Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 4). «Aplicar los conceptos de superficies cuádricas y curvas en coordenadas polares y cartesianas, así como sus respectivas ecuaciones, para visualizarlos gráficamente empleando software.»

Contenido de esta parte. 4.2 Curvas en el espacio: ecuaciones vectorial y paramétricas. Representación gráfica empleando software.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema en cada uno de los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010: intervalo paramétrico y extensión en 6, ecuaciones cartesianas e identificación en 7, bosquejo en 4; en 8 de los 9 la curva está en un plano paralelo a uno coordenado. En los finales de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) salió una vez.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4B.1.3 y 4B.1.4 (20 min): identidades y cónicas en paramétricas.
  2. Aprende el procedimiento 4B.3.2 (eliminar el parámetro e identificar) y sigue el ejemplo 4B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4B.5.1, 4B.5.2 y 4B.5.6 con cronómetro: 15 min cada uno, con bosquejo.
  4. El intervalo paramétrico y la extensión sirven para saber qué arco de la cónica recorren las paramétricas, es decir, para la representación gráfica que pide el programa.

4B.1 Conceptos y expresiones

4B.1.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas

Una *curva* C en el espacio se describe con un parámetro t (o θ): a cada valor del parámetro le corresponde un punto $P(x, y, z)$ de la curva. En **forma vectorial**,

$$C: \quad \vec{p}(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k},$$

donde $\vec{p}$ es el vector de posición del punto. Las **ecuaciones paramétricas** son las mismas tres funciones escritas por separado:

$$C: \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Pasar de una forma a la otra es solo reescribir: las componentes del vector son las paramétricas. Una misma curva admite muchas parametrizaciones distintas.

Resultado: $L:\ x = 2s,\ y = 2s,\ z = s$ (corta a M en $F(4, 4, 2)$).

Ejercicio 3.5.16 · Plano en paramétricas, recta en forma general y recta perpendicular

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 2.

Sean el plano π y la recta L dados por

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 2 - r \\ z = 2r + s \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L: \begin{cases} x + y - z - \frac{10}{3} = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Determine el ángulo entre π y L. b) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de la recta R perpendicular a π que contiene al punto C, intersección de π con L.

Resolución.

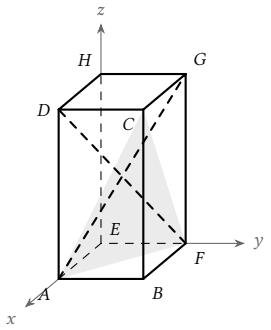
1. **Plano:** vectores $(1, -1, 2)$ y $(0, 0, 1)$; $\vec{n} = (1, -1, 2) \times (0, 0, 1) = (-1, -1, 0)$, o $(1, 1, 0)$. Por $(1, 2, 0)$: $\pi:\ x + y - 3 = 0$.
2. **Recta:** $\vec{u} = (1, 1, -1) \times (2, -3, -2) = (-2 - 3,\ -2 + 2,\ -3 - 2) = (-5, 0, -5)$, o $(1, 0, 1)$.
3. **a)** $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{|1 + 0 + 0|}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$: $\varphi = 30^\circ$.
4. **Punto** C**:** con $x + y = 3$ en la primera ecuación de L, $3 - z = \frac{10}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$; en la segunda, $2x - 3y = -\frac{2}{3}$; con $x + y = 3$: $y = \frac{4}{3}$, $x = \frac{5}{3}$. $C\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
5. **b)** R tiene dirección $\vec{n} = (1, 1, 0)$: $x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3}$; $z = -\frac{1}{3}$.

Resultado: $\varphi = 30^\circ$; $R:\ x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3},\ z = -\frac{1}{3}$.

Ejercicio 3.5.17 · Rectas y plano en un prisma

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 4.

En el paralelepípedo recto de la figura, la base $ABFE$ es un cuadrado de lado 2 en el plano $z = 0$, sus caras son paralelas a los planos coordenados y la altura es el doble del lado de la base. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L_1 que contiene a los vértices A y G; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L_2 que contiene a F y a D; c) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a A, F y C.



8. **Cuadrante de θ al pasar a polares.** $\tan\theta = \frac{y}{x}$ da dos ángulos; el correcto es el del cuadrante del punto.
9. **Cartesiana con r suelta.** $x^2 + y^2 - 2y = r$ aún no es cartesiana: se eleva al cuadrado con $r^2 = x^2 + y^2$.

4A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $(r, \theta) = (r, \theta + 360°k) = (-r, \theta + 180° + 360°k)$; el polo es $(0, \theta)$ para todo θ.
- $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r, θ): eje polar $(r, -\theta)$; recta a $90°$ $(r, 180° - \theta)$; polo $(r, \theta + 180°) = (-r, \theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta \to -\theta$ o $(-r, 180° - \theta)$; recta a $90°$ $\theta \to 180° - \theta$ o $(-r, -\theta)$; polo $r \to -r$ o $\theta + 180°$. Suficientes, no necesarias.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $r = a\operatorname{sen}\theta$: centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r = a \pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a = b$, caracol con lazo si $a < b$.
- $r = a\operatorname{sen} n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta}$: foco en el polo; $e < 1$ elipse, $e = 1$ parábola, $e > 1$ hipérbola.

4A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Nombra la curva en el primer renglón (cardioide, caracol, rosa, lemniscata, circunferencia o cónica): eso ya dice su forma y su simetría.
2. Simetría: prueba 1, prueba 2 y, si las dos fallan, un contraejemplo con un punto notable.
3. Intersecciones: los dos ángulos de cada eje, el polo con $r = 0$, y revisa puntos repetidos.
4. Tabla con 4 o 5 ángulos notables y los puntos más alejados del polo ($|r|$ máximo).
5. Bosquejo sobre una rejilla polar, con los puntos calculados marcados y escritos.
6. Si piden la cartesiana, multiplica por r, sustituye y completa cuadrados.

Si el tiempo no alcanza, el nombre de la curva, sus intersecciones con los ejes y un bosquejo con tres puntos ya valen la mayor parte del problema.

