)$: $(0, 1) * (c, d) = (0, d) \neq (1, 1)$ para cualquier (c, d). No se cumple.

5. **Conmutatividad.** $(ac, bd) = (ca, db)$. Se cumple.
6. **Resultado:** $(C, *)$ **no es un grupo abeliano**: los pares con alguna componente cero no tienen inverso.

Ejercicio 1B.5.6 · Matrices triangulares enteras con la suma

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 1.

Dado $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ con la operación $A \ominus B = A + B$, determine si $(M, \ominus)$ es un grupo abeliano. En caso afirmativo, obtenga el inverso de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; en caso contrario, indique los axiomas que no se cumplen.

Resolución.

1. **Cerradura.** $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ 0 & c+r \end{pmatrix}$: entradas enteras y cero abajo. Se cumple.
2. **Asociatividad y conmutatividad.** Las hereda de la suma de enteros, entrada por entrada. Se cumplen.
3. **Idéntico.** La matriz cero, que está en M. Se cumple.
4. **Inversos.** $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \in M$. Se cumple.
5. **Resultado:** es un grupo abeliano, y el inverso de A es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1B.5.7 · Composición de funciones

Adaptado de: 1er final 2025-1, problema 1.

Sea $(M, \circ)$, donde $\circ$ es la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y $M = \{f, g, h\}$ con

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad g(x) = \frac{x-1}{x}, \qquad h(x) = x.$$

a) Complete la tabla de la operación (se dan $f \circ g = h$, $g \circ f = h$, $g \circ g = f$ y $h \circ h = h$). b) Considerando que la composición es asociativa, determine si $(M, \circ)$ es un grupo abeliano.

Resolución.

1. $f \circ f = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \dfrac{1-x}{-x} = \dfrac{x-1}{x} = g$.
2. h es la identidad: $h \circ p = p \circ h = p$ para $p = f, g, h$.
3. a) Tabla (renglón $\circ$ columna):

$\circ$	f	g	h
f	g	h	f
g	h	f	g
h	f	g	h

4. b) Cerradura: todas las entradas están en M. Idéntico: h. Inversos: $f \circ g = h$, así que $f' = g$, $g' = f$ y $h' = h$. Asociatividad: dada. Conmutatividad: la tabla es simétrica.

5. **Resultado:** $(M, \circ)$ **es un grupo abeliano** con idéntico h. (Las funciones se consideran donde están definidas, $x \neq 0, 1$.)

1B.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ con la operación # definida por la tabla

#	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Considerando que se cumple la asociatividad, determine si $(A, \#)$ es un grupo abeliano.

Resultado: sí; idéntico 1; inversos $1' = 1$, $2' = 3$, $3' = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: 1er final 2026-1, problema 1.

Sea $K = \{x, y, z, w\}$ con la operación Δ, que es asociativa, definida por

Δ	x	y	z	w
x	w	z	x	y
y	z	w	y	x
z	x	y	z	w
w	y	x	w	z

Determine si (K, Δ) es un grupo abeliano.

Resultado: sí; idéntico z; inversos $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$, $w' = w$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 1.

En $A = \{\mu, a, b\}$, con μ idéntico de Δ, se dan $\mu \,\Delta\, \mu = \mu$, $a \,\Delta\, a = b$ y $b \,\Delta\, b = a$. a) Complete la tabla para que (A, Δ) sea grupo abeliano. b) Obtenga los inversos.

Resultado: a) $a \,\Delta\, b = b \,\Delta\, a = \mu$ y el renglón y la columna de μ repiten los encabezados; b) $\mu' = \mu$, $a' = b$, $b' = a$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: 2º extraordinario 2021-1, problema 1.

En $A = \{i, j, k\}$ se definen las operaciones

$+$	i	j	k
i	i	k	i
j	k	j	j
k	i	j	k

$*$	i	j	k
i	k	i	j
j	i	j	k
k	j	k	i

Determine: a) el inverso de cada elemento respecto a $*$; b) el resultado de $\big((-i+k)*((-j+j)*k)\big)$, donde $-i$ y $-j$ son los inversos de i y j respecto a $+$.

Resultado: a) idéntico de $*$: j; $i'=k$, $j'=j$, $k'=i$. b) i.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 1.

Sean M el conjunto de las matrices de 2×2 con entradas complejas y la operación $A\#B = A+B-3I$, donde I es la matriz identidad de orden dos. Determine si $(M,\#)$ es un grupo abeliano.

Resultado: sí; idéntico $3I$; el inverso de A es $6I-A$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1B.6.6

Adaptado de: 1er parcial 2024-2, problema 1.

Sea $A=\left\{\frac{x}{y}+1 \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0\right\}$ con la operación

$$\left(\frac{x_1}{y_1}+1\right)*\left(\frac{x_2}{y_2}+1\right)=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+1.$$

Considerando que se cumplen la cerradura y la asociatividad, determine si $(A,*)$ es un grupo abeliano; si no, indique los axiomas que no se cumplen.

Resultado: sí; $A=\mathbb{R}$ y $u*v=u+v-1$; idéntico 1; el inverso de u es $2-u$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

1B.7 Errores frecuentes

1. **Buscar el idéntico solo en un lado.** e debe cumplir $a*e=a$ **y** $e*a=a$; en una tabla, su renglón y su columna.
2. **Un idéntico que depende de a.** Si al despejar sale $e=a$ o $e=\frac{1}{a}$, no hay idéntico: debe ser el mismo para todos.
3. **Olvidar revisar que el idéntico o el inverso pertenezcan al conjunto.** En $x*y=x+y+xy$, el inverso $-\frac{x}{1+x}$ existe solo porque $x\neq -1$.
4. **Negar con un argumento general.** Para decir «no se cumple» basta un contraejemplo concreto, como $(0,1)$, y es lo que se espera.
5. **Leer la tabla al revés.** El renglón es el primer operando: $a*b$ está en el renglón de a y la columna de b.
6. **Confundir el cero y el uno del campo con los números.** En un campo finito, «-1» es el elemento que sumado con 1 da el idéntico; en $\{0,1,2\}$ es el 2.

7. **Detenerse en el primer axioma que falla** cuando el enunciado pide «todos los axiomas que no se cumplen».

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Grupo: cerradura, asociatividad, idéntico $a * e = e * a = a$, inversos $a * a' = a' * a = e$ · abeliano: además $a * b = b * a$
- Tabla: idéntico = renglón y columna que repiten los encabezados · conmutativa = simétrica · grupo: sin repetidos por renglón ni columna
- Campo $(K, \oplus, \odot)$: $(K, \oplus)$ grupo abeliano, $(K \setminus \{0\}, \odot)$ grupo abeliano, $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$
- En $\{0, 1, 2\}$ módulo 3: $-1 = 2$, $-2 = 1$, $2^{-1} = 2$
- $x * y = x + y + xy$: $x * y + 1 = (x + 1)(y + 1)$, $e = 0$, $x' = -\frac{x}{1+x}$
- $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$, $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe la lista de axiomas que se piden (grupo o grupo abeliano) antes de empezar.
2. Para cada axioma, una línea con la igualdad planteada y «Se cumple» o «No se cumple» con su contraejemplo.
3. El idéntico y los inversos escritos explícitamente, aunque no se pidan.
4. En una tabla, la tabla completa al final y la comprobación de simetría.
5. La conclusión en una frase: «$(A, *)$ es (no es) un grupo abeliano porque…».

Si el enunciado no da la asociatividad y no se sabe probar, se dice que queda pendiente (no se supone) y se continúa con los demás axiomas: la conclusión queda condicionada, pero el resto vale la mayor parte de los puntos.

Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno identificará un espacio vectorial y analizará sus características fundamentales. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 8 finales del Plan 2010 y en los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016, casi siempre como el primer problema (el segundo, si el examen abre con grupos y campos). Muchos exámenes traen dos problemas de esta unidad.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro (15 min cada uno).

2.1 Conceptos y expresiones

Espacio vectorial. Un conjunto V con una adición $(\vec{u}+\vec{v})$ y una multiplicación por un escalar $(\alpha\vec{u})$, con escalares de un campo K ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Q}$), es un *espacio vectorial sobre K* si cumple diez axiomas, para todos $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ y $\alpha,\beta\in K$:

1. Cerradura de la adición: $\vec{u}+\vec{v}\in V$.
2. Asociatividad: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.
3. Conmutatividad: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
4. Elemento idéntico (vector cero): existe $\vec{0}\in V$ con $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.
5. Inversos aditivos: para cada $\vec{u}$ existe $-\vec{u}\in V$ con $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.
6. Cerradura de la multiplicación por un escalar: $\alpha\vec{u}\in V$.
7. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.
8. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.
9. $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$.
10. $1\,\vec{u}=\vec{u}$.

Con operaciones «no usuales» (por ejemplo, $k(a,b)=(a^k,b^k)$), el vector cero y los inversos se calculan con la operación dada, no se suponen: el cero puede no ser $(0,0)$.

Espacios que se usan en los exámenes. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$; P_n, los polinomios de grado menor o igual a n ($P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$); $M_{m\times n}$, las matrices; y espacios de funciones reales, como el generado por $\{xe^x, e^x\}$. Un mismo conjunto puede ser espacio sobre campos distintos: $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión 2 (base $\{1,i\}$), y sobre $\mathbb{C}$ tiene dimensión 1.

Subespacio. $W\subseteq V$ es un *subespacio* si es espacio vectorial con las mismas operaciones de V. Basta comprobar tres cosas:

$$\vec{0}\in W,\qquad \vec{u}+\vec{v}\in W,\qquad \alpha\vec{u}\in W \quad \text{para todos } \vec{u},\vec{v}\in W,\ \alpha\in K.$$

Los conjuntos definidos por ecuaciones **lineales y homogéneas** en las componentes ($x + 3y + 2z = 0$, $a = 3c$) siempre son subespacios. Esa es una condición suficiente, no necesaria. Una constante distinta de cero ($p(0) = 3$) deja fuera al vector cero y basta para descartar. Con un valor absoluto, un producto de componentes o una potencia, el conjunto *suele* fallar, pero no siempre: $\{(x, y) \mid x^2 = 0\}$ es el eje y y sí es subespacio. En esos casos se simplifica la condición o se comprueban el cero y las dos cerraduras, con un contraejemplo concreto si alguna falla.

Combinación lineal y espacio generado. $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ si $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$ para algunos escalares. El conjunto de todas las combinaciones lineales es el *espacio generado*, $\text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$, y siempre es un subespacio.

Dependencia lineal. $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ es *linealmente independiente* si la única solución de $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$ es $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$; si hay otra, es *dependiente*. Un conjunto que contiene al vector cero siempre es dependiente. n vectores de $\mathbb{R}^n$ son independientes si y solo si el determinante de la matriz que forman es distinto de cero.

Base y dimensión. Una *base* de V es un conjunto generador linealmente independiente. Todas las bases tienen el mismo número de vectores: la *dimensión* de V. $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim P_n = n + 1$, $\dim M_{m\times n} = mn$. En un espacio de dimensión n, n vectores independientes ya son base.

Isomorfismo. Al fijar una base, cada vector se identifica con su vector de coordenadas. Así, P_2 se comporta como $\mathbb{R}^3$ ($ax^2 + bx + c \leftrightarrow (a, b, c)$) y $M_{2\times 2}$ como $\mathbb{R}^4$: se dice que son *isomorfos*. En la práctica, un problema con polinomios o matrices se resuelve con sus coeficientes como vectores de $\mathbb{R}^n$.

Coordenadas. Si $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ es una base ordenada y $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n$, el *vector de coordenadas* de $\vec{v}$ en B es $(\vec{v})_B = (c_1, \dots, c_n)^T$. Es único.

Matriz de transición. La matriz de transición de la base A a la base B, M_B^A, tiene por columnas los vectores de coordenadas de los vectores de A en la base B. Con ella:

$$(\vec{v})_B = M_B^A\,(\vec{v})_A, \qquad \left(M_B^A\right)^{-1} = M_A^B, \qquad M_C^A = M_C^B\,M_B^A.$$

Si A es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, M_A^B tiene por columnas los vectores de B tal cual.

Espacio renglón, espacio columna y rango. Para una matriz N de $m \times n$, el *espacio renglón* es el generado por sus renglones (subespacio de $\mathbb{R}^n$) y el *espacio columna*, el generado por sus columnas (subespacio de $\mathbb{R}^m$). Los dos tienen la misma dimensión: el *rango* de N. Las operaciones elementales por renglones no cambian el espacio renglón, y los renglones no nulos de la forma escalonada son una base de él.

Funciones. Las funciones reales de variable real forman un espacio vectorial (de dimensión infinita); $\{f_1, \dots, f_n\}$ genera un subespacio de dimensión finita. Para decidir la dependencia, se busca una identidad entre las funciones o se evalúa la ecuación $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$ en varios valores de x.

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
operaciones «definidas por» reglas raras; «¿es un espacio vectorial?», «indicar todos los axiomas que no se satisfacen»	axioma por axioma	2.3.1
«determinar si W es un subespacio»	cero, suma y producto	2.3.2
«¿pertenece $\vec{v}$ a…?», «expresar como combinación lineal»	sistema consistente o no	2.3.3
«linealmente dependiente o independiente», «el valor de k para que la dimensión sea…»	rango o determinante	2.3.4
«el espacio generado», «una base y la dimensión»	escalonar y leer	2.3.4
«matriz de transición de A a B», «vector de coordenadas», «los vectores de la base F»	M_B^A y $(\vec{v})_B$	2.3.5
«espacio renglón», «espacio columna», «rango»	escalonar N o N^T	2.3.6
funciones ($\operatorname{sen} x$, e^x, $\tan^2 x$…)	identidad o evaluación	2.3.7

2.3 Procedimientos

2.3.1 ¿Es espacio vectorial? (operaciones no usuales)

1. Escribe las dos operaciones del enunciado y marca los axiomas que el enunciado ya da por ciertos: solo hay que revisar los demás.
2. Para el vector cero, plantea $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ con la suma dada y despeja $\vec{0}$; para el inverso, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
3. Para cada axioma de la multiplicación, calcula los dos lados con las reglas dadas y compáralos.
4. Si un axioma falla, da un contraejemplo con números concretos: «Con $\alpha = \beta = 1$ y $\vec{u} = (1, 1)$: $(\alpha + \beta)\vec{u} = (1, 1)$, pero $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = (2, 2)$. No se cumple».
5. Concluye: es espacio vectorial solo si se cumplen los diez axiomas. Si se piden «todos los axiomas que fallan», revisa todos aunque ya haya fallado uno.

2.3.2 ¿Es subespacio?

1. Traduce la condición del conjunto a ecuaciones en las componentes o coeficientes ($\int_{-1}^{1} p\,dx = 4p(0)$ se vuelve $\frac{2}{3}a - 2c = 0$).
2. Revisa el cero: si $\vec{0} \notin W$, termina: no es subespacio.
3. Si las ecuaciones son lineales y homogéneas, es subespacio. Demuéstralo con la cerradura de la suma y del producto: toma dos elementos genéricos, súmalos y comprueba la condición.
4. Si no, busca un contraejemplo concreto (dos vectores de W cuya suma no esté en W, o un múltiplo que salga).
5. Si se pide base y dimensión, despeja las variables dependientes y escribe el elemento

general como combinación de vectores fijos.

2.3.3 Combinación lineal y pertenencia

1. Plantea $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$ e iguala componente por componente (o coeficiente por coeficiente).
2. Escribe la matriz aumentada con los $\vec{v}_i$ como columnas y $\vec{v}$ como última columna, y escalona.
3. Si aparece un renglón $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$ con $c \neq 0$, el sistema es inconsistente: $\vec{v}$ no pertenece al generado. Si no, pertenece, y la solución da los coeficientes.
4. Atajo: si ya tienes la ecuación del generado (por ejemplo, $z = y - x$), basta sustituir $\vec{v}$ en ella.

2.3.4 Dependencia lineal, base y dimensión

1. Pon los vectores (o los coeficientes de los polinomios, o las entradas de las matrices) como **renglones** de una matriz.
2. Escalona. El número de renglones no nulos es la dimensión del generado, y esos renglones forman una base.
3. Si el número de renglones no nulos es menor que el número de vectores, el conjunto es dependiente.
4. **Con parámetro:** escalona dejando el parámetro en la última columna posible y escoge su valor para que el renglón que lo contiene se anule (dimensión menor) o no (dimensión mayor). Con n vectores de $\mathbb{R}^n$, iguala el determinante a cero.
5. Para dar el generado como conjunto, agrega un renglón genérico (x, y, z) y exige que no aumente el rango: sale la ecuación del subespacio.

2.3.5 Coordenadas y matriz de transición

1. Para M_B^A, escribe cada vector de A como combinación lineal de los vectores de B. Los coeficientes de cada uno forman una **columna**.
2. Atajo en $\mathbb{R}^n$ (o con coordenadas en una base sencilla): si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son las matrices con los vectores de cada base como columnas, $M_B^A = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Se calcula escalonando $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array}\right]$ hasta $\left[\begin{array}{c|c} I & M_B^A \end{array}\right]$.
3. Coordenadas: $(\vec{v})_B = M_B^A(\vec{v})_A$. Para pasar de B a A, usa la inversa.
4. **Base desconocida.** Si se da M_F^E y se conoce E, los vectores de F salen de $M_E^F = (M_F^E)^{-1}$: la columna j da las coordenadas de $\vec{w}_j$ en E.
5. Comprueba con un vector: reconstrúyelo con sus coordenadas en las dos bases.

2.3.6 Espacio renglón, espacio columna y rango

1. Espacio renglón: escalona N; los renglones no nulos son una base.
2. Espacio columna: escalona N^T (las columnas como renglones), o toma las columnas de N que corresponden a los pivotes de su forma escalonada.
3. Rango = número de pivotes. Si se da el rango y hay un parámetro, iguala a cero los menores que lo harían mayor.
4. Si se da el espacio renglón como conjunto, cada renglón de N debe cumplir su condición: de ahí salen los valores desconocidos.

2.3.7 Dependencia lineal de funciones

1. Simplifica cada función: $\tan 0 = 0$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$. Si una es la función cero o es múltiplo de otra, el conjunto es dependiente.
2. Si no hay identidad a la vista, plantea $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$ **para toda** x del intervalo y evalúa en n valores sencillos ($0, \frac{\pi}{2}, 1\ldots$). Si el sistema solo admite la solución cero, el conjunto es independiente.
3. Para la dependencia no basta evaluar: hay que exhibir la combinación no trivial válida para todo x.

SOLO PLAN 2010 **Criterio del wronskiano.** El programa del Plan 2010 lo menciona por nombre. Para n funciones derivables $n-1$ veces,

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Si $W(x_0) \neq 0$ para algún x_0, las funciones son linealmente independientes. Si $W \equiv 0$, el criterio no decide por sí solo; en los ejemplos de examen, buscar la identidad es más rápido. Por ejemplo, para $\{e^x, xe^x\}$: $W = e^x(e^x + xe^x) - xe^x \cdot e^x = e^{2x} \neq 0$, así que son independientes.

2.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 1.

Sea el conjunto $A = \{(2,-2,-4), (-1,2,3), (3,-2,-5), (1,0,-1)\}$. Determine:

- a) el espacio W generado por A;
- b) una base y la dimensión de W;
- c) si el vector $\vec{v} = (3,2,1)$ pertenece a W.

Datos. Cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$: al menos uno sobra.

Planteamiento. Los vectores como renglones; escalonar. Los renglones no nulos dan la base, y un renglón genérico da la ecuación de W.

Resolución.

1. Se ordena con $(1,0,-1)$ primero y se escalona:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_1]{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3+R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{\substack{R_3+R_2 \\ R_4-R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. b) Quedan dos renglones no nulos: una base de W es $\{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ y $\dim W = 2$. El conjunto A es linealmente dependiente.

3. a) Un vector de W es $\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,1)=(\alpha,\beta,\beta-\alpha)$: su tercera componente es la segunda menos la primera.

$$W=\{(x,y,z)\mid z=y-x\}.$$

   Comprobación con un vector de A: $(2,-2,-4)$ cumple $-4=-2-2$.
4. c) Para $\vec{v}=(3,2,1)$: $y-x=2-3=-1\neq 1=z$.
5. **Resultado:** W es el plano $x-y+z=0$, de dimensión 2, con base $\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$; $\vec{v}=(3,2,1)$ **no** pertenece a W.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Subespacio definido con una integral

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 1.

Sean P el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y

$$T=\left\{p(x)\in P\;\middle|\;\int_{-1}^{1}p(x)\,dx=4p(0)\right\}.$$

Determine si T es un subespacio de P. En caso afirmativo, obtenga una base y la dimensión de T; en caso negativo, explique por qué no lo es.

Resolución.

1. Con $p(x)=ax^2+bx+c$: $\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{2a}{3}+0+2c$ (la parte impar se anula) y $4p(0)=4c$.
2. La condición es $\frac{2a}{3}+2c=4c$, es decir, $a=3c$: una ecuación lineal y homogénea en los coeficientes.
3. Cero: $p=0$ cumple $0=0$. Suma: si $a_1=3c_1$ y $a_2=3c_2$, entonces $a_1+a_2=3(c_1+c_2)$; se cumple. Producto: $\alpha a_1=3(\alpha c_1)$; se cumple. T es subespacio.
4. Elemento general: $3cx^2+bx+c=b\,x+c\,(3x^2+1)$.
5. **Resultado:** T es subespacio de P, con base $\{x,\ 3x^2+1\}$ y dimensión 2. Comprobación: $\int_{-1}^{1}(3x^2+1)\,dx=2+2=4=4p(0)$.

Ejercicio 2.5.2 · Axiomas con una multiplicación por escalar no usual

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 1.

Sea $V=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ con las operaciones

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d),\qquad k(a,b)=(a^k,\ b^k),\qquad k\in\mathbb{Q}.$$

Considerando que se cumplen la cerradura de la adición, la asociatividad, la conmutatividad, $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$ y $1\vec{u}=\vec{u}$, determine si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. En caso afirmativo, obtenga $\vec{m}=\frac{1}{2}(3,5)$; en caso negativo, indique todos los axiomas que no se satisfacen.

Resolución.

