3. **a) Paramétricas:**

$$x = 2 + 3s\cos\theta, \qquad y = -4 + s(6 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad z = -1 + 3s; \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

4. **Eliminación de $s$:** $3s = z + 1$.
5. **Eliminación de $\theta$:**

$$3s\cos\theta = x - 2 \quad \Rightarrow\ \cos\theta = \frac{x-2}{z+1},$$

$$3s\,\mathrm{sen}\,\theta = y + 4 - 6s = y + 4 - 2(z+1) \quad \Rightarrow\ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y - 2z + 2}{z+1}.$$

6. **b) Ecuación cartesiana:** con $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$,

$$(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 2$ queda $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$; el vértice da $0 + (-4+2+2)^2 = 0$.

**Resultado:** $x = 2 + 3s\cos\theta$, $y = -4 + s(6 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $z = -1 + 3s$; $(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2$.

### Ejercicio 4C.5.2 · Cono que contiene a una elipse en $z = 6$

*Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 8.*

Sea el cono $C$ con vértice $V(0, 2, 0)$ que contiene a la curva $9x^2 + 4(y-2)^2 - 36 = 0$, $z = 6$. Obtenga una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana que definan a $C$.

**Resolución.**

1. **Directriz:** dividiendo entre 36, $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 6)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (2\cos\theta,\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 6)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (0, 2, 0) + s\,(2\cos\theta,\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 6)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación:** $z = 6s \Rightarrow s = \frac{z}{6}$; $\cos\theta = \frac{x}{2s} = \frac{3x}{z}$; $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{y-2}{3s} = \frac{2(y-2)}{z}$.
5. **Ecuación cartesiana:** $\frac{9x^2}{z^2} + \frac{4(y-2)^2}{z^2} = 1$, es decir

$$9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2.$$

   Es un cono elíptico con vértice $(0, 2, 0)$ y eje paralelo al eje $z$ (tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero).

**Resultado:** $\vec{p}(\theta, s) = (0, 2, 0) + s(2\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta, 6)$; $9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2$.

### Ejercicio 4C.5.3 · Cilindro con directriz elíptica y generatrices oblicuas

*Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 6.*

Sea $S$ la superficie cilíndrica formada por rectas paralelas al vector $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$ y que contiene a la curva $H:\ 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$, $z = 3$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de $S$; b) unas ecuaciones paramétricas de $S$; c) una ecuación cartesiana de $S$.

**Resolución.**

1. **Directriz:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3)$.





#### *4B.1.2 Curva en un plano paralelo a uno coordenado; ecuaciones cartesianas*

Si una de las coordenadas es constante, por ejemplo $z(t) = 3$ para todo $t$, la curva está en el plano $z = 3$, paralelo al plano coordenado $XY$. Lo mismo con $x = k$ (paralelo al plano $YZ$) o $y = k$ (paralelo al plano $XZ$).

Una curva en el espacio se describe en forma cartesiana con **dos ecuaciones** (dos superficies que se cortan en ella). Para una curva plana son la ecuación del plano y la de la curva dentro de él:

$$C:\ \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

La primera ecuación, sola, sería una superficie (un cilindro); la segunda la recorta al plano. Por eso el examen pide «unas ecuaciones cartesianas» o «una pareja de ecuaciones cartesianas»: siempre son dos.

#### *4B.1.3 Identidades para eliminar el parámetro*

Para obtener las ecuaciones cartesianas se elimina el parámetro. Con funciones trigonométricas se despejan $\mathrm{sen}\,t$, $\cos t$, $\tan t$… y se usa una identidad:

$$\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t = 1, \qquad \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \qquad \csc^2 t - \cot^2 t = 1,$$

$$\cos 2t = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,t = 2\cos^2 t - 1, \qquad \mathrm{sen}\,2t = 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t, \qquad \csc t = \frac{1}{\mathrm{sen}\,t}.$$

Si aparece $\cos t + \mathrm{sen}\,t$ y $\cos t - \mathrm{sen}\,t$, se usa $(\cos t + \mathrm{sen}\,t)^2 + (\cos t - \mathrm{sen}\,t)^2 = 2$. Si el parámetro aparece sin funciones trigonométricas ($x = 2t$, $z = \frac{2}{t}$), se despeja $t$ de una ecuación y se sustituye en las otras.

#### *4B.1.4 Cónicas en forma paramétrica*

En un plano con coordenadas $(u, v)$ (dos de $x$, $y$, $z$; la tercera es constante), con centro o vértice $(h, k)$:

| Cónica | Paramétricas | Cartesiana |
|---|---|---|
| Circunferencia | $u = h + r\cos t$, $v = k + r\,\mathrm{sen}\,t$ | $(u-h)^2 + (v-k)^2 = r^2$ |
| Elipse | $u = h + a\cos t$, $v = k + b\,\mathrm{sen}\,t$ | $\frac{(u-h)^2}{a^2} + \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$ |
| Hipérbola | $u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$ | $\frac{(u-h)^2}{a^2} - \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$ |
| Parábola | $u = h + t$, $v = k + \frac{t^2}{4p}$ | $(u-h)^2 = 4p\,(v-k)$ |

En la elipse y la circunferencia, $t \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez. En la hipérbola, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da la rama con $u \geq h + a$ ($\sec t > 0$) y $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la otra. El eje focal de la hipérbola es el de la variable que lleva sec.

**Elementos** que se piden al identificar: centro (o vértice en la parábola), plano que la contiene, semiejes $a$ y $b$, vértices, focos (con $c^2 = a^2 - b^2$ en la elipse, $c^2 = a^2 + b^2$ en la

2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$.
3. **a) Ecuación vectorial:**

$$S:\quad \vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s\,(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6), \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

4. **Paramétricas:** $x = s(-1 + 2\cos\theta)$, $y = s(3 + 3\operatorname{sen}\theta)$, $z = 6 - 6s$.
5. **Eliminación de $s$:** de la tercera, $s = \dfrac{6 - z}{6}$.
6. **Eliminación de $\theta$:** de las dos primeras,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s} + 1\right) = \frac{6x + 6 - z}{2(6 - z)},$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{s} - 3\right) = \frac{6y - 18 + 3z}{3(6 - z)} = \frac{2y + z - 6}{6 - z}.$$

7. **Identidad:** $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$:

$$\frac{(6x - z + 6)^2}{4(6 - z)^2} + \frac{(2y + z - 6)^2}{(6 - z)^2} = 1.$$

8. **b) Ecuación cartesiana:** multiplicando por $4(6 - z)^2$,

$$(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z - 6)^2,$$

que desarrollada es $36x^2 + 16y^2 + z^2 - 12xz + 16yz + 72x - 96y - 12z + 36 = 0$.
9. **Comprobación:** $V(0,0,6)$: $0+4\cdot 0 = 0$, se cumple. Con $z = 0$: $(6x+6)^2+4(2y-6)^2 = 144$, es decir $36(x + 1)^2 + 16(y - 3)^2 = 144$, que es la directriz.

**Resultado:** $\vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$; $(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z - 6)^2$.

**Ejemplo resuelto · Identificación con intervalos de variación**

*Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 6.*

Para cada una de las siguientes ecuaciones cartesianas, identifique el lugar geométrico que representan, indicando los intervalos de variación para $x$, $y$, $z$:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z + 12 = 0$; b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$;

c) $\dfrac{(x - 3)^2}{9} - \dfrac{(y - 5)^2}{4} + \dfrac{(z + 2)^2}{9} = -1$.

