2. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-2&-1&-1\\-2&2&2\end{vmatrix}=(-2+2)\hat{\imath}-(-4-2)\hat{\jmath}+(-4-2)\hat{k}=(0,6,-6)$.
3. $(0,6,-6)\cdot(2,d_2-1,-1)=6d_2-6+6=6d_2$.
4. $V=\frac{1}{6}|6d_2|=|d_2|=5\Rightarrow d_2=\pm5$.

Ejercicio 2.7.13 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(6,2,-4)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12+4=16$, $|\overrightarrow{AC}|^2=56$.
2. **a)** $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\frac{16}{56}(6,2,-4)=\frac{2}{7}(6,2,-4)$, así que $Q=A+\overrightarrow{AQ}=\left(1+\frac{12}{7},\,2+\frac{4}{7},\,3-\frac{8}{7}\right)=\left(\frac{19}{7},\frac{18}{7},\frac{13}{7}\right)$.
3. Comprobación: $\overrightarrow{QB}=\left(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$ y $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{12-8-4}{7}=0$.
4. **b)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&0&-1\\6&2&-4\end{vmatrix}=(0+2)\hat{\imath}-(-8+6)\hat{\jmath}+(4-0)\hat{k}=(2,2,4)$, de módulo $2\sqrt{6}$; el área es $\sqrt{6}$.

Ejercicio 2.7.14 ← volver

1. **Ángulo:** $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta\Rightarrow 6=12\,\text{sen}\,\theta\Rightarrow\text{sen}\,\theta=\frac{1}{2}$. Como es agudo, $\theta=30^\circ$.
2. **Producto escalar:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=12\cos30^\circ=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

E.3 · Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. **Plano π:** contiene la dirección $(2,1,-3)$ y, por ser perpendicular al plano XY, la dirección $\hat{k}$:
$$\vec{n}=(2,1,-3)\times(0,0,1)=(1,-2,0).$$
Pasa por el origen: $\pi:\ x-2y=0$.
2. **Plano π_0:** contiene las direcciones $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$:
$$\vec{n}_0=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&0&1\\5&4&m\end{vmatrix}=(-4,\ 5-2m,\ 8).$$
3. **Perpendicularidad:** $\vec{n}\cdot\vec{n}_0=-4-2(5-2m)=4m-14=0$, $m=\frac{7}{2}$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. **Datos:** $P_0(-2,1,6)$, $\vec{u}=(3,2,3)$; el plano contiene la dirección $\hat{\jmath}$, normal del plano XZ.
2. **a)** $\vec{n}=(3,2,3)\times(0,1,0)=(-3,0,3)$, o $(1,0,-1)$. Por P_0: $(x+2)-(z-6)=0$, es decir, $x-z+8=0$.
3. **b)** $d=\dfrac{|0-0+8|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

2. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(2\cos\theta,\ 3\,\text{sen}\,\theta,\ 3)+s(3,0,2)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
3. **b) Paramétricas:** $x=2\cos\theta+3s$, $y=3\,\text{sen}\,\theta$, $z=3+2s$.
4. **Eliminación de s:** $s=\dfrac{z-3}{2}$.
5. **Eliminación de θ:** $\cos\theta=\dfrac{x-3s}{2}=\dfrac{2x-3z+9}{4}$; $\text{sen}\,\theta=\dfrac{y}{3}$.
6. **c) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(2x-3z+9)^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, es decir
$$9(2x-3z+9)^2+16y^2=144.$$
7. **Comprobación:** con $z=3$: $9(2x)^2+16y^2=144\Rightarrow 9x^2+4y^2=36$.

Resultado: $\vec{p}=(2\cos\theta,3\,\text{sen}\,\theta,3)+s(3,0,2)$; $9(2x-3z+9)^2+16y^2=144$.

Ejercicio 4C.5.4 · Cilindro con directriz hiperbólica

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica S formada por el conjunto de las rectas paralelas al vector $\vec{u}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+12\hat{k}$ y que tiene por intersección con el plano $z=3$ a la curva $D:\ (y-3)^2-(x+4)^2=16$, $z=3$.

Resolución.

1. **Directriz:** $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+4)^2}{16}=1$ es una hipérbola de centro $(-4,3,3)$ y eje focal paralelo a y. Se parametriza con $y-3=4\sec\theta$, $x+4=4\tan\theta$:
$$\vec{q}(\theta)=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3),\quad \theta\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2}\right).$$
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3)+s(1,2,12)$, $s\in\mathbb{R}$.
3. **Paramétricas:** $x=-4+4\tan\theta+s$, $y=3+4\sec\theta+2s$, $z=3+12s$.
4. **Eliminación de s:** $s=\dfrac{z-3}{12}$.
5. **Eliminación de θ:**
$$4\tan\theta=x+4-s=\frac{12x-z+51}{12},\qquad 4\sec\theta=y-3-2s=\frac{6y-z-15}{6}.$$
6. **Identidad** $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$, multiplicada por 16:
$$\frac{(6y-z-15)^2}{36}-\frac{(12x-z+51)^2}{144}=16\quad\Longleftrightarrow\quad 4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304.$$
7. **Comprobación:** con $z=3$: $4\cdot36(y-3)^2-144(x+4)^2=2304\Rightarrow(y-3)^2-(x+4)^2=16$.

Resultado: $\vec{p}=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3)+s(1,2,12)$; $4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304$ (cilindro hiperbólico).

Ejercicio 4C.5.5 · Superficie reglada con directriz en el plano $x=0$

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 6.

Sea la superficie reglada S que contiene a la curva $D:\ y^2+2z^2=4$, $x=0$, y la generan rectas paralelas al vector $\vec{u}=(-3,1,2)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

Resolución.

Ejercicio 2.7.2 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{RP} = (2,-1,-1)$, $\overrightarrow{RQ} = (1,-2,4)$; $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = 2+2-4 = 0$: el ángulo en R es recto, así que P, R, Q son vértices consecutivos de un rectángulo; el paralelogramo con el cuarto vértice opuesto a R tiene sus cuatro ángulos rectos.
2. **b)** S es el vértice opuesto a R: $S = P+Q-R = (1+0+1,\ 2+1-3,\ -3+2+2) = (2,0,1)$.
3. **Comprobación:** $\overrightarrow{QS} = (2,-1,-1) = \overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ} = (-1,2,-4)\cdot(-2,1,1) = 0$.

Ejercicio 2.7.3 ← volver

1. **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12-4-8 = 0$: ya son perpendiculares. $\vec{a}\cdot\vec{c} = 12-8+4c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -1$.
2. **b)**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (8-4)\hat{\imath} - (-12-8)\hat{\jmath} + (6+8)\hat{k} = (4,20,14),$$

$A = \sqrt{16+400+196} = \sqrt{612} = 6\sqrt{17}$. Como $\vec{a}\perp\vec{b}$, también $A = |\vec{a}||\vec{b}| = 2\sqrt{17}\cdot 3$.