4A.10 Con la computadora

El programa revisa el caracol $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ del ejercicio 4A.5.3: sustituye $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación cartesiana que se obtuvo, busca dónde pasa por el polo ($r = 0$; sympy da los ángulos en $(-180°, 180°]$: $-30°$ es $330°$) y comprueba la simetría respecto a la recta a $90°$. Para el bosquejo, `sympy.plotting.plot_polar(r, (t, 0, 2*pi))` dibuja la curva si está instalada matplotlib. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import symbols, sin, cos, simplify, solve, pi

t = symbols("theta", real=True)
r = 1 + 2*sin(t)                    # caracol con lazo
x, y = r*cos(t), r*sin(t)
# cartesiana: (x² + y² - 2y)² = x² + y²
```


Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 3.

El vector normal $\vec{N}$ del plano π es perpendicular al vector $\vec{v} = (3, 5, 8)$. Además, π contiene a la recta $L:\ \frac{2-2x}{-2} = \frac{y+5}{-3} = z$. Determine una ecuación cartesiana de π.

Resultado: $\pi:\ 29x + 5y - 14z - 4 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 3.

Sean la recta $L:\ \begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ z = 7 \end{cases}$ y el plano $\pi:\ -2x - 6y + 6z = 38$. Determine la intersección de la recta con el plano.

Resultado: la recta está contenida en el plano: la intersección es toda la recta, $x = 2 + 3t,\ y = -t,\ z = 7$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 5.

Sean las rectas $M:\ x = 3 - 2t_M,\ y = -1 + t_M,\ z = 2t_M$ y $N:\ x = -1 - t_N,\ y = -3 + t_N,\ z = -4 + 2t_N$, y el plano $\pi:\ 5x - y + 2z - 2 = 0$. Determine la ecuación cartesiana del plano π_1 paralelo a π que contiene al punto A, intersección de las rectas M y N.

Resultado: $A(-9, 5, 12)$; $\pi_1:\ 5x - y + 2z + 26 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.7

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 6.

Determine la distancia entre los planos $\pi_1:\ 2x + y + 4z = 16$ y $\pi_2:\ x = 4r - 4s,\ y = 8s,\ z = 2 - 2r$.

Resultado: $d = \frac{8\sqrt{21}}{21}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.8

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo A, problema 6.

Los puntos $A(-1, 1, 1)$ y $B(1, -2, 0)$ pertenecen al plano π, que contiene al origen. Determine: a) una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana de π; b) la distancia del punto $C(3, 0, -1)$ a π; c) las ecuaciones en forma simétrica de la recta L perpendicular a π que contiene a C.

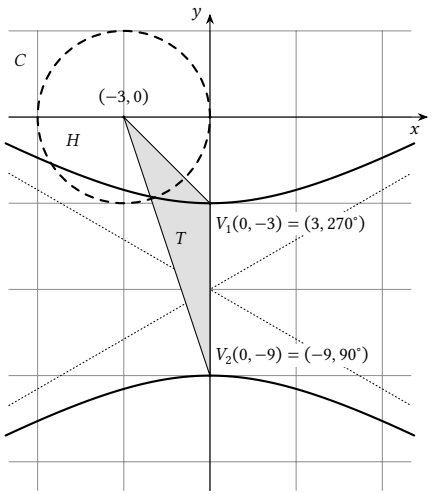
Resultado: $\vec{p} = r(-1, 1, 1) + s(1, -2, 0)$, $\pi:\ 2x + y + z = 0$; $d = \frac{5\sqrt{6}}{6}$; $L:\ \frac{x-3}{2} = y = z + 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

6. **b) Área:** T tiene vértices $(0,-3)$, $(0,-9)$ y $(-3,0)$. La base V_1V_2 está sobre el eje y y mide 6; la altura es la distancia de $(-3,0)$ al eje y, 3:

$$A = \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

7. **c) Bosquejo:** ramas de la hipérbola con vértices $(0,-3)$ y $(0,-9)$ y asíntotas $y = -6 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$; la circunferencia es tangente al eje y en el polo.



Resultado: a) $H:\ \frac{(y+6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1\ (x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0)$; $C:\ (x+3)^2 + y^2 = 9$; b) $A = 9$ unidades de área.

4A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4A**.

Ejercicio propuesto 4A.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

Sean las curvas $C_1:\ r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $C_2:\ r^2 = 4\cos 2\theta$. a) De la curva C_1, determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección con la recta a 90°. b) Identifique la curva C_2, dé coordenadas polares de tres puntos de ella y bosqueje su gráfica.

Resultado: a) El polo y $(2, 90°)$. b) Lemniscata con lazos sobre el eje polar; por ejemplo $(2, 0°)$, $(2, 180°)$, $\left(\sqrt{2}, 30°\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Resultado: $P(-1,3,2)$; $Q(1,2,0)$ o $Q(-3,4,4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 3.6.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 6.

Sean las rectas $L:\ \frac{x+3}{2} = \frac{y+18}{6} = 2 - z$ y $R:\ \frac{2x-8}{2} = \frac{y+8}{2};\ z = -5$. Obtenga: a) la distancia entre L y R; b) el coseno del ángulo entre L y R.

Resultado: $d = 6$; $\cos\theta = \frac{14\sqrt{205}}{205}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 3.6.15

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 6.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-18}{6} = y - 8;\ z = 6$. Obtenga las coordenadas del punto B de L que se encuentra a 3 unidades del punto $Q(-1,3,4)$.

Resultado: $B(0,5,6)$ o $B(-3,4,6)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 3.6.16

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 6.

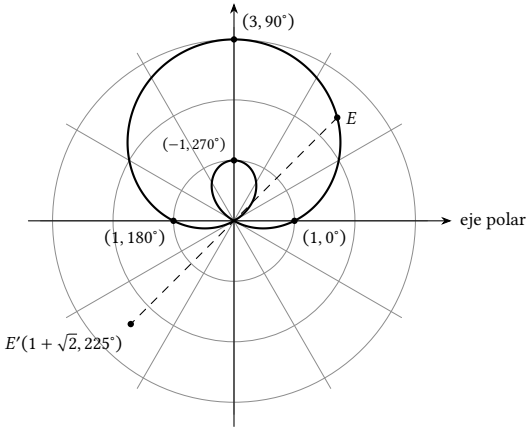
Determine una ecuación cartesiana de un plano que es perpendicular a la recta $L:\ \vec{r} = (-1,8,1) + t\,(3,-2,6)$ y cuya distancia al origen es 7.

Resultado: $3x - 2y + 6z - 49 = 0$ (o $3x - 2y + 6z + 49 = 0$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

3.7 Errores frecuentes

1. **Leer mal la forma simétrica.** En $4 - x$, $\frac{2-y}{4}$ o $\frac{2x-4}{8}$ el punto y el vector no se leen directo: primero se deja cada fracción como $\frac{x-x_0}{a}$.
2. **Coseno en el ángulo recta–plano.** El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$ es el complemento del que se pide; con $\vec{u}$ y $\vec{n}$ va **seno**.
3. **Confundir las condiciones recta–plano.** Recta paralela al plano: $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$; perpendicular: $\vec{u} \parallel \vec{n}$. Es al revés que entre dos rectas.
4. **Plano por dos rectas paralelas con $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$.** Ese producto es $\vec{0}$; el segundo vector es $\overrightarrow{P_1P_2}$.
5. **Plano por dos rectas que se cruzan.** No existe: antes de calcular el plano se revisa con el producto mixto que las rectas sean coplanares.
6. **Mismo parámetro en las dos rectas.** Al igualar paramétricas, cada recta lleva su parámetro (t y λ); con el mismo se «pierde» la intersección.
7. **Distancia entre planos que no son paralelos.** $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$ exige el mismo vector normal en las dos ecuaciones; si no son paralelos, se cortan y $d = 0$ (propuesto 3.6.12).
8. **Una sola solución con valor absoluto.** «El conjunto de valores» de un parámetro o «un punto a distancia k» casi siempre tiene dos respuestas.



Resultado: a) tres intersecciones: $(1, 0^\circ)$, $(1, 180^\circ)$ y el polo; b) $E'\left(1+\sqrt{2}, 225^\circ\right)$; c) $\left(x^2+y^2-2y\right)^2 = x^2+y^2$.

Ejercicio 4A.5.4 · Lemniscata: simetría y puntos más alejados del polo

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Obtenga unas coordenadas polares de los puntos de la curva más alejados del polo. c) Bosqueje la gráfica de C.

Resolución.

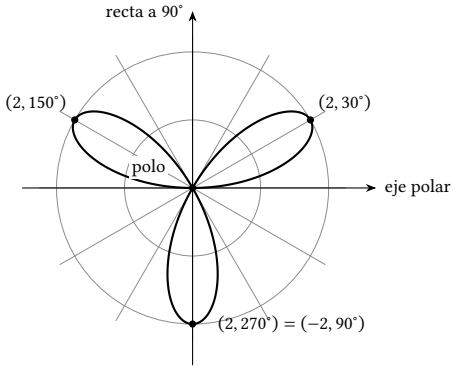
1. **Nombre y dónde existe:** lemniscata ($r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, $a = 2$); $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$ para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ y $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$.
2. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r^2 = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia.
3. **a) Prueba 2** ($r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$): $r^2 = 4\operatorname{sen}(360^\circ - 2\theta) = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **a) Contraejemplo:** $(2, 45^\circ)$ está en C ($4 = 4\operatorname{sen} 90^\circ$). Su simétrico es $(2, -45^\circ)$: $4\operatorname{sen}(-90^\circ) = -4 \neq 4$. Las demás representaciones cambian 2θ en múltiplos de 360° y r solo de signo, y r^2 no cambia: ninguna cumple. No es simétrica respecto al eje polar.
5. **b) Máximo:** $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta \leq 4$, con igualdad si $\operatorname{sen} 2\theta = 1$: $2\theta = 90^\circ$ o 450°, es decir, $\theta = 45^\circ$ o 225°, con $|r| = 2$.
6. **c) Tabla:** $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$ ($r^2 = 4\operatorname{sen} 30^\circ = 2$ en 15°). Como $r \to -r$ no cambia la ecuación, es simétrica respecto al polo: el lazo del tercer cuadrante es el reflejo del primero.

Con la computadora