**Resolución.**

1. **a) Completar cuadrados:** $(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - z + 12 - 4 - 9 = 0$, es decir

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = z + 1.$$

   - **Tipo:** dos cuadrados del mismo signo igualados a una variable lineal: se cumple la forma del paraboloide elíptico; los denominadores son iguales, así que es **paraboloide circular** (de revolución).





| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «bosquejar la gráfica de $C$», «en el plano $z = 3$» | dibujo en su plano, con ejes 3D | 4B.3.5 |
| la curva dada con dos ecuaciones cartesianas, o una cónica con «centro» y «semiejes» | paramétricas y vectorial | 4B.3.6 |

### 4B.3 Procedimientos

*4B.3.1 Paramétricas y ecuación vectorial*

1. **De vectorial a paramétricas:** cada componente de $\vec{p}$ es una ecuación: $\vec{p} = (1 + 3\tan\theta,\ -2 + 2\sec\theta,\ 3)$ da $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
2. **De paramétricas a vectorial:** $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, o separando punto fijo y términos con el parámetro: $\vec{p} = (-2, 1, 5) + 3\cos t\,\hat{\imath} + 4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.
3. Simplifica lo que se pueda antes de seguir: $\frac{4}{\csc\theta} = 4\operatorname{sen}\theta$, $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$. Anota el intervalo del parámetro junto a las ecuaciones.

*4B.3.2 Ecuaciones cartesianas e identificación*

1. **Plano:** la coordenada constante da la primera ecuación ($z = 3$).
2. **Despeje:** de las otras dos, aísla la función trigonométrica: $\tan\theta = \frac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \frac{y+2}{2}$.
3. **Identidad:** sustituye en la identidad de la sección 4B.1.3. Con $\cos 2\theta$, escríbelo como $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, o como $2\cos^2\theta - 1$ si trae $\cos\theta$.
4. **Forma ordinaria:** ordena la ecuación como en la tabla de la sección 4B.1.4 (completa cuadrados si la curva viene en forma general).
5. **Identificación:** nombre de la cónica y elementos: plano, centro o vértice, eje focal (paralelo a qué eje), semiejes, vértices, focos; asíntotas o directriz si aplica. Con la tercera coordenada en cada punto.
6. **Recorte:** si la extensión (4B.3.4) no cubre toda la cónica, dilo: «arco de parábola», «semicircunferencia», «elipse sin los puntos …».

*4B.3.3 Intervalo paramétrico*

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es; pasa al paso 4.
2. Para cada componente, escribe su condición: radicando $\geq 0$ (o $> 0$ si la raíz está en un denominador), denominador $\neq 0$, puntos excluidos de tan, sec, csc, cot.
3. Intersecta las condiciones: $t > -4$ y $-5 \leq t \leq 5$ dan $(-4, 5]$.
4. Escríbelo con intervalos. Si es periódico, da también un periodo que recorra la curva una vez.

*4B.3.4 Extensión (intervalos de variación)*

1. Para cada coordenada, calcula el recorrido de su función en el intervalo paramétrico.
2. **Trigonométricas:** parte de $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ (o del intervalo de $\operatorname{sen} t$ en el intervalo dado), $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$, $\tan t \in \mathbb{R}$, y aplica las operaciones de la componente (multiplicar por un negativo invierte la desigualdad).

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «identificar la superficie representada por…» (varias ecuaciones) | nombre y características | 4C.3.4 |
| «intervalos de variación», «conjunto de valores de $z$» | extensión | 4C.3.5 |
| «trazas con los planos XZ y YZ», «curva intersección con el plano $z = k$» | cónicas de corte | 4C.3.4, paso 5 |

## 4C.3 Procedimientos

*4C.3.1 Cono por el método de las generatrices*

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$. Si es la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ en el plano $z = l$: $\vec{q}(\theta) = (h + a\cos\theta,\ k + b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$. Si viene como $9x^2 + 4(y-2)^2 = 36$, divide primero entre 36.
2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, del vértice al punto de la directriz.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Paramétricas:** las tres componentes de la anterior.
5. **Eliminación de $s$:** la componente que corresponde al plano de la directriz es lineal en $s$ (por ejemplo $z = 6 - 6s$); despeja $s$.
6. **Eliminación de $\theta$:** de las otras dos componentes despeja $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (aparecen divididos entre $s$) y sustituye en $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$.
7. **Simplifica:** multiplica por el denominador común; deja la ecuación como una igualdad de cuadrados.
8. **Comprueba** con dos cosas: el vértice satisface la ecuación, y al hacer $z = l$ se recupera la directriz.

*4C.3.2 Cilindro por el método de las generatrices*

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$ como en 4C.3.1.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$, con $\vec{u}$ el vector de las generatrices.
3. **Paramétricas:** sus tres componentes.
4. **Eliminación de $s$:** en la componente del plano de la directriz ($z = 3 + 2s$) despeja $s$.
5. **Eliminación de $\theta$:** despeja $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$) y usa la identidad.
6. **Comprueba:** con $s = 0$ (es decir, en el plano de la directriz) se recupera la directriz.

**Observación.** Si las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz, o si el enunciado describe «circunferencias en planos paralelos con centro en una recta», el cilindro es recto: la vectorial es $\vec{p} = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$ igual, y la cartesiana es la ecuación de la directriz sin la variable de $\vec{u}$.

*4C.3.3 Parametrizar la directriz*

1. **Elipse o circunferencia:** lleva a la forma $\frac{(X)^2}{a^2} + \frac{(Y)^2}{b^2} = 1$ y usa $X = a\cos\theta, Y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$.
2. **Hipérbola:** $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$ se parametriza con $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$, y la identidad

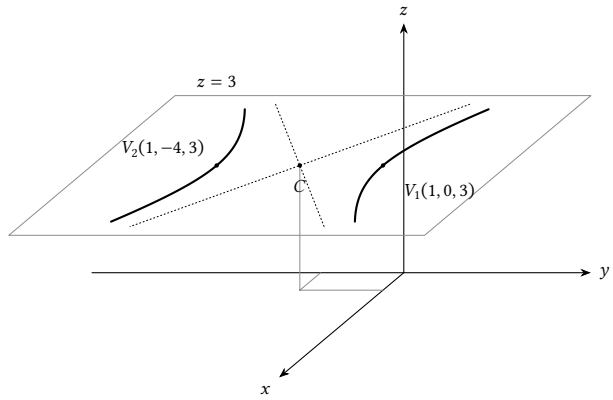




paralelo al eje $y$ (el término positivo es el de $y$); $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
- vértices $V(1, -2 \pm 2, 3)$: $V_1(1, 0, 3)$ y $V_2(1, -4, 3)$;
- focos $F\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$;
- asíntotas: $y + 2 = \pm\frac{2}{3}(x - 1)$, $z = 3$.

Con $\theta \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, $\sec\theta \geq 1$ y $y \geq 0$: rama de $V_1$; con $\theta \in \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$, $y \leq -4$: rama de $V_2$. Se recorren las dos ramas completas.

6. **c) Bosquejo:** el plano $z = 3$, el centro, los vértices, las asíntotas y las dos ramas.




**Resultado:** intervalo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $C:\ \frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$, $z = 3$: hipérbola de centro $(1, -2, 3)$, eje focal paralelo al eje $y$, $a = 2$, $b = 3$, vértices $(1, 0, 3)$ y $(1, -4, 3)$, focos $\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$.