Ejercicio 2.7.4 ← volver

1. $\vec{u} = (9,0,6) + (-8,2,6) - (2,1,10) = (-1,1,2)$.
2. $\vec{v} = \lambda\vec{d} = \lambda(3,6,-6)$, así que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(-3+6-12) = -9\lambda$.
3. $-2(-9\lambda) = -36 \Rightarrow 18\lambda = -36 \Rightarrow \lambda = -2$ y $\vec{v} = (-6,-12,12)$.

Ejercicio 2.7.5 ← volver

1. $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$ y $\overrightarrow{DC} = C - D = (c_1-4,\ -2,\ 2-d_3)$.
2. Paralelos: $\overrightarrow{DC} = k\,\overrightarrow{AB}$. La segunda componente da $-2 = 2k \Rightarrow k = -1$.
3. Entonces $c_1 - 4 = -2 \Rightarrow c_1 = 2$ y $2 - d_3 = -1 \Rightarrow d_3 = 3$. (Quedan paralelos de sentido contrario: $\overrightarrow{DC} = (-2,-2,-1)$.)

Ejercicio 2.7.6 ← volver

1. **Perpendicularidad:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$.
2. **Área:** $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & b & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b,-2,b)$, así que $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = 2b^2+4 = 36 \Rightarrow b^2 = 16$, $b = \pm 4$.
3. Otra forma: como son perpendiculares, $A = |\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{2+b^2}\,\sqrt{2} = 6$.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 5, con $\vec{u} = (1,a,1)$ y $\vec{v} = (-1,0,b)$: $b = 1$ y $a = \pm 4$.

Ejercicio 2.7.7 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{OB}\cdot\hat{\jmath} = 4\sqrt{2}$ y $|\hat{\jmath}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\hat{\jmath}}\,\overrightarrow{OB} = 4\sqrt{2}\,\hat{\jmath} = \big(0,4\sqrt{2},0\big)$.
2. **b)** $C = \frac{1}{2}(A+B) = \big(2\sqrt{2},2\sqrt{2},-4\big)$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{8+8+16} = 4\sqrt{2}$.
3. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 16+0+16 = 32$: $\text{comp}_{\overrightarrow{OC}}\,\overrightarrow{OA} = \frac{32}{4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Ejercicio 2.7.8 ← volver

Resultado: a) cono circular de vértice en el origen y eje y; b) hiperboloide de una hoja de revolución, centro en el origen, eje z; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(1,0,0)$.

Ejercicio 4C.5.7 · Dos hojas, paraboloide y elipsoide trasladado

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $5x^2-3y^2+15z^2+15=0$; b) $x-y^2-4z^2=-4$; c) $x^2+y^2+2z^2-4x+2y-4z+3=0$.

Resolución.

1. **a)** $5x^2-3y^2+15z^2=-15$; dividiendo entre -15:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} - z^2 = 1.$$

   Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y; **vértices** $(0,\pm\sqrt{5},0)$.
   - **Trazas:** $y = k$ con $|k| > \sqrt{5}$, elipses $\frac{x^2}{3} + z^2 = \frac{k^2}{5} - 1$; plano $z = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$; plano $x = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - z^2 = 1$.
   - **Extensión:** $y \in (-\infty,-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5},\infty)$; $x, z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** $x+4 = y^2+4z^2$. Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal x: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.
   - **Vértice** $(-4,0,0)$; **eje** x; abre hacia x positivo.
   - **Trazas:** $x = k > -4$, elipses $\frac{y^2}{k+4} + \frac{z^2}{(k+4)/4} = 1$; plano $z = 0$, parábola $y^2 = x+4$; plano $y = 0$, parábola $4z^2 = x+4$.
   - **Extensión:** $x \in [-4,\infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c) Completar cuadrados:** $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 2(z-1)^2 - 2 + 3 = 0$, es decir $(x-2)^2 + (y+1)^2 + 2(z-1)^2 = 4$:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1.$$

   Tres cuadrados positivos igualados a 1: se cumple la forma del **elipsoide**; dos denominadores iguales: es de revolución alrededor de la recta $x = 2$, $y = -1$.
   - **Centro** $(2,-1,1)$; semiejes 2, 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Trazas:** plano $z = 1$, circunferencia $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$; planos $x = 2$ y $y = -1$, elipses de semiejes 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Extensión:** $x \in [0,4]$, $y \in [-3,1]$, $z \in [1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas de eje y, vértices $(0,\pm\sqrt{5},0)$; b) paraboloide elíptico de vértice $(-4,0,0)$ y eje x; c) elipsoide de revolución de centro $(2,-1,1)$, semiejes 2, 2, $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4C.5.8 · Cuatro superficies, una de ellas cilindro

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $(x-1)^2+2y^2+(z+3)^2-16=0$; b) $3x^2-2y^2+4y+z^2=26$; c) $x^2-y^2-z+1=0$; d) $x^2+z^2-4=0$.

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Polinomios

Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. Cuatro cruces simples: grado 4, $q(x) = a\,x(x+3)(x+1)(x-2)$.
2. Punto $(1,-8)$: $a\,(1)(4)(2)(-1) = -8a = -8$, $a = 1$.
3. $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2)$. Como $(x+3)(x+1)(x-2) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $q(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. $h(x) = x^2\,g(x)$, con $g(x) = x^4 + (2-i)x^3 + (-3-2i)x^2 + (-6+3i)x + 6i$. $x = 0$ es raíz doble.
2. Coeficientes complejos: solo se divide entre $x - i$:

	1	$2-i$	$-3-2i$	$-6+3i$	$6i$
i		i	$2i$	$-3i$	$-6i$
	1	2	-3	-6	0

3. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = x^2(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(x^2-3)$.
4. Raíces: 0 (doble), i, -2, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; $h(x) = x^2(x-i)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. Las raíces de f son las de p junto con las de q. De p: $x = \pm i$.
2. $q(x) = x^3(x^3 - 3x^2 - 9x + 20)$: $x = 0$ triple.
3. Candidatos de $x^3 - 3x^2 - 9x + 20$: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$. Con $x = 4$:

	1	-3	-9	20
4		4	4	-20
	1	1	-5	0

4. $x^2 + x - 5 = 0$: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.
5. Son 8 raíces, el grado de f.

Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. $g(x) = x^3\,q(x)$, $q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$; $x = 0$ triple.
2. $q(x)$: signos $+\ -\ +\ -\ +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 positivas. $q(-x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$: 0 cambios, ninguna negativa.
3. Posibilidades: $(4,0,0)$, $(2,0,2)$, $(0,0,4)$.
4. Se prueban solo candidatos positivos $(1, 2)$:

	1	-3	3	-3	2
1		1	-2	1	-2
2	1	-2	1	-2	0
		2	0	2	
	1	0	1	0	

5. $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la posibilidad $(2,0,2)$.

- **Trazas:** $x = k$ con $|k-3| > 3$, elipses $(y+2)^2 + \frac{(z-1)^2}{16} = \frac{(k-3)^2}{9} - 1$; plano $z = 1$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 = 1$; plano $y = -2$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$.
- **Extensión:** $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.