1. **Vector cero:** $(a,b)+(0,0)=(a,b)$. Se cumple, con $\vec{0}=(0,0)$.
2. **Inversos:** $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$, y $-a,-b\in\mathbb{Q}$. Se cumple.
3. **Cerradura de la multiplicación:** con $k=\frac{1}{2}$ y $(2,1)$: $\frac{1}{2}(2,1)=(\sqrt{2},1)\notin V$, porque $\sqrt{2}$ no es racional. No se cumple.
4. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$**:** con $\alpha=2$, $\vec{u}=\vec{v}=(1,1)$: $2(2,2)=(4,4)$, pero $2(1,1)+2(1,1)=(1,1)+(1,1)=(2,2)$. No se cumple.
5. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$**:** con $\alpha=\beta=1,\vec{u}=(1,1)$: $2(1,1)=(1,1)$, pero $1(1,1)+1(1,1)=(2,2)$. No se cumple.
6. **Resultado:** V **no** es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. No se satisfacen la cerradura de la multiplicación por un escalar y las dos leyes distributivas. Por eso no tiene sentido calcular $\vec{m}$ (además, $\frac{1}{2}(3,5)=(\sqrt{3},\sqrt{5})$ no está en V).

Ejercicio 2.5.3 · Valores desconocidos a partir del espacio renglón

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 2.

El espacio renglón de la matriz

$$N=\begin{pmatrix}3 & a & 2\\ 3 & b & 5\\ 5 & c & 3\end{pmatrix}\quad\text{es}\quad L(N_r)=\{(m,\,n,\,m+n)\mid m,n\in\mathbb{R}\}.$$

- a) Determine los valores de a, b y c.
- b) Con esos valores, determine el espacio columna de N.
- c) Obtenga el rango de N.

Resolución.

1. a) Cada renglón está en el espacio renglón, así que su tercera componente es la suma de las dos primeras: $2=3+a$, $5=3+b$, $3=5+c$. Entonces $a=-1$, $b=2$, $c=-2$.
2. c) El espacio renglón $\{(m,n,m+n)\}$ tiene dimensión 2 (parámetros m y n), así que rango $N=2$. Comprobación: $(3,-1,2)$ y $(3,2,5)$ son independientes y $(5,-2,3)=\frac{16}{9}(3,-1,2)-\frac{1}{9}(3,2,5)$.
3. b) Las columnas de N son $(3,3,5)$, $(-1,2,-2)$ y $(2,5,3)$. Las dos primeras son independientes y el rango es 2, así que generan el espacio columna. Su ecuación sale de

$$\det\begin{pmatrix}3 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -2\\ x & y & z\end{pmatrix}=-16x+y+9z=0,\quad\text{es decir,}\quad 16x-y-9z=0.$$

4. Comprobación: $(2,5,3)$ cumple $32-5-27=0$.
5. **Resultado:** $a=-1$, $b=2$, $c=-2$; espacio columna $\{(x,y,z)\mid 16x-y-9z=0\}=\text{gen}\{(3,3,5),(-1,2,-2)\}$; rango $N=2$.

Ejercicio 2.5.4 · Matriz de transición en un espacio complejo

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 1.

Sea el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con las operaciones usuales, y sean $A=\{(1,i),(i,0)\}$ y $B=\{(2,i),(0,-i)\}$ dos bases de $\mathbb{C}^2$. Obtenga:

- a) la matriz de transición de la base A a la base B;
- b) el vector de coordenadas de $\vec{u} = (1, -2i)$ respecto a la base A.

Resolución.

1. a) Cada vector de A en la base B, con escalares complejos.
2. $(1, i) = \alpha(2, i) + \beta(0, -i)$: de la primera componente, $\alpha = \frac{1}{2}$; de la segunda, $\frac{i}{2} - i\beta = i$, así que $\beta = -\frac{1}{2}$.
3. $(i, 0) = \alpha(2, i) + \beta(0, -i)$: $\alpha = \frac{i}{2}$; $\frac{i}{2} \cdot i - i\beta = 0$, es decir, $-\frac{1}{2} = i\beta$ y $\beta = \frac{i}{2}$.
4. Las coordenadas son las columnas:

$$M_B^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

5. b) $(1, -2i) = \alpha(1, i) + \beta(i, 0)$: de la segunda componente, $\alpha i = -2i$ y $\alpha = -2$; de la primera, $-2 + i\beta = 1$, así que $\beta = \frac{3}{i} = -3i$.
6. Comprobación: $-2(1, i) - 3i(i, 0) = (-2 + 3,\ -2i) = (1, -2i)$.
7. **Resultado:** $M_B^A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$ y $(\vec{u})_A = (-2,\ -3i)^T$.

Ejercicio 2.5.5 · Vectores de una base a partir de la matriz de transición

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 2.

Sea V el espacio vectorial real que tiene las bases $E = \{x^2,\ x^2 + x,\ x^2 + x + 1\}$ y $F = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. La matriz de transición de la base E a la base F es

$$M_F^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y el vector de coordenadas de $\vec{v} \in V$ en la base F es $(\vec{v})_F = (4, -5, 7)^T$. Determine: a) los vectores de la base F; b) el vector de coordenadas de $\vec{v}$ en la base E.

Resolución.

1. Las columnas de $M_E^F = (M_F^E)^{-1}$ son las coordenadas de los $\vec{w}_j$ en E. Por escalonamiento (o porque es triangular con unos):

$$M_E^F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) $\vec{w}_1 = x^2$; $\vec{w}_2 = -x^2 + (x^2 + x) = x$; $\vec{w}_3 = -(x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = 1$. Es decir, $F = \{x^2, x, 1\}$.
3. b) $(\vec{v})_E = M_E^F(\vec{v})_F = (4 + 5,\ -5 - 7,\ 7)^T = (9, -12, 7)^T$.
4. Comprobación: con F, $\vec{v} = 4x^2 - 5x + 7$; con E, $9x^2 - 12(x^2 + x) + 7(x^2 + x + 1) = 4x^2 - 5x + 7$.
5. **Resultado:** $F = \{x^2,\ x,\ 1\}$ y $(\vec{v})_E = (9, -12, 7)^T$, con $\vec{v} = 4x^2 - 5x + 7$.

Ejercicio 2.5.6 · Dimensión de un generado de matrices con parámetro

Adaptado de: 1er final 2025-1, problema 2.

Sea W el subespacio generado por las matrices

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 4\\ 10 & a\end{pmatrix}\right\}.$$

Determine: a) el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la dimensión de W sea dos; b) una base de W con ese valor.

Resolución.

1. Cada matriz $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ se escribe como el renglón (p, q, r, s):

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ 5 & 4 & 10 & a\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-5R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & -1\\ 0 & 9 & 15 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+3\end{bmatrix}$$

2. a) La dimensión es 2 si el tercer renglón se anula: $a + 3 = 0$, es decir, $a = -3$. Con cualquier otro valor, la dimensión es 3.
3. b) Con $a = -3$, las dos primeras matrices son independientes (no son múltiplos) y la tercera es combinación de ellas: $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 10 & -3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.
4. **Resultado:** $a = -3$; una base de W es $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right\}$.

Ejercicio 2.5.7 · Dependencia lineal de funciones

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 2.

Determine si el conjunto $D = \{\operatorname{sen} x,\ \cos(x + \pi),\ \tan 0\}$ es linealmente dependiente o independiente.

Resolución.

1. Se simplifica cada elemento: $\cos(x + \pi) = -\cos x$ y $\tan 0 = 0$. El tercer elemento es la función cero.
2. Un conjunto que contiene al cero es dependiente: $0 \cdot \operatorname{sen} x + 0 \cdot \cos(x + \pi) + 1 \cdot \tan 0 = 0$ para toda x, con un coeficiente distinto de cero.
3. (Si se quitara el cero, $\{\operatorname{sen} x, -\cos x\}$ sí sería independiente: $\alpha \operatorname{sen} x - \beta \cos x = 0$ en $x = 0$ da $\beta = 0$ y en $x = \frac{\pi}{2}$ da $\alpha = 0$.)
4. **Resultado:** D es **linealmente dependiente**, porque contiene a la función cero.

2.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, problema 1.

Sea $G = \{(1,0,-1),\ (3,2,-5),\ (4,k,-3)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determine: a) el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que la dimensión del espacio generado por G sea dos; b) si $\vec{w} = (-1,3,-2)$ pertenece al espacio generado por G.

Resultado: a) $k = -1$; b) sí: $\vec{w} = -\frac{11}{2}(1,0,-1) + \frac{3}{2}(3,2,-5)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 3.

Dado el conjunto $A = \{x^2 + x + 3,\ x^2 + 2x + 7,\ -x^2 + 1,\ 2x^2 + x + 2\}$, determine: a) una base y la dimensión del espacio vectorial real W generado por A; b) el espacio W.

Resultado: a) base $\{x^2 - 1,\ x + 4\}$, $\dim W = 2$; b) $W = \{ax^2 + bx + c \mid c = 4b - a\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 4.

Sean $A = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ y $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Determine los vectores de la base B si la matriz de transición de la base A a la base B es

$$M_B^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resultado: $\vec{b}_1 = (1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (1,1,0)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 5.

Determine si el conjunto $A = \{5\tan^2 x,\ -2\sec^2 x,\ -1\}$ es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Resultado: dependiente: $2(5\tan^2 x) + 5(-2\sec^2 x) - 10(-1) = 0$ para toda x.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: 1er final 2024-1, problema 2.

Sean $A = \{x + 3,\ 2x - 1\}$ y $B = \{8x + 3,\ 5x + 1\}$ dos bases del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales. Determine: a) la matriz de transición de la base B a la base A; b) las coordenadas de $3x + 2$ en la base A, si $(3x + 2)_B = (1,-1)^T$.

Resultado: a) $M_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $(3x+2)_A = (1,1)^T$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 1.

Determine si el conjunto $A = \{(x,y) \mid y - |x| = 0;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Resultado: no es subespacio: $(1,1) \in A$, pero $-1 \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin A$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

2.7 Errores frecuentes

1. **Suponer que el cero es** $(0,0)$ con operaciones no usuales. Se despeja de $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ con la suma dada.
2. **Demostrar un axioma con un ejemplo.** Un ejemplo solo sirve para mostrar que *no* se cumple; para afirmar que se cumple hay que usar elementos genéricos.
3. **Olvidar la condición del cero en un subespacio.** $\{p \mid p(0) = 3\}$ falla de inmediato porque el polinomio cero no cumple $p(0) = 3$.
4. **Confundir el sentido de la matriz de transición.** M_B^A lleva coordenadas en A a coordenadas en B; sus columnas son los vectores de A escritos en B, no al revés.
5. **Poner las coordenadas como renglones** de M_B^A. Van en columnas.
6. **Leer la base del espacio columna en la escalonada.** Las columnas de la forma escalonada no generan el espacio columna original; se toman las columnas originales que tienen pivote, o se escalona N^T.
7. **Dar la dimensión de P_2 como 2.** Es 3: $\{x^2, x, 1\}$.
8. **Usar escalares reales en un espacio complejo.** En $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, los coeficientes de las combinaciones pueden ser complejos.
9. **Concluir dependencia de funciones con unos cuantos valores de x.** Evaluar sirve para probar independencia; la dependencia exige una identidad válida para toda x.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Subespacio: $\vec{0} \in W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W$, $\alpha\vec{u} \in W$
- $\dim \mathbb{R}^n = n \cdot \dim P_n = n+1 \cdot \dim M_{m\times n} = mn \cdot \dim \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R} = 2$
- n vectores de $\mathbb{R}^n$ son base $\iff \det \neq 0$
- Vectores como renglones → escalonar → renglones no nulos = base del generado
- $(\vec{v})_B = M_B^A(\vec{v})_A \cdot (M_B^A)^{-1} = M_A^B \cdot M_C^A = M_C^B M_B^A \cdot M_B^A = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$
- rango N = dim espacio renglón = dim espacio columna
- Wronskiano (SOLO PLAN 2010): $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ independientes
- $\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \cdot \cos(x+\pi) = -\cos x$

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. El espacio y las operaciones escritos explícitamente, y el campo de los escalares.
2. En «¿es subespacio / espacio vectorial?», cada condición o axioma con «se cumple» o «no se cumple» y su justificación o contraejemplo.

3. En base y dimensión, la matriz con los vectores como renglones, el escalonamiento y la lectura: base, dimensión y ecuación del generado.
4. En transición, cada vector escrito como combinación de la otra base, las columnas de M_B^A y una comprobación con un vector.
5. El resultado con los objetos originales: polinomios, matrices o funciones, no solo coordenadas.

Si no se llega al final, el sistema bien planteado (la combinación lineal igualada componente por componente) ya vale buena parte del problema.

Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

↑ Volver al índice

> **Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno aplicará el concepto de transformación lineal y sus propiedades en la resolución de problemas que los involucren. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** sin contar los valores propios (Parte B), hay un problema de transformaciones en los 8 finales del Plan 2010 y en 27 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016. Los segundos parciales del Plan 2016 son, completos, de esta unidad.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3A.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3A.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3A.1 Conceptos y expresiones

Transformación. Una *transformación* $T: V \to W$ asigna a cada vector de V (el *dominio*) un único vector de W (el *codominio*). Se da con su *regla de correspondencia*, por ejemplo $T(x, y) = (x - y,\ 2x)$ o $T(ax + b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Transformación lineal. T es *lineal* si, para todos $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y todo escalar α,

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad \text{y} \qquad T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u}).$$

Consecuencias: $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, y T queda determinada por las imágenes de los vectores de una base: si $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$, entonces $T(\vec{v}) = \alpha_1 T(\vec{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\vec{v}_n)$. Una regla con términos constantes ($x + 1$), productos de variables (xy), potencias (x^2), valores absolutos o funciones como $\operatorname{sen} x$ no es lineal. Derivar, integrar, transponer y multiplicar por una matriz fija sí lo son.

Núcleo y recorrido.

$$N(T) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}_W\}, \qquad T(V) = \{T(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}.$$

El núcleo es un subespacio de V y el recorrido es un subespacio de W. El recorrido está generado por las imágenes de cualquier base de V.

Teorema de la dimensión. Si $\dim V = n$ es finita,

$$\dim V = \dim N(T) + \dim T(V).$$

$\dim T(V)$ es el rango de cualquier matriz asociada a T. La dimensión del núcleo se llama a veces *nulidad*.

Inyectiva, suprayectiva, biyectiva. T es *inyectiva* si y solo si $N(T) = \{\vec{0}\}$; *suprayectiva* si $T(V) = W$, es decir, si $\dim T(V) = \dim W$; *biyectiva* si es las dos cosas. Solo las biyectivas tienen inversa, y para eso hace falta $\dim V = \dim W$. Cuando las dimensiones son iguales, basta comprobar una de las dos condiciones.

Matriz asociada. Sean $A = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y B una base de W. La matriz $M_B^A(T)$ tiene como columna j el vector de coordenadas de $T(\vec{v}_j)$ en la base B:

$$M_B^A(T) = \Big[\, (T(\vec{v}_1))_B \;\; (T(\vec{v}_2))_B \;\; \cdots \;\; (T(\vec{v}_n))_B \,\Big], \qquad (T(\vec{v}))_B = M_B^A(T)\,(\vec{v})_A.$$

Con las bases canónicas, la columna j es la imagen del j-ésimo vector canónico: en $T(x, y, z) = (\dots)$, los coeficientes de x forman la primera columna.

Álgebra de transformaciones. Con $S, T : V \to W$ y $R : W \to U$ lineales:

$$(S+T)(\vec{v}) = S(\vec{v}) + T(\vec{v}), \qquad (\alpha T)(\vec{v}) = \alpha\, T(\vec{v}), \qquad (R \circ T)(\vec{v}) = R\big(T(\vec{v})\big).$$

Las tres son lineales. En matrices (con las mismas bases): $M(S+T) = M(S) + M(T)$, $M(\alpha T) = \alpha M(T)$ y $M(R \circ T) = M(R)\,M(T)$, en ese orden: primero actúa T, que va a la derecha.

Inversa. Si T es biyectiva, $T^{-1} : W \to V$ es lineal, $T^{-1} \circ T = I_V$ y

$$M_A^B(T^{-1}) = \big[M_B^A(T)\big]^{-1}.$$

T tiene inversa si y solo si su matriz asociada es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

Efectos geométricos (subtema 3.6). Los operadores de $\mathbb{R}^2$ se pueden ver como deformaciones del plano. Con la matriz en la base canónica:

- *Escalamiento:* $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ estira o encoge cada eje.
- *Reflexión:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en el eje x; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en la recta $y = x$.
- *Rotación* de un ángulo θ en sentido antihorario: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
- *Deslizamiento* (cizalla) horizontal: $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- *Proyección* sobre el eje x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; no es invertible.

La composición de dos efectos tiene como matriz el producto, con el primer efecto a la derecha. El valor absoluto del determinante es el factor por el que cambian las áreas; si es negativo, la figura se invierte. Este subtema no ha salido en ningún examen de los dos planes.

3A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar si T es lineal»	las dos condiciones, o un contraejemplo	3A.3.1
«$T(1,2) = \ldots$, $T(2,1) = \ldots$», «tal que» con imágenes de vectores	la regla de correspondencia	3A.3.2
«núcleo», «recorrido», «dimensión del recorrido», «una base del recorrido», «¿pertenece al recorrido?»	sistemas homogéneos y espacio columna	3A.3.3
«la dimensión del núcleo es 1», «la dimensión del recorrido es 2», con un parámetro k	el rango fija k	3A.3.3
«matriz asociada respecto a las bases A y B», «$M_B^A(T)$»	columnas = coordenadas de las imágenes	3A.3.4
«$S+T$», «$T \circ S$», «$2T \circ T - T + 3I$», «T tal que $U \circ T - V = W$»	álgebra de transformaciones	3A.3.5
«¿es biyectiva?», «si existe, la inversa», «T^{-1}»	núcleo y matriz inversa	3A.3.6

3A.3 Procedimientos

3A.3.1 ¿Es lineal?

1. Busca primero un contraejemplo rápido: si $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$, no es lineal. Si la regla tiene productos o potencias de las variables, prueba $T(2\vec{v})$ contra $2T(\vec{v})$ con un vector sencillo.
2. Si parece lineal, toma dos vectores genéricos $\vec{u} = (a, b, \ldots)$ y $\vec{v} = (c, d, \ldots)$ (o dos polinomios o matrices genéricos) y un escalar α.
3. **Superposición:** desarrolla $T(\vec{u} + \vec{v})$ y compáralo con $T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Escribe «se cumple» o «no se cumple».
4. **Homogeneidad:** desarrolla $T(\alpha\vec{u})$ y compáralo con $\alpha T(\vec{u})$.
5. Conclusión: lineal si se cumplen las dos.

3A.3.2 Regla de correspondencia a partir de imágenes

1. Comprueba que los vectores dados forman una base del dominio (tantos como la dimensión y linealmente independientes).
2. Escribe un vector genérico como combinación lineal de esa base: $(x, y) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Resuelve el sistema para α y β en términos de x y y.
3. Aplica la linealidad: $T(x, y) = \alpha\, T(\vec{v}_1) + \beta\, T(\vec{v}_2)$, y simplifica.
4. Si los datos vienen mezclados (por ejemplo, $F(1) = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - F(x)$), primero despeja las imágenes de una base sencilla ($F(x)$ y $F(1)$) con un sistema.
5. Comprueba la regla con los datos del enunciado.

3A.3.3 Núcleo, recorrido y teorema de la dimensión

1. **Núcleo:** iguala la regla al vector cero del codominio y resuelve el sistema homogéneo. Escribe $N(T)$ con sus parámetros y da una base.

2. **Recorrido:** las imágenes de una base del dominio lo generan. Escríbelas como vectores de coordenadas, en renglones o en columnas, y escalona para quitar las dependientes. Otra forma: plantea $T(\vec{v}) = \vec{w}$ con $\vec{w}$ genérico y busca la condición de compatibilidad del sistema; esa condición es la ecuación del recorrido.
3. **¿Pertenece $\vec{w}$ al recorrido?** Resuelve $T(\vec{v}) = \vec{w}$: pertenece si el sistema es compatible.
4. **Teorema de la dimensión:** $\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V$. Úsalo para comprobar, o para obtener una dimensión a partir de la otra.
5. **Con parámetro k:** el dato «$\dim T(V) = 2$» o «$\dim N(T) = 1$» fija el rango de la matriz asociada. Si la matriz es cuadrada y el rango debe ser menor que n, iguala su determinante a cero; si no, escalona y anula el renglón que depende de k.

3A.3.4 Matriz asociada respecto a bases dadas

1. Aplica T a cada vector de la base del dominio A, en orden.
2. Escribe cada imagen como combinación lineal de la base del codominio B. Con la base canónica, las coordenadas se leen directo; con otra base, resuelve un sistema (si todas las imágenes van a la misma base B, escalona una sola matriz aumentada con todas ellas a la derecha).
3. Esas coordenadas son las columnas de $M_B^A(T)$, en el orden de A.
4. **Regla a partir de la matriz:** escribe un vector genérico en la base A, multiplica por la matriz y traduce el resultado con la base B.

3A.3.5 Suma, múltiplo y composición

1. Con reglas, aplica la definición: $(S \circ T)(\vec{v}) = S\big(T(\vec{v})\big)$: sustituye la regla de T dentro de la de S.
2. Con matrices en las mismas bases, suma o multiplica: $M(S \circ T) = M(S)M(T)$.
3. Para una ecuación como $U \circ T - V = W$, despeja como con números, sin cambiar el orden: $U \circ T = V + W$ y, si U es invertible, $T = U^{-1} \circ (V + W)$. En matrices, $M(T) = M(U)^{-1}\big(M(V) + M(W)\big)$.

3A.3.6 Inversa

1. Compara dimensiones: si $\dim V \neq \dim W$, no hay inversa.
2. Calcula el núcleo: si $N(T) = \{\vec{0}\}$ y las dimensiones son iguales, T es biyectiva.
3. **Inversa por matriz:** $M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$. Multiplica por un vector genérico de coordenadas y tradúcelo al espacio de llegada de T^{-1}.
4. **Inversa por sistema:** plantea $T(\vec{v}) = \vec{w}$ con $\vec{w}$ genérico y despeja $\vec{v}$ en términos de $\vec{w}$.
5. **Inversa por imágenes:** si se conocen $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)$, entonces $T^{-1}(T(\vec{v}_j)) = \vec{v}_j$; escribe un vector genérico del codominio como combinación de las imágenes.
6. Comprueba con un vector: $T^{-1}(T(\vec{v})) = \vec{v}$.

3A.4 Ejemplo resuelto

> *Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 3.*
> Sea la transformación lineal $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(a, b) = (a - b,\ b - 2a)$. Determine:
> - a) una matriz asociada a F;

- b) la transformación inversa de F.

Datos. Operador de $\mathbb{R}^2$; se usa la base canónica en el dominio y en el codominio.
Planteamiento. Columnas de M = imágenes de $(1,0)$ y $(0,1)$; si $\det M \neq 0$, F es biyectiva y $M(F^{-1}) = M^{-1}$.
Resolución.