## 4B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 4B.5.1 · Parábola con coseno del ángulo doble

*Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 5.*

Sea la curva $C:\ x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y = 2\cos 2\theta,\ z = 3$; $\theta \geq 0$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de $C$ y el intervalo de valores para $x$, $y$ y $z$. b) Bosqueje la gráfica de $C$ en el plano $z = 3$.

**Resolución.**

1. **a) Identidad:** como $x$ trae $\mathrm{sen}\,\theta$, se usa $\cos 2\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$ con $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{4}$:

$$y = 2\left(1 - 2\cdot\frac{x^2}{16}\right) = 2 - \frac{x^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad x^2 = -4(y-2).$$

2. **Cartesianas:** $C:\ x^2 = -4(y-2)$, $z = 3$. Parábola de vértice $V(0, 2, 3)$, eje paralelo al eje $y$, $4p = -4$, $p = -1$: abre hacia las $y$ negativas, foco $(0, 1, 3)$, directriz $y = 3$, $z = 3$.
3. **Intervalos** ($\theta \geq 0$ contiene periodos completos): $-1 \leq \mathrm{sen}\,\theta \leq 1$ da $x \in [-4, 4]$; $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$ da $y \in [-2, 2]$; $z = 3$.

*4C.1.6 Tabla de reconocimiento*

Después de completar cuadrados y pasar todo a la forma $\pm\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ 0$ o $-1$ (con $X = x - h$, etc.), o con una variable lineal, la superficie se lee de los signos:

| Forma (tras completar cuadrados) | Superficie |
|---|---|
| tres cuadrados, todos +, $= 1$ | elipsoide (esfera si $a = b = c$) |
| tres cuadrados, todos +, $= 0$ | un punto (el centro) |
| tres cuadrados, todos +, $= -1$ | ningún punto (vacío) |
| tres cuadrados, dos + y uno −, $= 1$ | hiperboloide de una hoja; eje: la variable con − |
| tres cuadrados, uno + y dos −, $= 1$ | hiperboloide de dos hojas; eje: la variable con + |
| tres cuadrados con signos mixtos, $= 0$ | cono; eje: la variable de signo solitario |
| dos cuadrados del mismo signo = término lineal de la tercera | paraboloide elíptico; eje: la variable lineal |
| dos cuadrados de signo contrario = término lineal de la tercera | paraboloide hiperbólico |
| dos cuadrados, + y +, $= 1$; falta la tercera variable | cilindro elíptico (circular si $a = b$) |
| dos cuadrados, + y −, $= 1$; falta la tercera variable | cilindro hiperbólico |
| dos cuadrados, + y −, $= 0$; falta la tercera variable | dos planos que se cortan |
| dos cuadrados, + y +, $= 0$; falta la tercera variable | una recta |
| un cuadrado y una variable lineal | cilindro parabólico |
| un solo cuadrado = constante ($x^2 = c$) | dos planos paralelos, uno, o vacío |

Una ecuación con signo $-1$ a la derecha se multiplica por $-1$ antes de usar la tabla: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -1$ es $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$, un hiperboloide de dos hojas de eje $y$.

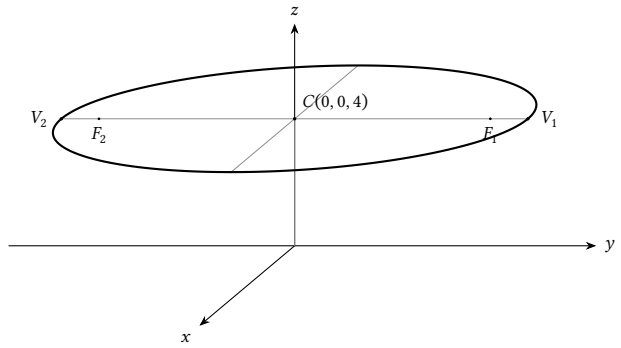
*4C.1.7 Qué es «identificar» una superficie*

El enunciado dice siempre que la identificación «requiere más información que el nombre». Para cada ecuación se escribe:

1. **Nombre** completo: «hiperboloide de una hoja», «paraboloide elíptico», «de revolución» si dos denominadores son iguales.
2. **Centro** (elipsoide, hiperboloides, esfera) o **vértice** (paraboloides, cono); en el paraboloide hiperbólico, el **punto silla**.








**Resultado:** $C:\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{54} = 1,\ z = 4$: elipse de centro $(0, 0, 4)$, eje mayor paralelo al eje $y$, $a = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, focos $\left(0, \pm\sqrt{38}, 4\right)$.

**Ejercicio 4B.5.3 · Intervalo paramétrico y extensión con raíces**

*Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 6.*

Sea la curva $C$ de ecuación vectorial

$$\vec{p} = \left(\frac{3}{\sqrt{t+4}}\right)\hat{\imath} + \left(\sqrt{25 - t^2}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{6}{\sqrt{t+4}} + 1\right)\hat{k}.$$

Obtenga: a) unas ecuaciones paramétricas de $C$; b) el intervalo paramétrico; c) el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas $x$, $y$ y $z$ de los puntos de la curva.

**Resolución.**

1. **a)** $x = \frac{3}{\sqrt{t+4}}$, $y = \sqrt{25 - t^2}$, $z = \frac{6}{\sqrt{t+4}} + 1$.
2. **b) Condiciones:** en $x$ y $z$ la raíz está en el denominador: $t + 4 > 0$, $t > -4$. En $y$: $25 - t^2 \geq 0$, $-5 \leq t \leq 5$. Intersección: $t \in (-4, 5]$.
3. **c)** $x$**:** $t + 4$ recorre $(0, 9]$, así que $\sqrt{t+4} \in (0, 3]$ y $x = \frac{3}{\sqrt{t+4}}$ es decreciente: $x = 1$ en $t = 5$ y $x \to \infty$ cuando $t \to -4^+$. Entonces $x \in [1, \infty)$.
4. $y$**:** en $(-4, 5]$, $t^2$ toma todos los valores de $[0, 25]$ ($t = 0$ da 0; $t = 5$ da 25). Entonces $25 - t^2 \in [0, 25]$ y $y \in [0, 5]$.
5. $z$**:** $z = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{t+4}} + 1 = 2x + 1$; con $x \in [1, \infty)$, $z \in [3, \infty)$.

**Observación.** De $z = 2x + 1$ se ve que la curva está en ese plano, que no es paralelo a uno coordenado; el problema solo pide intervalos, no la identificación.

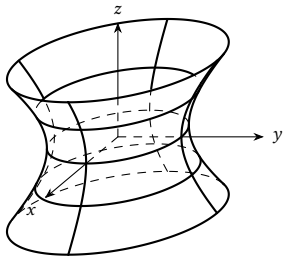
**Resultado:** intervalo paramétrico $(-4, 5]$; $x \in [1, \infty)$, $y \in [0, 5]$, $z \in [3, \infty)$.

**Ejercicio 4B.5.4 · Parábola en el plano $x = 5$: de cartesianas a paramétricas**

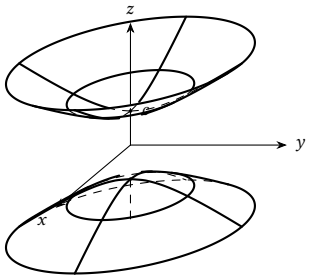
*Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 5.*

Sea la curva $C:\ x = 5,\ y^2 - 2y - 4z + 9 = 0$. a) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de $C$. b) Determine una ecuación vectorial de $C$. c) Identifique a $C$ y bosqueje su gráfica.