2. **b) Completar cuadrados:** $(x-1)^2 - 1 + 2(y+2)^2 - 8 = -5z - 3$, es decir

$$(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = -5\left(z - \tfrac{6}{5}\right).$$

Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal z: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.

- **Vértice** $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$; **eje** la recta $x = 1$, $y = -2$; abre hacia z negativo (el coeficiente -5).
- **Trazas:** plano $z = 0$, elipse $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 6$; plano $x = 1$, parábola $2(y+2)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$; plano $y = -2$, parábola $(x-1)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$.
- **Extensión:** $z \in \left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$; $x, y \in \mathbb{R}$.

3. **c)** $\dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(z+1)^2}{9} = 1$. Falta x y los dos cuadrados son positivos: **cilindro elíptico**; no es elipsoide (no hay tres cuadrados).

- **Eje:** la recta $y = 2$, $z = -1$, paralela al eje x; generatrices paralelas a $\hat{\imath}$.
- **Directriz:** la elipse de centro $(0, 2, -1)$ en el plano $x = 0$, semiejes 4 (en y) y 3 (en z).
- **Extensión:** $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-2, 6]$, $z \in [-4, 2]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas, centro $(3, -2, 1)$, eje paralelo a x; b) paraboloide elíptico, vértice $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$, abre hacia z negativo; c) cilindro elíptico de eje $y = 2$, $z = -1$.

4C.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4C**.

Ejercicio propuesto 4C.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cónica S que tiene por vértice el punto $V(3, -2, 7)$ y contiene a la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1, \qquad z = 0.$$

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (3, -2, 7) + s(-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -7)$; $9(7x - 5z + 14)^2 + 4(7y + 3z - 7)^2 = 36(z-7)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

Ejercicio propuesto 4C.6.2

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 5.

Sea el cilindro S con eje paralelo al vector $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ y cuya intersección con el plano $z - 3 = 0$ es la circunferencia de radio 2 y centro en $C(0, 0, 3)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

- Stewart, J. y otros. *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas*. Cengage Learning, 2021 (2, 3 y 4).
- Swokowski, E. W. y Cole, J. A. *Precálculo. Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning, 2018 (1, 2 y 4).

Complementaria

- Gigena, S. *Álgebra y geometría: teoría, práctica y aplicaciones*. Universitas Editorial Científica Universitaria, 2018 (1).
- Miller, J. y Gerken, D. *Álgebra universitaria y trigonometría*. McGraw-Hill, 2018 (1 y 2).
- Recuenco Aguado, E. *Teoría de curvas, superficies y campos para ingenieros*. Garceta Grupo Editorial, 2017 (4).
- Stewart, J. y otros. *Precalculus: Mathematics for Calculus*. Cengage Learning, 2017 (1 y 2).

Ejercicio propuesto 4C.6.7

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 5.

Obtenga una ecuación vectorial del cilindro que se forma por circunferencias de radio igual a 3 contenidas en planos paralelos a $y = 0$, tales que todas tienen su centro en la recta $L: \ \vec{p} = (1,\ 1+t,\ 1)$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, t) = (1+3\cos\theta,\ 1+t,\ 1+3\operatorname{sen}\theta)$; su cartesiana es $(x-1)^2+(z-1)^2 = 9$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 153.

Ejercicio propuesto 4C.6.8

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 6.

Sea la superficie $S: \ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} = z^2-1$. Obtenga: a) las trazas de S con los planos XZ y YZ; b) el conjunto de valores de z para los cuales está definida la superficie; c) una ecuación vectorial de la curva C que se forma por la intersección de S con el plano $z = \sqrt{2}$.

Resultado: a) hipérbolas $z^2-\frac{x^2}{4} = 1\ (y=0)$ y $z^2-\frac{y^2}{9} = 1\ (x=0)$; b) $z \in (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$; c) $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\operatorname{sen} t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

Ejercicio propuesto 4C.6.9

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 7.

Identifique las superficies cuyas ecuaciones se dan a continuación, justificando las respuestas: a) $x^2+3x+2 = 0$; b) $(x-1)^2+y^2 = 1-(z+1)^2$; c) $2x^2-y^2-z^2 = 0$; d) $x^2+z = y^2-4$.

Resultado: a) dos planos paralelos, $x = -1$ y $x = -2$; b) esfera de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; c) cono circular de vértice en el origen y eje x; d) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0, 0, -4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

4C.7 Errores frecuentes

1. **Usar el punto de la directriz como vértice.** En el cono la dirección de la generatriz es $\vec{q}(\theta)-\vec{v}$, no $\vec{q}(\theta)$. En el cilindro, en cambio, la dirección es siempre $\vec{u}$.
2. **Olvidar despejar s de la componente correcta.** Se despeja de la coordenada del plano de la directriz (z si la directriz está en $z = 3$; x si está en $x = 0$), que es la única lineal en s y sin θ.
3. **Parametrizar la directriz sin dividir.** $9x^2+4y^2 = 36$ no es $x = 9\cos\theta$: primero $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$, luego $x = 2\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$.
4. **Usar $\operatorname{sen}^2+\cos^2$ con una hipérbola.** Una directriz hiperbólica se parametriza con sec y tan y se elimina con $\sec^2\theta-\tan^2\theta = 1$.
5. **No comprobar.** Al hacer $z = l$ en la cartesiana debe salir la directriz; si no sale, hay un error de signo. La comprobación toma un minuto.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen usado en este cuaderno tiene resolución publicada: todas las resoluciones son propias. Este apéndice solo registra erratas o rarezas de los *enunciados* (datos que sobran o faltan, dos respuestas donde se pide una) y cómo se trataron.

C.1A · Unidad 1 · Parte A · Números complejos

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Polinomios

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Álgebra vectorial

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4A · Unidad 4 · Parte A · Curvas polares

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4B · Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4C · Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas

Sin erratas registradas en esta unidad.

De la cartesiana a la vectorial. Se lleva la ecuación a su forma ordinaria y se escoge la parametrización por la identidad que la cumple: $\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ para el elipsoide, $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$ para los hiperboloides; en los paraboloides y el cono, $r\cos\theta$ y $r\operatorname{sen}\theta$ en las dos variables al cuadrado. Cada semieje multiplica a la función de su coordenada y el centro se suma al final. Se comprueba sustituyendo en la cartesiana.

De la vectorial a la cartesiana. Se despejan las funciones de los parámetros ($\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen}\varphi$, $\sec\varphi$, r…) y se eliminan con las identidades, como en una curva en el espacio (Unidad 4B), solo que aquí hay dos parámetros y queda *una* ecuación. Luego se identifica con la tabla de la sección 4C.1.6. Para la extensión, conviene ver qué valores puede tomar cada componente: $r^2\geq 0$, $|\sec\varphi|\geq 1$, $-1\leq\cos\varphi\leq 1$.

Ejemplo resuelto · Elipsoide dado en forma vectorial e hiperboloide en forma cartesiana

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 4.3).

a) Identifique la superficie $S_1:\ \vec{p}(\theta,\varphi)=\big(1+2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ -2+3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ 4\cos\varphi\big)$, con $\theta\in[0,2\pi)$ y $\varphi\in[0,\pi]$. b) Obtenga una ecuación vectorial y unas ecuaciones paramétricas del hiperboloide $S_2:\ \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{(z+1)^2}{9}=1$.