```
from sympy import Matrix, symbols, sqrt, Abs

x, y, z = symbols("x y z")
P = Matrix([1, 0, 2])
Q = Matrix([2, 1, 0])
R = Matrix([0, 3, 1])
n = (Q - P).cross(R - P)           # normal al plano PQR
plano = n.dot(Matrix([x, y, z]) - P).expand()
print(n.T, plano, "= 0")
d = Abs(plano.subs({x: 0, y: 0, z: 0})) / n.norm()
print("distancia del origen:", d)
assert n == Matrix([5, 3, 4])
assert plano == 5*x + 3*y + 4*z - 13
assert d == 13*sqrt(2)/10
```

5. **b) Contraejemplo:** $(2, 30^\circ)$ está en la curva ($2\operatorname{sen} 90^\circ = 2$). Su simétrico respecto al eje polar es $(2, -30^\circ) = (2, 330^\circ)$. Con $\theta = 330^\circ$: $2\operatorname{sen} 990^\circ = 2\operatorname{sen} 270^\circ = -2 \neq 2$. Con la otra representación, $(-2, 150^\circ)$: $2\operatorname{sen} 450^\circ = 2 \neq -2$. Sumar 360° a θ suma 1080° a 3θ y no cambia nada. El simétrico no está en la curva.
6. **c) Tabla** (primer pétalo): $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$. Para $60^\circ < \theta < 120^\circ$, $r < 0$: ese pétalo se dibuja centrado en 270°. El tercero está centrado en 150°. Con la prueba 1 para la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$): $2\operatorname{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\operatorname{sen} 3\theta$; sí es simétrica respecto a ella.



Resultado: a) el polo y $(2, 270^\circ)$ (equivalente a $(-2, 90^\circ)$); b) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto a la recta a 90°); c) rosa de 3 pétalos de longitud 2.

Ejercicio 4A.5.2 · Cardioide: simetría e intersecciones con la recta a 90 grados

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 1.

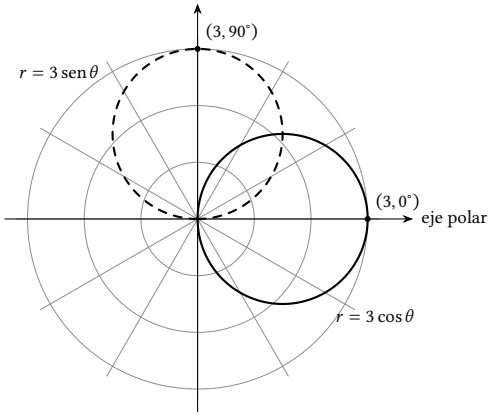
Sea la curva $C_1:\ r = 2(1 - \cos\theta)$. a) Determine si C_1 es simétrica respecto al eje polar. b) Determine el número de intersecciones de C_1 con la recta a 90° y obtenga unas coordenadas polares de esos puntos. c) Bosqueje la gráfica de C_1.

Resolución.

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\big(1 - \cos(-\theta)\big) = 2(1 - \cos\theta)$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 90^\circ:\ r = 2(1 - 0) = 2$; $\theta = 270^\circ:\ r = 2$. Puntos $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$, distintos.
3. **b) Polo:** $r = 0 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0^\circ$. El polo es un tercer punto. Como $r \geq 0$ siempre, no hay más.
4. **c) Nombre y tabla:** $r = a - b\cos\theta$ con $a = b = 2$: cardioide. $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 0, 1, 2, 3, 4$. La punta está en el polo y el punto más alejado es $(4, 180^\circ)$; la mitad de abajo es el reflejo de la de arriba.

- $r = a\operatorname{sen}\theta$: circunferencia por el polo de centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ y radio $\frac{|a|}{2}$ ($x^2 + y^2 = ay$).

Con $a < 0$ el centro queda del otro lado: $r = -6\cos\theta$ tiene centro $(-3, 0)$. Las dos circunferencias se recorren completas con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.



4A.1.2 Cardioides y caracoles

$r = a \pm b\cos\theta$ y $r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$, con $a, b > 0$, son *caracoles* (limazones):

- $a = b$: **cardioide**, con punta (cúspide) en el polo. $r = a(1 + \cos\theta)$ tiene la punta hacia la izquierda y su punto más alejado es $(2a, 0^\circ)$ (figura del ejemplo 4A.4).
- $a < b$: caracol **con lazo interior**; pasa por el polo cuando $\cos\theta = \mp\frac{a}{b}$ (o $\operatorname{sen}\theta = \mp\frac{a}{b}$).
- $a > b$: caracol sin lazo, que no pasa por el polo.

Con $\cos\theta$ son simétricos respecto al eje polar; con $\operatorname{sen}\theta$, respecto a la recta a 90°. El signo $\pm$ decide hacia qué lado se abren: $r = a + b\operatorname{sen}\theta$ se alarga hacia arriba ($r = a + b$ en 90°).

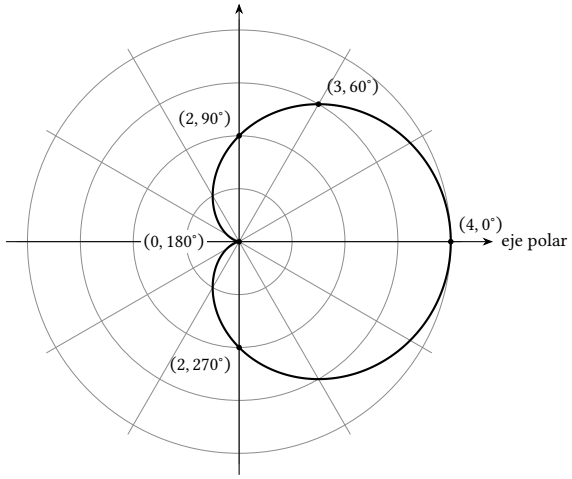
4A.1.3 Rosas

$r = a\operatorname{sen} n\theta$ y $r = a\cos n\theta$ ($n \geq 2$ entero) son **rosas** de pétalos de longitud $|a|$:

- n impar: n pétalos, y la curva se recorre completa con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$;
- n par: $2n$ pétalos, con $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Los pétalos están separados por ángulos iguales. Con $\cos n\theta$ un pétalo está centrado en el eje polar ($\theta = 0^\circ$); con $\operatorname{sen} n\theta$, el primero está centrado en $\theta = \frac{90^\circ}{n}$. Los extremos de los pétalos son las soluciones de $|\operatorname{sen} n\theta| = 1$ (o $|\cos n\theta| = 1$) y la curva pasa por el polo donde $\operatorname{sen} n\theta = 0$ (o $\cos n\theta = 0$).

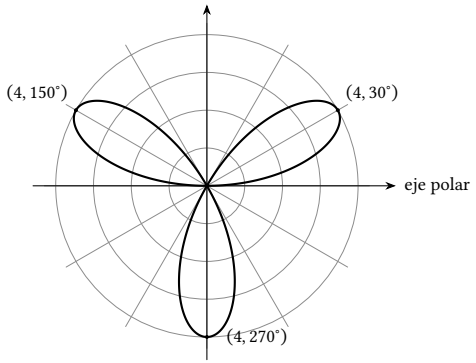
3. **a) Bosquejo:** con $\theta = 60^\circ$, $r = 3$. La curva sale de $(4, 0^\circ)$, sube por $(3, 60^\circ)$ y $(2, 90^\circ)$, llega al polo en 180° y la mitad de abajo es el reflejo.



4. **b) Nombre:** $r = a \operatorname{sen} n\theta$ con $n = 3$ impar: **rosa de 3 pétalos** de longitud 4.
5. **b) Puntos:** los extremos de los pétalos, donde $|\operatorname{sen} 3\theta| = 1$:

   $$\theta = 30^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 90^\circ = 4; \qquad \theta = 150^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 450^\circ = 4;$$