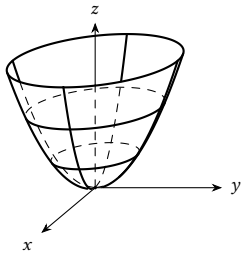
**Resolución.**




**Hiperboloide de dos hojas.** $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$: un cuadrado positivo, dos negativos, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo más. Los **vértices** son $(0,0,\pm c)$; entre ellos no hay superficie: $|z|\geq c$. Las trazas $z=k$ con $|k|>c$ son elipses; las trazas con $x=0$ y $y=0$ son hipérbolas.




**Paraboloide elíptico.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$: dos cuadrados del mismo signo y la tercera variable *lineal*. El eje es el de la variable lineal; el **vértice**, el origen. Abre hacia donde la variable lineal tiene el signo de los cuadrados ($z\geq 0$ si $c>0$). Las trazas $z=k>0$ son elipses; las trazas con $x=0$ y $y=0$, parábolas. Si $a=b$ es un paraboloide circular (de revolución).




**Paraboloide hiperbólico (silla de montar).** $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$: dos cuadrados de signo contrario y la tercera variable lineal. El origen es el **punto silla**. La traza con $x=0$ es





**Resultado:** $x=-2+3\cos t$, $y=1$, $z=5+4\operatorname{sen} t$, $t\in[0,2\pi)$; $\vec{p}=(-2,1,5)+3\cos t\,\hat{\imath}+4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.

### Ejercicio 4B.5.6 · Hipérbola con secante y tangente (Plan 2016)

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.*

Sea la curva $C$ representada por $\vec{r}(t)=(1,\ 2\sec t,\ 4\tan t)$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas de $C$; b) unas ecuaciones cartesianas de $C$ e identifíquela.

**Resolución.**

1. **a)** $x=1$, $y=2\sec t$, $z=4\tan t$, con $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
2. **b) Despeje:** $\sec t=\frac{y}{2}$, $\tan t=\frac{z}{4}$. Con $\sec^2 t-\tan^2 t=1$:

$$C:\ \begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1\\ x=1\end{cases}$$

3. **Identificación:** hipérbola en el plano $x=1$, centro $(1,0,0)$, eje focal paralelo al eje $y$; $a=2$, $b=4$, $c=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. Vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\left(1,\pm2\sqrt{5},0\right)$, asíntotas $z=\pm2y$, $x=1$.

**Resultado:** $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, $x=1$: hipérbola de centro $(1,0,0)$, vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\left(1,\pm2\sqrt{5},0\right)$. Es el mismo tipo que el ejemplo 4B.4.

## 4B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4B**.

### Ejercicio propuesto 4B.6.1

*Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 6.*

Sea la curva $C$ de ecuación vectorial $\vec{p}=\left(-1+2\cos\theta,\ 5,\ 3+\dfrac{4}{\csc\theta}\right)$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de $C$. b) Bosqueje la gráfica de $C$ e identifíquela.

**Resultado:** $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(z-3)^2}{16}=1$, $y=5$: elipse de centro $(-1,5,3)$, eje mayor paralelo al eje $z$, $a=4$, $b=2$; sin los puntos $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 149.

### Ejercicio propuesto 4B.6.2

*Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 4.*

Sea la curva $C$ representada por $\vec{p}=\left(-3,\ 2-5\operatorname{sen}^2 t,\ 4-3\operatorname{sen} t\right)$. a) Determine unas ecuaciones paramétricas de $C$ y el intervalo paramétrico asociado a ellas. b) Determine unas ecuaciones cartesianas de $C$, así como los intervalos de variación de $y$ y $z$.

**Resultado:** $x=-3$, $y=2-5\operatorname{sen}^2 t$, $z=4-3\operatorname{sen} t$, $t\in\mathbb{R}$; $(z-4)^2=-\frac{9}{5}(y-2)$, $x=-3$; $y\in[-3,2]$, $z\in[1,7]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 150.

- **Cilíndricas:** formadas por rectas paralelas a un vector que pasan por una curva.
- **Cónicas:** formadas por rectas que pasan por un punto fijo y por una curva.

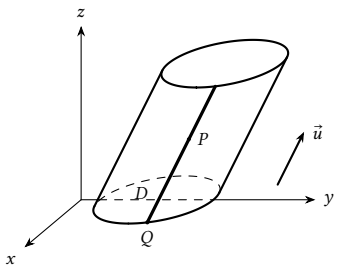
Un cono o cilindro con directriz cónica es a la vez cónico (o cilíndrico) y cuádrico; si la directriz es otra curva, la superficie ya no es cuádrica.

### *4C.1.2 Superficies cilíndricas*

Una *superficie cilíndrica* es el conjunto de rectas paralelas a un vector $\vec{u}$ que cortan a una curva $D$. La curva $D$ es la **directriz**; cada recta, una **generatriz**. Si $D$ está dada por $\vec{q}(\theta)$, cada punto de la superficie es un punto de $D$ más un múltiplo de $\vec{u}$:

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}.$$

Con $s$ fijo se obtiene una copia de la directriz trasladada; con $\theta$ fijo, una generatriz (figura).




En el examen la directriz es siempre una cónica en un plano paralelo a uno coordenado ($z = 3$, $x = 0$), y $\vec{u}$ no es paralelo a ese plano. Si $\vec{u}$ es perpendicular al plano de la directriz, el cilindro es *recto* y su ecuación cartesiana es la de la directriz sin la variable que falta: $x^2 + z^2 = 4$ es un cilindro circular recto de eje $y$.

### *4C.1.3 Superficies cónicas*

Una *superficie cónica* es el conjunto de rectas que pasan por un punto fijo $V$, el **vértice**, y por los puntos de una curva $D$, la **directriz**. La generatriz que pasa por el punto $\vec{q}(\theta)$ de la directriz tiene dirección $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, así que

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\,\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big),$$

donde $\vec{v}$ es el vector de posición de $V$. Con $s = 0$ se obtiene el vértice; con $s = 1$, la directriz; con $s < 0$, la otra hoja del cono, del otro lado del vértice.





4. **Confundir el eje focal de la hipérbola.** Es el de la variable con signo positivo en la forma ordinaria (la que lleva sec en las paramétricas), no el de la que tiene el denominador mayor.
5. **Intervalo paramétrico con desigualdad no estricta en un denominador.** $\frac{1}{\sqrt{t+4}}$ exige $t > -4$, no $t \geq -4$.
6. **Dar la extensión de la cónica completa.** Con $x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$ la parábola solo llega a $|x| \leq 4$; la extensión sale de las paramétricas, no de la cartesiana.
7. **Olvidar los puntos excluidos.** Con $\frac{4}{\csc\theta}$ los valores $\theta = k\pi$ no están en el intervalo y la elipse pierde dos puntos.
8. **Invertir la desigualdad mal.** Con $z = 4 - 3\,\mathrm{sen}\,t$, $\mathrm{sen}\,t = 1$ da el mínimo $z = 1$, no el máximo.