1. a) $F(1,0) = (1,-2)$ y $F(0,1) = (-1,1)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. b) $\det M = 1 - 2 = -1 \neq 0$: F es biyectiva. Con la fórmula de la inversa de 2×2:

$$M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. $F^{-1}(a,b) = M^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-a-b,\ -2a-b)$.
4. Comprobación: $F(-a-b,\ -2a-b) = \big((-a-b)-(-2a-b),\ (-2a-b)-2(-a-b)\big) = (a,\ b)$.
5. **Resultado:** $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $F^{-1}(a,b) = (-a-b,\ -2a-b)$.

3A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3A.5.1 · Dimensión del recorrido con parámetro; núcleo e inversa

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 4.

Sean los espacios vectoriales reales $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ y $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, y la transformación lineal $F : M \to P_2$ con regla

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (-a - 7b - kc)x^2 + (3a + b - 2c)x + (a + 2b + c).$$

La dimensión del recorrido de F es igual a dos. Determine: a) el valor de $k \in \mathbb{R}$; b) una base del recorrido de F; c) el núcleo de F; d) si existe, la transformación inversa de F.

Resolución.

1. Con las bases $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\{x^2, x, 1\}$, cada columna tiene los coeficientes de a, b y c:

$$M_F = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) $\dim F(M) = \operatorname{rango} M_F = 2 < 3$, así que $\det M_F = 0$. Por el primer renglón:

$$\det M_F = -1(1+4) + 7(3+2) - k(6-1) = 30 - 5k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 6.$$

3. b) Un polinomio $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ está en el recorrido si el sistema $M_F(a,b,c)^T=(\alpha,\beta,\gamma)^T$ es compatible. Escalonando con $k=6$ se llega a la condición $\alpha-\beta+4\gamma=0$, es decir, $\beta=\alpha+4\gamma$:
$$\alpha x^2+(\alpha+4\gamma)x+\gamma=\alpha(x^2+x)+\gamma(4x+1).$$
Base del recorrido: $\{x^2+x,\ 4x+1\}$. Comprobación: las dos primeras columnas, $-x^2+3x+1$ y $-7x^2+x+2$, cumplen $-1-3+4=0$ y $-7-1+8=0$.
4. c) Núcleo: $-a-7b-6c=0$, $3a+b-2c=0$, $a+2b+c=0$. De las dos últimas, $a=c$ y $b=-c$ (la primera se cumple: $-c+7c-6c=0$):
$$N(F)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$
Teorema de la dimensión: $1+2=3=\dim M$.
5. d) $N(F)\neq\{\vec{0}\}$: F no es inyectiva y **no tiene inversa**.
6. **Resultado:** $k=6$; base del recorrido $\{x^2+x,\ 4x+1\}$; núcleo generado por $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$; no existe F^{-1}.

Ejercicio 3A.5.2 · Regla de correspondencia a partir de datos mezclados

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 3.

Sean el espacio vectorial real $P_1=\{ax+b\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $F:\ P_1\to\mathbb{R}^2$ tal que $F(2x-1)=(4,-1)$ y $F(1)=(-1,1)-F(x)$. Determine: a) la regla de correspondencia de F; b) la dimensión del núcleo de F; c) el recorrido de F.

Resolución.

1. Por linealidad, $F(2x-1)=2F(x)-F(1)$, y el segundo dato es $F(x)+F(1)=(-1,1)$. Se suman las dos ecuaciones:
$$3F(x)=(4,-1)+(-1,1)=(3,0)\quad\Rightarrow\quad F(x)=(1,0),$$
y entonces $F(1)=(-1,1)-(1,0)=(-2,1)$.
2. a) $F(ax+b)=aF(x)+bF(1)=a(1,0)+b(-2,1)=(a-2b,\ b)$.
3. Comprobación: $F(2x-1)=(2+2,\ -1)=(4,-1)$.
4. b) $F(ax+b)=(0,0)$ da $b=0$ y $a=0$: $N(F)=\{0\}$ y $\dim N(F)=0$.
5. c) Por el teorema de la dimensión, $\dim F(P_1)=2-0=2=\dim\mathbb{R}^2$.
6. **Resultado:** $F(ax+b)=(a-2b,\ b)$; $\dim N(F)=0$; el recorrido es todo $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3A.5.3 · Regla de la suma a partir de sus matrices asociadas

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 3.

Sean el espacio vectorial real $P_2=\{ax^2+bx+c\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y las transformaciones lineales $T:\ \mathbb{R}^3\to P_2$ y $S:\ \mathbb{R}^3\to P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a las bases $A=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B=\{1,x,x^2\}$ son
$$M_B^A(T)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},\qquad M_B^A(S)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Obtenga la regla de correspondencia de $S+T$.

Resolución.

1. $M_B^A(S+T) = M_B^A(S) + M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Las columnas, leídas en la base $B = \{1, x, x^2\}$, son las imágenes de los vectores de A:

$$(S+T)(1,1,0) = 1 - x, \qquad (S+T)(0,1,0) = x + x^2, \qquad (S+T)(0,0,1) = 1.$$

3. Coordenadas de un vector genérico en A: $(a,b,c) = a(1,1,0) + (b-a)(0,1,0) + c(0,0,1)$.
4. Por linealidad:

$$(S+T)(a,b,c) = a(1-x) + (b-a)(x+x^2) + c = (b-a)x^2 + (b-2a)x + (a+c).$$

5. Comprobación: $(S+T)(1,1,0) = 0 \cdot x^2 - x + 1 = 1 - x$.
6. **Resultado:** $(S+T)(a,b,c) = (b-a)x^2 + (b-2a)x + (a+c)$.

Ejercicio 3A.5.4 · ¿Es biyectiva? Inversa de polinomios a matrices

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 3.

Sean los espacios vectoriales reales $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, y la transformación lineal $F: P \to M$ con regla

$$F(ax+b) = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}.$$

a) Determine si F es biyectiva. b) Si existe, obtenga la inversa de F.

Resolución.

1. $\dim P = 2$ y $\dim M = 2$ (base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$).
2. a) Núcleo: $a - b = 0$ y $a + b = 0$ dan $a = b = 0$. $N(F) = \{0\}$: F es inyectiva y, como las dimensiones son iguales, también suprayectiva. F **es biyectiva**.
3. b) Se plantea $F(ax+b) = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$: $a - b = p$ y $a + b = q$. Sumando y restando, $a = \frac{p+q}{2}$ y $b = \frac{q-p}{2}$.
4. Comprobación: $F\left(\frac{p+q}{2}x + \frac{q-p}{2}\right)$ tiene $a - b = p$ y $a + b = q$.
5. **Resultado:** F es biyectiva y $F^{-1}\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} = \dfrac{p+q}{2}\,x + \dfrac{q-p}{2}$.

Ejercicio 3A.5.5 · Núcleo de dimensión 1 con parámetro; recorrido

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 3.

Sea el operador lineal $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada a la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & 1 & 3k \end{pmatrix}.$$

La dimensión del núcleo de F es igual a 1. Determine: a) el valor de k; b) el recorrido de F.

Resolución.

1. a) $\dim N(F) = 1$ implica rango $M = 2$, así que $\det M = 0$. Por la primera columna:
$$\det M = 2(3k - k) + 2(-k - 1) = 4k - 2k - 2 = 2k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$
2. b) Con $k = 1$, el recorrido es el espacio generado por las columnas $(2, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$ y $(1, 1, 3)$. Las dos primeras no son paralelas, y la tercera es su suma: $(2, 0, 2) + (-1, 1, 1) = (1, 1, 3)$. Entonces $\dim F(\mathbb{R}^3) = 2$.
3. La ecuación del plano sale del vector normal $(2, 0, 2) \times (-1, 1, 1) = (-2, -4, 2)$, proporcional a $(1, 2, -1)$:
$$F(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$
4. Comprobación: $(1, 1, 3)$ cumple $1 + 2 - 3 = 0$. El núcleo, $\text{gen}\{(1, 1, -1)\}$, tiene dimensión $1 = 3 - 2$.
5. **Resultado:** $k = 1$ y $F(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid z = x + 2y\}$.

Ejercicio 3A.5.6 · ¿Es lineal un operador con derivadas?

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 3.

Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes reales y sea $T : V \to V$ con regla $T\big(p(x)\big) = 2p''(x) - 3p'(x)$. Determine si T es lineal.

Resolución.

1. T va de V a V: al derivar, el grado no aumenta.
2. **Superposición.** Con $p, q \in V$, la derivada de una suma es la suma de las derivadas:
$$T(p + q) = 2(p + q)'' - 3(p + q)' = \big(2p'' - 3p'\big) + \big(2q'' - 3q'\big) = T(p) + T(q).$$
Se cumple.
3. **Homogeneidad.** Con $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha p)' = \alpha p'$:
$$T(\alpha p) = 2\alpha p'' - 3\alpha p' = \alpha\big(2p'' - 3p'\big) = \alpha\, T(p).$$
Se cumple.
4. **Resultado:** T es lineal. (Por ejemplo, $T(x^2) = 4 - 6x$ y $T(2x^2) = 8 - 12x = 2T(x^2)$.)

Ejercicio 3A.5.7 · Núcleo, dimensión del recorrido e inversa entre espacios de matrices

Adaptado de: 1er final 2024-1, problema 3.

Sean los espacios vectoriales $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ y $N = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$, y la transformación lineal $T : M \to N$ definida por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & d - c \\ d - c & 2a + b + c \end{pmatrix}.$$

Determine: a) el núcleo de T; b) la dimensión del recorrido de T; c) si existe, la regla de correspondencia de T^{-1}.

Resolución.

1. a) $T(A)=0$ da el sistema $a-b=0$, $d-c=0$, $2a+b+c=0$. Entonces $b=a$, $c=-3a$ y $d=c=-3a$:
$$N(T)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\},\qquad \dim N(T)=1.$$
2. b) Teorema de la dimensión: $\dim T(M)=\dim M-\dim N(T)=4-1=3$. Como $\dim N=3$, T es suprayectiva: $T(M)=N$.
3. c) $N(T)\neq\{0\}$ (y además $\dim M=4\neq 3=\dim N$): T no es inyectiva y **no existe** T^{-1}.
4. **Resultado:** $N(T)$ está generado por $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}$; $\dim T(M)=3$; no hay inversa.

Ejercicio 3A.5.8 · Transformación que cumple una ecuación con composiciones

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 4.

Sean las transformaciones lineales $U,V,W:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ con reglas

$$U(x,y)=(2x-y,\ -x+y),\qquad V(x,y)=(2x-y,\ x+y),\qquad W(x,y)=(x-2y,\ -3x+y).$$

Determine la regla de correspondencia de la transformación lineal T tal que $U\circ T-V=W$.

Resolución.

1. Se despeja sin cambiar el orden: $U\circ T=V+W$ y $T=U^{-1}\circ(V+W)$, si U es invertible.
2. En la base canónica: $M(U)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, con $\det M(U)=1$, y $M(U)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
3. $M(V)+M(W)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.
4. $M(T)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.
5. Comprobación: $U\big(T(x,y)\big)=U(x-y,\ -x+y)=(3x-3y,\ -2x+2y)=(V+W)(x,y)$.
6. **Resultado:** $T(x,y)=(x-y,\ -x+y)$.

3A.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 3A.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo A, problema 2.

Sean los espacios vectoriales reales $M=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$ y $P=\{ax+b\mid a,b\in\mathbb{R}\}$, y la transformación lineal $T:\ M\to P$ tal que

$$T\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=2x-4,\qquad T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4x-2.$$

a) Determine la regla de correspondencia de T. b) Obtenga el núcleo de T y la dimensión del recorrido de T.

Resultado: a) $T\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=(2a+4b)x-(2a+2b)$; b) $N(T)=\{0\}$ y $\dim T(M)=2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 3A.6.2

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 4.

Sean los espacios vectoriales reales $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, y la transformación lineal $T: \ P \to M$ tal que

$$T(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T(2x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenga la inversa de T.

Resultado: $T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = (a+2b)x + (a-b)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 3A.6.3

Adaptado de: 2º extraordinario 2023-2, problema 3.

Sean los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, y la transformación lineal $T: \ \mathbb{R}^3 \to P_2$ tal que $T(1,0,0) = x^2 + x + 1$, $T(1,1,0) = x^2 + 1$ y $T(1,1,1) = x^2$. Obtenga, si existe, la regla de correspondencia de $T^{-1}: \ P_2 \to \mathbb{R}^3$.

Resultado: $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = (a, \ a-b, \ a-c)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 3A.6.4

Adaptado de: 3er extraordinario 2026-1, problema 3.

Considere el espacio vectorial M_2 de las matrices reales de 2×2 y la transformación $T: \ M_2 \to M_2$ dada por $T(A) = A - A^T$, donde A^T es la transpuesta de A. Determine si T es una transformación lineal.

Resultado: sí es lineal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 3A.6.5

Adaptado de: 2º parcial 2024-2, tipo B, problema 4.

Sean los espacios vectoriales $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, y la transformación lineal $T: \ P_2 \to W$ con regla

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a-c & b \\ b & a+c \end{pmatrix}.$$

Con las bases $A = \{x^2, x, 1\}$ de P_2 y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de W, determine: a) la matriz $M_B^A(T)$; b) la regla de correspondencia de T^{-1}.

Resultado: a) $M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $T^{-1}\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} = \frac{p+r}{2}x^2 + qx + \frac{r-p}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 3A.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 3.

Sean el espacio vectorial $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to P_2$ con regla $T(a, b) = (a - 3b)x^2 + (2a + b)x + (a - b)$. Determine si el polinomio $p(x) = 7x^2 + 7x + 5$ pertenece al recorrido de T.

Resultado: sí: $p = T(4, -1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

3A.7 Errores frecuentes

1. **Probar la linealidad con números.** Un ejemplo que funciona no demuestra nada; uno que falla sí basta para decir que no es lineal. La demostración se hace con vectores genéricos.
2. **Escribir la matriz asociada por renglones.** La columna j es la imagen del j-ésimo vector de la base del dominio, en coordenadas de la base del codominio.
3. **Olvidar pasar a coordenadas.** Si la base del codominio no es la canónica, cada imagen se escribe como combinación lineal de esa base antes de ponerla como columna.
4. **Invertir el orden de la composición.** $M(S \circ T) = M(S)M(T)$: primero actúa T. En una ecuación $U \circ T = V$, se despeja $T = U^{-1} \circ V$, no $V \circ U^{-1}$.
5. **Confundir núcleo y recorrido.** El núcleo vive en el dominio y se obtiene igualando a cero; el recorrido vive en el codominio y lo generan las imágenes.
6. **Dar el recorrido como $\mathbb{R}^3$ sin revisar el rango.** El número de imágenes no es la dimensión; hay que quitar las dependientes.
7. **Buscar la inversa sin revisar el núcleo.** Si $\dim V \neq \dim W$ o $N(T) \neq \{\vec{0}\}$, no hay inversa.
8. **No comprobar.** La regla obtenida debe reproducir los datos del enunciado, y $T^{-1}(T(\vec{v})) = \vec{v}$.

3A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Lineal: $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ y $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}) \cdot T(\vec{0}) = \vec{0}$
- $N(T) = \{\vec{v} \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\} \cdot T(V) = \text{gen}\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$
- $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V) \cdot \dim T(V) = \text{rango } M(T)$
- Inyectiva $\iff N(T) = \{\vec{0}\} \cdot$ biyectiva $\iff M(T)$ cuadrada con $\det \neq 0$
- $M_B^A(T)$: columna $j = (T(\vec{v}_j))_B \cdot (T(\vec{v}))_B = M_B^A(T)(\vec{v})_A$
- $M(S + T) = M(S) + M(T) \cdot M(R \circ T) = M(R)M(T) \cdot M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$
- Rotación: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot$ área por $|\det M|$

3A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Las dimensiones del dominio y del codominio, escritas al principio.
2. Las bases que se usan y la matriz asociada, con la regla «columna = imagen».
3. El sistema del núcleo y su solución con parámetros; la base del núcleo.
4. El recorrido con su base o su ecuación, y el teorema de la dimensión como comprobación.
5. Para la inversa: la razón por la que existe (o no), la matriz inversa o el sistema despejado, y la regla de T^{-1}.
6. Una comprobación con los datos del enunciado.

Si no sale la regla, el planteamiento por linealidad ($T(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha T(\vec{v}_1) + \beta T(\vec{v}_2)$) y el sistema para α y β ya valen buena parte del problema.

Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el concepto de transformación lineal y sus propiedades en la resolución de problemas que los involucren. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** es el subtema que más sale. Hay un problema de valores y vectores propios en 6 de los 8 finales del Plan 2010 y en 25 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016. Además, la Unidad 5 lo usa en la descomposición espectral y en las formas cuádricas.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3B.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3B.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3B.1 Conceptos y expresiones

Operador lineal. Una transformación lineal $T: V \to V$, con el mismo espacio de salida y de llegada, se llama *operador lineal*. Solo los operadores tienen valores propios.

Valor y vector propio. Un escalar λ es un *valor propio* (o *valor característico*) de T si existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que

$$T(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}.$$

Ese $\vec{v}$ es un *vector propio* (o *vector característico*) asociado a λ. Geométricamente, T no cambia la dirección de $\vec{v}$: solo lo estira, lo encoge o lo invierte. El vector cero nunca es vector propio, pero el escalar 0 sí puede ser valor propio; ocurre cuando T no es inyectiva.

Espacio característico. Para cada valor propio, el conjunto

$$E(\lambda) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\} = N(T - \lambda I)$$

es un subespacio de V: contiene al vector cero y a todos los vectores propios de λ. Su dimensión es la *multiplicidad geométrica* de λ.

Polinomio característico. Si M es una matriz asociada a T (en cualquier base), los valores propios son las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I).$$

Las raíces se cuentan con su *multiplicidad algebraica*: en $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$, el valor $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2. Siempre se cumple

$$1 \leq \text{multiplicidad geométrica} \leq \text{multiplicidad algebraica}.$$

El polinomio no depende de la base: matrices asociadas al mismo operador en bases distintas tienen el mismo polinomio característico.

Comprobaciones rápidas. Para una matriz de $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (repetidos según su multiplicidad algebraica):

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} M, \qquad \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det M.$$

En una matriz triangular, los valores propios son los elementos de la diagonal. Si λ es valor propio de M, entonces λ^k lo es de M^k y, si M es invertible, $1/\lambda$ lo es de M^{-1}, con los mismos vectores propios.

Matrices similares. A y B son *similares* si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Las matrices asociadas a un mismo operador en dos bases son similares, y P es la matriz de transición entre esas bases. Las matrices similares tienen el mismo polinomio característico, los mismos valores propios, el mismo determinante, la misma traza y el mismo rango.

Diagonalización. Un operador $T : V \to V$, con $\dim V = n$, es *diagonalizable* si existe una base de V formada por vectores propios de T. En esa base, la matriz asociada es diagonal y tiene los valores propios en la diagonal:

$$D = P^{-1}MP, \qquad P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix},$$

donde las columnas de P (la *matriz diagonalizadora*) son los vectores propios, en el mismo orden que los valores propios de D. Criterios:

- Si los n valores propios son distintos, T es diagonalizable.
- Si hay valores repetidos, T es diagonalizable si y solo si, para cada valor propio, la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica; es decir, si las dimensiones de los espacios característicos suman n.
- En el campo de los reales, si $p(\lambda)$ tiene raíces complejas, T no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Operadores en espacios de polinomios o de matrices. Se trabaja con la matriz asociada en una base sencilla ($\{x^2, x, 1\}$, o la base canónica de $M_{2\times 2}$). Los vectores propios que salen como columnas de coordenadas se traducen de regreso: la columna $(1, -1, 0)$ en la base $\{x^2, x, 1\}$ es el polinomio $x^2 - x$.

3B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«valores propios», «valores característicos», «polinomio característico»	raíces de $\det(M - \lambda I)$	3B.3.1
«vectores propios», «espacios característicos», «base de cada espacio característico»	$N(M - \lambda I)$ para cada λ	3B.3.2
«¿es diagonalizable?», «determinar k para que sea diagonalizable»	comparar multiplicidades	3B.3.3

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«una matriz diagonal asociada y la base a la que está referida», «matriz diagonalizadora», «P tal que $P^{-1}MP$ sea diagonal»	D y P	3B.3.4
se dan los valores y vectores propios (o D y los espacios característicos) y se pide la regla o la matriz	$M = PDP^{-1}$	3B.3.5
el operador actúa sobre polinomios o matrices	lo mismo, en coordenadas	3B.3.6

3B.3 Procedimientos

3B.3.1 Valores propios

1. Escribe la matriz M asociada a T. Con la regla $T(x, y, z) = (\dots)$, la columna j de M es la imagen del j-ésimo vector canónico: los coeficientes de x forman la primera columna, los de y la segunda, y así sucesivamente.
2. Forma $M - \lambda I$ (resta λ solo en la diagonal) y calcula su determinante. Si hay un renglón o una columna con ceros, desarrolla por ahí: el polinomio sale ya factorizado.
3. Iguala a cero y resuelve. Para un polinomio de grado 3 sin factor visible, prueba las raíces enteras que dividen al término independiente y usa división sintética.
4. Comprueba: la suma de los valores propios es la traza de M y su producto es $\det M$.

3B.3.2 Espacios característicos

1. Para cada valor propio λ_i, sustituye en $M - \lambda_i I$. Su determinante es cero, así que el sistema $(M - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.
2. Escalona y deja libres tantas variables como renglones nulos queden. El número de parámetros es la multiplicidad geométrica.
3. Escribe $E(\lambda_i) = \{\, \alpha(\dots) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$ y da una base. Comprueba con la regla: $T(\vec{v})$ debe dar $\lambda_i \vec{v}$.

3B.3.3 ¿Es diagonalizable?

1. Calcula los valores propios con su multiplicidad algebraica.
2. Si todos son distintos (y reales, en un espacio real), es diagonalizable; termina.
3. Para cada valor repetido λ, calcula $\dim E(\lambda) = n - \text{rango}(M - \lambda I)$ y compárala con la multiplicidad algebraica. Si alguna es menor, no es diagonalizable.
4. **Con parámetro k:** el parámetro casi nunca cambia los valores propios (suele estar fuera de la diagonal en una matriz triangular por bloques). Lo que cambia es el rango de $M - \lambda I$ para el valor repetido. Escoge k para que ese rango baje lo suficiente.

3B.3.4 Matriz diagonal y base a la que está referida

1. Toma un vector de cada base de los espacios característicos (todos los vectores de la base, si la dimensión es mayor que 1).