   $$\theta = 90^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 270^\circ = -4.$$

   El tercero es $(-4, 90^\circ) = (4, 270^\circ)$. Puntos: $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$.
6. **b) Bosquejo:** la curva pasa por el polo en 0°, 60°, 120° y 180° ($\operatorname{sen} 3\theta = 0$); entre ellos traza un pétalo. Los pétalos están centrados en 30°, 150° y 270°, separados 120°.



7. **c) Nombre:** $r^2 = -9 \cos 2\theta$, de la forma $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$ con $a = 3$: **lemniscata** con los lazos sobre la recta a 90°.

Simetría respecto a	Prueba 1	Prueba 2
polo	$r \to -r$	$\theta \to \theta + 180^\circ$

Si alguna de las dos pruebas deja la ecuación igual (o equivalente), la curva *es* simétrica. **Las pruebas son suficientes, no necesarias:** si las dos fallan, todavía no se sabe. Para concluir que *no* es simétrica se da un contraejemplo: un punto de la curva cuyo simétrico no la cumple con *ninguna* de sus representaciones; o se pasa a cartesianas, donde la prueba sí es definitiva ($y \to -y$ para el eje polar, $x \to -x$ para la recta a 90°, las dos para el polo). Si una curva tiene dos de las tres simetrías, tiene la tercera.

4A.1.7 Intersección de dos curvas polares

Como un punto tiene muchas representaciones, resolver el sistema $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$ no basta:

- se resuelve $f(\theta) = g(\theta)$;
- se resuelve también con la otra representación de la segunda curva, $f(\theta) = -g(\theta + 180^\circ)$;
- **el polo** se revisa aparte: está en las dos curvas si cada una tiene $r = 0$ para *algún* θ, aunque sean ángulos distintos.

Por ejemplo, $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 3\cos\theta$: de $1 + \cos\theta = 3\cos\theta$ sale $\cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\left(\frac{3}{2}, 60^\circ\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 300^\circ\right)$; la segunda ecuación, $1 + \cos\theta = -3\cos(\theta + 180^\circ)$, es la misma que la primera porque $-3\cos(\theta + 180^\circ) = 3\cos\theta$: no da puntos nuevos. Además, la primera pasa por el polo en 180° y la segunda en 90°: el polo es el tercer punto de intersección.

4A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«el simétrico de E respecto al polo», «unas coordenadas polares de» un punto	representaciones y simétricos	4A.3.1
«obtener una ecuación cartesiana»	conversión	4A.3.2
«identificar», «dar el nombre»	catálogo	4A.3.3
«determinar si es simétrica respecto al eje polar, al polo o a la recta a 90°»	pruebas o contraejemplo	4A.3.4
«intersecciones con el eje polar» o «con la recta a 90°», «número de intersecciones»	sustitución y polo	4A.3.5
«coordenadas de tres puntos», «puntos más alejados del polo»	tabla, máximo de $\lvert r\rvert$	4A.3.6
«bosquejar su gráfica»	bosquejo	4A.3.7
$r = \frac{k}{c \pm d \operatorname{sen}\theta}$ o con $\cos\theta$; «vértices», «área del triángulo»	cónica en polares	4A.3.8
dos curvas y «sus puntos de intersección»	intersección de curvas	4A.3.9

Resolución.

1. **Ejes:** el enunciado no da coordenadas; se elige el origen en E, con los ejes sobre EA, EF y EH (figura). Entonces $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $F(0,2,0)$, $D(2,0,4)$, $C(2,2,4)$, $G(0,2,4)$, $H(0,0,4)$. Con otra elección los números cambian, pero no el procedimiento.
2. **a)** $\overrightarrow{AG} = (-2,2,4)$, o $(-1,1,2)$: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0) + t(-1,1,2)$.
3. **b)** $\overrightarrow{FD} = (2,-2,4)$, o $(1,-1,2)$: $L_2:\ x = s,\ y = 2-s,\ z = 2s$.
4. **c)** $\overrightarrow{AF} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,2,4)$; $\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{AC} = (8,8,-4)$, o $(2,2,-1)$. Por A: $2(x-2) + 2y - z = 0$. Comprobación con C: $4+4-4-4 = 0$.

Resultado: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0)+t(-1,1,2)$; $L_2:\ x = s,\ y = 2-s,\ z = 2s$; $\pi:\ 2x+2y-z-4 = 0$ (con el origen en E).

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 4.

Sea el plano π, perpendicular al plano cartesiano XY, que contiene a la recta $L:\ \vec{p} = t\,(2,1,-3)$, y sea el plano π_0 que contiene a las rectas L_1 y L_2, paralelas a los vectores $\vec{u}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{k}$ y $\vec{u}_2 = 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + m\hat{k}$, respectivamente. Obtenga el conjunto de valores que puede tomar m para que π y π_0 formen un ángulo de 90°.

Resultado: $m = \frac{7}{2}$ (un solo valor).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 4.

Sea el plano π que contiene a la recta $L:\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3}$ y es perpendicular al plano XZ. a) Obtenga una ecuación cartesiana de π. b) Calcule la distancia del origen a π.

Resultado: $\pi:\ x - z + 8 = 0$; $d = 4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 4.

Sean la recta $L:\ \begin{cases} \frac{x}{h} = \frac{z}{\sqrt{3}} \\ y = 4 \end{cases}$ y el plano π que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y es paralelo al plano coordenado YZ. Determine el conjunto de valores de h para los cuales el ángulo entre L y π es de 60°.

Resultado: $h \in \{-3,\ 3\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.