## 4B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Vectorial $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \iff$ paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z = k$).
- $\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \csc^2 t - \cot^2 t = 1 \cdot \cos 2t = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1 \cdot \mathrm{sen}\,2t = 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t$.
- $(\cos t + \mathrm{sen}\,t)^2 + (\cos t - \mathrm{sen}\,t)^2 = 2$.
- Elipse: $u = h + a\cos t$, $v = k + b\,\mathrm{sen}\,t$ · hipérbola: $u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$ · parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$: $u = h + 2t$, $v = k + \frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2 = a^2 - b^2$; hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, asíntotas $v - k = \pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en $u$).
- Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ } \geq 0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }} > 0$; $\tan, \sec: t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot, \csc: t \neq k\pi$).
- Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0 \leq \mathrm{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$.

## 4B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe las paramétricas (o la vectorial) aunque no las pidan: de ahí sale todo.
2. Intervalo paramétrico: una condición por componente, e intersección.
3. Extensión: recorrido de cada coordenada, partiendo de $-1 \leq \mathrm{sen}\,t \leq 1$ o de la monotonía.
4. Elimina el parámetro con la identidad que corresponde; escribe la cónica en forma ordinaria y el plano.
5. Identifica: nombre, centro o vértice, eje focal, semiejes, vértices y focos, con la tercera coordenada; di si la extensión recorta la cónica.
6. Bosquejo: plano, centro, vértices, asíntotas y la curva solo en su extensión.

Si no sale la identidad, el intervalo paramétrico y la extensión ya valen buena parte del problema.

## 4B.10 Con la computadora

El programa sustituye las paramétricas de la hipérbola del ejemplo 4B.4 en su ecuación cartesiana y comprueba que se cumple para todo $\theta$: así se revisa una eliminación del parámetro. Para verla, `sympy.plotting.plot3d_parametric_line(x, y, z, (t,`

hipérbola, $p$ en la parábola), asíntotas de la hipérbola y directriz de la parábola. Todos son puntos o rectas *del espacio*: llevan la tercera coordenada constante.

#### *4B.1.5 Intervalo paramétrico*

El **intervalo paramétrico** es el conjunto de valores del parámetro para los que la ecuación vectorial está definida: el *dominio común* de las tres funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Si el enunciado da un intervalo ($\theta \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), es ese. Las restricciones vienen de:

- **raíces de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$; en un denominador, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$;
- **cocientes:** denominador $\neq 0$; $\frac{2}{t}$ excluye $t = 0$;
- **trigonométricas:** $\tan t$ y $\sec t$ excluyen $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot t$ y $\csc t$ excluyen $t = k\pi$.

Con funciones periódicas basta dar un periodo que recorra la curva una vez (por ejemplo $[0, 2\pi)$ sin los puntos excluidos), o todos los reales sin los puntos excluidos.

#### *4B.1.6 Extensión: intervalos de variación*

La **extensión** de la curva son los intervalos de variación de $x$, $y$ y $z$: el conjunto de valores que toma cada función en el intervalo paramétrico (su recorrido). Es lo que el examen llama «el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas».

La extensión puede **recortar** la cónica: las ecuaciones cartesianas describen la cónica completa, pero las paramétricas solo recorren una parte. Casos típicos:

- $y = 2\cos 2\theta$, $x = 4\operatorname{sen}\theta$: la cartesiana es una parábola completa, pero $|x| \leq 4$ y $y \geq -2$; solo se recorre un arco (figura del ejercicio 4B.5.1);
- $y = a - b\operatorname{sen}^2 t$: como $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, $y$ va de $a - b$ a $a$;
- raíces: $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = 2\cos t$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da $z \geq 0$: media circunferencia;
- puntos excluidos: $z = 3 + \frac{4}{\csc\theta} = 3 + 4\operatorname{sen}\theta$ no existe donde $\operatorname{sen}\theta = 0$, así que a la elipse le faltan dos puntos.

### 4B.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «ecuación vectorial» $\vec{p} = (\ldots)$ y «unas ecuaciones paramétricas», o al revés | reescribir componente por componente | 4B.3.1 |
| «ecuaciones cartesianas», «una pareja de ecuaciones», «identificarla» | eliminar el parámetro, nombre y elementos | 4B.3.2 |
| sec y tan; csc; $\cos 2\theta$; $\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta$ | la identidad que corresponde | 4B.3.2 |
| «intervalo paramétrico» | dominio común de las funciones | 4B.3.3 |
| «intervalos de variación», «conjunto de valores de $x$, $y$, $z$» | recorrido de cada función | 4B.3.4 |





- **Vértice** $(-2, 3, -1)$; **eje** la recta $x = -2$, $y = 3$, paralela al eje $z$; abre hacia $z$ positivo.
- **Trazas:** $z = k > -1$, circunferencias de centro $(-2, 3, k)$ y radio $\sqrt{k+1}$; plano $x = -2$, parábola $(y-3)^2 = z + 1$; plano $y = 3$, parábola $(x+2)^2 = z + 1$.
- **Intervalos:** el primer miembro es $\geq 0$, así que $z + 1 \geq 0$: $z \in [-1, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

2. **b) Tipo:** tres cuadrados con el mismo coeficiente, todos positivos, igualados a una constante positiva: se cumple la forma de la **esfera**.
   - **Centro** $(1, 2, -3)$, **radio** 2. Simétrica respecto a cualquier plano que pase por el centro.
   - **Trazas:** con el plano $z = -3$, la circunferencia $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$; con $x = 1$ y $y = 2$, circunferencias de radio 2.
   - **Intervalos:** $x \in [1-2, 1+2] = [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$.
3. **c) Forma ordinaria:** multiplicando por $-1$,

$$\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1.$$

   - **Tipo:** tres cuadrados, uno positivo y dos negativos, igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**; no se cumple la de una hoja (habría dos positivos). Denominadores de $x$ y $z$ iguales: es de revolución.
   - **Centro** $(3, 5, -2)$; **eje** la recta $x = 3$, $z = -2$, paralela al eje $y$; **vértices** $(3, 3, -2)$ y $(3, 7, -2)$.
   - **Trazas:** plano $z = -2$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$; plano $x = 3$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1$; plano $y = 5$, ningún punto; plano $y = 9$, circunferencia $(x-3)^2 + (z+2)^2 = 27$.
   - **Intervalos:** $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{9} = \frac{(y-5)^2}{4} - 1 \geq 0 \Rightarrow |y-5| \geq 2$: $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

**Resultado:** a) paraboloide circular, vértice $(-2, 3, -1)$, eje paralelo a $z$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \geq -1$; b) esfera de centro $(1, 2, -3)$ y radio 2, $x \in [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$; c) hiperboloide de dos hojas de revolución, centro $(3, 5, -2)$, eje paralelo a $y$, $x, z \in \mathbb{R}$, $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$.

### 4C.5 Ejercicios de examen (resueltos)

#### Ejercicio 4C.5.1 · Cono con directriz circular en $z = 2$

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.*

Sea el cono $S$ con vértice en $V(2, -4, -1)$ y cuya intersección con el plano $z = 2$ es la curva de ecuación $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$. Obtenga para $S$: a) unas ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana.

**Resolución.**

1. **Directriz:** circunferencia de centro $(2, 2, 2)$ y radio 3: $\vec{q}(\theta) = (2 + 3\cos\theta,\ 2 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 2)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (3\cos\theta,\ 6 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.

3. **Raíces y cocientes:** si la función es creciente o decreciente, evalúa en los extremos del intervalo y toma el límite en los extremos excluidos ($x \to \infty$ cuando el denominador tiende a 0).
4. La coordenada constante tiene un solo valor: $z = 3$.
5. Compara con la cónica completa: si la extensión es menor, la curva es solo un arco.