Resolución.

1. **a) Despeje:** $\frac{x-1}{2}=\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $\frac{y+2}{3}=\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$, $\frac{z}{4}=\cos\varphi$.
2. **a) Eliminación de θ:** al sumar los cuadrados de los dos primeros, $\operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=\operatorname{sen}^2\varphi$. **De φ:** con el tercero, $\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1$:

$$S_1:\ \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$

3. **a) Identificación:** tres cuadrados positivos igualados a 1: se cumple la forma del **elipsoide**. Centro $(1,-2,0)$, semiejes 2 (paralelo al eje x), 3 (al eje y) y 4 (al eje z); $x\in[-1,3]$, $y\in[-5,1]$, $z\in[-4,4]$.
4. **b) Forma:** dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: hiperboloide de una hoja de eje paralelo al eje z (la recta $x=2$, $y=0$), con centro $(2,0,-1)$; los denominadores de x y y son iguales, así que es de revolución.
5. **b) Parametrización:** con $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$, $\frac{x-2}{2}=\sec\varphi\cos\theta$, $\frac{y}{2}=\sec\varphi\operatorname{sen}\theta$, $\frac{z+1}{3}=\tan\varphi$:

$$S_2:\ \vec{p}(\theta,\varphi)=\big(2+2\sec\varphi\cos\theta,\ 2\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ -1+3\tan\varphi\big),$$

   con $\theta\in[0,2\pi)$ y $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Paramétricas: $x=2+2\sec\varphi\cos\theta$, $y=2\sec\varphi\operatorname{sen}\theta$, $z=-1+3\tan\varphi$.
6. **Comprobación:** $\frac{4\sec^2\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}{4}-\frac{9\tan^2\varphi}{9}=\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$.

Resultado: a) elipsoide de centro $(1,-2,0)$ y semiejes 2, 3 y 4; b) $\vec{p}(\theta,\varphi)=\big(2+2\sec\varphi\cos\theta,\ 2\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ -1+3\tan\varphi\big)$.

Las resoluciones de estos dos propuestos están en el **Apéndice E, sección E.4C**.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 De dónde salen los problemas

Todavía no hay exámenes del Plan 2026. Este cuaderno usa los exámenes de las materias de los planes 2010 y 2016 que tenían los mismos temas; son los mismos problemas de los cuadernos de esas materias, donde están en orden, examen por examen (Apéndice B de cada uno):

- **Números complejos y polinomios** (Unidades 1A y 1B): los finales de *Álgebra*, 17 del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1). En cada final, el problema 2 o 3 (complejos) y el 3 o 4 (polinomios).
- **Álgebra vectorial y recta y plano** (Unidades 2 y 3): los 9 finales de *Geometría Analítica* del Plan 2010 (2012-1 a 2014-2) y los problemas de geometría de 39 finales de *Cálculo y Geometría Analítica* del Plan 2016 (2016-1 a 2026-2), además de dos parciales de 2005-2.
- **Curvas polares, curvas en el espacio y superficies** (Unidades 4A, 4B y 4C): los 9 finales de *Geometría Analítica* del Plan 2010 y un parcial de 2006-2.
- **Lo nuevo del Plan 2026** (las coordenadas polares como sistema de referencia y las cuádricas en forma vectorial y paramétrica): ejercicios propios, marcados «Ejercicio propio».

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden de los temas del programa 2026: siete problemas, uno por parte del cuaderno. Resuélvelo en 2 horas, sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E. Es una aproximación: el examen 2026 puede traer otra cantidad de problemas.

Simulacro	1	2	3	4	5	6	7
1	1A.6.1	1B.6.6	2.7.1	3.6.1	4A.6.2	4B.6.1	4C.6.1
2	1A.6.4	1B.6.1	2.7.3	3.6.4	4A.6.3	4B.6.2	4C.6.4
3	1A.6.5	1B.6.5	2.7.2	3.6.2	4A.6.4	4B.6.5	4C.6.5

Las columnas son los temas: (1) complejos; (2) polinomios; (3) vectores; (4) recta y plano; (5) curva polar; (6) curva en el espacio; (7) superficie.

Simulacro 1. (1) Álgebra, 1er final 2014-1, tipo A, problema 2; (2) Álgebra, 1er final 2014-1, tipo A, problema 3; (3) Geometría Analítica, 2º final 2012-1, problema 2; (4) Geometría Analítica, 2º final 2012-1, problema 4; (5) Geometría Analítica, 2º final 2013-1, problema 1; (6) Geometría Analítica, 2º final 2012-1, problema 6; (7) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 5.

Simulacro 2. (1) Álgebra, 2º final 2013-2, tipo A, problema 2; (2) Álgebra, 2º final 2013-2, tipo B, problema 3; (3) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 2; (4) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 3; (5) Geometría Analítica, 2º final 2014-2, problema

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Los valores exactos de los ángulos notables están en la sección 0.6.3.

A.1 Números complejos (Unidad 1, Parte A)

- $z = a + bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$.
- $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$; $\dfrac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis} n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\dfrac{\theta+360^\circ k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^{\,p}}$.
- $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.
- $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

A.2 Polinomios (Unidad 1, Parte B)

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x-a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\dfrac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\le$ cambios de $p(x)$; negativas $\le$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

A.3 Sistemas de referencia y álgebra vectorial (Unidad 2)

- $(r,\theta) = (r, \theta + 360^\circ k) = (-r, \theta + 180^\circ + 360^\circ k)$; el polo es $(0,\theta)$ para todo θ.
- $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r,θ): eje polar $(r,-\theta)$; recta a 90° $(r, 180^\circ - \theta)$; polo $(r, \theta + 180^\circ) = (-r, \theta)$.
- Distancia entre vectores (o entre puntos): $d(A,B) = |\vec{b} - \vec{a}|$.
- $\overrightarrow{AB} = B - A \cdot |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot$ punto medio $\dfrac{1}{2}(A+B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \hat{v}$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ · $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.
- $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.

1. **Tipo:** rectas paralelas a un vector que cortan a una curva: es una superficie cilíndrica (4C.1.2).
2. **Directriz:** $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ en $x=0$: $\vec{q}(\theta)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)$.
3. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s\,(-3,1,2)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
4. **Eliminación de s:** el plano de la directriz es $x=0$, así que se usa $x=-3s\Rightarrow s=-\frac{x}{3}$.
5. **Eliminación de θ:** $y=2\cos\theta+s\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{x+3y}{6}$; $z=\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta+2s\Rightarrow\operatorname{sen}\theta=\dfrac{2x+3z}{3\sqrt{2}}$.
6. **b) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(x+3y)^2}{36}+\dfrac{(2x+3z)^2}{18}=1$, es decir

$$(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36.$$

7. **Comprobación:** con $x=0$: $9y^2+18z^2=36\Rightarrow y^2+2z^2=4$.