2. P tiene esos vectores como columnas; D tiene los valores propios en la diagonal, **en el mismo orden**.
3. La base a la que está referida D es el conjunto de esos vectores propios, en ese orden.
4. Si sobra tiempo, comprueba $MP = PD$ (es más rápido que invertir P).

3B.3.5 Operador a partir de sus valores y vectores propios

1. Con los vectores propios como columnas forma P, y con los valores propios, D.
2. La matriz en la base canónica es $M = PDP^{-1}$.
3. La regla sale de M: $T(x, y) = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
4. Alternativa sin inversa: escribe (x, y) como combinación lineal de los vectores propios, $(x, y) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$, y aplica T: $T(x, y) = \alpha\lambda_1\vec{v}_1 + \beta\lambda_2\vec{v}_2$.

3B.3.6 Operadores en polinomios y en matrices

1. Fija una base ordenada ($\{x^2, x, 1\}$ para P_2) y escribe la matriz asociada: la columna j es el vector de coordenadas de la imagen del j-ésimo vector de la base.
2. Haz 3B.3.1 a 3B.3.4 con esa matriz.
3. Traduce cada vector propio de coordenadas a polinomio (o matriz) antes de dar el resultado.

3B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 4.

Sea el operador lineal $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla $F(x, y) = (4x - 5y,\ 2x - 3y)$. Determine:

- a) una matriz M asociada a F;
- b) los valores característicos de F;
- c) los espacios característicos de F;
- d) una matriz diagonal asociada a F y una matriz diagonalizadora de M.

Datos. Operador en $\mathbb{R}^2$; se usa la base canónica.

Planteamiento. $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = 0$; luego $E(\lambda) = N(M - \lambda I)$; con dos valores distintos, F es diagonalizable.

Resolución.

1. a) Los coeficientes de x van en la primera columna y los de y en la segunda:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. b) $\det(M - \lambda I) = (4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Los valores característicos son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Comprobación: $2 + (-1) = 1 = \operatorname{tr} M$ y $2(-1) = -2 = \det M$.
3. c) Para $\lambda_1 = 2$: $M - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, de donde $2x - 5y = 0$ y $x = \frac{5}{2}y$. Con $y = 2\alpha$:

$$E(2) = \{\alpha(5, 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda_2 = -1$: $M + I = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, de donde $x = y$:

$$E(-1) = \{\beta(1,1) \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Comprobación: $F(5,2) = (20-10,\ 10-6) = (10,4) = 2(5,2)$ y $F(1,1) = (-1,-1) = -1(1,1)$.

4. d) Con la base $\{(5,2),(1,1)\}$:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = P^{-1}MP.$$

5. **Resultado:** los valores característicos son 2 y -1; $E(2)$ está generado por $(5,2)$ y $E(-1)$ por $(1,1)$. La matriz diagonal está referida a la base $\{(5,2),(1,1)\}$. Cualquier múltiplo no nulo de cada vector propio, o el orden inverso en D y P a la vez, también es correcto.

3B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3B.5.1 · Matriz diagonalizadora de un operador en $\mathbb{R}^3$

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 4.

Para el operador lineal $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (2x,\ 3x+2y+z,\ 4x+y+2z)$, obtenga:

- a) la matriz M asociada a T referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- b) una matriz P tal que $P^{-1}MP$ sea una matriz diagonal.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. b) Se desarrolla $\det(M - \lambda I)$ por el primer renglón, que tiene dos ceros:

$$\det(M-\lambda I) = (2-\lambda)\big[(2-\lambda)^2 - 1\big] = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda).$$

Valores propios: 1, 2 y 3. Son distintos, así que T es diagonalizable. Comprobación: $1+2+3 = 6 = \operatorname{tr} M$.

3. $\lambda = 1$: $M - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El primer renglón da $x = 0$; el segundo, $y + z = 0$. Vector propio: $(0,-1,1)$.
4. $\lambda = 2$: $M - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De $3x + z = 0$ y $4x + y = 0$: $z = -3x$, $y = -4x$. Con $x = -1$: $(-1,4,3)$.
5. $\lambda = 3$: $M - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. De $x = 0$ y $-y + z = 0$: $(0,1,1)$.

6. Comprobación de uno: $T(-1,4,3) = (-2,\ -3+8+3,\ -4+4+6) = (-2,8,6) = 2(-1,4,3)$.
7. **Resultado:**

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3B.5.2 · Espacios característicos y base de la matriz diagonal

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo A, problema 3.

Sea el operador lineal $F:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $F(x,y,z) = (4x+2z,\ 3y,\ 2x+z)$. Determine:

- a) una matriz M asociada a F;
- b) los espacios característicos de F;
- c) una matriz diagonal asociada a F y la base a la que está referida.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Se desarrolla por el segundo renglón:

$$\det(M-\lambda I) = (3-\lambda)\big[(4-\lambda)(1-\lambda)-4\big] = (3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-5).$$

   Valores propios: 0, 3 y 5. El valor 0 indica que F no es inyectiva.
3. b) $\lambda = 0$: $M\vec{v} = \vec{0}$ da $y = 0$ y $2x+z = 0$: $E(0) = \{\alpha(1,0,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
4. $\lambda = 3$: $M - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ da $x = z = 0$: $E(3) = \{\beta(0,1,0) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.
5. $\lambda = 5$: $M - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ da $y = 0$ y $x = 2z$: $E(5) = \{\gamma(2,0,1) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$.
6. **Resultado:** $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, referida a la base $\{(1,0,-2),(0,1,0),(2,0,1)\}$.

Ejercicio 3B.5.3 · Matriz asociada a partir de los vectores propios, en polinomios

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 3.

Sean el espacio vectorial real $P_1 = \{ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $H:\ P_1 \to P_1$. Los polinomios $p(x) = 1$ y $q(x) = 2x+1$ son vectores propios de H asociados a los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determine la matriz asociada a H respecto a la base $D = \{x+1,\ -x\}$.

Planteamiento. Basta conocer H en la base de vectores propios. Se escribe cada vector de D como combinación de p y q, se aplica H y se vuelve a escribir el resultado en la base D.

Resolución.

1. $H(1) = 1$ y $H(2x+1) = -(2x+1)$. Como $x = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}\cdot 1$:

$$H(x) = \tfrac{1}{2}H(2x+1) - \tfrac{1}{2}H(1) = -\tfrac{1}{2}(2x+1) - \tfrac{1}{2} = -x-1.$$

2. $H(x+1) = H(x) + H(1) = -x - 1 + 1 = -x$. En la base D: $-x = 0\,(x+1) + 1\,(-x)$, coordenadas $(0, 1)$.
3. $H(-x) = -H(x) = x + 1 = 1\,(x+1) + 0\,(-x)$, coordenadas $(1, 0)$.
4. Las coordenadas son las columnas de la matriz.
5. **Resultado:** $M_D^D(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comprobación: su polinomio característico es $\lambda^2 - 1$, con raíces 1 y -1, como debe ser.

Ejercicio 3B.5.4 · Regla a partir de los valores y vectores propios

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 4.

Los valores propios del operador lineal $T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -3$. Un vector propio asociado a λ_1 es $\vec{u}_1 = (3, 9)$ y uno asociado a λ_2 es $\vec{u}_2 = (-1, 1)$.

- a) Determine si T es diagonalizable. En caso afirmativo, obtenga una matriz diagonal asociada a T y la base a la que está referida.
- b) Obtenga la regla de correspondencia de T.

Resolución.

1. a) Hay dos valores propios distintos en un espacio de dimensión 2: T es diagonalizable. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, referida a la base $\{(3, 9), (-1, 1)\}$.
2. b) Con $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$: $\det P = 3 + 9 = 12$ y $P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -24 & 12 \\ 36 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Comprobación: $M(3, 9)^T = (-6 + 9,\ 9) = (3, 9)$ y $M(-1, 1)^T = (2 + 1,\ -3) = (3, -3) = -3(-1, 1)$.
5. **Resultado:** $T(x, y) = (-2x + y,\ 3x)$.

Ejercicio 3B.5.5 · Operador a partir de su matriz diagonal y sus espacios característicos

Adaptado de: 2º extraordinario 2023-2, problema 4.

Sea el operador lineal $T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matriz diagonal asociada $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y espacios característicos $E(-1) = \{(k_1, -3k_1) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}$ y $E(2) = \{(k_2, 0) \mid k_2 \in \mathbb{R}\}$. Obtenga:

- a) la matriz asociada a T en la base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$;
- b) la regla de correspondencia de T.

Resolución.

1. Vectores propios: $(1, -3)$ para -1 y $(1, 0)$ para 2. En el orden de D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det P = 3$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. a) $M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Comprobación: M es triangular con diagonal $2, -1$; $M(1,-3)^T = (2-3,\ 3) = (-1,3) = -1(1,-3)$.
4. b) **Resultado:** $M_B^B(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $T(x,y) = (2x+y,\ -y)$.

Ejercicio 3B.5.6 · Valor de k para que el operador sea diagonalizable

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 4.

Sea el operador lineal $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que T sea diagonalizable.

Resolución.

1. Se desarrolla por el tercer renglón: $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\big[(1-\lambda)(3-\lambda)\big] = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$. El parámetro no afecta: $\lambda = 1$ (multiplicidad algebraica 2) y $\lambda = 3$ (simple).
2. Para que sea diagonalizable hace falta $\dim E(1) = 2$, es decir, $\operatorname{rango}(A - I) = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   El segundo renglón no es nulo. El primero es múltiplo del segundo solo si $k = 0$. Si $k \neq 0$, el rango es 2 y $\dim E(1) = 1 < 2$.
3. Con $k = 0$: $-2a + 2b + 5c = 0$, dos variables libres: $E(1) = \operatorname{gen}\{(1,1,0),(5,0,2)\}$. Para $\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ da $a = c = 0$: $E(3) = \operatorname{gen}\{(0,1,0)\}$. Las dimensiones suman 3.
4. **Resultado:** $k = 0$. Con ese valor, $D = \operatorname{diag}(1,1,3)$ en la base $\{(1,1,0),(5,0,2),(0,1,0)\}$.

Ejercicio 3B.5.7 · ¿Es diagonalizable un operador en polinomios?

Adaptado de: 3er extraordinario 2023-2, problema 4.

Sea P el espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, y $T:\ P \to P$ con regla $T(ax^2+bx+c) = (a+2b)x^2 + (3b+c)x - c$. Determine si T es diagonalizable y, en caso afirmativo, obtenga una matriz N tal que $D = N^{-1}M(T)N$.

Resolución.

1. En la base $\{x^2, x, 1\}$, las columnas son las coordenadas de $T(x^2) = x^2$, $T(x) = 2x^2 + 3x$ y $T(1) = x - 1$:

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Es triangular: los valores propios son 1, 3 y -1, distintos. T es diagonalizable.
3. $\lambda = 1$: $2b = 0$, $2b + c = 0$, $-2c = 0$: $(1,0,0)$, es decir, x^2.

4. $\lambda = 3$: $-2a + 2b = 0$, $c = 0$: $(1, 1, 0)$, es decir, $x^2 + x$.
5. $\lambda = -1$: $2a + 2b = 0$ y $4b + c = 0$. Con $b = -1$: $a = 1$, $c = 4$: $(1, -1, 4)$, es decir, $x^2 - x + 4$.
6. Comprobación: $T(x^2 - x + 4) = (1-2)x^2 + (-3+4)x - 4 = -x^2 + x - 4 = -(x^2 - x + 4)$.
7. **Resultado:** sí es diagonalizable;

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3B.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 3B.6.1

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 4.

Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $T(x, y, z) = (-2x + z,\ -5y,\ 6x - 3z)$. Determine:

- a) una matriz asociada a T;
- b) los espacios característicos asociados a cada valor propio;
- c) una matriz diagonal D asociada a T y la base a la que está referida.

Resultado: valores propios 0 y -5 (doble). $E(0)$ está generado por $(1, 0, 2)$, y $E(-5)$ por $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, -3)$. $D = \operatorname{diag}(0, -5, -5)$ en la base formada por esos tres vectores.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3B.6.2

Adaptado de: 1er final 2026-1, problema 4.

Sean el espacio vectorial real $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $F : P \to P$ con regla $F(ax + b) = (a - 2b)x + (b - 2a)$. Determine una matriz diagonal D asociada a F y una base a la que está referida.

Resultado: $D = \operatorname{diag}(-1, 3)$, referida a la base $\{x + 1,\ x - 1\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3B.6.3

Adaptado de: 3er extraordinario 2026-1, problema 4.

Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine: a) los valores propios de T; b) si T es diagonalizable.

Resultado: a) 1 y 3 (doble); b) sí: $\dim E(3) = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3B.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 4.

Sean $P = \{ax^2+bx+c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $T: P \to P$ con regla $T(ax^2+bx+c) = (2a + 2c)x^2 + (-a + b)x + (a + 3c)$.

- a) Obtenga los valores y los vectores característicos de T.
- b) Obtenga los espacios característicos de T.
- c) Determine si T es diagonalizable.

Resultado: a) $\lambda = 1$ (doble) con vectores αx, $\alpha \neq 0$; $\lambda = 4$ con vectores $\beta(3x^2 - x + 3)$, $\beta \neq 0$; b) $E(1) = \{\alpha x\}$, $E(4) = \{\beta(3x^2 - x + 3)\}$; c) no es diagonalizable.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 3B.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo D, problema 4.

Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(a, b, c) = (a+2b,\ -2b+c,\ 3c)$. Determine: a) los valores propios de T; b) los espacios propios; c) si existe, la matriz diagonal asociada a T.

Resultado: a) 1, -2 y 3; b) $E(1) = \text{gen}\{(1, 0, 0)\}$, $E(-2) = \text{gen}\{(2, -3, 0)\}$, $E(3) = \text{gen}\{(1, 1, 5)\}$; c) $D = \text{diag}(1, -2, 3)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

3B.7 Errores frecuentes

1. **Armar M por renglones equivocados.** En $T(x, y) = (4x-5y,\ 2x-3y)$, los coeficientes de cada componente forman un renglón, $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; es lo mismo que poner en columnas las imágenes de los vectores canónicos. El error es escribir la transpuesta.
2. **Restar λ fuera de la diagonal.** $M - \lambda I$ solo cambia la diagonal.
3. **Desarrollar el determinante sin buscar ceros.** Un renglón o una columna con dos ceros da el polinomio ya factorizado; desarrollarlo completo y volver a factorizar es donde se pierden signos.
4. **Tomar el vector cero como vector propio** o dar $E(\lambda)$ sin el parámetro. El espacio característico incluye al cero; los vectores propios, no.
5. **Concluir «no diagonalizable» porque hay un valor repetido.** Un valor repetido solo obliga a comparar la multiplicidad geométrica con la algebraica.
6. **Cambiar el orden entre P y D.** La columna j de P es el vector propio del valor que está en la posición j de D.
7. **Dar coordenadas en lugar del polinomio o la matriz.** Si el operador es de P_2, los vectores propios son polinomios: $(1, -1, 4)$ se escribe $x^2 - x + 4$.
8. **No comprobar.** $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ se verifica en una línea, y la traza y el determinante controlan los valores propios.

3B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}, \vec{v} \neq \vec{0} \cdot E(\lambda) = N(M - \lambda I) \cdot p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$

- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr} M \cdot \prod \lambda_i = \det M \cdot$ triangular: los valores propios están en la diagonal
- $\dim E(\lambda) = n - \operatorname{rango}(M - \lambda I) \cdot 1 \leq$ m. geométrica $\leq$ m. algebraica
- Diagonalizable $\iff \sum \dim E(\lambda_i) = n \cdot n$ valores distintos $\Rightarrow$ diagonalizable
- $D = P^{-1}MP$, columnas de P = vectores propios en el orden de $D \cdot M = PDP^{-1}$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. La matriz asociada, con la base que se usó.
2. $\det(M - \lambda I)$ desarrollado por la línea con más ceros, y el polinomio factorizado.
3. Los valores propios con su multiplicidad, y la comprobación con la traza.
4. Para cada valor propio, la matriz $M - \lambda I$, el sistema y $E(\lambda)$ con su parámetro.
5. La conclusión sobre la diagonalización con su razón (valores distintos, o multiplicidades iguales).
6. D y P (o la base) en el mismo orden, y una comprobación $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

Si no sale el polinomio, la matriz $M - \lambda I$ bien planteada y el criterio de diagonalización ya valen buena parte del problema.

Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno determinará si una función es un producto interno y analizará sus características fundamentales a efecto de aplicarlo en la resolución de problemas de espacios vectoriales. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 8 finales del Plan 2010 y en los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016, casi siempre como problema 5. Lo que más sale es el complemento ortogonal y la proyección (vector más cercano); después, «¿es producto interno?» y Gram-Schmidt.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro (15 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Producto interno real. En un espacio vectorial real V, un *producto interno* es una función que a cada par de vectores $\vec{u}, \vec{v}$ asigna un número real $(\vec{u} \mid \vec{v})$ y que cumple, para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. **Simetría:** $(\vec{u} \mid \vec{v}) = (\vec{v} \mid \vec{u})$.
2. **Aditividad:** $(\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{w}) + (\vec{v} \mid \vec{w})$.
3. **Homogeneidad:** $(\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v})$.
4. **Positividad:** $(\vec{v} \mid \vec{v}) > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$, y $(\vec{0} \mid \vec{0}) = 0$.

Los productos que salen en los exámenes:

- usual en $\mathbb{R}^n$ (producto escalar): $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$;
- ponderado: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = c_1u_1v_1 + \cdots + c_nu_nv_n$, con todos los $c_i > 0$;
- en matrices: $(A \mid B) = \operatorname{tr}(A^TB) = \operatorname{tr}(AB^T)$, la suma de los productos entrada por entrada;
- en polinomios, por evaluación: $(p \mid q) = \sum_i p(x_i)\,q(x_i)$ en puntos dados, o por integral: $(p \mid q) = \int_a^b p(x)q(x)\,dx$.

Producto interno complejo. En un espacio vectorial complejo, la simetría se cambia por la *simetría conjugada* $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \overline{(\vec{v} \mid \vec{u})}$, y los demás axiomas siguen igual. El producto usual en $\mathbb{C}^n$ es

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Es **lineal en el primer argumento** y **conjugado en el segundo**: $(\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v})$, pero $(\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}\,(\vec{u} \mid \vec{v})$. Es la convención de los exámenes de la asignatura. Algunos

libros, como el de Lay, conjugan el primer argumento; con ellos, los resultados de un mismo ejercicio pueden salir conjugados.

Norma, distancia y ángulo.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} \mid \vec{v})}, \qquad d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|, \qquad \cos\theta = \frac{(\vec{u} \mid \vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \ \text{(espacio real)}.$$

Un vector *unitario* tiene norma 1; $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ es unitario. Todo depende del producto interno: con otro producto, los mismos vectores tienen otra norma y otro ángulo.

SOLO PLAN 2010 **Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** $|(\vec{u} \mid \vec{v})| \le \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, con igualdad solo si los vectores son linealmente dependientes. Es la razón de que el cociente que define $\cos\theta$ esté entre -1 y 1. De ella sale la *desigualdad del triángulo*, $\|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, que se pide comprobar con números en el ejercicio 4.5.3.

Ortogonalidad. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *ortogonales* si $(\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$. Un conjunto es *ortogonal* si sus vectores son ortogonales dos a dos, y *ortonormal* si además todos son unitarios. Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

Coordenadas en una base ortogonal. Si $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ es una base ortogonal, no hace falta resolver un sistema:

$$\vec{v} = \sum_i \frac{(\vec{v} \mid \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i \mid \vec{e}_i)}\,\vec{e}_i.$$

En una base ortonormal los denominadores valen 1.

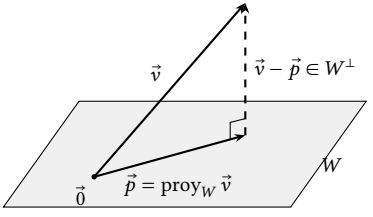
Complemento ortogonal. Si W es un subespacio de V,

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V \mid (\vec{v} \mid \vec{w}) = 0 \text{ para todo } \vec{w} \in W\}.$$

Es un subespacio, y basta pedir la ortogonalidad con los vectores de una base de W. En dimensión finita, $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

Teorema de proyección. Cada $\vec{v} \in V$ se escribe de una sola manera como $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, con $\vec{p} \in W$ y $\vec{q} \in W^{\perp}$. El vector $\vec{p} = \text{proy}_W\,\vec{v}$ es la *proyección* de $\vec{v}$ sobre W: es el vector de W **más cercano** a $\vec{v}$, y la distancia mínima de $\vec{v}$ a W es $\|\vec{v}-\vec{p}\|$. Con una base ortogonal $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k\}$ de W:

$$\text{proy}_W\,\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\vec{v} \mid \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i \mid \vec{e}_i)}\,\vec{e}_i.$$



Mínimos cuadrados. Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución (más ecuaciones que incógnitas, datos experimentales), la *solución por mínimos cuadrados* $\hat{x}$ es la que hace

mínima $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ con el producto usual. Hay que distinguir dos vectores: $\hat{x}$ es el vector de **coeficientes** (en el ajuste de una parábola, a, b y c), y $A\hat{x}$ es el vector **ajustado**, que es la proyección de $\vec{b}$ sobre el espacio columna de A y tiene tantas componentes como datos. $\hat{x}$ se obtiene de las *ecuaciones normales*

$$A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}.$$

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar si la función es un producto interno», «indicar los axiomas que no satisface»	revisar los cuatro axiomas	4.3.1
«norma», «distancia», «ángulo», «valor de k para que la distancia sea…»	sustituir en las fórmulas	4.3.2
«base ortogonal», «base ortonormal», «Gram-Schmidt»	ortogonalizar	4.3.3
«complemento ortogonal», «$W^{\perp}$», «vectores ortogonales a…»	$(\vec{v} \mid \vec{w}_i) = 0$ con una base de W	4.3.4
«proyección sobre W», «vector de W más cercano», «más próximo», «mínima distancia», «expresar $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}'$»	teorema de proyección	4.3.5
«mínimos cuadrados», «el polinomio que mejor se ajusta a los datos»	ecuaciones normales	4.3.6
«demostrar» con ortogonales (Pitágoras, conjunto ortogonal)	desarrollar con los axiomas	4.3.7

4.3 Procedimientos

4.3.1 ¿Es un producto interno?