*4B.3.5 Bosquejo en su plano*

1. Traza los ejes $x$, $y$, $z$ en perspectiva ($x$ oblicuo hacia el frente).
2. Dibuja el plano de la curva (un paralelogramo) y una línea guía desde el centro o el vértice hasta el plano coordenado.
3. Marca el centro (o vértice), los vértices y, si aplica, las asíntotas de la hipérbola, con sus coordenadas completas.
4. Traza la curva solo en la extensión obtenida; los puntos excluidos, vacíos.

*4B.3.6 De cartesianas a paramétricas*

1. Lleva la ecuación de la curva a la forma ordinaria (completa cuadrados).
2. Usa la tabla de la sección 4B.1.4: en la elipse, $u - h = a\cos t$ y $v - k = b\,\mathrm{sen}\,t$; en la parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$, toma $u - h$ proporcional a $t$ de modo que $v$ quede sin fracciones ($y - 1 = 2t$ en $(y-1)^2 = 4(z-2)$ da $z = 2 + t^2$).
3. Si la cónica se da por sus elementos (centro, semiejes y a qué eje son paralelos), el semieje paralelo a un eje multiplica a $\cos t$ o $\mathrm{sen}\,t$ en esa coordenada.
4. La coordenada constante es la tercera ecuación. Escribe la ecuación vectorial con 4B.3.1 y comprueba sustituyendo en la cartesiana.

## 4B.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Hipérbola con tangente y secante**

*Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 4.*

Sea la curva $C$ representada por la ecuación vectorial $\vec{p} = (1{+}3\tan\theta,\ -2{+}2\sec\theta,\ 3)$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine una pareja de ecuaciones cartesianas de $C$ e identifíquela. c) Bosqueje $C$.

**Resolución.**

1. **a)** $\tan\theta$ y $\sec\theta$ existen para $\cos\theta \neq 0$; $z = 3$ no restringe. El intervalo paramétrico es $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k$ entero); para recorrer la curva una vez basta $\theta \in [0, 2\pi)$ sin $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.
2. **b) Paramétricas:** $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
3. **Despeje:** $\tan\theta = \dfrac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \dfrac{y+2}{2}$.
4. **Identidad** $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$:

$$C:\ \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

5. **Identificación:** hipérbola en el plano $z = 3$, con centro $C(1, -2, 3)$ y eje focal





para eliminar es $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$. Con $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ se obtienen las dos ramas.

3. **Parábola:** $Y^2 = 4pX$ se parametriza con $Y = \theta$, $X = \dfrac{\theta^2}{4p}$.
4. El valor de la tercera coordenada es el del plano de la directriz ($z = 0$, $z = 3$, $x = 0$).

*4C.3.4 Identificación de una cuádrica*

1. **Ordena:** pasa todo al primer miembro y agrupa por variable.
2. **Completa cuadrados** en cada variable que aparece al cuadrado con término lineal.
3. **Forma ordinaria:** deja los cuadrados a la izquierda y la constante (o la variable lineal) a la derecha; divide para que la constante sea 1 (o 0).
4. **Caso por caso con la tabla 4C.1.6:** cuenta cuadrados y signos, revisa si la constante es 1, 0 o $-1$ y si hay variable lineal; escribe cuál forma *se cumple* y, si hay duda, cuál *no se cumple*.
5. **Características:** centro o vértice (los valores que anulan cada paréntesis), eje (recta paralela al de la variable distinguida), semiejes (raíces de los denominadores), trazas con los planos por el centro (sustituye la variable del plano y nombra la cónica que queda).
6. **Extensión**, si la piden (4C.3.5), y simetrías.

*4C.3.5 Intervalos de variación (extensión)*

1. Parte de la forma ordinaria. Para la variable $z$, despeja de modo que los otros cuadrados queden solos: por ejemplo, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(z-l)^2}{c^2} - 1$.
2. El primer miembro es $\geq 0$ y toma todos los valores no negativos: exige que el segundo miembro sea $\geq 0$ y resuelve.
3. Elipsoide y esfera: cada variable está en $[h-a, h+a]$, etc. Hiperboloide de dos hojas: la variable del eje cumple $|z-l| \geq c$; las otras, todos los reales. Paraboloide elíptico: la variable lineal queda de un solo lado del vértice. Hiperboloide de una hoja, cono y paraboloide hiperbólico: todos los reales.
4. Escribe el resultado con intervalos: $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

## 4C.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Cono con vértice en el eje $z$ y directriz elíptica**

*Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 5.*

Sea el cono $S$ con vértice en $V(0, 0, 6)$ y cuya intersección con el plano XY es la curva

$$D:\ \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

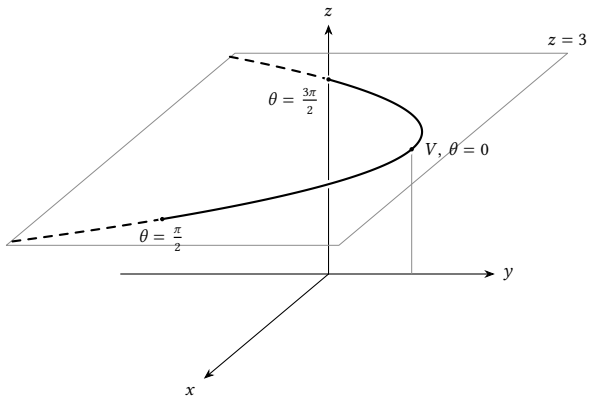
Obtenga para $S$: a) una ecuación vectorial; b) una ecuación cartesiana.

**Resolución.**

1. **Directriz:** es una elipse de centro $(-1, 3, 0)$, semieje 2 en $x$ y 3 en $y$:

$$\vec{q}(\theta) = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

4. **Recorte:** la parábola completa no tiene límite en $x$; aquí solo se recorre el arco con $|x| \le 4$, que va de $(-4,-2,3)$ a $(4,-2,3)$ pasando por el vértice. Al crecer $\theta$ el punto va y viene sobre ese arco.
5. **b) Bosquejo:** el arco en el plano $z = 3$, con sus extremos.




**Resultado:** $x^2 = -4(y-2)$, $z = 3$: arco de parábola con vértice $(0,2,3)$; $x \in [-4,4]$, $y \in [-2,2]$, $z = 3$.

### Ejercicio 4B.5.2 · Elipse con suma y diferencia de seno y coseno

*Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 4.*

Sea la curva $C:\ x = 2\sqrt{2}\cos\theta + 2\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta,\ y = 3\sqrt{3}\cos\theta - 3\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\theta,\ z = 4$. Determine unas ecuaciones cartesianas de $C$ e identifíquela.

**Resolución.**

1. **Despeje:** $\dfrac{x}{2\sqrt{2}} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ y $\dfrac{y}{3\sqrt{3}} = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$.
2. **Identidad:** al sumar los cuadrados se cancelan los productos $\pm 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$:

$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 = 2\big(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\big) = 2.$$

3. **Sustitución:**

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{27} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{54} = 1.$$

4. **Identificación:** elipse en el plano $z = 4$, centro $C(0,0,4)$, eje mayor paralelo al eje $y$ ($54 > 16$); $a = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, $c = \sqrt{54-16} = \sqrt{38}$. Vértices $\big(0, \pm 3\sqrt{6}, 4\big)$, extremos del eje menor $(\pm 4, 0, 4)$, focos $\big(0, \pm\sqrt{38}, 4\big)$.