Resultado: $\vec{p}=(0,2\cos\theta,\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s(-3,1,2)$; $(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36$.

Ejercicio 4C.5.6 · Cono, hiperboloide y silla sin completar cuadrados

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (nombre y algunas características): a) $z^2=y^2-x^2$; b) $z^2-y^2-x^2=-1$; c) $4(x-1)^2-9y^2+z=0$.

Resolución.

1. **a)** $x^2+z^2-y^2=0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: se cumple la forma del **cono**; denominadores de x y z iguales: cono circular.
   - **Vértice** en el origen; **eje** y (la variable de signo solitario).
   - **Trazas:** $y=k\neq0$, circunferencias $x^2+z^2=k^2$ de radio $|k|$; plano $z=0$, rectas $y=\pm x$; plano $x=0$, rectas $y=\pm z$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
2. **b)** Multiplicando por -1: $x^2+y^2-z^2=1$. Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de una hoja**; es de revolución (coeficientes de x^2 y y^2 iguales).
   - **Centro** en el origen; **eje** z.
   - **Trazas:** $z=k$, circunferencias de radio $\sqrt{1+k^2}$ (la garganta, de radio 1, en $z=0$); plano $x=0$, hipérbola $y^2-z^2=1$; plano $y=0$, hipérbola $x^2-z^2=1$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** $z=9y^2-4(x-1)^2$. Dos cuadrados de signo contrario y una variable lineal: se cumple la forma del **paraboloide hiperbólico**; no se cumple la del elíptico (los signos no coinciden).
   - **Punto silla** $(1,0,0)$; eje paralelo a z (la recta $x=1$, $y=0$).
   - **Trazas:** plano $x=1$, parábola $z=9y^2$, abre hacia z positivo; plano $y=0$, parábola $z=-4(x-1)^2$, abre hacia z negativo; plano $z=0$, rectas $3y=\pm2(x-1)$; $z=k\neq0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.

1. **Relación:** $\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ y $\overrightarrow{AB}=-\vec{c}$, así que $\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$ y $|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$.
2. **a)** $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{1}{1}\vec{a}=\vec{a}$.
3. **b)** $\cos\theta=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\theta=45°$).
4. **c)** $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}$, con $|\vec{a}\times\vec{c}|=1\cdot1\cdot\operatorname{sen}90°=1$: área $\frac{1}{2}$. (Es un triángulo rectángulo en A con catetos de longitud 1.)

Ejercicio 2.7.9

← volver

1. **Aristas:** $\overrightarrow{AB}=(-6,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-4,2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4,-3,2)$.
2. **a)**

$$\begin{vmatrix}-6&1&2\\-1&-4&2\\-4&-3&2\end{vmatrix}=-6(-8+6)-1(-2+8)+2(3-16)=12-6-26=-20,$$

   así que $V=20$.
3. **b)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=4+12+4=20$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{21}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{29}$: $\cos\theta=\frac{20}{\sqrt{609}}$.

Ejercicio 2.7.10

← volver

1. $\vec{v}=B-A=(-2,1,4)$, $|\vec{v}|^2=21$.
2. **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2+2+12=12$: $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{12}{21}\vec{v}=\frac{4}{7}(-2,1,4)=\left(-\frac{8}{7},\frac{4}{7},\frac{16}{7}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&2&3\\-2&1&4\end{vmatrix}=(8-3)\hat{\imath}-(4+6)\hat{\jmath}+(1+4)\hat{k}=(5,-10,5)=5(1,-2,1),$$

   $\vec{w}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.
4. **c)** $A=|\vec{u}\times\vec{v}|=5\sqrt{6}$.

Ejercicio 2.7.11

← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(3,1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,-3,3)$.
2. **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-2=4$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{19}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$: $\cos A=\frac{4}{2\sqrt{38}}=\frac{\sqrt{38}}{19}$.
3. **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3-3-9=-15$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{19}$: $\operatorname{comp}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}=-\frac{15}{\sqrt{19}}$.
4. **c)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\3&1&-3\\2&-2&0\end{vmatrix}=(0-6)\hat{\imath}-(0+6)\hat{\jmath}+(-6-2)\hat{k}=(-6,-6,-8)$; $|...|=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$ y el área es $\sqrt{34}$.

Ejercicio 2.7.12

← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,d_2-1,-1)$.

Resolución.

1. **a)** $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{(z+3)^2}{16}=1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide** de revolución (eje: la recta $x=1$, $z=-3$, paralela a y).
   - **Centro** $(1,0,-3)$; semiejes 4, $2\sqrt{2}$, 4.
   - **Trazas:** plano $y=0$, circunferencia $(x-1)^2+(z+3)^2=16$; planos $x=1$ y $z=-3$, elipses.
   - **Extensión:** $x\in[-3,5]$, $y\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$, $z\in[-7,1]$.
2. **b) Completar cuadrados:** $-2(y^2-2y)=-2(y-1)^2+2$, así que $3x^2-2(y-1)^2+z^2=24$:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{12}+\frac{z^2}{24}=1.$$

   Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(0,1,0)$; **eje** la recta $x=0$, $z=0$, paralela a y.
   - **Trazas:** plano $y=1$ (garganta), elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{z^2}{24}=1$; plano $z=0$, hipérbola $\frac{x^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{12}=1$; plano $x=0$, hipérbola $\frac{z^2}{24}-\frac{(y-1)^2}{12}=1$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** $z-1=x^2-y^2$. Dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.
   - **Punto silla** $(0,0,1)$; eje paralelo a z (el eje z).
   - **Trazas:** plano $y=0$, parábola $z-1=x^2$ (abre hacia arriba); plano $x=0$, parábola $z-1=-y^2$ (abre hacia abajo); plano $z=1$, rectas $y=\pm x$.
4. **d)** $x^2+z^2=4$. Falta y y los dos cuadrados son positivos: **cilindro circular recto** de radio 2.
   - **Eje:** el eje y; generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$; directriz, la circunferencia $x^2+z^2=4$, $y=0$.
   - **Extensión:** $x\in[-2,2]$, $z\in[-2,2]$, $y\in\mathbb{R}$.

Resultado: a) elipsoide de centro $(1,0,-3)$; b) hiperboloide de una hoja de centro $(0,1,0)$ y eje paralelo a y; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0,0,1)$; d) cilindro circular de radio 2 y eje y.

Ejercicio 4C.5.9 · Hiperboloide de dos hojas, paraboloide hacia abajo y cilindro elíptico

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $\dfrac{(x-3)^2}{9}-(y+2)^2-\dfrac{(z-1)^2}{16}=1$; b) $x^2+2y^2-2x+8y=-5z-3$; c) $\dfrac{(y-2)^2}{16}=-\dfrac{(z+1)^2}{9}+1$.

Resolución.

1. **a)** Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** $(3,-2,1)$; **eje** la recta $y=-2$, $z=1$, paralela a x; **vértices** $(0,-2,1)$ y $(6,-2,1)$.

6. $g(x)=x^3(x-1)(x-2)(x-i)(x+i)$.