```
assert simplify((x**2 + y**2 - 2*y)**2 - (x**2 + y**2)) == 0
# polo: r = 0
polo = solve(r, t)
print([p * 180 / pi for p in polo])
# simetría respecto a la recta a 90°: t → 180° − t
assert simplify(r.subs(t, pi - t) - r) == 0
```

Ejercicio propuesto 3.6.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x-y+3z-9=0$ y $\pi_2:\ x+\beta y+z+D=0$. Determine: a) el valor de β para que π_1 y π_2 sean paralelos y el valor de D para que π_2 contenga al origen; b) la distancia del origen a π_1; c) una ecuación vectorial de π_1; d) unas ecuaciones paramétricas de la recta L perpendicular a π_1 que contiene al punto $A(0,0,3)$.

Resultado: $\beta=-\frac{1}{3}$, $D=0$; $d=\frac{9\sqrt{19}}{19}$; $\vec{p}=(3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$; $L:\ x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo A, problema 7.

Sean los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,1,2)$ y el plano $\pi_1:\ 2x+3y+4z-8=0$. Determine: a) unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la recta L que contiene a A y es perpendicular a π_1; b) la distancia de B a π_1; c) unas ecuaciones paramétricas del plano π_2 que contiene a B y a L.

Resultado: $L:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{4}$; $d=\frac{\sqrt{29}}{29}$; $\pi_2:\ x=2+2r-4s,\ y=1+3r,\ z=-1+4r+3s$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-2, tipo A, problema 7.

Sean los planos $\pi_1:\ x-2y+3z-1=0$ y $\pi_2:\ x-y-z+1=0$. Obtenga: a) el ángulo entre π_1 y π_2; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L intersección de π_1 y π_2.

Resultado: 90°; $L:\ x=-3+5t,\ y=-2+4t,\ z=t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, tipo A, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x+2y+z+4=0$ y $\pi_2:\ x=4-3t-2r,\ y=3t,\ z=2r$. a) Determine la distancia entre π_1 y π_2. b) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al punto $P(2,3,-1)$ y es paralela a π_1 y a π_2.

Resultado: los planos no son paralelos: se cortan y su distancia es 0; $L:\ x=2+t,\ y=3-2t,\ z=-1+t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 6.

Sean la recta $L:\ x=1+2t,\ y=2-t,\ z=-2t$ y el plano $\pi:\ 2x-3y+2z=-7$. Obtenga: a) las coordenadas del punto P de intersección de L y π; b) las coordenadas de un punto Q de L que diste $\frac{3}{\sqrt{17}}$ unidades de π.

Ejercicio propuesto 4A.6.2

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación $r=2+2\cos\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección de C con el eje polar. c) Identifique a C y bosqueje su gráfica en el plano polar.

Resultado: a) Sí es simétrica. b) $(4,0^\circ)$ y el polo, $(0,180^\circ)$. c) Cardioide con la punta en el polo, abierta hacia la derecha hasta $(4,0^\circ)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

Ejercicio propuesto 4A.6.3

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r=\cos\theta$. a) Obtenga unas coordenadas polares de cada uno de los puntos de intersección de C con el eje polar. b) Determine si C es simétrica respecto al polo. c) Obtenga la ecuación cartesiana de C e identifíquela.

Resultado: a) $(1,0^\circ)$ y el polo. b) No es simétrica respecto al polo. c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$: circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

Ejercicio propuesto 4A.6.4

Adaptado de: Serie de ejercicios de curvas en el plano polar, ejercicio 15.

Dada la curva de ecuación polar $r=10+15\operatorname{sen}\theta$, determine: a) si es simétrica respecto al eje polar; b) todas sus intersecciones con el eje polar y con la recta $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Resultado: a) No es simétrica respecto al eje polar. b) Eje polar: $(10,0^\circ)$, $(10,180^\circ)$ y el polo; recta a 90°: $(25,90^\circ)$, $(-5,270^\circ)=(5,90^\circ)$ y el polo.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

4A.7 Errores frecuentes

1. **Concluir «no es simétrica» porque la prueba falla.** Las pruebas son suficientes, no necesarias; para negar la simetría hace falta un contraejemplo (ejercicio 4A.5.1) o la ecuación cartesiana.
2. **Olvidar el polo.** Casi todas las curvas del examen pasan por él; en las intersecciones con los ejes o entre curvas se revisa con $r=0$ y se cuenta como punto.
3. **Sustituir un solo ángulo.** El eje polar pide $\theta=0^\circ$ *y* 180°; la recta a 90°, 90° *y* 270°. Y luego hay que ver si dos resultados son el mismo punto, como $(-2,90^\circ)=(2,270^\circ)$.
4. **Dibujar $r<0$ en la dirección θ.** El punto $(-4,90^\circ)$ está abajo, en 270°.
5. **Contar mal los pétalos.** $r=a\operatorname{sen}n\theta$ tiene n pétalos si n es impar y $2n$ si es par: $r=2\cos2\theta$ tiene 4, no 2.
6. **Lemniscata donde no existe.** $r^2=4\operatorname{sen}2\theta$ no tiene puntos en el segundo ni en el cuarto cuadrante; escribe el intervalo de θ antes de la tabla.
7. **Cónica sin reducir el denominador.** $r=\frac{k}{c+d\operatorname{sen}\theta}$ se divide entre c para leer $e=\frac{d}{c}$. Y el vértice con $r<0$ va en la dirección opuesta: $(-9,90^\circ)=(0,-9)$.

9. **Punto de la recta general sin comprobar.** El punto obtenido con $z = 0$ debe satisfacer las *dos* ecuaciones de los planos.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Recta: $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{u} \cdot \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ · general: $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- Plano: $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A, B, C) \cdot \vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ · perpendiculares: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ (igual con normales). Recta ∥ plano: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; recta ⊥ plano: $\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q, \pi) = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{|\vec{n}|}$ · $d(Q, L) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$ · planos paralelos: $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $= 0$ se cortan, $\neq 0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t = \frac{\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ · simétrico: $Q' = 2M - Q$.