3. **Eje**: la recta paralela a un eje coordenado que pasa por el centro o el vértice, por ejemplo $x = 1$, $y = -2$ (paralela al eje $z$). En un paraboloide, hacia dónde abre.
4. **Trazas**: con los planos que pasan por el centro paralelos a los coordenados (o con los planos coordenados), nombrando la cónica de cada una; y la traza $z = k$ (o la del eje) en general.
5. **Extensión** (intervalos de variación de $x$, $y$, $z$): de la forma ordinaria, despejando cada cuadrado y pidiendo que sea $\ge 0$.
6. **Simetrías**: una cuádrica con centro es simétrica respecto a su centro y a los tres planos que pasan por él paralelos a los coordenados; un paraboloide, respecto a su eje y a los dos planos que lo contienen.

Los exámenes no exigen los seis puntos, pero el nombre solo no vale: nombre, centro o vértice, eje y dos trazas son el mínimo seguro. Si el enunciado pide «intervalos de variación», la extensión es obligatoria.

#### *4C.1.8 Ecuación vectorial de una cuádrica*

Las cuádricas también se escriben con dos parámetros. Basta conocer estas, que salen de las identidades $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ y $\sec^2 - \tan^2 = 1$ ($\theta \in [0, 2\pi)$):

- Elipsoide: $\vec{p} = (a\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\cos\varphi)$, $\varphi \in [0,\pi]$.
- Hiperboloide de una hoja: $\vec{p} = (a\sec\varphi\cos\theta,\ b\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\tan\varphi)$, $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$.
- Hiperboloide de dos hojas: $\vec{p} = (a\tan\varphi\cos\theta,\ b\tan\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\sec\varphi)$.
- Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ r^2)$, $r \ge 0$.
- Cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ cr)$, $r \in \mathbb{R}$.

Con centro $(h,k,l)$ se suma $(h,k,l)$. En los exámenes esto solo se pide para conos y cilindros, por generatrices.

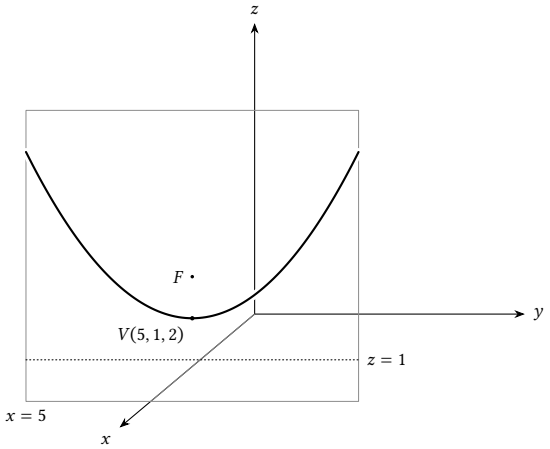
## 4C.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «cono con vértice en $V$» y «cuya intersección con el plano… es la curva», o «que contiene a la curva» | ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana | 4C.3.1 |
| «superficie cilíndrica», «cilindro con eje paralelo a $\vec{v}$», «superficie reglada… rectas paralelas al vector» | ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana | 4C.3.2 |
| la directriz es una hipérbola o una cónica sin centro en el origen | parametrizar la directriz | 4C.3.3 |
| «circunferencias de radio $r$… con centro en la recta $L$» | cilindro recto | 4C.3.2 |

1. **Forma ordinaria:** $y^2 - 2y + 1 = 4z - 9 + 1$, es decir, $(y-1)^2 = 4(z-2)$.
2. **a) Paramétricas:** con $y - 1 = 2t$ queda $4t^2 = 4(z-2)$, $z = 2 + t^2$:

$$x = 5, \qquad y = 1 + 2t, \qquad z = 2 + t^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Comprobación: $(1+2t)^2 - 2(1+2t) - 4(2+t^2) + 9 = 1 + 4t + 4t^2 - 2 - 4t - 8 - 4t^2 + 9 = 0$.
3. **b) Vectorial:** $\vec{p} = (5,\ 1+2t,\ 2+t^2) = (5,1,2) + 2t\,\hat{\jmath} + t^2\,\hat{k}$.
4. **c) Identificación:** parábola en el plano $x = 5$, vértice $V(5,1,2)$, eje paralelo al eje $z$, $4p = 4$, $p = 1$: abre hacia las $z$ positivas; foco $F(5,1,3)$, directriz $z = 1$, $x = 5$; lado recto 4.




**Resultado:** $x = 5$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 + t^2$; $\vec{p} = (5,1,2) + 2t\,\hat{\jmath} + t^2\,\hat{k}$; parábola de vértice $(5,1,2)$, eje paralelo al eje $z$, foco $(5,1,3)$.

### Ejercicio 4B.5.5 · Elipse dada por su centro y sus semiejes

*Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 3.*

Determine unas ecuaciones paramétricas y una ecuación vectorial de la elipse con centro en $C(-2,1,5)$, semieje menor de longitud 3 y paralelo al eje de las abscisas, y semieje mayor de longitud 4 y paralelo al eje de las cotas.

**Resolución.**

1. **Plano:** los semiejes son paralelos a $x$ (abscisas) y a $z$ (cotas); la elipse está en el plano $y = 1$ que pasa por el centro.
2. **Paramétricas** (sección 4B.1.4): el semieje 3 multiplica en $x$, el 4 en $z$:

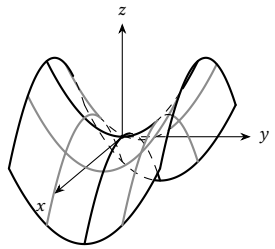
$$x = -2 + 3\cos t, \qquad y = 1, \qquad z = 5 + 4\,\mathrm{sen}\,t, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

3. **Vectorial:** $\vec{p} = (-2 + 3\cos t,\ 1,\ 5 + 4\,\mathrm{sen}\,t) = (-2,1,5) + 3\cos t\,\hat{\imath} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,\hat{k}$.
4. **Comprobación:** $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(z-5)^2}{16} = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t = 1$, $y = 1$; focos $\big(-2, 1, 5 \pm \sqrt{7}\big)$.

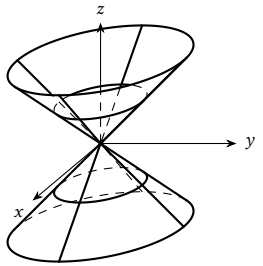




una parábola que abre hacia $z$ positivo; la traza con $y = 0$, una parábola que abre hacia $z$ negativo; las trazas $z = k \neq 0$ son hipérbolas, y la traza $z = 0$ es un par de rectas. Extensión: todos los reales.




**Cono.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a *cero*. El vértice es el origen; el eje, el de la variable con signo solitario. Las trazas $z = k \neq 0$ son elipses, y las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son pares de rectas (generatrices). Extensión: todos los reales.




**Cilindros cuádricos.** Falta una variable: la ecuación es la de una cónica del plano de las otras dos, y las generatrices son paralelas al eje de la variable que falta. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (cilindro elíptico), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (cilindro hiperbólico), $y = ax^2$ (cilindro parabólico).

#### *4C.1.5 Cuádricas trasladadas*

Si el centro (o vértice) es $(h,k,l)$, en cada forma canónica se cambia $x$ por $x-h$, $y$ por $y-k$ y $z$ por $z-l$. El eje deja de ser un eje coordenado y pasa a ser una recta paralela a él: en $\frac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$ el eje es la recta $y = -2$, $z = 1$, paralela al eje $x$.