Ejercicio 1B.6.5 ← volver

1. $p(1)=A+2-B+2=-4\Rightarrow A-B=-8$.
2. $p(2)=8A+8-2B+2=0\Rightarrow 8A-2B=-10\Rightarrow 4A-B=-5$.
3. Restando la primera de la segunda: $3A=3$, $A=1$, $B=9$.
4. $p(x)=x^3+2x^2-9x+2$, con raíz $x=2$ (dato $p(2)=0$):

	1	2	−9	2
2		2	8	−2
	1	4	−1	0

5. $x^2+4x-1=0$: $x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$.

Ejercicio 1B.6.6 ← volver

1. Coeficientes complejos: se divide solo entre $x-(1-3i)$:

	1	$-1+3i$	5	$-5+15i$	4	$-4+12i$
$1-3i$		$1-3i$	0	$5-15i$	0	$4-12i$
	1	0	5	0	4	0

2. Cociente bicuadrado: $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$.
3. $x^2=-1\Rightarrow x=\pm i$; $x^2=-4\Rightarrow x=\pm 2i$.
4. Raíces: $1-3i$, i, $-i$, $2i$, $-2i$.

E.2 · Unidad 2 · Álgebra vectorial

Ejercicio 2.1.1 · Conversión de puntos ← volver

1. **a)** $r=\sqrt{12+4}=4$; $\tan\theta=\frac{-2}{-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, con el punto en el tercer cuadrante: $\theta=180^\circ+30^\circ=210^\circ$. Con $r<0$ se resta 180°: $(-4,30^\circ)$.
2. **b)** $x=5\cos(-90^\circ)=0$, $y=5\operatorname{sen}(-90^\circ)=-5$: $Q(0,-5)$.

Ejercicio 2.1.2 · Ecuación de transformación y distancia ← volver

1. **a)** Se multiplica por r: $r^2=6r\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=6x\Rightarrow(x-3)^2+y^2=9$. Circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3, que pasa por el polo.
2. **b)** En cartesianas, $M(2\cos 30^\circ, 2\operatorname{sen}30^\circ)=\left(\sqrt{3},1\right)$ y $N(0,4)$. $\overrightarrow{MN}=\left(-\sqrt{3},3\right)$ y $d=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Ejercicio 2.7.1 ← volver

1. **Incógnitas:** $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$.
2. **Perpendicularidad:** $(a,b,0)\cdot(1,-2,4)=a-2b=0\Rightarrow a=2b$.
3. **Área:** $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(0,0,ab)$, así que $\frac{1}{2}|ab|=4\Rightarrow|ab|=8$.
4. Con $a=2b$: $2b^2=8\Rightarrow b=\pm 2$, $a=\pm 4$ (mismo signo).

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3) + s(-1, 2, 1)$; $(x + z - 3)^2 + (y - 2z + 6)^2 = 4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

Ejercicio propuesto 4C.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $x^2+2x+8y^2 = 23$; b) $(x-1)^2-9 = -3(y+2)^2-3z^2$; c) $-2x^2-5z^2 = -25-3y^2$.

Resultado: a) cilindro elíptico de eje $x = -1$, $y = 0$ (paralelo a z); b) elipsoide de revolución, centro $(1, -2, 0)$, semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; c) hiperboloide de una hoja, centro en el origen, eje y.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 152.

Ejercicio propuesto 4C.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = (z-1)^2 + 1$; b) $\dfrac{(y-2)^2}{3} + \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{z^2}{4}$; c) $x^2 + y^2 - z^2 = -2z^2 + 2$.

Resultado: a) hiperboloide de una hoja, centro $(-2, 3, 1)$, eje paralelo a z; b) paraboloide hiperbólico, punto silla $(1, 2, 0)$, eje paralelo a x; c) esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 152.

Ejercicio propuesto 4C.6.5

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 + x - 2y = 1$; b) $\dfrac{(y+1)^2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2} = \dfrac{(z-1)^2}{4}$; c) $(x+1)^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = \dfrac{z^2}{4}$.

Resultado: a) elipsoide de revolución, centro $\left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right)$, semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$, $\frac{\sqrt{34}}{4}$, $\frac{\sqrt{17}}{4}$; b) cono elíptico, vértice $(2, -1, 1)$, eje paralelo a y; c) hiperboloide de una hoja, centro $(-1, 0, 0)$, eje paralelo a z.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 153.

Ejercicio propuesto 4C.6.6

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 4.

Obtenga una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del cono cuyo vértice es el punto $V(0, 1, 0)$ y que contiene a la curva $C:\ \ y = 0,\ x^2 + z^2 = 2$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0, 1, 0) + s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$; $x^2 + z^2 = 2(y-1)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 153.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1A · Unidad 1 · Parte A · Números complejos

Ejercicio 1A.6.1

← volver

1. Lectura: $z_1 = i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = 2\,\mathrm{cis}(270^\circ - 30^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,240^\circ$; $z_4 = \sqrt{8}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 2 - 2i$.
2. $2z_2 - z_4 = 2 + 6i - 2 + 2i = 8i$ y $\frac{8i}{i} = 8$.
3. $z_3^3 = 8\,\mathrm{cis}\,720^\circ = 8$.
4. $8z^4 = 8 \Rightarrow z^4 = 1 = \mathrm{cis}\,0^\circ$; raíces cuartas: $\mathrm{cis}(90^\circ k)$.
5. **Resultado:** $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 1A.6.2

← volver

1. $z_2 - \bar{z}_3 = -3 - (-3 + 6i) = -6i = 6\,\mathrm{cis}\,270^\circ$; numerador: $6\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,270^\circ$.
2. $i^{17} = i = \mathrm{cis}\,90^\circ$; denominador: $2\,\mathrm{cis}\,135^\circ \cdot \mathrm{cis}\,90^\circ = 2\,\mathrm{cis}\,225^\circ$.
3. Lado derecho: $3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$. Como $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$, $w^{3/2} = 3$.
4. $w = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9\,\mathrm{cis}\,0^\circ}$: módulo $\sqrt[3]{9}$, argumentos $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$.

Ejercicio 1A.6.3

← volver

1. $i^7 = i^3 = -i = \mathrm{cis}\,270^\circ$; $(-i)(2\,\mathrm{cis}\,60^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,330^\circ = \sqrt{3} - i$.
2. Numerador: $(\sqrt{3} - i) + (-\sqrt{3} + 2i) = i$. Denominador: $-\,\mathrm{cis}\,270^\circ = -(-i) = i$.
3. $z^{4/3} = 1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{1^3} = \sqrt[4]{\mathrm{cis}\,0^\circ}$.
4. Raíces cuartas de 1: $\mathrm{cis}(90^\circ k)$, $k = 0, 1, 2, 3$: $1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 1A.6.4

← volver

1. Lectura: $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\,\mathrm{cis}\,120^\circ$; $z_2 = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,225^\circ = -4 - 4i$; $z_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 1 - i$.
2. $z_2 - 2\bar{z}_3 = -4 - 4i - 2 - 2i = -6 - 6i$; por $e^{\pi i} = -1$, el denominador es $6 + 6i = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$.
3. Numerador: $6 \cdot 2\,\mathrm{cis}\,120^\circ \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 12\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,435^\circ = 12\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,75^\circ$.
4. $w^{2/3} = 2\,\mathrm{cis}\,30^\circ \Rightarrow w = \sqrt{(2\,\mathrm{cis}\,30^\circ)^3} = \sqrt{8\,\mathrm{cis}\,90^\circ}$.
5. Raíces cuadradas: módulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, argumentos 45° y 225°: $w = 2 + 2i$, $w = -2 - 2i$.