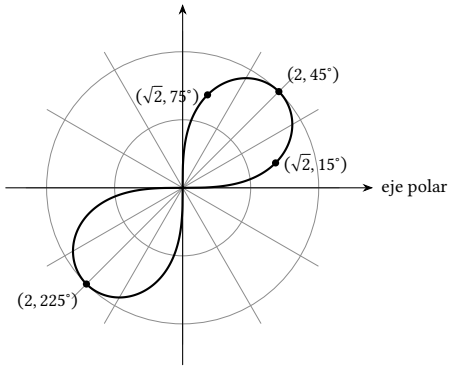
3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe de cada recta su punto y su vector, y de cada plano su normal, antes de cualquier otra cosa; ordena las formas simétricas.
2. Haz un dibujo a mano alzada: qué es paralelo, qué se corta, qué distancia se pide.
3. Calcula los productos cruz con el determinante completo y comprueba el resultado con un producto punto (debe dar 0 con cada factor).
4. Antes de un plano por dos rectas o de una distancia entre rectas o planos, decide la posición relativa.
5. Comprueba cada ecuación de plano con un punto que no usaste y cada intersección en la ecuación que no usaste.
6. Deja los resultados exactos y racionalizados; los ángulos no notables, con ang cos o ang sen.

Si el tiempo no alcanza, el punto y el vector de cada recta y la normal de cada plano, bien escritos, ya son una parte importante del puntaje.

3.10 Con la computadora

El programa obtiene el plano que pasa por $P(1, 0, 2)$, $Q(2, 1, 0)$ y $R(0, 3, 1)$ con el producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$, como en el procedimiento 3.3.2, y la distancia del origen a ese plano. Para *ver* rectas y planos, el módulo `sympy.plotting` los dibuja si además está instalada la biblioteca matplotlib (`plot3d_parametric_surface` para un plano en paramétricas, `plot3d_parametric_line` para una recta). El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.



Resultado: a) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto al polo); b) $(2, 45°)$ y $(2, 225°)$ (este último es $(-2, 45°)$); c) lemniscata en los cuadrantes I y III.

Ejercicio 4A.5.5 · Hipérbola en polares, circunferencia y área de un triángulo

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 1.

Sean la hipérbola H y la circunferencia C representadas por

$$H: \ r = \frac{9}{1 - 2\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y} \qquad C: \ r = -6\cos\theta.$$

a) Obtenga la ecuación cartesiana de cada una de las curvas H y C en el plano XY. b) Determine el área del triángulo T formado por los vértices de H y el centro de la circunferencia C. c) Bosqueje las curvas H y C, así como el triángulo T.

Resolución.

1. **Identificación:** $r = \frac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$ con $e = 2 > 1$: hipérbola con un foco en el polo, $ep = 9$, $p = \frac{9}{2}$, directriz $y = -\frac{9}{2}$ y eje focal sobre la recta a 90°.
2. **a) Cartesiana de H:** $r - 2r\operatorname{sen}\theta = 9 \Rightarrow r = 9 + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 = (9 + 2y)^2 = 81 + 36y + 4y^2$:

$$x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0.$$

3. **a) Forma ordinaria:** $x^2 - 3\left(y^2 + 12y + 36\right) + 108 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 - 3(y + 6)^2 = -27$:

$$\frac{(y + 6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1.$$

   Centro $(0, -6)$, $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$, $c = \sqrt{9 + 27} = 6$: focos $(0, 0)$ y $(0, -12)$; el polo es un foco, como debe ser.
4. **a) Cartesiana de C:** $r^2 = -6r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = -6x \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 9$. Centro $(-3, 0)$, es decir $(3, 180°)$, y radio 3.
5. **b) Vértices de H:** $\theta = 270° : \ r = \frac{9}{1+2} = 3, V_1(3, 270°) = (0, -3); \theta = 90° : \ r = \frac{9}{1-2} = -9$, $V_2(-9, 90°) = (0, -9)$. Coinciden con $(0, -6 \pm 3)$.

Unidad 4 · Parte A · Curvas polares

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 4). «Aplicar los conceptos de superficies cuádricas y curvas en coordenadas polares y cartesianas, así como sus respectivas ecuaciones, para visualizarlos gráficamente empleando software.»

Contenido de esta parte. 4.1 Curvas polares: caracoles, cardioides, rosas de n pétalos y circunferencias. Representación gráfica empleando software.

Instrucciones de emergencia

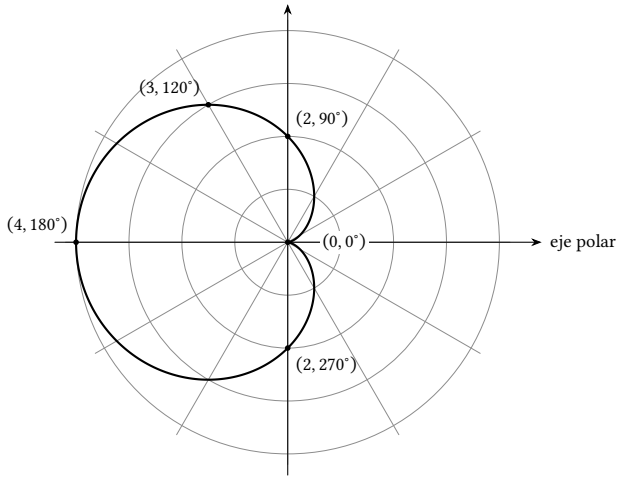
- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema en cada uno de los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010, siempre el problema 1. Curvas: cardioide 3, lemniscata 3, circunferencia 3, rosa 2, caracol 1 y cónica en polares 1. Lo que piden: bosquejo 7, intersecciones con el eje polar o con la recta a 90° 6, simetría 5, ecuación cartesiana 3, tres puntos o puntos más alejados del polo 3.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte; en el examen, de 15 a 20 minutos para el problema.
- **Ruta corta:**
  1. Repasa las coordenadas polares de la Unidad 2 (secciones 2.1.2 a 2.1.4).
  2. Lee el catálogo: secciones 4A.1.1 a 4A.1.3 (20 min); basta reconocer cada ecuación y saber su forma.
  3. Aprende los procedimientos 4A.3.4 (simetría) y 4A.3.5 (intersecciones con los ejes).
  4. Sigue los incisos a y b del ejemplo 4A.4 tapando la resolución.
  5. Resuelve los ejercicios 4A.5.1, 4A.5.2 y 4A.5.3 con cronómetro (15 min cada uno, con bosquejo).
  6. **Fuera del programa 2026:** la lemniscata (sección 4A.1.4, inciso c del ejemplo, ejercicio 4A.5.4, inciso b del propuesto 4A.6.1) y las cónicas en forma polar (sección 4A.1.5, procedimiento 4A.3.8, ejercicio 4A.5.5). Si vas con poco tiempo, sáltalas.

4A.1 Conceptos y expresiones

Las coordenadas polares, las varias representaciones de un punto, la simetría de puntos y las ecuaciones de transformación están en la Unidad 2 (secciones 2.1.1 a 2.1.4). Aquí empieza el catálogo de curvas.

4A.1.1 Rectas y circunferencias

- $\theta = \alpha$: recta por el polo con inclinación α.
- $r\cos\theta = a$ ($x = a$) y $r\operatorname{sen}\theta = b$ ($y = b$): rectas vertical y horizontal.
- $r = a$: circunferencia de centro en el polo y radio $|a|$.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia que pasa por el polo, de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ en cartesianas y radio $\frac{|a|}{2}$, pues $r^2 = ar\cos\theta$ da $x^2 + y^2 = ax$.