Cuando la ecuación viene desarrollada ($x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5z + 3 = 0$), se **completan cuadrados** variable por variable:

$$ax^2 + dx = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}.$$

Los términos lineales de una variable que *también* está al cuadrado desaparecen al completar el cuadrado; los de una variable que *no* está al cuadrado se quedan y la convierten en la variable lineal de un paraboloide (o de un cilindro parabólico). Los exámenes del Plan 2010 no traen términos mixtos ($xy$, $xz$, $yz$).

### Ejercicio propuesto 4B.6.3

*Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 4.*

Sea la curva $C$ representada por $\vec{r}(\theta) = (3+\operatorname{sen} 2\theta)\,\hat{\imath} - 7\,\hat{\jmath} + (\cos\theta)\,\hat{k}$. Obtenga: a) el intervalo paramétrico; b) los intervalos de variación para $x$ y $z$; c) unas ecuaciones cartesianas de $C$.

**Resultado:** $\theta \in \mathbb{R}$ (una vuelta en $[0, 2\pi)$); $x \in [2, 4]$, $z \in [-1, 1]$; $y = -7$, $(x-3)^2 = 4z^2(1-z^2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 150.

### Ejercicio propuesto 4B.6.4

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 4.*

Sea la curva $C:\ \ x = \sqrt{9-t} - 3,\ y = -1,\ z = \dfrac{2}{\sqrt{t+16}}$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine el conjunto de valores para cada una de las coordenadas $x$ y $z$ de los puntos de $C$.

**Resultado:** $t \in (-16, 9]$; $x \in [-3, 2)$, $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 150.

### Ejercicio propuesto 4B.6.5

*Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 1.*

Sea la curva $A:\ \ x = -1,\ y = 2\operatorname{sen} t,\ z = 2\cos t$, para $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Determine: a) el conjunto de valores de $z$ donde está definida; b) una ecuación vectorial; c) las ecuaciones cartesianas. Identifique la curva.

**Resultado:** $z \in [0, 2]$; $\vec{p} = (-1,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$; $y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$, con $z \ge 0$: semicircunferencia de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

### Ejercicio propuesto 4B.6.6

*Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 2.*

Sea la curva $C$ de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = 8\,\hat{\imath} + 2t\,\hat{\jmath} + \dfrac{2}{t}\,\hat{k}$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas; b) las ecuaciones cartesianas; c) el intervalo paramétrico.

**Resultado:** $x = 8$, $y = 2t$, $z = \frac{2}{t}$; $yz = 4$, $x = 8$ (hipérbola equilátera); $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

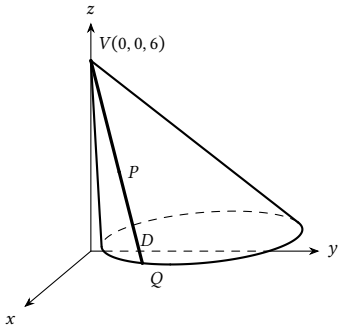
→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

## 4B.7 Errores frecuentes

1. **Una sola ecuación cartesiana.** $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ sola es un cilindro; la curva necesita también el plano $z = 3$.
2. **Elementos sin la tercera coordenada.** El centro de la hipérbola del ejemplo 4B.4 es $(1, -2, 3)$, no $(1, -2)$.
3. **Usar la identidad equivocada con** $\cos 2\theta$**.** Si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, se usa $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$; si trae $\cos\theta$, $2\cos^2\theta - 1$.



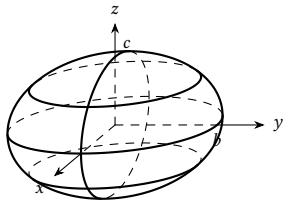





### *4C.1.4 Cuádricas en forma canónica*

Con centro (o vértice) en el origen y ejes sobre los ejes coordenados, las cuádricas tienen las formas de esta sección ($a, b, c > 0$). Se dibujan en *alambre de trazas*: las curvas que dejan los planos $z = k$ y los planos coordenados; lo que queda atrás va discontinuo. El eje de la superficie puede ser cualquiera de los tres: lo decide la variable que se distingue de las otras (por signo o por no estar al cuadrado).

**Elipsoide.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Todas sus trazas son elipses (o un punto, o nada). Extensión: $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. Si dos semiejes son iguales es de revolución; si $a = b = c = r$, es la **esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.




**Hiperboloide de una hoja.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$: dos cuadrados positivos, uno negativo, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo menos. Las trazas $z = k$ son elipses para todo $k$ (la menor, la *garganta*, en $z = 0$); las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son hipérbolas. Es una sola pieza: $x, y, z$ toman todos los reales en su rango natural.

`-1.2, 1.2))` dibuja una rama si está instalada matplotlib. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, $\pi$): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

**Con la computadora**

```
from sympy import symbols, tan, sec, simplify

t = symbols("theta")
x, y, z = 1 + 3*tan(t), -2 + 2*sec(t), 3
C = (y + 2)**2/4 - (x - 1)**2/9 - 1   # hipérbola en z = 3
assert simplify(C) == 0
print("se cumple para todo theta: hipérbola en z =", z)
```





# Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas

↑ Volver al índice

**Objetivo (programa 2026, tema 4).** «Aplicar los conceptos de superficies cuádricas y curvas en coordenadas polares y cartesianas, así como sus respectivas ecuaciones, para visualizarlos gráficamente empleando software.»

**Contenido de esta parte.** 4.3 Superficies cuádricas y su identificación. Ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana. Representación gráfica empleando software.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, dos problemas en los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010 (16 problemas en total, un tercio del examen): un cono o un cilindro por el método de las generatrices (8; siempre piden la ecuación vectorial y la cartesiana) y la identificación de tres o cuatro cuádricas (8), casi siempre trasladadas y con cuadrados por completar. Las cuádricas en forma vectorial y paramétrica fuera de los conos y cilindros (sección 4C.10) son nuevas en el programa 2026: no hay exámenes de ellas.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4C.1.4 a 4C.1.6 (40 min): catálogo de cuádricas y tabla de reconocimiento.
  2. Aprende los procedimientos 4C.3.1 (cono) e 4C.3.4 (identificación).
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 4C.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 4C.5.1, 4C.5.3, 4C.5.7 y 4C.5.9 con cronómetro: 15 min cada uno.
  5. Termina con la sección 4C.10 (forma vectorial y paramétrica, 30 min).

## 4C.1 Conceptos y expresiones

### *4C.1.1 Superficie: ecuaciones y clasificación*

Una *superficie* es un conjunto de puntos del espacio que depende de *dos* parámetros (una curva depende de uno). Se representa de tres maneras:

- **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \big(x(\theta, s),\ y(\theta, s),\ z(\theta, s)\big)$, con dos parámetros $\theta$ y $s$.
- **Ecuaciones paramétricas:** las tres componentes por separado, $x = x(\theta, s)$, $y = y(\theta, s)$, $z = z(\theta, s)$.
- **Ecuación cartesiana:** una sola ecuación $F(x, y, z) = 0$. Se obtiene de las paramétricas *eliminando los dos parámetros*.

**Clasificación.** Las superficies del programa se agrupan así:

- **Cuádricas:** su ecuación cartesiana es de segundo grado en $x$, $y$, $z$. Son el elipsoide (y la esfera), los hiperboloides de una y de dos hojas, los paraboloides elíptico e hiperbólico, el cono y los cilindros de base cónica.