1. Escribe la función con vectores genéricos $\vec{u} = (u_1, \dots)$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y un escalar α.
2. Revisa los cuatro axiomas en orden: simetría (conjugada, si el espacio es complejo), aditividad, homogeneidad y positividad. Para cada uno escribe «se cumple» con la cuenta, o «no se cumple» con un contraejemplo numérico.
3. **La positividad es la que suele fallar.** Busca un vector no nulo con $(\vec{v} \mid \vec{v}) = 0$ o negativo: si la expresión de $(\vec{v} \mid \vec{v})$ no usa todas las componentes, o es un cuadrado de una suma, $(\vec{v} \mid \vec{v}) = (v_1 + v_2)^2$, hay vectores no nulos que dan cero.
4. Si piden «todos los axiomas que no satisface», revisa los cuatro aunque el primero ya falle.

4.3.2 Norma, distancia y ángulo

1. Usa el producto que da el enunciado, no el usual. En un espacio complejo, conjuga las componentes del segundo vector: $\|\vec{v}\|^2 = \sum c_i |v_i|^2$.
2. Para una distancia, calcula primero $\vec{u} - \vec{v}$ y luego su norma.

3. Si hay una incógnita (k, a), iguala la expresión al dato y despeja; comprueba que el valor deja un producto interno válido (por ejemplo, $k > 0$).

4.3.3 Gram-Schmidt

Dada una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$:

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_1, \qquad \vec{e}_2 = \vec{v}_2 - \frac{(\vec{v}_2 \mid \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1)}\vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 = \vec{v}_3 - \frac{(\vec{v}_3 \mid \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1)}\vec{e}_1 - \frac{(\vec{v}_3 \mid \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2)}\vec{e}_2.$$

1. Calcula los productos con el producto interno del enunciado.
2. Puedes multiplicar cada $\vec{e}_i$ por una constante para quitar fracciones antes de seguir: la ortogonalidad no cambia.
3. Comprueba $(\vec{e}_i \mid \vec{e}_j) = 0$ al terminar.
4. Si piden base ortonormal, divide cada $\vec{e}_i$ entre su norma (con el mismo producto interno).

4.3.4 Complemento ortogonal

1. Obtén una base $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ de W. Si W está dado por ecuaciones ($x+y-z=0$), primero resuélvelas.
2. Toma un vector genérico $\vec{v}$ de V y plantea $(\vec{v} \mid \vec{w}_1) = 0, \dots, (\vec{v} \mid \vec{w}_k) = 0$, con el producto del enunciado.
3. Resuelve el sistema homogéneo; $W^\perp$ son sus soluciones. Comprueba que $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.
4. Atajo en $\mathbb{R}^3$ con el producto usual: si W es el plano $ax + by + cz = 0$, entonces $W^\perp = \text{gen}\{(a, b, c)\}$. Con un producto ponderado este atajo **no** vale.

4.3.5 Proyección y vector más cercano

1. Consigue una base **ortogonal** de W (Gram-Schmidt si hace falta).
2. $\vec{p} = \text{proy}_W \vec{v} = \sum \frac{(\vec{v}|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$, con $\vec{v}$ en el primer lugar del producto.
3. Comprueba que $\vec{v} - \vec{p}$ es ortogonal a cada $\vec{e}_i$.
4. Si $W^\perp$ tiene dimensión 1 (un plano en $\mathbb{R}^3$), es más corto proyectar sobre $W^\perp = \text{gen}\{\vec{n}\}$ y restar: $\vec{p} = \vec{v} - \frac{(\vec{v}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})}\vec{n}$.
5. La distancia mínima de $\vec{v}$ a W es $\|\vec{v} - \vec{p}\|$. Para «expresar $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}'$», $\vec{w} = \vec{p}$ y $\vec{w}' = \vec{v} - \vec{p}$.

4.3.6 Mínimos cuadrados

1. Escribe el modelo ($y = ax^2 + bx + c$, $y = mx + b$) y una ecuación por dato: el renglón de A es $(x_i^2,\ x_i,\ 1)$ y la componente de $\vec{b}$ es y_i.
2. Calcula $A^T A$ y $A^T\vec{b}$. Sus entradas son sumas: $\sum x_i^4,\ \sum x_i^3, \dots,\ \sum y_i$.
3. Resuelve las ecuaciones normales $A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}$.
4. Comprueba: el vector de residuos $\vec{b} - A\hat{x}$ es ortogonal a cada columna de A.

4.3.7 Demostraciones con ortogonalidad

1. Desarrolla el producto interno con los axiomas: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + (\vec{u} \mid \vec{v}) + (\vec{v} \mid \vec{u}) + \|\vec{v}\|^2$.
2. Usa la hipótesis ($(\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$; en un espacio complejo también $(\vec{v} \mid \vec{u}) = \overline{0} = 0$).

3. Termina con la igualdad pedida y una frase de conclusión.

4.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 5.

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y sea $W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$. Determine la proyección de $\vec{m} = (2, -1, 3)$ sobre W.

Datos. W es un plano por el origen con vector normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

Planteamiento. $\text{proy}_W \vec{m} = \sum \frac{(\vec{m}|\vec{e_i})}{(\vec{e_i}|\vec{e_i})}\vec{e_i}$ con una base ortogonal de W; se comprueba con $\vec{m} - \vec{p} \in W^{\perp}$.

Resolución.

1. Base de W: $z = x + y$, así que $(x, y, x+y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Estos dos vectores no son ortogonales: $(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1) = 1$.
2. Gram-Schmidt: $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$, y se toma $\vec{e}_2 = (-1, 2, 1)$. Comprobación: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -1 + 0 + 1 = 0$.
3. $(\vec{m} \mid \vec{e}_1) = 2 + 3 = 5$, $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1) = 2$; $(\vec{m} \mid \vec{e}_2) = -2 - 2 + 3 = -1$, $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2) = 6$.
4. $\vec{p} = \frac{5}{2}(1, 0, 1) - \frac{1}{6}(-1, 2, 1) = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \frac{5}{2} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.
5. Comprobación con el atajo: $\vec{m} - \frac{(\vec{m}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})}\vec{n} = (2, -1, 3) - \frac{-2}{3}(1, 1, -1) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Además $\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{7}{3} = 0$: $\vec{p} \in W$.
6. **Resultado:** $\text{proy}_W \vec{m} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$. La distancia de $\vec{m}$ a W es $\|\vec{m} - \vec{p}\| = \frac{2}{3}\|(1, 1, -1)\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · ¿Es producto interno? Un cuadrado disfrazado

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 3.

Determine si la función $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $G\big((x, y), (z, w)\big) = xz + xw + yz + yw$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$. En caso negativo, indique todos los axiomas de la definición que no satisface.

Planteamiento. Se factoriza: $G\big((x, y), (z, w)\big) = (x + y)(z + w)$. Se revisan los cuatro axiomas.

Resolución.

1. **Simetría:** $G\big((z, w), (x, y)\big) = (z + w)(x + y) = G\big((x, y), (z, w)\big)$. Se cumple.
2. **Aditividad:** con $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$: $(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)(z + w) = (x_1 + y_1)(z + w) + (x_2 + y_2)(z + w)$. Se cumple.
3. **Homogeneidad:** $(\alpha x + \alpha y)(z + w) = \alpha(x + y)(z + w)$. Se cumple.
4. **Positividad:** $G\big((x, y), (x, y)\big) = (x + y)^2 \geq 0$, pero vale cero en vectores no nulos: $G\big((1, -1), (1, -1)\big) = 0$ con $(1, -1) \neq \vec{0}$. No se cumple.
5. **Resultado:** G **no** es un producto interno. Solo falla la positividad: hay vectores no nulos, como $(1, -1)$, con $G(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.

Ejercicio 4.5.2 · ¿Es producto interno? En un espacio complejo de matrices

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 5.

Sea el espacio vectorial complejo $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\}$. Determine si

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) = 2b\overline{y}$$

es un producto interno en N.

Resolución.

1. **Simetría conjugada:** intercambiando los argumentos se obtiene $2y\overline{b}$, y $\overline{2y\overline{b}} = 2\overline{y}b = 2b\overline{y}$. Se cumple.
2. **Aditividad:** con $b_1 + b_2$ en la segunda entrada del primer argumento, $2(b_1 + b_2)\overline{y} = 2b_1\overline{y} + 2b_2\overline{y}$. Se cumple.
3. **Homogeneidad:** $2(\alpha b)\overline{y} = \alpha(2b\overline{y})$. Se cumple.
4. **Positividad:** $(A \mid A) = 2b\overline{b} = 2|b|^2 \geq 0$, pero no depende de a: con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $(A \mid A) = 0$. No se cumple.
5. **Resultado: no** es un producto interno en N; falla la positividad.

Ejercicio 4.5.3 · Producto complejo ponderado y desigualdad del triángulo

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 4.

Sea el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con el producto interno $(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1\overline{y_1} + 4x_2\overline{y_2}$, y sean $\vec{z} = (1, i)$ y $\vec{w} = (i, a)$.

- a) Determine el número a para que $(\vec{z} \mid \vec{w}) = 3i$.
- b) Con ese valor de a, compruebe que $\|\vec{z} + \vec{w}\| \leq \|\vec{z}\| + \|\vec{w}\|$.

Resolución.

1. a) Se conjugan las componentes de $\vec{w}$, el segundo argumento: $(\vec{z} \mid \vec{w}) = 1 \cdot \bar{i} + 4\, i\, \bar{a} = -i + 4i\bar{a}$.
2. $-i + 4i\bar{a} = 3i$ da $4i\bar{a} = 4i$, así que $\bar{a} = 1$ y $a = 1$.
3. b) Con $\vec{w} = (i, 1)$: $\|\vec{z}\|^2 = |1|^2 + 4|i|^2 = 5$ y $\|\vec{w}\|^2 = |i|^2 + 4|1|^2 = 5$.
4. $\vec{z} + \vec{w} = (1 + i,\ 1 + i)$: $\|\vec{z} + \vec{w}\|^2 = |1 + i|^2 + 4|1 + i|^2 = 2 + 8 = 10$.
5. $\|\vec{z} + \vec{w}\| = \sqrt{10} \approx 3.16$ y $\|\vec{z}\| + \|\vec{w}\| = 2\sqrt{5} \approx 4.47$.
6. **Resultado:** a) $a = 1$; b) $\sqrt{10} \leq 2\sqrt{5}$: la desigualdad se cumple.

Ejercicio 4.5.4 · Constante del producto interno a partir de una distancia

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 5.

Sea M_2 el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos con el producto interno real $(A \mid B) = k\ \mathrm{tr}(AB^T)$. Obtenga el valor de k si la distancia entre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es igual a 4.

Resolución.

1. $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $\operatorname{tr}\left((A-B)(A-B)^T\right)$ es la suma de los cuadrados de las entradas: $1+1+1+1=4$.
3. $d(A,B)^2 = (A-B \mid A-B) = 4k$. Se pide $d=4$: $4k=16$.
4. **Resultado:** $k=4$. Es positivo, así que la función sí es un producto interno.

Ejercicio 4.5.5 · Conjunto ortogonal (demostración)

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 6.

Para toda pareja de vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ diferentes de cero en un espacio vectorial real V con producto interno, determine si

$$A = \left\{ \vec{u} - \frac{(\vec{u} \mid \vec{w})}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w},\ \ \vec{w} \right\}$$

es un conjunto ortogonal.

Resolución.

1. Se calcula el producto de los dos vectores, con las propiedades de linealidad:

$$\left(\vec{u} - \frac{(\vec{u} \mid \vec{w})}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w} \,\middle|\, \vec{w} \right) = (\vec{u} \mid \vec{w}) - \frac{(\vec{u} \mid \vec{w})}{\|\vec{w}\|^2}(\vec{w} \mid \vec{w}).$$

2. Como $(\vec{w} \mid \vec{w}) = \|\vec{w}\|^2$, el segundo término es $(\vec{u} \mid \vec{w})$ y la diferencia es cero.
3. **Resultado:** sí, A es un conjunto ortogonal para cualquier pareja. Es exactamente el paso de Gram-Schmidt: a $\vec{u}$ se le quita su proyección sobre $\vec{w}$.

Ejercicio 4.5.6 · Base ortogonal, complemento y proyección con un producto ponderado

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 5.

Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$ y sea W el subespacio con base $K = \{(1,0,1),\ (0,1,-1)\}$. Determine:

- a) una base ortogonal de W;
- b) el complemento ortogonal de W;
- c) la proyección de $\vec{u} = (1,1,1)$ sobre W.

Resolución.

1. a) $\vec{e}_1 = (1,0,1)$, $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1) = 1+0+1 = 2$. $(\vec{v}_2 \mid \vec{e}_1) = 0+0-1 = -1$.
2. $\vec{e}_2 = (0,1,-1) - \frac{-1}{2}(1,0,1) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$; se toma $\vec{e}_2 = (1,2,-1)$. Comprobación con el producto ponderado: $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_1) = 1+0-1 = 0$. Base ortogonal: $\{(1,0,1),(1,2,-1)\}$.
3. b) $\vec{v} = (a,b,c) \in W^{\perp}$: $(\vec{v} \mid (1,0,1)) = a+c = 0$ y $(\vec{v} \mid (0,1,-1)) = 2b-c = 0$. Con $c = 2\alpha$: $a = -2\alpha$, $b = \alpha$.

$$W^{\perp} = \{\alpha(-2,1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

   Ojo: $(-2,1,2)$ no es perpendicular a W con el producto escalar usual; lo es con el ponderado.
4. c) $(\vec{u} \mid \vec{e}_1) = 1+0+1 = 2$; $(\vec{u} \mid \vec{e}_2) = 1+4-1 = 4$, $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2) = 1+8+1 = 10$.
5. $\vec{p} = \frac{2}{2}(1,0,1) + \frac{4}{10}(1,2,-1) = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

6. Comprobación: $\vec{u} - \vec{p} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}(-2, 1, 2) \in W^{\perp}$.
7. **Resultado:** a) $\{(1, 0, 1), (1, 2, -1)\}$; b) $W^{\perp} = \text{gen}\{(-2, 1, 2)\}$; c) $\text{proy}_W \vec{u} = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Ejercicio 4.5.7 · Complemento ortogonal en matrices con $\text{tr}(A^T B)$

Adaptado de: 3er extraordinario 2023-2, problema 5.

Sea M el espacio de las matrices reales de 2×2 con el producto interno $(A \mid B) = \text{tr}(A^T B)$, y sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

- a) Determine el complemento ortogonal $W^{\perp}$.
- b) Exprese $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ como $C = A + B$, con $A \in W$ y $B \in W^{\perp}$.

Resolución.

1. $\text{tr}(A^T B)$ es la suma de los productos entrada por entrada. Una base de W son las tres matrices canónicas E_{11}, E_{12}, E_{21}.
2. a) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W^{\perp}$ exige $(X \mid E_{11}) = x = 0$, $(X \mid E_{12}) = y = 0$, $(X \mid E_{21}) = z = 0$.

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Comprobación: $\dim W + \dim W^{\perp} = 3 + 1 = 4 = \dim M$.
3. b) La base de W es ortonormal, así que la proyección es quedarse con las tres entradas de W.
4. **Resultado:** a) $W^{\perp} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in W$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$.

Ejercicio 4.5.8 · Polinomio más próximo con un producto por evaluación

Adaptado de: 1er final 2025-2, problema 5.

Sea $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de P_2. Determine el polinomio $h(x) \in W$ más próximo a $m(x) = x^2 + 1$, con el producto interno

$$(p \mid q) = \sum_{i=-1}^{1} p(i)\, q(i) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Resolución.

1. $W = \text{gen}\{x^2\}$: una base de un solo vector ya es ortogonal. $h = \frac{(m \mid x^2)}{(x^2 \mid x^2)}\, x^2$.
2. Valores en $-1, 0, 1$: m vale $2, 1, 2$ y x^2 vale $1, 0, 1$.
3. $(m \mid x^2) = 2(1) + 1(0) + 2(1) = 4$ y $(x^2 \mid x^2) = 1 + 0 + 1 = 2$.
4. $h = \frac{4}{2} x^2 = 2x^2$.
5. Comprobación: $m - h = 1 - x^2$ vale $0, 1, 0$, y $(1 - x^2 \mid x^2) = 0 + 0 + 0 = 0$: es ortogonal a W.
6. **Resultado:** $h(x) = 2x^2$. La distancia mínima es $\|m - h\| = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$.

Ejercicio 4.5.9 · Mínimos cuadrados: la parábola que mejor se ajusta

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 6.

Los resultados de un experimento son los puntos (x, y): $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$. Empleando el método de mínimos cuadrados, determine el polinomio de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se ajusta a estos datos.

Planteamiento. Cuatro ecuaciones $ax_i^2 + bx_i + c = y_i$ con tres incógnitas: $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución exacta; se resuelven las ecuaciones normales.

Resolución.

1. Renglones $(x_i^2, x_i, 1)$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
2. $A^TA = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (sumas de x^4, x^3, x^2, x y el número de datos) y $A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (sumas de x^2y, xy, y).
3. Se resuelve $18a + 8b + 6c = 1$, $8a + 6b + 2c = 1$, $6a + 2b + 4c = 3$: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{13}{20}$, $c = \frac{31}{20}$.
4. Comprobación: los residuos $\vec{b} - A\hat{x} = \frac{1}{20}(-3, 9, -9, 3)$ suman cero y son ortogonales a las columnas de A.
5. **Resultado:** $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{13}{20}x + \frac{31}{20} = -0.75x^2 + 0.65x + 1.55$.

4.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 5.

Determine si el producto definido como $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{4} 2x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} 3y_i\right)$, para $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$, es un producto interno en $\mathbb{R}^4$.

Resultado: no es producto interno: cumple simetría, aditividad y homogeneidad, pero falla la positividad ($(1, -1, 0, 0)$ da cero).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 5.

Sea M el espacio de las matrices reales de 2×2 con el producto interno $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = ax + by + cz + dw$, y sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ n & r \end{pmatrix} \middle| \, m, n, r \in \mathbb{R} \right\}$. Determine la proyección ortogonal de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sobre W.

Resultado: $\text{proy}_W B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 5.

Sean $W = \{(b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y el producto interno $(\vec{u} \mid \vec{v}) = 2u_1v_1 + u_2v_2$.

- a) Determine el complemento ortogonal $W^\perp$.
- b) Exprese $(2, -1) = \vec{w} + \vec{w}'$, con $\vec{w} \in W$ y $\vec{w}' \in W^\perp$.

Resultado: a) $W^\perp = \text{gen}\{(1, -2)\}$; b) $\vec{w} = (1, 1)$, $\vec{w}' = (1, -2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 2° final 2024-1, problema 5.

Sea $B = \{(1, 2, 1), (1, -1, 1)\}$ una base de un subespacio W de $\mathbb{R}^3$. Con el producto interno usual, obtenga el vector de W más cercano a $(4, 2, -3)$.

Resultado: $\left(\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 3er extraordinario 2026-1, problema 5.

En $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ con el producto interno $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, use Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal a partir de $B = \{1, x, x^2\}$.

Resultado: $\left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 5.

Sea P el espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, con el producto interno $(p \mid q) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\,q(i)$, y sea $W = \{ax^2 + ax - a \mid a \in \mathbb{R}\}$. Determine el complemento ortogonal $W^\perp$.

Resultado: $W^\perp = \{ax^2 + bx + c \mid 21a + 11b + 5c = 0\} = \text{gen}\{5x^2 - 21,\ 5x - 11\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

4.7 Errores frecuentes

1. **Usar el producto usual cuando el enunciado da otro.** Con un producto ponderado cambian la norma, el complemento y la proyección.
2. **Conjugar el argumento equivocado.** En los exámenes se conjuga el segundo: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i\overline{v_i}$. En $\|\vec{v}\|^2$ aparece $|v_i|^2$, nunca v_i^2 con v_i complejo.
3. **Proyectar sobre una base que no es ortogonal.** La fórmula de la proyección solo vale con una base ortogonal; si no lo es, primero Gram-Schmidt.

4. **Concluir «es producto interno» porque $(\vec{v} \mid \vec{v}) \geq 0$.** Hace falta que solo el vector cero dé cero.
5. **Dar $W^{\perp}$ como un vector.** Es un subespacio: gen{…} o un conjunto con parámetro.
6. **Usar el atajo del vector normal con un producto ponderado.** (a, b, c) es normal al plano $ax + by + cz = 0$ solo con el producto escalar usual.
7. **Olvidar comprobar.** $\vec{v} - \vec{p}$ debe ser ortogonal a W, y en Gram-Schmidt $(\vec{e}_i \mid \vec{e}_j) = 0$.
8. **En mínimos cuadrados, poner los renglones de A al revés.** El orden de las columnas de A es el de las incógnitas (a, b, c) del modelo.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Axiomas: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \overline{(\vec{v} \mid \vec{u})} \cdot (\vec{u}+\vec{v} \mid \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{w})+(\vec{v} \mid \vec{w}) \cdot (\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (\vec{v} \mid \vec{v}) > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$
- Usual en $\mathbb{C}^n$: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i\overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (A \mid B) = \operatorname{tr}(A^T B)$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} \mid \vec{v})} \cdot d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \cdot |(\vec{u} \mid \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- Gram-Schmidt: $\vec{e}_k = \vec{v}_k - \sum_{i<k} \frac{(\vec{v}_k|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$
- $W^{\perp} = \{\vec{v} \mid (\vec{v} \mid \vec{w}_i) = 0\} \cdot \dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$
- $\operatorname{proy}_W \vec{v} = \sum \frac{(\vec{v}|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$ (base ortogonal) · distancia mínima $= \|\vec{v} - \operatorname{proy}_W \vec{v}\|$
- Mínimos cuadrados: $A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}$

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. El producto interno del enunciado escrito con componentes genéricas.
2. En «¿es producto interno?», los cuatro axiomas en orden, cada uno con «se cumple» o con un contraejemplo numérico.
3. Una base de W, y la comprobación de que es ortogonal (o Gram-Schmidt).
4. Cada producto $(\vec{v} \mid \vec{e}_i)$ y $(\vec{e}_i \mid \vec{e}_i)$ por separado, antes de armar la proyección.
5. El resultado con su comprobación: $\vec{v} - \vec{p} \perp W$, o $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

Si no sale la cuenta final, la base ortogonal de W y la fórmula de la proyección bien planteadas ya valen buena parte del problema.

Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno analizará las características principales de los operadores lineales definidos en espacios con producto interno y su aplicación a la resolución de problemas de ingeniería.

Objetivo (Plan 2016). El alumno analizará las características principales de los operadores lineales definidos en espacios con producto interno y las utilizará en la resolución de problemas de espacios vectoriales.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 8 finales del Plan 2010 y en 28 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016. Casi siempre es el último problema y vale de 14 a 20 puntos.
- **Qué sale:** «obtener el adjunto y decidir si es normal, simétrico, hermitiano…» o «la descomposición espectral». En el Plan 2016 sale además, a veces, una cónica sin término mixto (3 de 29).
- **Antes:** esta unidad usa los valores y vectores propios de la Unidad 3B y la normalización de la Unidad 4.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 (20 min), sobre todo la tabla de tipos de operador.
  2. Sigue el ejemplo 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (15 min cada uno).