Resultado: a) sí es simétrica respecto al eje polar; b) tres intersecciones: el polo $(0, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$; c) cardioide que se abre hacia la izquierda.

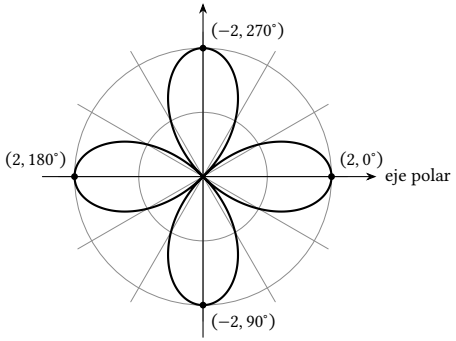
Ejercicio 4A.5.3 · Caracol con lazo: eje polar, punto simétrico y cartesiana

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$. a) Obtenga el número de intersecciones de C con el eje polar y las coordenadas polares de esas intersecciones. b) Si E es el punto de C que corresponde a $\theta = 45^\circ$, obtenga las coordenadas polares del punto E', simétrico de E respecto al polo. c) Obtenga una ecuación cartesiana de C.

Resolución.

1. **Nombre:** $r = a + b\operatorname{sen}\theta$ con $a = 1 < b = 2$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90°.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 1$; $\theta = 180^\circ : r = 1$. Puntos $(1, 0^\circ)$ y $(1, 180^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0 \iff \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \iff \theta = 210^\circ$ o 330°. El polo está en la curva.
4. **a) Comprobación:** el lazo ($210^\circ < \theta < 330^\circ$, con $r < 0$) queda arriba del eje polar y solo lo toca en el polo. Con la cartesiana del inciso c y $y = 0$: $x^4 = x^2$, $x = 0, \pm 1$. Son tres puntos.
5. **b) Punto** E**:** $r = 1 + 2\operatorname{sen}45^\circ = 1 + \sqrt{2}$; $E\left(1 + \sqrt{2}, 45^\circ\right)$.
6. **b) Simétrico respecto al polo:** se suma 180° al ángulo:
$$E'\left(1 + \sqrt{2}, 225^\circ\right), \quad \text{o también} \quad E'\left(-1 - \sqrt{2}, 45^\circ\right).$$
7. **c) Multiplicar por** r**:** $r^2 = r + 2r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = r$.
8. **c) Elevar al cuadrado:**
$$\left(x^2 + y^2 - 2y\right)^2 = x^2 + y^2.$$
Al elevar al cuadrado se agrega $r = -1 + 2\operatorname{sen}\theta$, que es la misma curva ($(r, \theta) \to (-r, \theta + 180^\circ)$ la convierte en $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$); y el polo ya estaba. La ecuación no agrega puntos.



4A.1.4 Lemniscatas

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$ y $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ son **lemniscatas**: dos lazos que se tocan en el polo, de longitud $|a|$.

- Solo existen para los θ que hacen el lado derecho ≥ 0: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ para $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ y $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$ (lazos sobre el eje polar); $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$, para $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ y $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$ (lazos sobre la recta a 90°); $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, en los cuadrantes I y III (lazos sobre la recta a 45°).
- Cada θ válido da dos valores, $r = \pm|a|\sqrt{\ldots}$: un punto en cada lazo.
- Como r aparece al cuadrado, las tres son simétricas respecto al polo.

4A.1.5 Cónicas en forma polar

Una cónica con un foco en el polo y excentricidad e tiene ecuación

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta},$$

donde $p > 0$ es la distancia del foco a la directriz: $x = p$ con $+\cos$, $x = -p$ con $-\cos$, $y = p$ con $+\operatorname{sen}$, $y = -p$ con $-\operatorname{sen}$. Es elipse si $e < 1$, parábola si $e = 1$ e hipérbola si $e > 1$. Si el denominador no empieza con 1 ($r = \frac{k}{c + d\operatorname{sen}\theta}$), se divide entre c.
Con $\cos\theta$ el eje focal es el eje polar y los vértices salen de $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$; con $\operatorname{sen}\theta$ el eje focal es la recta a 90° y los vértices salen de $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$. En una hipérbola uno de los dos valores de r es negativo: ese vértice está en la rama que no contiene al foco.

4A.1.6 Simetría de una curva

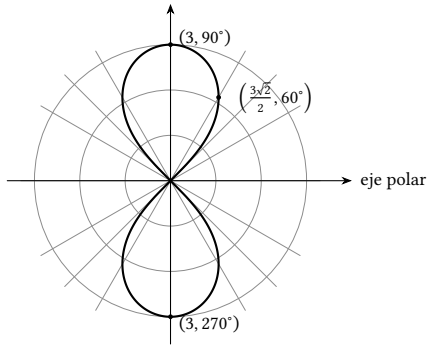
Una curva es simétrica respecto a un eje o al polo si el simétrico de cada uno de sus puntos también está en ella. Las pruebas usuales son sustituciones en la ecuación:

Simetría respecto a	Prueba 1	Prueba 2
eje polar	$\theta \to -\theta$	$r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$
recta a 90°	$\theta \to 180^\circ - \theta$	$r \to -r$, $\theta \to -\theta$

8. **c) Dónde existe:** $-9\cos 2\theta \geq 0 \iff \cos 2\theta \leq 0 \iff 90^\circ \leq 2\theta \leq 270^\circ$, es decir, $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ (y, sumando 180°, $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$).
9. **c) Puntos:**

$$\theta = 90^\circ:\ r^2 = -9\cos 180^\circ = 9, \quad r = \pm 3;$$
$$\theta = 60^\circ:\ r^2 = -9\cos 120^\circ = \tfrac{9}{2}, \quad r = \pm\tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Puntos: $(3, 90^\circ)$, $(-3, 90^\circ) = (3, 270^\circ)$ y $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$: los lazos se tocan en el polo.



Resultado: a) cardioide, $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; b) rosa de 3 pétalos, $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$; c) lemniscata, $(3, 90^\circ)$, $(3, 270^\circ)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$.

4A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4A.5.1 · Rosa de tres pétalos: recta a 90 grados y simetría

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 1.

Sea la curva de ecuación polar $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$. a) Obtenga las coordenadas de sus puntos de intersección con la recta a 90°. b) Determine si es simétrica respecto al eje polar. c) Bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **a) Sustitución:**

$$\theta = 90^\circ:\ r = 2\operatorname{sen} 270^\circ = -2; \qquad \theta = 270^\circ:\ r = 2\operatorname{sen} 810^\circ = 2\operatorname{sen} 90^\circ = 2.$$

   $(-2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$ son el mismo punto, $(0, -2)$ en cartesianas.