Ejercicio 1A.6.5

← volver

1. $z_1 = 20\,\mathrm{cis}\,180^\circ$; $z_3 = 16\,\mathrm{cis}\,60^\circ$ ($r = \sqrt{64 + 192} = 16$, primer cuadrante, $\tan\theta = \sqrt{3}$).
2. $z_2 z_3 z_4 = 5 \cdot 16 \cdot 4\,\mathrm{cis}(45^\circ + 60^\circ + 135^\circ) = 320\,\mathrm{cis}\,240^\circ$.
3. $z^4 = \frac{320\,\mathrm{cis}\,240^\circ}{20\,\mathrm{cis}\,180^\circ} = 16\,\mathrm{cis}\,60^\circ$.
4. Raíces cuartas: módulo 2, argumentos $15^\circ + 90^\circ k$.

Ejercicio 1A.6.6

← volver

1. $z_3 - \bar{z}_4 = -3 - (-3 - 4i) = 4i$; $(4i)^3 = 64\,\mathrm{cis}\,270^\circ$.
2. $z_1 = 2\,\mathrm{cis}\,135^\circ$ y $z_2 = 8\,\mathrm{cis}\,45^\circ$: $z_1 z_2 = 16\,\mathrm{cis}\,180^\circ$.
3. $z^{3/2} = 4\,\mathrm{cis}\,90^\circ \Rightarrow z = \sqrt[3]{(4\,\mathrm{cis}\,90^\circ)^2} = \sqrt[3]{16\,\mathrm{cis}\,180^\circ}$.
4. Módulo $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; argumentos $60^\circ + 120^\circ k$.

6. **Leer el tipo antes de completar cuadrados o de igualar a 1.** $5x^2-3y^2+15z^2+15=0$ parece de una hoja (dos positivos), pero al dividir entre -15 es de dos hojas.
7. **Confundir el eje.** En el hiperboloide de una hoja el eje es la variable con signo *menos*; en el de dos hojas, la de signo *más*; en el paraboloide, la variable lineal.
8. **Llamar elipsoide a un cilindro.** Si falta una variable ($\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(z+1)^2}{9}=1$), es un cilindro con generatrices paralelas al eje de la variable que falta.
9. **Dar solo el nombre.** Sin centro o vértice, eje y trazas, la identificación queda incompleta.

4C.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Cilindro: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{q}(\theta)+s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{v}+s\big(\vec{q}(\theta)-\vec{v}\big)$.
- Directriz: elipse $(h+a\cos\theta,\ k+b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2}-\frac{X^2}{b^2}=1$: $Y=a\sec\theta$, $X=b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta=1$ o $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$.
- Completar cuadrados: $ax^2+dx=a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2-\frac{d^2}{4a}$.
- $+\,+\,+\,=1$ elipsoide · $+\,+\,+\,-\,=1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\,-\,-\,-\,=1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $=0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $+\,+\,=0$: recta; $+\,+\,=-1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h-a,h+a]$; dos hojas $|z-l|\geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.

4C.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Generatrices: escribe primero la directriz en forma ordinaria y su parametrización; con eso la ecuación vectorial sale en una línea.
2. Despeja s de la coordenada del plano de la directriz, luego $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$), y aplica la identidad.
3. Comprueba la cartesiana con el vértice (cono) y con el plano de la directriz.
4. Identificación: completa cuadrados en cada ecuación, iguala a 1 (o a 0) y nombra la superficie con la tabla 4C.1.6, diciendo qué forma se cumple.
5. Escribe, para cada superficie, centro o vértice, eje, dos trazas y la extensión; si piden intervalos de variación, despeja cada cuadrado y exige ≥ 0.

Los dos problemas de esta unidad valen un tercio del examen y su procedimiento es siempre el mismo: es la unidad que más puntos da por hora de estudio.

4C.10 Cuádricas en forma vectorial y paramétrica

El programa 2026 pide las tres formas de una cuádrica: cartesiana, vectorial y paramétricas. La sección 4C.1.8 da las ecuaciones vectoriales de las cuádricas con centro o vértice en el origen; aquí se trabajan en los dos sentidos, con centro (h,k,l).

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programa de la asignatura

- Programa de estudios de *Álgebra y Geometría Analítica* del Plan 2026 de Ingeniería en Computación (primer semestre, 8 créditos, 64 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Cuatro temas: números complejos y polinomios (10 horas), álgebra vectorial (20), recta y plano en el espacio (16), y curvas y superficies (18).

De él se tomaron el orden de las unidades, el objetivo de la asignatura y el objetivo literal de cada tema.

Exámenes

No hay exámenes publicados del Plan 2026. Los problemas de las unidades vienen de los exámenes de las materias de los planes 2010 y 2016 con los mismos temas. Ninguno tiene resolución publicada: las resoluciones de este cuaderno son propias. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó; los de Cálculo y Geometría Analítica llevan el nombre de la asignatura.

- **Álgebra, planes 2010 y 2016** (Unidades 1A y 1B): 17 exámenes finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1).
- **Geometría Analítica, Plan 2010** (Unidades 2, 3, 4A, 4B y 4C): 9 exámenes finales colegiados, de 2012-1 a 2014-2, y 3 exámenes parciales de la versión anterior del programa, de 2005-2 y 2006-2, con los mismos temas.
- **Cálculo y Geometría Analítica, Plan 2016** (Unidades 2, 3 y 4B): los problemas de geometría de 39 exámenes finales, de 2016-1 a 2026-2.

Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas. Las series de ejercicios de Geometría Analítica se revisaron para la notación y el orden de los temas; los ejercicios que se tomaron de ellas lo indican en su fuente. Los ejercicios de lo nuevo del programa 2026 son propios y lo dicen en su fuente («Ejercicio propio»).

Software

Los recuadros «Con la computadora» usan Python y la biblioteca sympy (software libre, `https://www.sympy.org`). Cada resultado del cuaderno se comprobó con álgebra computacional.

Bibliografía del programa

Básica (entre paréntesis, los temas del programa para los que la recomienda)

- Anton, H. y otros. *Cálculo multivariable*. Limusa-Wiley, 2022 (2, 3 y 4).
- Larson, R. y otros. *Cálculo 2 de varias variables*. McGraw-Hill, 2016 (2, 3 y 4).
- Lehmann, C. H. *Geometría analítica*. Limusa, 2016 (2, 3 y 4).
- Purcell, E. J. y otros. *Cálculo*. Pearson Educación, 2024 (2, 3 y 4).