5.1 Conceptos y expresiones

Convención del producto interno. En los espacios complejos, el producto interno es lineal en el primer argumento y conjugado en el segundo. El usual en $\mathbb{C}^n$ es

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n},$$

como lo escriben los exámenes. Así, $(\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v})$ y $(\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$. En los espacios reales la barra no hace nada.

Adjunto. Sea V un espacio con producto interno y $T : V \to V$ un operador lineal. El *adjunto* de T es el operador $T^* : V \to V$ que cumple

$$(T(\vec{u}) \mid \vec{v}) = (\vec{u} \mid T^*(\vec{v})) \qquad \text{para todos } \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

En dimensión finita siempre existe y es único. **Si M es la matriz de T en una base ortonormal**, la matriz de T^* en esa misma base es la conjugada transpuesta:

$$M(T^*) = \overline{M}^{\,T} = M^*.$$

En un espacio real basta transponer. La base canónica es ortonormal respecto al producto interno usual; si el producto interno no es el usual, se usa la definición o una base ortonormal respecto a ese producto.

Propiedades del adjunto. $(T^*)^* = T$, $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}\, T^*$ y $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

Tipos de operador. Con M la matriz en una base ortonormal:

Operador	Condición	Matriz y valores propios
normal	$T \circ T^* = T^* \circ T$	$MM^* = M^*M$
simétrico (real)	$T^* = T$	$M^T = M$; valores propios reales
hermitiano (complejo)	$T^* = T$	$M^* = M$; diagonal real; valores propios reales
antisimétrico (real)	$T^* = -T$	$M^T = -M$; diagonal de ceros
antihermitiano (complejo)	$T^* = -T$	$M^* = -M$; diagonal imaginaria pura; valores propios imaginarios puros
ortogonal (real)	$T^* = T^{-1}$	$M^T M = I$; columnas ortonormales
unitario (complejo)	$T^* = T^{-1}$	$M^* M = I$; valores propios de módulo 1

Todos los de la tabla son normales. Un operador puede ser normal sin ser de ninguno de los otros tipos.

Teorema espectral. En un espacio complejo de dimensión finita, T es normal si y solo si existe una base *ortonormal* de V formada por vectores propios de T. En un espacio real, T es simétrico si y solo si existe esa base ortonormal. En particular, toda matriz real simétrica es diagonalizable, y los vectores propios de valores propios distintos de un operador normal son ortogonales entre sí.

Descomposición espectral. Si T es normal (o simétrico, en el caso real) con valores propios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, entonces

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k,$$

donde P_i es la proyección ortogonal sobre $E(\lambda_i)$. Las proyecciones cumplen $P_1 + \cdots + P_k = I$ y $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$. Si $\{\hat{e}\}$ es una base ortonormal de $E(\lambda_i)$,

$$P_i(\vec{v}) = \sum (\vec{v} \mid \hat{e})\, \hat{e}, \qquad \text{y en matriz} \qquad P_i = \sum \hat{e}\, \bar{\hat{e}}^{\,T},$$

donde $\hat{e}$ se escribe como columna. Así, en forma de regla, $T(\vec{v}) = \sum_i \lambda_i P_i(\vec{v})$. Si se toma una base ortonormal $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ de vectores propios de todo V, con $T(\hat{e}_j) = \mu_j \hat{e}_j$ (cada valor propio se repite tantas veces como la dimensión de su espacio), queda $T(\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\vec{v} \mid \hat{e}_j)\, \hat{e}_j$.

Formas cuádricas. La ecuación de una cónica con centro en el origen, $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

A es simétrica, así que tiene una base ortonormal de vectores propios $\hat{e}_1, \hat{e}_2$. Con el cambio de variables $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $P = [\,\hat{e}_1\ \hat{e}_2\,]$, la ecuación queda **sin término mixto**:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d.$$

Los nuevos ejes x', y' apuntan en la dirección de los vectores propios (ejes principales). Si los dos valores propios tienen el signo de d, es una elipse; si tienen signos contrarios, una hipérbola; si uno es cero, una parábola degenerada (rectas paralelas o vacío).

5.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«obtener el adjunto», «T^*», «$\|T^*(\vec{v})\|$»	regla de T^*	5.3.1
«determinar si es normal / simétrico / hermitiano / antisimétrico / antihermitiano / unitario»	comparar M con M^*	5.3.2
«determinar k para que sea hermitiano (antihermitiano)»	igualar entradas	5.3.2
«descomposición espectral», «proyecciones», «mediante la descomposición espectral obtener la regla»	$T = \sum \lambda_i P_i$	5.3.3
«ecuación de la cónica sin término mixto», «forma cuádrica»	$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$	5.3.4

5.3 Procedimientos

5.3.1 Adjunto

1. Comprueba que el producto interno sea el usual (o que la base sea ortonormal respecto al producto dado).
2. Escribe la matriz M de T en la base canónica.
3. $M(T^*) = \overline{M}^{\,T}$: transpón y conjuga cada entrada ($i \to -i$).
4. Escribe la regla: $T^*(x, y) = M^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Si se pide $T^*(\vec{v})$ o su norma, aplica la regla y usa $\|\vec{w}\|^2 = \sum |w_i|^2$, con $|a + bi|^2 = a^2 + b^2$.

5.3.2 Tipo de operador

1. Calcula M^*.
2. Si $M^* = M$: simétrico (real) o hermitiano (complejo). Si $M^* = -M$: antisimétrico o antihermitiano. En los dos casos, también es normal.
3. Si no, calcula MM^* y M^*M y compáralos: normal si son iguales. Para unitario u ortogonal: $M^*M = I$.

4. **Con parámetro:** escribe la condición entrada por entrada (por ejemplo $m_{ij} = -\overline{m_{ji}}$ para antihermitiano) y despeja. Revisa también la diagonal: en un hermitiano es real, en un antihermitiano es imaginaria pura.
5. Concluye con la definición: «T es hermitiano porque $T^* = T$».

5.3.3 Descomposición espectral

1. Comprueba que T sea normal (simétrico, si es real); si no, no hay descomposición espectral.
2. Valores propios y espacios característicos (Unidad 3B).
3. Base ortonormal de cada espacio: normaliza cada vector propio; si el espacio tiene dimensión 2 o más, aplica Gram-Schmidt dentro de él.
4. Proyecciones: $P_i = \sum \hat{e}\,\bar{\hat{e}}^T$, o en regla $P_i(\vec{v}) = \sum(\vec{v} \mid \hat{e})\hat{e}$.
5. $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$. Comprueba $P_1 + \cdots + P_k = I$ y que la suma reproduzca M.
6. **Al revés** (se dan los valores y los espacios y se pide la regla): arma las proyecciones con los espacios dados y suma $\lambda_i P_i$.

5.3.4 Cónica sin término mixto

1. Escribe A: los coeficientes de x^2 y y^2 en la diagonal y la **mitad** del coeficiente de xy fuera de ella.
2. Valores propios λ_1, λ_2 y vectores propios unitarios $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ (ortogonales, porque A es simétrica).
3. La ecuación sin término mixto es $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$, con x' en la dirección de $\hat{e}_1$ y y' en la de $\hat{e}_2$.
4. Divide entre d para la forma canónica y di qué cónica es. Si se pide el giro, $P = [\,\hat{e}_1\ \hat{e}_2\,]$ con $\det P = 1$ es una rotación.

5.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo A, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $S(x, y, z) = (3x - 2y,\ -2x + 3y,\ 8z)$.

- a) Obtenga el adjunto de S.
- b) Determine si S es normal.

Datos. Espacio real con el producto interno usual: la base canónica es ortonormal.
Planteamiento. $M(S^*) = M^T$; S es normal si $MM^T = M^T M$.
Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ y $M^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = M$.
2. Entonces $S^*(x, y, z) = (3x - 2y,\ -2x + 3y,\ 8z)$: el adjunto es el mismo operador. S es simétrico.
3. b) Como $S^* = S$, $S \circ S^* = S \circ S = S^* \circ S$.
4. **Resultado:** $S^* = S$; S es simétrico y, por lo tanto, normal.

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Descomposición espectral de un operador simétrico en $\mathbb{R}^2$

Adaptado de: 2º final 2014-2, tipo A, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla $S(x,y) = (4x+y,\ x+4y)$. Obtenga la descomposición espectral de S.

Resolución.

1. $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica: hay descomposición espectral.
2. $\det(M - \lambda I) = (4-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$. Valores propios: 5 y 3.
3. $\lambda = 5$: $-x + y = 0$, vector $(1,1)$, unitario $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. $\lambda = 3$: $x + y = 0$, vector $(1,-1)$, unitario $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Son ortogonales.
4. Proyecciones: $P_1 = \hat{e}_1\hat{e}_1^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P_2 = \hat{e}_2\hat{e}_2^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobación: $P_1 + P_2 = I$.
5. En forma de regla: $P_1(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$ y $P_2(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$.
6. **Resultado:** $S = 5P_1 + 3P_2$, es decir,

$$S(x,y) = 5\left(\tfrac{x+y}{2}, \tfrac{x+y}{2}\right) + 3\left(\tfrac{x-y}{2}, \tfrac{y-x}{2}\right).$$

   Comprobación: la primera componente es $\frac{5x+5y+3x-3y}{2} = 4x + y$.

Ejercicio 5.5.2 · Adjunto y normalidad en $\mathbb{C}^2$

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo B, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2}$ y el operador lineal $S:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla $S(x,y) = (xi,\ 2iy)$.

- a) Obtenga el adjunto de S.
- b) Determine si S es normal.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$. Al transponer no cambia; al conjugar, $i \to -i$: $M^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$. Entonces $S^*(x,y) = (-ix,\ -2iy)$.
2. Comprobación con la definición: $(S(\vec{u}) \mid \vec{v}) = iu_1\overline{v_1} + 2iu_2\overline{v_2}$ y $(\vec{u} \mid S^*(\vec{v})) = u_1\overline{(-iv_1)} + u_2\overline{(-2iv_2)} = iu_1\overline{v_1} + 2iu_2\overline{v_2}$. Coinciden.
3. b) $MM^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = M^*M$: las matrices diagonales conmutan.
4. **Resultado:** $S^*(x,y) = (-ix,\ -2iy)$; S es normal. Además $S^* = -S$: S es antihermitiano.

Ejercicio 5.5.3 · ¿Es normal? y la norma de $T^*(\vec{v})$

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 7.

Sea el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla $T(x,y) = (2x + iy,\ y - ix)$.

- a) Determine si T es normal respecto al producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

- b) Obtenga $\|T^*(1+i,\ 1-i)\|$.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Transpuesta: $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$; conjugada: $M^* = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = M$.
2. $T^* = T$: T es hermitiano y, por lo tanto, normal.
3. b) $T^*(1+i,\ 1-i) = T(1+i,\ 1-i) = \big(2(1+i)+i(1-i),\ (1-i)-i(1+i)\big) = (3+3i,\ 2-2i)$.
4. $\|(3+3i,\ 2-2i)\|^2 = |3+3i|^2 + |2-2i|^2 = 18+8 = 26$.
5. **Resultado:** T es normal (es hermitiano); $\|T^*(1+i, 1-i)\| = \sqrt{26}$.

Ejercicio 5.5.4 · Adjunto y ¿antisimétrico? en $\mathbb{R}^3$

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla $S(x, y, z) = (2x + 3y,\ 3x + 2y,\ 5z)$.

- a) Obtenga el adjunto de S.
- b) Determine si S es antisimétrico.

Resolución.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M^T$. Por lo tanto $S^*(x, y, z) = (2x + 3y,\ 3x + 2y,\ 5z) = S(x, y, z)$.
2. b) Antisimétrico exige $S^* = -S$, es decir, $M^T = -M$, y en particular una diagonal de ceros. Aquí la diagonal es $2, 2, 5$.
3. **Resultado:** $S^* = S$; S **no** es antisimétrico (es simétrico).

Ejercicio 5.5.5 · Valores propios y descomposición espectral de una matriz singular

Adaptado de: 1er final 2014-2, tipo B, problema 5.

Sea $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada al operador $H:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica (producto interno usual). Determine: a) el polinomio característico; b) los valores característicos; c) una base de cada espacio característico; d) una matriz diagonalizadora; e) la descomposición espectral de H.

Resolución.

1. a) $\det(N - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$.
2. b) $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$. (det $N = 0$: era de esperarse un valor propio nulo.)
3. c) $\lambda = 0$: $x + 2y = 0$: base $\{(2, -1)\}$. $\lambda = 5$: $-4x + 2y = 0$: base $\{(1, 2)\}$.
4. d) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, con $P^{-1}NP = \operatorname{diag}(0, 5)$.
5. e) N es simétrica. Unitarios: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. $P_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
6. **Resultado:** $H = 0\,P_1 + 5\,P_2 = 5P_2$, es decir, $H(x, y) = 5\big(\frac{x+2y}{5}\big)(1, 2) = (x+2y,\ 2x+4y)$. El término de $\lambda = 0$ no aporta nada, pero se escribe.

Ejercicio 5.5.6 · ¿Es hermitiano?

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 6.

Determine si el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla $T(x,y) = (x - iy,\ ix + y)$ es hermitiano respecto al producto interno $((x_1,y_1) \mid (x_2,y_2)) = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2}$.

Resolución.

1. El producto interno es el usual, así que la base canónica es ortonormal y se puede usar la matriz.
2. $T(1,0) = (1,i)$ y $T(0,1) = (-i,1)$: $M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
3. Transpuesta: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$; conjugada: $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = M$.
4. **Resultado:** $T^* = T$: T sí es hermitiano.

Ejercicio 5.5.7 · Parámetro para que el operador sea antihermitiano

Adaptado de: 2º extraordinario 2023-1, problema 5.

Determine, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{C}$ para que el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ con regla $T(a,b,c) = \big((-2+3i)b - c,\ ka - ic,\ a - ib\big)$ sea antihermitiano respecto al producto interno usual.

Resolución.

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & -2+3i & -1 \\ k & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$. Antihermitiano: $M^* = -M$, o sea $m_{ij} = -\overline{m_{ji}}$ para todas las entradas.
2. Diagonal: ceros, se cumple.
3. Entradas $(1,3)$ y $(3,1)$: $-1 = -\overline{1}$, se cumple. Entradas $(2,3)$ y $(3,2)$: $-i = -\overline{(-i)} = -i$, se cumple.
4. Entradas $(1,2)$ y $(2,1)$: $-2+3i = -\overline{k}$, así que $\overline{k} = 2 - 3i$ y $k = 2 + 3i$.
5. **Resultado:** $k = 2 + 3i$. Si se pidiera k real, no existiría ningún valor.

Ejercicio 5.5.8 · Cónica sin término mixto

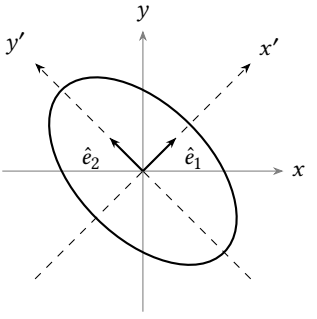
Adaptado de: 2º final 2025-1, problema 6.

Sea la cónica de ecuación $x^2 + xy + y^2 = 3$. Determine una ecuación de la cónica sin términos mixtos.

Resolución.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$: el coeficiente de xy es 1 y se reparte $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.
2. $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0$: $\lambda = \frac{3}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.
3. $\lambda = \frac{3}{2}$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. $\lambda = \frac{1}{2}$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. $P = [\,\hat{e}_1\ \hat{e}_2\,]$ tiene determinante 1: es un giro de 45°.
4. La ecuación queda $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$; al dividir entre 3, $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$.

5. **Resultado:** $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$, una elipse con semiejes $\sqrt{2}$ sobre el eje x' (dirección $(1,1)$) y $\sqrt{6}$ sobre el eje y' (dirección $(-1,1)$).



5.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo A, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y la base $B = \{(1,0),(0,1)\}$. La matriz asociada al operador lineal $S:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto a B es $M(S) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Obtenga la descomposición espectral de S.

Resultado: $S = 6P_1 + 1P_2$, con $P_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (sobre $\text{gen}\{(2,1)\}$) y $P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (sobre $\text{gen}\{(-1,2)\}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 1er final 2015-1, tipo C, problema 6.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y el operador $S:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla $S(a,b) = (5a + 2b,\ 2a + 5b)$. Obtenga la descomposición espectral de S.

Resultado: $S = 7P_1 + 3P_2$, con $P_1(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ y $P_2(a,b) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 6.

Sea la cónica de ecuación $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$. Determine una ecuación de la cónica sin término mixto.

Resultado: $9x'^2 - y'^2 = 9$, es decir, $x'^2 - \frac{y'^2}{9} = 1$: una hipérbola, con x' en la dirección de $(1,1)$ y y' en la de $(-1,1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 2º extraordinario 2021-1, problema 6.

Dada la curva $C:\ 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 9$, exprese su ecuación sin el término mixto.

Resultado: $0\,x'^2 + 4y'^2 = 9$, es decir, $y' = \pm\frac{3}{2}$: dos rectas paralelas al eje x' (dirección $(1,1)$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: 1er final 2026-1, problema 6.

Sean el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $T:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por $T(x,y) = \big(-2ix + (3-i)y,\ (-3-i)x - 4iy\big)$. Determine si T es antihermitiano.

Resultado: sí: $M^* = -M$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

Ejercicio propuesto 5.6.6

Adaptado de: 2º final 2024-1, problema 6.

Los valores característicos de un operador $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son $\lambda_{1,2} = 1$ y $\lambda_3 = 7$; los espacios característicos correspondientes son $E(1) = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y $E(7) = \{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Mediante la descomposición espectral de T, obtenga su regla de correspondencia (producto interno usual).

Resultado: $T(x,y,z) = (x,\ y,\ 7z)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

5.7 Errores frecuentes

1. **Transponer sin conjugar** en un espacio complejo. El adjunto es $\overline{M}^{\,T}$: las dos operaciones.
2. **Usar M^* con un producto interno que no es el usual.** La regla «adjunto = conjugada transpuesta» solo vale en una base ortonormal respecto a ese producto.
3. **Conjugar el argumento equivocado.** Con la convención de este libro, $(\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$.
4. **Confundir los nombres:** simétrico y antisimétrico son de espacios reales; hermitiano y antihermitiano, de complejos. Un real simétrico es también hermitiano.
5. **Decir «no es normal» porque no es simétrico.** Normal se comprueba con $MM^* = M^*M$.
6. **Proyecciones con vectores sin normalizar.** $P = \hat{e}\,\overline{\hat{e}}^{\,T}$ exige $\|\hat{e}\| = 1$; con $\vec{v}$ sin normalizar, $P = \dfrac{\vec{v}\,\overline{\vec{v}}^{\,T}}{(\vec{v} \mid \vec{v})}$. En un espacio real la conjugación no cambia nada; en uno complejo es obligatoria.
7. **Olvidar la mitad del término mixto** al formar la matriz de la cónica: xy con coeficiente b va como $\frac{b}{2}$ en las dos posiciones.

8. **No comprobar.** $\sum P_i = I$ y $\sum \lambda_i P_i = M$ se verifican en una línea.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i \overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$
- $(T(\vec{u}) \mid \vec{v}) = (\vec{u} \mid T^*(\vec{v})) \cdot$ en base ortonormal $M(T^*) = \overline{M}^T$
- Normal: $MM^* = M^*M \cdot$ hermitiano (simétrico): $M^* = M \cdot$ antihermitiano (antisimétrico): $M^* = -M \cdot$ unitario (ortogonal): $M^*M = I$
- Teorema espectral: normal (simétrico, en real) $\iff$ base ortonormal de vectores propios
- $T = \sum \lambda_i P_i \cdot P_i = \sum \hat{e}\,\bar{\hat{e}}^T$ (base ortonormal de $E(\lambda_i)) \cdot \sum P_i = I \cdot$ con base ortonormal de vectores propios de V, $T(\vec{v}) = \sum_j \mu_j(\vec{v} \mid \hat{e}_j)\hat{e}_j$
- Cónica: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. El producto interno y la frase «la base canónica es ortonormal respecto a él».
2. La matriz M, su transpuesta y su conjugada, en ese orden.
3. La regla de T^* y la condición del tipo de operador con su conclusión.
4. Para la descomposición espectral: valores propios, vectores unitarios, cada P_i, y la comprobación $\sum P_i = I$.
5. Para la cónica: la matriz A con la mitad del término mixto, los valores propios, la nueva ecuación y el nombre de la cónica.

Si no sale la descomposición completa, los valores y vectores propios unitarios bien calculados ya valen buena parte del problema.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del libro, y la tabla de ángulos notables que usan las matrices de rotación y las cónicas.