2. **a) Polo:** $r = 0$ cuando $\operatorname{sen} 3\theta = 0$, por ejemplo en $\theta = 0^\circ$. El polo está en la curva y en la recta a 90°.
3. **b) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\operatorname{sen}(-3\theta) = -2\operatorname{sen} 3\theta$. Cambia.
4. **b) Prueba 2** ($r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$): $-r = 2\operatorname{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\operatorname{sen}(180^\circ - 3\theta) = 2\operatorname{sen} 3\theta$, es decir, $r = -2\operatorname{sen} 3\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.

4A.3 Procedimientos

4A.3.1 Representaciones de un punto y puntos simétricos

1. Escribe el punto con la pareja dada; si viene de una curva, calcula r con su θ.
2. Aplica la regla de la sección 2.1.3 según el eje o el polo.
3. Si se pide «unas coordenadas», da una pareja; si conviene, da también la equivalente con $r > 0$ y $0^\circ \le \theta < 360^\circ$.

4A.3.2 De polar a cartesiana

1. Si hay $\cos\theta$ o $\operatorname{sen}\theta$ solos, multiplica la ecuación por r; si hay un cociente, quita el denominador.
2. Sustituye $r\cos\theta = x$, $r\operatorname{sen}\theta = y$, $r^2 = x^2 + y^2$.
3. Si queda r sola, aíslala y eleva al cuadrado: $r = E \Rightarrow x^2 + y^2 = E^2$.
4. Completa cuadrados para identificar la cónica (circunferencia, hipérbola…). Revisa si el polo pertenece a la curva original.

4A.3.3 Identificar la curva

1. $r = a\cos\theta$, $r = a\operatorname{sen}\theta$: circunferencia por el polo.
2. $r = a \pm b\cos\theta$ o con $\operatorname{sen}\theta$: cardioide si $a = b$; caracol con lazo si $a < b$; sin lazo si $a > b$.
3. $r = a\operatorname{sen} n\theta$, $r = a\cos n\theta$: rosa de n pétalos (n impar) o $2n$ (n par).
4. $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = \pm a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata (si aparece $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$, despeja primero r^2).
5. $r = \frac{k}{c \pm d\cos\theta}$: divide entre c y compara con $\frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$; $e = \frac{d}{c}$.

4A.3.4 Simetría

1. Aplica la prueba 1 de la tabla de la sección 4A.1.6. Si la ecuación no cambia, la curva es simétrica: termina.
2. Si cambia, aplica la prueba 2. Si no cambia, es simétrica: termina.
3. Si las dos fallan, escribe que las pruebas no deciden. Toma un punto notable de la curva (el extremo de un pétalo, el punto más alejado), calcula su simétrico y comprueba que *ninguna* representación, $(r', \theta' + 360^\circ k)$ ni $(-r', \theta' + 180^\circ + 360^\circ k)$, cumple la ecuación. Entonces no es simétrica.

4A.3.5 Intersecciones con el eje polar y la recta a 90 grados

1. **Eje polar:** sustituye $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$. **Recta a** 90°**:** sustituye $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$.
2. Escribe cada punto; si $r < 0$, da también su representación con $r > 0$ y revisa si dos resultados son el mismo punto.
3. **Polo:** resuelve $r = 0$. Si tiene solución, el polo está en la curva y en las dos rectas.
4. Si la curva tiene puntos con $r < 0$ (lazos), comprueba en cartesianas: $y = 0$ (eje polar) o $x = 0$ (recta a 90°) en la ecuación cartesiana da todas las intersecciones.

4A.3.6 Tabla de valores y puntos más alejados del polo

1. Evalúa r en ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, …); en rosas y lemniscatas, en los que hacen notable a $n\theta$ o a 2θ.
2. **Puntos más alejados:** maximiza $|r|$ (o r^2): ocurre donde el seno o el coseno vale ± 1. Escribe todos los θ en $[0^\circ, 360^\circ)$ y los puntos que dan.
3. Para «tres puntos», escoge puntos notables: extremos de pétalos o lazos, intersecciones con los ejes.

4A.3.7 Bosquejo

1. Dibuja una rejilla polar ligera: circunferencias y rayos cada 30° o 45°.
2. Marca los puntos de la tabla, las intersecciones con los ejes y el polo si pertenece.
3. Usa las simetrías para dibujar solo una parte y reflejarla.
4. Une los puntos en el orden en que crece θ; con $r < 0$, el punto va en la dirección $\theta + 180^\circ$.
5. Escribe el nombre de la curva y las coordenadas de los puntos marcados.

4A.3.8 Cónica en forma polar

1. Escribe la ecuación con denominador $1 \pm e\cos\theta$ (o $\operatorname{sen}\theta$) y lee e: identifica la cónica.
2. **Vértices:** evalúa r en los dos ángulos del eje focal y convierte a cartesianas (uno puede salir con $r < 0$).
3. **Cartesiana:** $r(1 \pm e\operatorname{sen}\theta) = ep \Rightarrow r = ep \mp ey \Rightarrow x^2 + y^2 = (ep \mp ey)^2$; completa cuadrados y lee centro y semiejes. Comprueba que los vértices coinciden.
4. Para áreas y distancias, trabaja con los puntos en cartesianas.

4A.3.9 Intersección de dos curvas polares

1. Iguala las r y resuelve para θ en $[0^\circ, 360^\circ)$.
2. Iguala la primera con la otra representación de la segunda, $f(\theta) = -g(\theta + 180^\circ)$, y descarta los puntos repetidos.
3. Revisa el polo por separado ($r = 0$ en cada curva).
4. Si hay duda, resuelve el sistema en cartesianas.

4A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Catálogo: cardioide, rosa y lemniscata

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 1.

Para cada una de las curvas siguientes, dé su nombre, las coordenadas polares de tres de sus puntos y bosqueje su gráfica indicando esos puntos: a) $r = 2 + 2\cos\theta$; b) $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$; c) $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$.

Resolución.

1. **a) Nombre:** es $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$: **cardioide**. Con $\theta \to -\theta$ no cambia: simétrica respecto al eje polar.
2. **a) Puntos:**

$$\theta = 0^\circ : r = 4; \quad \theta = 90^\circ : r = 2; \quad \theta = 180^\circ : r = 0; \quad \theta = 270^\circ : r = 2.$$

Tres puntos: $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; además pasa por el polo, $(0, 180^\circ)$, donde tiene la punta.