Ejercicio propuesto 4C.10.1 · Paraboloide dado en forma vectorial

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 4.3).

Obtenga una ecuación cartesiana de la superficie $S:\ \vec{p}(r,\theta) = \big(r\cos\theta,\ 3 + r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2 - r^2\big)$, con $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, identifíquela y dé el intervalo de variación de z.

Resultado: $x^2 + (y-3)^2 = 2 - z$: paraboloide circular de vértice $(0, 3, 2)$, eje la recta $x = 0$, $y = 3$, que abre hacia las z negativas; $z \in (-\infty, 2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

Ejercicio propuesto 4C.10.2 · Ecuaciones vectoriales de un cono y de un hiperboloide de dos hojas

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 4.3).

Obtenga una ecuación vectorial de: a) el cono $(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = \frac{z^2}{9}$; b) el hiperboloide de dos hojas $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$.

Resultado: a) $\vec{p}(r,\theta) = \big(1 + r\cos\theta,\ -1 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3r\big)$, $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. b) $\vec{p}(\theta,\varphi) = \big(2\tan\varphi\cos\theta,\ 3\tan\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \sec\varphi\big)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \cup \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

4C.11 Con la computadora

El programa revisa el inciso a del segundo ejemplo de la sección 4C.4: comprueba la forma con cuadrados completos del paraboloide $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z + 12 = 0$ y que una ecuación vectorial suya lo cumple para todos los valores de los parámetros. Para dibujarla, `sympy.plotting.plot3d_parametric_surface` recibe las tres componentes y los intervalos de r y t (con matplotlib instalada). El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import symbols, cos, sin, simplify, expand

x, y, z, r, t = symbols("x y z r t")
S = x**2 + y**2 + 4*x - 6*y - z + 12
# completando cuadrados: (x+2)² + (y−3)² = z + 1
assert expand((x + 2)**2 + (y - 3)**2 - (z + 1) - S) == 0
# una ecuación vectorial del paraboloide circular
p = (-2 + r*cos(t), 3 + r*sin(t), -1 + r**2)
assert simplify(S.subs(dict(zip((x, y, z), p)))) == 0
print("paraboloide circular, vértice (-2, 3, -1)")
```


1; (6) Geometría Analítica, 2º final 2014-1, problema 4; (7) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 6.

Simulacro 3. (1) Álgebra, 1er final 2017-1, tipo A, problema 3; (2) Álgebra, 1er final 2018-2, tipo C, problema 4; (3) Geometría Analítica, 2º final 2012-2, problema 2; (4) Geometría Analítica, 2º final 2012-2, problema 4; (5) Geometría Analítica, Serie de ejercicios de curvas en el plano polar, ejercicio 15; (6) Geometría Analítica, 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 1; (7) Geometría Analítica, 2º final 2014-2, problema 6.

- $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a}\times\vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D=A+C-B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M-P$.

A.4 La recta y el plano en el espacio (Unidad 3)

- Recta: $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$ · $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ · general: $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.
- Plano: $Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=(A,B,C)$ · $\vec{p}=\vec{p}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}$ · perpendiculares: $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$ (igual con normales). Recta ∥ plano: $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$; recta ⊥ plano: $\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta=\frac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q,\pi)=\frac{|Ax_Q+By_Q+Cz_Q+D|}{|\vec{n}|}$ · $d(Q,L)=\frac{|\overrightarrow{P_0Q}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1,L_2)=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}$ · planos paralelos: $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $=0$ se cortan, $\neq 0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t=\frac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ · simétrico: $Q'=2M-Q$.

A.5 Curvas polares (Unidad 4, Parte A)

- $(r,\theta)=(r,\theta+360°k)=(-r,\theta+180°+360°k)$; el polo es $(0,\theta)$ para todo θ.
- $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $r^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r,θ): eje polar $(r,-\theta)$; recta a 90° $(r,180°-\theta)$; polo $(r,\theta+180°)=(-r,\theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta\to-\theta$ o $(-r,180°-\theta)$; recta a 90° $\theta\to180°-\theta$ o $(-r,-\theta)$; polo $r\to-r$ o $\theta+180°$. Suficientes, no necesarias.
- $r=a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2},0\right)$; $r=a\operatorname{sen}\theta$: centro $\left(0,\frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r=a\pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a=b$, caracol con lazo si $a<b$.
- $r=a\operatorname{sen}n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2=\pm a^2\cos2\theta$, $r^2=a^2\operatorname{sen}2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1\pm e\operatorname{sen}\theta}$: foco en el polo; $e<1$ elipse, $e=1$ parábola, $e>1$ hipérbola.

A.6 Curvas en el espacio (Unidad 4, Parte B)

- Vectorial $\vec{p}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\iff$ paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z=k$).
- $\operatorname{sen}^2t+\cos^2t=1$ · $\sec^2t-\tan^2t=1$ · $\csc^2t-\cot^2t=1$ · $\cos2t=1-2\operatorname{sen}^2t=2\cos^2t-1$ · $\operatorname{sen}2t=2\operatorname{sen}t\cos t$.
- $(\cos t+\operatorname{sen}t)^2+(\cos t-\operatorname{sen}t)^2=2$.
- Elipse: $u=h+a\cos t$, $v=k+b\operatorname{sen}t$ · hipérbola: $u=h+a\sec t$, $v=k+b\tan t$ · parábola $(u-h)^2=4p(v-k)$: $u=h+2t$, $v=k+\frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2=a^2-b^2$; hipérbola $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $v-k=\pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en u).
- Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ }\geq0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }}>0$; $\tan,\sec:\ t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\cot,\csc:\ t\neq k\pi$).
- Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0\leq\operatorname{sen}^2t\leq1$, $|\sec t|\geq1$.

A.7 Superficies cuádricas (Unidad 4, Parte C)

- Cilindro: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{q}(\theta)+s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{v}+s\big(\vec{q}(\theta)-\vec{v}\big)$.
- Directriz: elipse $(h+a\cos\theta,\ k+b\operatorname{sen}\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2}-\frac{X^2}{b^2}=1$: $Y=a\sec\theta$, $X=b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$ o $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$.
- Completar cuadrados: $ax^2+dx=a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2-\frac{d^2}{4a}$.
- $+\ +\ +\ =1$ elipsoide · $+\ +\ -\ =1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\ -\ -\ =1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $=0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $++=0$: recta; $++=-1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h-a,h+a]$; dos hojas $|z-l|\geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.
- Vectorial de una cuádrica con centro (h,k,l): elipsoide $(h+a\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ k+b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ l+c\cos\varphi)$; una hoja $(h+a\sec\varphi\cos\theta,\ k+b\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ l+c\tan\varphi)$; dos hojas $(h+a\tan\varphi\cos\theta,\ k+b\tan\varphi\operatorname{sen}\theta,\ l+c\sec\varphi)$; paraboloide $(h+ar\cos\theta,\ k+br\operatorname{sen}\theta,\ l+r^2)$; cono $(h+ar\cos\theta,\ k+br\operatorname{sen}\theta,\ l+cr)$.