Unidad 1B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

- Grupo: cerradura, asociatividad, idéntico $a * e = e * a = a$, inversos $a * a' = a' * a = e$ · abeliano: además $a * b = b * a$
- Tabla: idéntico = renglón y columna que repiten los encabezados · conmutativa = simétrica · grupo: sin repetidos por renglón ni columna
- Campo $(K, \oplus, \odot)$: $(K, \oplus)$ grupo abeliano, $(K \setminus \{0\}, \odot)$ grupo abeliano, $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$
- En $\{0, 1, 2\}$ módulo 3: $-1 = 2$, $-2 = 1$, $2^{-1} = 2$
- $x * y = x + y + xy$: $x * y + 1 = (x + 1)(y + 1)$, $e = 0$, $x' = -\frac{x}{1+x}$
- $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$, $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

Unidad 2 · Espacios vectoriales

- Subespacio: $\vec{0} \in W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W$, $\alpha\vec{u} \in W$
- $\dim \mathbb{R}^n = n \cdot \dim P_n = n + 1 \cdot \dim M_{m\times n} = mn \cdot \dim \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R} = 2$
- n vectores de $\mathbb{R}^n$ son base $\iff \det \neq 0$
- Vectores como renglones $\to$ escalonar $\to$ renglones no nulos = base del generado
- $(\vec{v})_B = M_B^A(\vec{v})_A \cdot (M_B^A)^{-1} = M_A^B \cdot M_C^A = M_C^B M_B^A \cdot M_B^A = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$
- rango N = dim espacio renglón = dim espacio columna
- Wronskiano (SOLO PLAN 2010): $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ independientes
- $\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \cdot \cos(x + \pi) = -\cos x$

Unidad 3A · Transformaciones lineales

- Lineal: $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ y $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}) \cdot T(\vec{0}) = \vec{0}$
- $N(T) = \{\vec{v} \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\} \cdot T(V) = \text{gen}\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$
- $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V) \cdot \dim T(V) = \text{rango } M(T)$
- Inyectiva $\iff N(T) = \{\vec{0}\} \cdot$ biyectiva $\iff M(T)$ cuadrada con $\det \neq 0$
- $M_B^A(T)$: columna $j = (T(\vec{v}_j))_B \cdot (T(\vec{v}))_B = M_B^A(T)(\vec{v})_A$
- $M(S + T) = M(S) + M(T) \cdot M(R \circ T) = M(R)M(T) \cdot M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$
- Rotación: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ · área por $|\det M|$

Unidad 3B · Valores y vectores propios

- $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0} \cdot E(\lambda) = N(M - \lambda I) \cdot p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$
- $\sum \lambda_i = \text{tr } M \cdot \prod \lambda_i = \det M \cdot$ triangular: los valores propios están en la diagonal
- $\dim E(\lambda) = n - \text{rango}(M - \lambda I) \cdot 1 \leq$ m. geométrica $\leq$ m. algebraica
- Diagonalizable $\iff \sum \dim E(\lambda_i) = n \cdot n$ valores distintos $\Rightarrow$ diagonalizable
- $D = P^{-1}MP$, columnas de P = vectores propios en el orden de $D \cdot M = PDP^{-1}$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Unidad 4 · Espacios con producto interno

- Axiomas: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \overline{(\vec{v} \mid \vec{u})} \cdot (\vec{u}+\vec{v} \mid \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{w}) + (\vec{v} \mid \vec{w}) \cdot (\alpha\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (\vec{v} \mid \vec{v}) > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$
- Usual en $\mathbb{C}^n$: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i\overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v}) \cdot (A \mid B) = \operatorname{tr}(A^T B)$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v} \mid \vec{v})} \cdot d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \cdot |(\vec{u} \mid \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- Gram-Schmidt: $\vec{e}_k = \vec{v}_k - \sum_{i<k} \frac{(\vec{v}_k|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$
- $W^\perp = \{\vec{v} \mid (\vec{v} \mid \vec{w}_i) = 0\} \cdot \dim W + \dim W^\perp = \dim V$
- $\operatorname{proy}_W \vec{v} = \sum \frac{(\vec{v}|\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i|\vec{e}_i)}\vec{e}_i$ (base ortogonal) · distancia mínima $= \|\vec{v} - \operatorname{proy}_W \vec{v}\|$
- Mínimos cuadrados: $A^T A\,\hat{x} = A^T\vec{b}$

Unidad 5 · Operadores lineales

- $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i\overline{v_i} \cdot (\vec{u} \mid \alpha\vec{v}) = \overline{\alpha}(\vec{u} \mid \vec{v})$
- $(T(\vec{u}) \mid \vec{v}) = (\vec{u} \mid T^*(\vec{v})) \cdot$ en base ortonormal $M(T^*) = \overline{M}^T$
- Normal: $MM^* = M^*M \cdot$ hermitiano (simétrico): $M^* = M \cdot$ antihermitiano (antisimétrico): $M^* = -M \cdot$ unitario (ortogonal): $M^*M = I$
- Teorema espectral: normal (simétrico, en real) $\iff$ base ortonormal de vectores propios
- $T = \sum \lambda_i P_i \cdot P_i = \sum \hat{e}\,\bar{\hat{e}}^T$ (base ortonormal de $E(\lambda_i)) \cdot \sum P_i = I \cdot$ con base ortonormal de vectores propios de V, $T(\vec{v}) = \sum_j \mu_j(\vec{v} \mid \hat{e}_j)\hat{e}_j$
- Cónica: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$

Ángulos notables

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Matriz de rotación por un ángulo θ en sentido antihorario: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Apéndice B · Qué vino en cada examen

↑ Volver al índice

La unidad indicada es la de este libro: 1B (grupos y campos), 2, 3A (transformaciones), 3B (valores y vectores propios), 4 y 5. Los problemas van en el orden del examen.

B.1 Plan 2010: los 8 finales de 2010-2 a 2015-1

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2010-2, tipo C	U2: ¿subespacio? base y dimensión (polinomios) · U2: matriz de transición en un espacio complejo · U3B: matriz asociada a partir de vectores propios · U3A: recorrido, núcleo e inversa · U4: producto interno $k\,\mathrm{tr}(AB^T)$: distancia · U4: mínimos cuadrados (parábola) · U5: operador simétrico, espacios característicos, descomposición espectral
2° final 2010-2, tipo A	U2: ¿subespacio? (potencias pares) · U2: matriz de transición y coordenadas · U3A: regla de correspondencia desde imágenes; núcleo · U3B: diagonalización ($P^{-1}MP$) · U4: ¿es producto interno? · U4: ¿conjunto ortogonal? (demostración) · U5: operador normal; adjunto
1er final 2014-1, tipo B	U2: ¿subespacio? · U2: espacio renglón, espacio columna y rango · U3A: suma de transformaciones con matrices asociadas · U3B: valores y espacios característicos; diagonalización · U4: base ortogonal (Gram-Schmidt), complemento, proyección · U5: adjunto; ¿normal? (en $\mathbb{C}^2$)
1er final 2014-2, tipo A	U2: matriz de transición ($\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$) · U3A: regla, núcleo y recorrido · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: complemento ortogonal · U4: demostración con vectores ortogonales (Pitágoras) · U5: adjunto; ¿normal?
1er final 2014-2, tipo B	U2: matriz de transición y coordenadas (en $\mathbb{C}^2$) · U3A: regla de correspondencia · U4: ¿es producto interno? · U4: vector de W más cercano (proyección) · U3B: polinomio característico, diagonalización y descomposición espectral · U5: adjunto; ¿antisimétrico?
2° final 2014-2, tipo A	U2: espacio generado, base, dimensión, pertenencia · U2: bases y coordenadas (transición) · U3A: ¿biyectiva? inversa · U3B: diagonalizable a partir de valores propios; regla · U4: proyección sobre un plano · U5: descomposición espectral
1er final 2015-1, tipo A	U2: axiomas de espacio vectorial (operaciones no usuales) · U2: rango y espacio columna · U3A: matriz asociada e inversa · U4: producto interno complejo; desigualdad del triángulo · U4: proyección ortogonal en matrices · U5: descomposición espectral

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2015-1, tipo C	U2: axiomas de espacio vectorial · U2: matriz de transición (funciones xe^x, e^x) · U3A: núcleo con parámetro; recorrido · U3A: inversa · U4: ¿es producto interno? (espacio complejo) · U5: descomposición espectral

B.2 Plan 2016: los 29 finales y extraordinarios de 2017-1 a 2026-1

El 2º final 2024-1 y el 3er extraordinario 2024-1 fueron el mismo examen; aparece una vez, como 2º final. Los parciales (2024-2 a 2026-1) cubren solo media materia y no se incluyen.

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2017-1, tipo B	U1B: grupo abeliano por tabla · U2: ¿subespacio? (polinomios) · U3B: matriz asociada, espacios característicos, ¿diagonalizable? · U4: ¿es producto interno? (matrices) · U4: base ortonormal (Gram-Schmidt) · U5: adjunto
2º final 2017-1	U1B: operación en matrices · U2: bases y coordenadas (transición) · U3A: núcleo y recorrido · U4: proyección sobre un plano · U5: ¿simétrico? · U5: formas cuádricas: cónica sin término mixto
1er final 2018-1, tipo D	U1B: grupo abeliano · U2: ¿subespacio? (matrices) · U3A: inversa y composición · U3B: valores y espacios propios; matriz diagonal · U4: componentes en W y mínima distancia · U5: tipo de operador en $\mathbb{C}^2$ con producto interno dado
1er extraordinario 2020-1	U2: pertenencia al espacio renglón · U3A: núcleo, recorrido e inversa · U3B: valor y vectores característicos · U4: ¿es producto interno? norma · U4: base ortogonal y proyección · U5: adjunto; ¿normal?
1er final 2020-1, tipo A	U1B: completar tabla de grupo abeliano · U2: matriz de transición entre tres bases · U3A: álgebra de transformaciones ($2T \circ T - T + 3I$) · U3B: espacios característicos · U4: Gram-Schmidt · U5: adjunto
1er final 2020-1, tipo C	U1B: idéntico e inversos por tabla · U2: relacionar columnas (independencia, base, dimensión) · U2: matriz de transición en $\mathbb{C}^2$ · U3B: espacios característicos · U4: complemento ortogonal y vector más cercano · U5: ¿normal?
2º final 2020-1	U1B: ¿grupo? matrices de rotación · U2: base del generado; pertenencia · U3A: núcleo, recorrido, matriz asociada · U3B: valores y espacios característicos; diagonalizar · U4: vector más cercano · U5: ¿simétrico?
2º extraordinario 2021-1	U1B: inversos · U2: ¿bases? · U2: coordenadas y transición · U3B: valores y espacios característicos; ¿diagonalizable? · U4: proyección ortogonal · U5: cónica sin término mixto

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er extraordinario 2023-1	U2: demostrar que un conjunto es base · U3A: dimensión del núcleo · U3B: ¿diagonalizable? · U4: vector más próximo (polinomios) · U4: complemento ortogonal (matrices) · U5: adjunto
2° extraordinario 2023-1	U2: verdadero/falso (dimensión, transición, combinación lineal) · U3A: composición: ¿biyectiva? · U3B: valores y vectores propios · U4: ángulo y complemento ortogonal · U5: ¿antihermitiano? (parámetro)
3er extraordinario 2023-1	U1B: grupo abeliano · U2: bases y transición en un subespacio de matrices · U3A: transformación $P_2 \to M_2$ · U3B: valores y espacios característicos · U4: complemento ortogonal ($\text{tr}(A^T B)$) · U5: adjunto
1er extraordinario 2023-2	U2: transición entre tres bases · U2: espacio columna y rango (parámetro) · U3A: regla a partir de la matriz asociada · U3B: ¿diagonalizable? · U4: vector a distancia mínima · U5: adjunto; ¿normal?
2° extraordinario 2023-2	U2: dimensión del generado (parámetro) · U2: transición · U3A: transformación $\mathbb{R}^3 \to P_2$ · U3B: operador a partir de sus espacios característicos · U4: ángulo con base ortonormal · U4: vectores ortogonales con dos productos internos
3er extraordinario 2023-2	U2: ¿subespacio? · U2: dependencia lineal de funciones · U3A: transformación $M \to P$ · U3B: ¿diagonalizable? · U4: complemento ortogonal · U5: adjunto y tipo de operador en $\mathbb{C}^2$
1er extraordinario 2024-1	U1B: ecuaciones en un campo finito · U2: dependencia lineal, dimensión, base · U3A: matriz asociada e inversa · U3B: diagonalizable (parámetro k) · U4: polinomio ortogonal y ángulo · U5: ¿hermitiano?
1er final 2024-1	U1B: ¿grupo? $x * y = x + y + xy$ · U2: bases y transición (polinomios) · U3A: transformación entre espacios de matrices · U3A: álgebra de transformaciones · U4: complemento ortogonal y base · U5: ¿simétrico? espacios característicos, descomposición espectral
2° extraordinario 2024-1	U2: vectores de las bases a partir de la transición · U2: dimensión con parámetro; base · U3A: núcleo, matriz asociada, inversa · U3B: valores propios a partir de imágenes; regla · U4: complemento ortogonal (producto interno ponderado) · U5: ¿antihermitiano?
2° final 2024-1	U2: ¿subespacio? ($y = \lvert x \rvert$) · U2: dependencia lineal de funciones · U3A: inversa y núcleo · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: vector de W más cercano · U5: descomposición espectral y regla de correspondencia

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er extraordinario 2024-2	U2: ¿subespacio? (funciones) · U2: transición (polinomios) · U3A: núcleo y recorrido · U3B: espacio característico; diagonalizar · U4: Gram-Schmidt (producto interno ponderado) · U5: descomposición espectral
1er final 2024-2	U1B: grupo abeliano por tabla · U2: transición (polinomios complejos) · U3A: recorrido, base y dimensión; núcleo · U3A: álgebra de transformaciones · U4: base ortogonal, complemento, coordenadas · U5: vectores característicos y descomposición espectral
2º extraordinario 2024-2	U2: ¿subespacio? · U2: independencia lineal (parámetro) · U3A: ¿es lineal? $(2p'' - 3p')$ · U3B: valores y vectores característicos; diagonalizar · U4: complemento ortogonal $(\mathrm{tr}(AB^T))$ · U5: tipo de operador a partir de su matriz
1er extraordinario 2025-1	U1B: (2 reactivos) · U2: (5 reactivos: subespacio, generador, combinación lineal, transición, espacio renglón) · U3A y U3B: (6 reactivos: transformación, matriz asociada de $2T^{-1}$, imagen con vectores propios, inversa, álgebra de transformaciones, diagonalización) · U4: (4 reactivos: complemento, funciones ortogonales, norma en $\mathbb{C}^3$, base de W) · U5: (3 reactivos: tipo de operador, parámetro, clasificar una matriz) (20 reactivos)
1er final 2025-1	U1B: composición de funciones · U2: dimensión con parámetro; base · U3A: regla de correspondencia a partir de imágenes · U4: complemento ortogonal · U5: descomposición espectral
2º final 2025-1	U2: dimensión del generado con parámetro · U2: bases y transición en $\mathbb{C}^2$ · U3A: inversa · U3B: matriz asociada y valores propios · U4: distancia con producto interno complejo · U5: formas cuádricas: cónica sin términos mixtos
1er extraordinario 2025-2	U1B: cerradura · U2: ¿es base? · U3A: ¿pertenece al recorrido? · U3B: valores y vectores propios · U4: complemento ortogonal (producto interno ponderado) · U5: operador simétrico: descomposición espectral
1er final 2025-2	U1B: grupo abeliano · U2: ¿subespacio? base y dimensión · U3A: base del recorrido; núcleo · U3B: matriz asociada; diagonalización · U4: polinomio más próximo · U5: adjunto y tipo de operador
1er extraordinario 2026-1	U1B: completar tabla de grupo abeliano · U2: base y dimensión · U3A: núcleo y dimensión del recorrido · U3B: espacios característicos; matriz diagonal · U4: complemento ortogonal en P_2 (producto interno por evaluación) · U5: ¿normal?

Examen	Problemas (unidad del libro: tema)
1er final 2026-1	U1B: grupo abeliano por tabla · U2: vectores de una base a partir de la transición · U3A: núcleo, dimensión · U3B: matriz diagonal · U4: complemento ortogonal · U5: tipo de operador en $\mathbb{C}^2$
3er extraordinario 2026-1	U2: espacio generado y dimensión (matrices) · U2: coordenadas con transición · U3A: $T(A) = A - A^T$ · U3B: valores y espacios propios · U4: Gram-Schmidt en P_2 con producto interno integral · U5: ¿normal? (en $\mathbb{C}^2$)

B.3 Dos exámenes completos para practicar

Resuelve cada examen en 2 horas, sin consultar, y después compara. Al final de cada problema se indica dónde está resuelto en este libro o, si no lo está, el resultado y el procedimiento que lo resuelve.

Plan 2010: 1er final 2014-1, tipo B (6 problemas, 2 horas)

1. Sean el espacio vectorial real $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $D = \{p(x) \mid p(0) = 3\}$ un subconjunto de P_2. Determine si D es un subespacio de P_2. *Resultado:* no lo es; el polinomio cero no está en D, porque $0 \neq 3$ (procedimiento 2.3.2).
2. El espacio renglón de $N = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ 3 & b & 5 \\ 5 & c & 3 \end{pmatrix}$ es $\{(m, n, m+n) \mid m, n \in \mathbb{R}\}$. a) Determine a, b y c. b) Con esos valores, determine el espacio columna de N. c) Obtenga el rango de N. *Resuelto en el ejercicio 2.5.3.*
3. Sean P_2 y las transformaciones lineales $T, S : \mathbb{R}^3 \to P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a las bases $A = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B = \{1, x, x^2\}$ son $M_B^A(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M_B^A(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenga la regla de correspondencia de $S + T$. *Resuelto en el ejercicio 3A.5.3.*
4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $F(x, y) = (4x - 5y,\ 2x - 3y)$. Determine una matriz asociada, los valores y espacios característicos, una matriz diagonal y una diagonalizadora. *Resuelto en el ejemplo de la sección 3B.4.*
5. En $\mathbb{R}^3$ con $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$, sea W con base $\{(1,0,1), (0,1,-1)\}$. Determine una base ortogonal de W, el complemento ortogonal de W y la proyección de $\vec{u} = (1,1,1)$ sobre W. *Resuelto en el ejercicio 4.5.6.*
6. En $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual, sea $S(x, y) = (xi,\ 2iy)$. Obtenga el adjunto de S y determine si S es normal. *Resuelto en el ejercicio 5.5.2.*

Plan 2016: 1er final 2025-2 (6 problemas, 2 horas)

1. Para el conjunto $B = \{e^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ y la operación $e^{x_1} * e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$, determine si $(B, *)$ es un grupo abeliano. *Resultado:* sí; el idéntico es $e^0 = 1$ y el inverso de e^x es e^{-x} (procedimiento 1B.3.3).

2. Determine si $W = \{(x, y, z) \mid 4x - y = 0,\ 5x - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo, obtenga una base y su dimensión. *Resultado:* sí; $W = \{\alpha(1, 4, 5)\}$, con base $\{(1, 4, 5)\}$ y dimensión 1 (procedimiento 2.3.2).
3. Sea $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x, y, z) = (2x + 4y + z,\ -z,\ 2z)$. a) Determine una base del recorrido. b) Obtenga la dimensión del núcleo. *Resultado:* a) $\{(1, 0, 0), (1, -1, 2)\}$; b) $\dim N(T) = 1$, con $N(T) = \text{gen}\{(-2, 1, 0)\}$ (procedimiento 3A.3.3).
4. Sean $P = \{ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $T:\ P \to P$ con $T(ax+b) = (2a+b)x+(6a+b)$. Determine una matriz asociada, los espacios característicos, y una matriz diagonal y la base a la que está referida. *Resultado:* en la base $\{x, 1\}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; $E(4) = \{\alpha(x + 2)\}$ y $E(-1) = \{\beta(x - 3)\}$; $D = \text{diag}(4, -1)$ en la base $\{x + 2,\ x - 3\}$ (procedimientos 3B.3.4 y 3B.3.6).
5. Sean P_2, $W = \{ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ y el producto interno $(p \mid q) = \sum_{i=-1}^{1} p(i)q(i)$. Determine el polinomio $h \in W$ más próximo a $m(x) = x^2 + 1$. *Resuelto en el ejercicio 4.5.8.*
6. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual, sea S con matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en la base canónica. a) Obtenga el adjunto de S. b) Determine si S es normal. *Resultado:* a) $S^*(x, y) = (x+3y,\ 2x+4y)$; b) no: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \neq M^TM = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$ (procedimientos 5.3.1 y 5.3.2).

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Diferencias entre la única resolución publicada de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno, y erratas en los enunciados.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

2º extraordinario 2021-1, problema 1: en la tabla de + del enunciado, el renglón de k dice $k + i = j$, pero la columna de k dice $i + k = i$: la tabla no es simétrica y k no sería idéntico. Aquí se toma $k + i = i$, con lo que + es conmutativa y k es su idéntico; el inciso b) lo necesita, porque usa los inversos $-i$ y $-j$ respecto a +.

C.2 · Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3A · Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

1er final 2014-1, tipo B, problema 3: el enunciado define T y S de $\mathbb{R}^2$ en P_2, pero la base A del dominio tiene tres vectores de $\mathbb{R}^3$; el dominio es $\mathbb{R}^3$.

1er final 2024-1, problema 3: en el enunciado publicado, las matrices de M, de N y de la regla aparecen escritas en un solo renglón, por ejemplo (a b c d), y la regla dice «$T = (\dots) = (\dots)$». Aquí se leen como matrices de 2×2 por renglones; así la imagen es simétrica, como deben ser los elementos de N.

C.3B · Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

1er final 2014-2, tipo A, problema 3: el enunciado dice $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pero la regla tiene tres variables; el operador es de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

2º extraordinario 2023-2, problema 4: el enunciado nombra $E(1)$ al espacio generado por $(1, -3)$, pero la matriz diagonal dada tiene los valores -1 y 2. Aquí se toma $E(-1)$, de acuerdo con D.

1er extraordinario 2024-1, problema 4 (resolución publicada): en el paso 4, el sistema del espacio propio de $\lambda = 1$ aparece como $-2a - 2b + 5 = 0$; la ecuación correcta es $-2a + 2b + 5c = 0$. El espacio propio final que se da, $\{(k_1, k_2, \frac{2}{5}(k_1 - k_2))\}$, sí es correcto. En el paso 9 se dice que «la dimensión del espacio propio es tres»: lo que suma tres son las dimensiones de los dos espacios propios.

C.4 · Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.5 · Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

2º extraordinario 2023-1, problema 5: el enunciado dice que el operador va de un espacio de dimensión 2 en sí mismo, pero la regla tiene tres variables y tres componentes; el operador es de $\mathbb{C}^3$ en $\mathbb{C}^3$.

Apéndice D · Fuentes y bibliografía

↑ Volver al índice

Exámenes de los que se adaptaron los ejercicios (Facultad de Ingeniería, UNAM):

- **Plan 2010.** Primeros exámenes finales de *Álgebra Lineal* de 2010-2, 2014-1, 2014-2 (tipos A y B) y 2015-1 (tipos A y C); segundos exámenes finales de 2010-2 y 2014-2.
- **Plan 2016, finales.** Primeros finales de 2017-1, 2018-1, 2020-1 (tipos A y C), 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2 y 2026-1; segundos finales de 2017-1, 2020-1, 2024-1 y 2025-1.
- **Plan 2016, extraordinarios.** 2020-1; 2021-1; 2023-1 (primero, segundo y tercero); 2023-2 (primero, segundo y tercero); 2024-1 (primero, segundo y tercero); 2024-2 (primero y segundo); 2025-1; 2025-2; 2026-1 (primero y tercero). El primer extraordinario 2024-1 incluye su resolución.
- **Plan 2016, parciales.** Primeros parciales de 2024-2 y 2026-1; segundos parciales de 2024-2, 2025-1 y 2025-2.

Programas de la asignatura:

- *Álgebra Lineal*, clave 0062, plan de estudios 2010 (aprobado el 19 de noviembre de 2008). Facultad de Ingeniería, UNAM.
- *Álgebra Lineal*, clave 1220, plan de estudios 2016. Facultad de Ingeniería, UNAM.

Bibliografía de los dos programas (cuando un título aparece en los dos, se indican ambas ediciones):

- Anton, H. *Introducción al álgebra lineal*. Limusa: 3.ª ed., 2003 (Plan 2010); Limusa Wiley, 5.ª ed., 2011 (Plan 2016).
- Arzamendi Pérez, S. R., et al. *Cuaderno de ejercicios de álgebra*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 2011 (Plan 2016, tema 1).
- Ayres, F. *Álgebra moderna*. McGraw-Hill, 1991 (Plan 2010).
- Bell, E. T. *Historia de las matemáticas*, 2.ª ed. Fondo de Cultura Económica, 1995 (Plan 2010, tema 1).
- Cárdenas, H., et al. *Álgebra superior*, 2.ª ed. Trillas, 1990 (Plan 2010).
- Godínez Cabrera, H.; Herrera Camacho, A. *Álgebra lineal: teoría y ejercicios*. Facultad de Ingeniería, UNAM: 1987 (Plan 2010); 2005 (Plan 2016).
- Grossman, S. I. *Álgebra lineal*. McGraw-Hill: 5.ª ed., 1996 (Plan 2010); con J. J. Flores G., 7.ª ed., 2012 (Plan 2016).
- Larson, R.; Falvo, D. C. *Fundamentos de álgebra lineal*, 6.ª ed. Cengage Learning, 2010 (Plan 2016).
- Lay, D. C. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Prentice Hall, 3.ª ed., 2007 (Plan 2010); Pearson, 4.ª ed., 2012 (Plan 2016).
- Nakos, G.; Joyner, D. *Álgebra lineal con aplicaciones*. Thomson, 1999 (Plan 2010).
- Poole, D. *Álgebra lineal*, 2.ª ed. Thomson, 2006 (Plan 2010). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*, 2.ª ed. Cengage Learning, 2011 (Plan 2016).
- Solar G., E.; Speziale de G., L. *Apuntes de álgebra lineal*, 3.ª ed. Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 1996 (Plan 2010).
- Speziale San Vicente, L. *Espacios con producto interno*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009 (Plan 2016, tema 4).

- Speziale San Vicente, L. *Teorema de proyección*, 2.ª ed. Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002 (Plan 2010, tema 4).
- Speziale San Vicente, L. *Transformaciones lineales*. Facultad de Ingeniería, UNAM: 2007 (Plan 2010); 2002 (Plan 2016) (tema 3).
- Strang, G. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, 4.ª ed. Thomson, 2006 (Plan 2016).
- Williams, G. *Linear Algebra with Applications*. Jones and Bartlett: 5th ed., 2005 (Plan 2010); 8th ed., 2014 (Plan 2016).

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

Ejercicio 1B.6.1 ← volver

1. Cerradura: todas las entradas están en A. Asociatividad: dada.
2. Idéntico: el renglón y la columna de 1 repiten los encabezados; $e = 1$.
3. Inversos: $1\#1 = 1$, $2\#3 = 1$, $3\#2 = 1$. Todos tienen inverso.
4. Conmutatividad: la tabla es simétrica ($2\#3 = 1 = 3\#2$).
5. $(A, \#)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 1B.6.2 ← volver

1. Cerradura: todas las entradas están en K. Asociatividad: dada.
2. Idéntico: el renglón de z es x, y, z, w y su columna también; $e = z$.
3. Inversos: z aparece en el renglón de x bajo y, en el de y bajo x, en el de z bajo z y en el de w bajo w.
4. Conmutatividad: $x\Delta y = z = y\Delta x$, $x\Delta w = y = w\Delta x$, $y\Delta w = x = w\Delta y$; la tabla es simétrica.
5. Es un grupo abeliano.

Ejercicio 1B.6.3 ← volver

1. El renglón y la columna de μ son μ, a, b.
2. Renglón de a: ya tiene a (columna μ) y b (columna a); en la columna b solo queda μ. Por simetría, $b\,\Delta\,a = \mu$.
3. Tabla:

Δ	μ	a	b
μ	μ	a	b
a	a	b	μ
b	b	μ	a

4. b) μ es su propio inverso; $a\,\Delta\,b = \mu$, así que $a' = b$ y $b' = a$.

Ejercicio 1B.6.4 ← volver

1. a) El renglón de j en la tabla de $*$ es i, j, k: el idéntico es j. $i * k = j$, así que $i' = k$ y $k' = i$; $j' = j$.
2. b) En la tabla de $+$, el renglón de k es i, j, k: el idéntico de $+$ es k. Como $i + j = k$, $-i = j$ y $-j = i$.
3. $-i + k = j + k = j$ y $-j + j = i + j = k$.
4. $(-j + j) * k = k * k = i$, y luego $j * i = i$.
5. El resultado es i.

Ejercicio 1B.6.5 ← volver

1. Cerradura: $A + B - 3I$ es una matriz compleja de 2×2.
2. Asociatividad: $(A\#B)\#C = A + B + C - 6I = A\#(B\#C)$.
3. Idéntico: $A + E - 3I = A$ da $E = 3I$, que está en M.
4. Inverso: $A + A' - 3I = 3I$ da $A' = 6I - A$, que está en M.
5. Conmutatividad: $A + B - 3I = B + A - 3I$.
6. Es un grupo abeliano.

Ejercicio 1B.6.6 ← volver

1. Cualquier real u se escribe $\frac{u-1}{1} + 1$, así que $A = \mathbb{R}$. Con $u = \frac{x_1}{y_1} + 1$ y $v = \frac{x_2}{y_2} + 1$, la regla es $u * v = (u-1) + (v-1) + 1 = u + v - 1$.
2. Idéntico: $u + e - 1 = u$ da $e = 1$ (es decir, $\frac{0}{y} + 1$).
3. Inverso: $u + u' - 1 = 1$ da $u' = 2 - u \in \mathbb{R}$.
4. Conmutatividad: $u + v - 1 = v + u - 1$.
5. Con la cerradura y la asociatividad dadas, es un grupo abeliano.

E.2 · Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. a) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ generan un espacio de dimensión menor que 3 si su determinante es cero:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & k & -3 \end{pmatrix} = 1(-6+5k) - 0 + (-1)(3k-8) = 2k + 2 = 0,$$

así que $k = -1$. Con ese valor, $(1, 0, -1)$ y $(3, 2, -5)$ son independientes y la dimensión es 2.

2. b) $(-1, 3, -2) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(3, 2, -5)$: de la segunda componente, $\beta = \frac{3}{2}$; de la primera, $\alpha = -1 - \frac{9}{2} = -\frac{11}{2}$; la tercera da $\frac{11}{2} - \frac{15}{2} = -2$. Se cumple: $\vec{w}$ **sí** pertenece.

Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. Coeficientes (a, b, c) como renglones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 - R_2]{R_3 - R_2,\ R_4 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. a) Base $\{x^2-1,\ x+4\}$ y $\dim W = 2$.
3. b) $\alpha(x^2-1)+\beta(x+4) = \alpha x^2+\beta x+(4\beta-\alpha)$: $W = \{ax^2+bx+c \mid c = 4b-a\}$. Comprobación: x^2+x+3 cumple $3 = 4-1$.

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. Como A es la base canónica, las columnas de $M_A^B = (M_B^A)^{-1}$ son los vectores de B.
2. La inversa de la triangular se obtiene escalonando $\left[\, M_B^A \mid I \,\right]$: $M_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobación: $M_B^A M_A^B = I$.
3. $\vec{b}_1 = (1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (1,1,0)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1)$. Comprobación: $\hat{\jmath} = -\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, que es la segunda columna de M_B^A.

Ejercicio 2.6.4 ← volver

1. Identidad: $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$.
2. $2(5\tan^2 x)+5(-2\sec^2 x) = 10(\tan^2 x - \sec^2 x) = -10$, y $-10 = 10\cdot(-1)$. Por lo tanto,

$$2(5\tan^2 x)+5(-2\sec^2 x)-10(-1) = 0 \quad \text{para toda } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

3. Hay una combinación con coeficientes no nulos que da la función cero: el conjunto es **linealmente dependiente**.

Ejercicio 2.6.5 ← volver

1. a) $8x+3 = \alpha(x+3)+\beta(2x-1)$: $\alpha+2\beta = 8$ y $3\alpha-\beta = 3$, de donde $\alpha = 2$, $\beta = 3$.
2. $5x+1 = \alpha(x+3)+\beta(2x-1)$: $\alpha+2\beta = 5$ y $3\alpha-\beta = 1$, de donde $\alpha = 1$, $\beta = 2$.
3. Las columnas: $M_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
4. b) $(3x+2)_A = M_A^B(1,-1)^T = (2-1,\ 3-2)^T = (1,1)^T$. Comprobación: $(x+3)+(2x-1) = 3x+2$.

Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. Cero: $(0,0)$ cumple $0 = |0|$. Se cumple.
2. Suma: $(1,1)$ y $(-1,1)$ están en A, pero $(1,1)+(-1,1) = (0,2)$ no, porque $2 \neq |0|$. No se cumple.
3. Producto: $-1\cdot(1,1) = (-1,-1)$ no está en A, porque $-1 \neq |-1|$. No se cumple.
4. A **no** es subespacio de $\mathbb{R}^2$: la condición tiene un valor absoluto, que no es lineal.

E.3A · Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa

Ejercicio 3A.6.1 ← volver

1. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \frac{a}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left(b+\frac{a}{3}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: la entrada $(2,2)$ da $-\frac{a}{3}+b+\frac{a}{3} = b$.

2. a) $T\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \frac{a}{3}(2x-4) + \left(b + \frac{a}{3}\right)(4x-2) = (2a+4b)x + (-2a-2b)$.
3. Comprobación: con $a=3$, $b=-1$: $(6-4)x + (-6+2) = 2x - 4$.
4. b) $2a+4b=0$ y $-2a-2b=0$ dan $b=0$ y $a=0$: $N(T)=\{0\}$ y $\dim T(M) = 2-0=2$.

Ejercicio 3A.6.2 ← volver

1. Las imágenes de la base $\{x+1,\ 2x-1\}$ de P son la base natural de M, así que T es biyectiva y T^{-1} manda cada matriz de esa base al polinomio correspondiente.
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a(x+1) + b(2x-1) = (a+2b)x + (a-b)$.
4. Comprobación: con $a=1$, $b=0$ da $x+1$; con $a=0$, $b=1$ da $2x-1$.

Ejercicio 3A.6.3 ← volver

1. Las imágenes x^2+x+1, x^2+1 y x^2 son linealmente independientes (de la última se obtiene x^2; restando, 1 y luego x), así que T es biyectiva.
2. $x^2 = T(1,1,1)$; $1 = (x^2+1) - x^2 = T(1,1,0) - T(1,1,1) = T(0,0,-1)$; $x = (x^2+x+1) - (x^2+1) = T(1,0,0) - T(1,1,0) = T(0,-1,0)$.
3. Entonces $T^{-1}(x^2) = (1,1,1)$, $T^{-1}(x) = (0,-1,0)$, $T^{-1}(1) = (0,0,-1)$, y

$$T^{-1}(ax^2+bx+c) = a(1,1,1) + b(0,-1,0) + c(0,0,-1) = (a,\ a-b,\ a-c).$$

4. Comprobación: $T^{-1}(x^2+1) = (1,1,0)$.

Ejercicio 3A.6.4 ← volver

1. **Superposición.** $(A+B)^T = A^T + B^T$, así que $T(A+B) = A+B-A^T-B^T = (A-A^T)+(B-B^T) = T(A)+T(B)$. Se cumple.
2. **Homogeneidad.** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, así que $T(\alpha A) = \alpha A - \alpha A^T = \alpha\, T(A)$. Se cumple.
3. T es lineal. (Su núcleo son las matrices simétricas y su recorrido, las antisimétricas: $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$.)

Ejercicio 3A.6.5 ← volver

1. a) $T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con coordenadas $(1,0,1)$; $T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $(0,1,0)$; $T(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $(-1,0,1)$. Son las columnas de $M_B^A(T)$.
2. b) Desarrollando por el segundo renglón, $\det M_B^A(T) = 1\cdot\left(1\cdot 1 - (-1)\cdot 1\right) = 2 \neq 0$: T es biyectiva. Por sistema: $a-c=p$, $b=q$, $a+c=r$, de donde $a=\frac{p+r}{2}$, $b=q$, $c=\frac{r-p}{2}$.
3. $T^{-1}\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} = \dfrac{p+r}{2}x^2 + qx + \dfrac{r-p}{2}$. Comprobación: $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2$.

Ejercicio 3A.6.6 ← volver

1. Se busca (a, b) con $a - 3b = 7$, $2a + b = 7$ y $a - b = 5$.
2. Restando la primera de la tercera: $2b = -2$, $b = -1$, y $a = 5 + b = 4$.
3. La ecuación que sobra se cumple: $2(4) + (-1) = 7$. El sistema es compatible.
4. $p(x)$ **sí** pertenece al recorrido: $T(4, -1) = 7x^2 + 7x + 5$.

E.3B · Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización

Ejercicio 3B.6.1 ← volver

1. a) $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Por el segundo renglón: $\det(M - \lambda I) = (-5-\lambda)\big[(-2-\lambda)(-3-\lambda)-6\big] = (-5-\lambda)(\lambda^2+5\lambda) = -\lambda(\lambda+5)^2$.
3. b) $\lambda = 0$: $y = 0$ y $-2x + z = 0$: $E(0) = \text{gen}\{(1, 0, 2)\}$.
4. $\lambda = -5$: $M + 5I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, de rango 1: $z = -3x$, con x y y libres. $E(-5) = \text{gen}\{(0, 1, 0), (1, 0, -3)\}$, de dimensión 2, igual a la multiplicidad algebraica.
5. c) $D = \text{diag}(0, -5, -5)$, referida a $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0), (1, 0, -3)\}$.

Ejercicio 3B.6.2 ← volver

1. En la base $\{x, 1\}$: $F(x) = x - 2$ y $F(1) = -2x + 1$, así que $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$: valores propios 3 y -1.
3. $\lambda = -1$: $2a - 2b = 0$, vector $(1, 1)$, es decir, $x + 1$. $\lambda = 3$: $-2a - 2b = 0$, vector $(1, -1)$, es decir, $x - 1$.
4. Comprobación: $F(x + 1) = (1 - 2)x + (1 - 2) = -(x + 1)$ y $F(x - 1) = 3x - 3 = 3(x - 1)$.
5. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $\{x + 1,\ x - 1\}$.

Ejercicio 3B.6.3 ← volver

1. a) Por el tercer renglón: $\det(M - \lambda I) = (3 - \lambda)\big[(2 - \lambda)^2 - 1\big] = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)$. Valores propios: 1 y 3, este con multiplicidad algebraica 2.
2. b) $M - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, así que $\dim E(3) = 3 - 1 = 2$: $E(3) = \text{gen}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Para $\lambda = 1$: $E(1) = \text{gen}\{(1, -1, 0)\}$.
3. Las dimensiones suman 3: T **sí** es diagonalizable. (Además M es simétrica; en la Unidad 5 se verá que toda matriz real simétrica es diagonalizable.)

Ejercicio 3B.6.4 ← volver

1. En la base $\{x^2, x, 1\}$: $T(x^2) = 2x^2 - x + 1$, $T(x) = x$, $T(1) = 2x^2 + 3$. Entonces
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Por la segunda columna: $\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)\big[(2-\lambda)(3-\lambda)-2\big] = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$.
3. $\lambda = 1$: $M - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da $a = 0$ y $c = 0$, con b libre: $E(1) = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, de dimensión 1.
4. $\lambda = 4$: $M - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da $c = a$ y $b = -\frac{a}{3}$. Con $a = 3$: $3x^2 - x + 3$. Comprobación: $T(3x^2 - x + 3) = 12x^2 - 4x + 12$.
5. c) $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1: T **no** es diagonalizable.

Ejercicio 3B.6.5 ← volver

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es triangular: valores propios 1, -2 y 3, distintos.
2. $\lambda = 1$: $2b = 0$, $-3b + c = 0$, $2c = 0$: $(1, 0, 0)$.
3. $\lambda = -2$: $3a + 2b = 0$, $c = 0$: $(2, -3, 0)$.
4. $\lambda = 3$: $-2a + 2b = 0$ y $-5b + c = 0$: $(1, 1, 5)$. Comprobación: $T(1, 1, 5) = (3, 3, 15)$.
5. c) Tres valores distintos: $D = \operatorname{diag}(1, -2, 3)$ en la base $\{(1, 0, 0), (2, -3, 0), (1, 1, 5)\}$.

E.4 · Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. Sea $S(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Entonces $(\vec{x} \mid \vec{y}) = 6\, S(\vec{x})\, S(\vec{y})$.
2. Simetría: $6S(\vec{y})S(\vec{x}) = 6S(\vec{x})S(\vec{y})$. Se cumple.
3. Aditividad y homogeneidad: S es lineal, $S(\vec{x} + \vec{z}) = S(\vec{x}) + S(\vec{z})$ y $S(\alpha\vec{x}) = \alpha S(\vec{x})$. Se cumplen.
4. Positividad: $(\vec{x} \mid \vec{x}) = 6S(\vec{x})^2 \geq 0$, pero $\vec{x} = (1, -1, 0, 0) \neq \vec{0}$ da $6 \cdot 0^2 = 0$. No se cumple.
5. No es un producto interno.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. Base de W: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son ortogonales entre sí; $(E_1 \mid E_1) = (E_3 \mid E_3) = 1$ y $(E_2 \mid E_2) = 2$.
2. $(B \mid E_1) = 1$, $(B \mid E_2) = 1 + 0 = 1$, $(B \mid E_3) = -1$.
3. $\operatorname{proy}_W B = 1\, E_1 + \frac{1}{2} E_2 - 1\, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

4. Comprobación: $B - \text{proy}_W B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, antisimétrica, ortogonal a toda matriz simétrica.

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. a) $(a,b) \in W^\perp$ si $((a,b) \mid (1,1)) = 2a + b = 0$: $W^\perp = \{\alpha(1,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Con el producto usual habría salido $(1,-1)$.
2. b) $\vec{w} = \text{proy}_W(2,-1) = \frac{((2,-1)\mid(1,1))}{((1,1)\mid(1,1))}(1,1) = \frac{4-1}{2+1}(1,1) = (1,1)$.
3. $\vec{w}' = (2,-1) - (1,1) = (1,-2) \in W^\perp$.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. La base ya es ortogonal: $(1,2,1) \cdot (1,-1,1) = 1 - 2 + 1 = 0$.
2. $(\vec{v} \mid \vec{e}_1) = 4 + 4 - 3 = 5$, $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_1) = 6$; $(\vec{v} \mid \vec{e}_2) = 4 - 2 - 3 = -1$, $(\vec{e}_2 \mid \vec{e}_2) = 3$.
3. $\vec{p} = \frac{5}{6}(1,2,1) - \frac{1}{3}(1,-1,1) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$.
4. Comprobación: $\vec{v} - \vec{p} = \left(\frac{7}{2}, 0, -\frac{7}{2}\right)$ es ortogonal a los dos vectores de la base.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. $\vec{e}_1 = 1$, $(1 \mid 1) = \int_{-1}^{1} dx = 2$.
2. $(x \mid 1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$: x ya es ortogonal a 1, así que $\vec{e}_2 = x$, con $(x \mid x) = \frac{2}{3}$.
3. $(x^2 \mid 1) = \frac{2}{3}$ y $(x^2 \mid x) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$.
4. $\vec{e}_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$.
5. Comprobación: $\left(x^2 - \frac{1}{3} \,\middle|\, 1\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. $W = \text{gen}\{g\}$ con $g(x) = x^2 + x - 1$: $g(0) = -1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 5$.
2. Para $p(x) = ax^2 + bx + c$: $p(0) = c$, $p(1) = a + b + c$, $p(2) = 4a + 2b + c$.
3. $(p \mid g) = -c + (a + b + c) + 5(4a + 2b + c) = 21a + 11b + 5c = 0$.
4. Dos parámetros libres: con $(a,b) = (5,0)$, $c = -21$; con $(a,b) = (0,5)$, $c = -11$. $W^\perp = \text{gen}\{5x^2 - 21,\ 5x - 11\}$, de dimensión $3 - 1 = 2$.

E.5 · Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. M es simétrica. $\det(M - \lambda I) = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$.
2. $\lambda = 6$: $-x + 2y = 0$, $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$. $\lambda = 1$: $4x + 2y = 0$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$.
3. $P_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_1^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $P_1 + P_2 = I$.
4. $S = 6P_1 + P_2$. Comprobación de la entrada $(1,1)$: $\frac{24}{5} + \frac{1}{5} = 5$.

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, simétrica; $\det(M - \lambda I) = (5-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 7)(\lambda - 3)$.
2. $\lambda = 7$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = 3$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.
3. $P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $S = 7P_1 + 3P_2$. Comprobación: $\frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$ y $\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$.

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^2 - 25 = (\lambda - 9)(\lambda + 1)$.
2. $\lambda = 9$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = -1$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.
3. Ecuación: $9x'^2 - y'^2 = 9$. Los valores propios tienen signos contrarios: hipérbola.

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda(\lambda - 4)$.
2. $\lambda = 0$: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. $\lambda = 4$: $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.
3. Ecuación: $4y'^2 = 9$, o sea $y' = \pm\frac{3}{2}$. Un valor propio nulo da una cónica degenerada.
4. Comprobación: la ecuación original es $2(x-y)^2 = 9$, y $y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$, así que $4y'^2 = 2(x-y)^2$.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. $M = \begin{pmatrix} -2i & 3-i \\ -3-i & -4i \end{pmatrix}$.
2. Transpuesta: $\begin{pmatrix} -2i & -3-i \\ 3-i & -4i \end{pmatrix}$; conjugada: $M^* = \begin{pmatrix} 2i & -3+i \\ 3+i & 4i \end{pmatrix}$.
3. $-M = \begin{pmatrix} 2i & -3+i \\ 3+i & 4i \end{pmatrix} = M^*$. La diagonal es imaginaria pura, como debe ser.
4. $T^* = -T$: T es antihermitiano.

Ejercicio 5.6.6 ← volver

1. Los espacios dados son ortogonales entre sí. Base ortonormal de $E(1)$: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$; de $E(7)$: $\{(0, 0, 1)\}$.
2. $P_1(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = (x, y, 0)$ y $P_7(x, y, z) = (0, 0, z)$. $P_1 + P_7 = I$.
3. $T = 1\,P_1 + 7\,P_7$: $T(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, 7z) = (x,\ y,\ 7z)$.