Resolución.

1. **Dirección de R:** $\frac{-y-1}{-1}=\frac{y+1}{1}$ y $\frac{-z+2}{-1}=\frac{z-2}{1}$: $R:\ \frac{x+3}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$, $\vec{u}=(-1,1,1)$.
2. **Ángulo recta–plano (seno):** $\vec{n}=(1,B,1)$, $\vec{u}\cdot\vec{n}=-1+B+1=B$:

$$\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}=\frac{|B|}{\sqrt{3}\sqrt{2+B^2}}.$$

3. **Ecuación:** $2|B|=\sqrt{3}\sqrt{2+B^2}\Rightarrow 4B^2=6+3B^2\Rightarrow B^2=6$.

Resultado: $B\in\{-\sqrt{6},\ \sqrt{6}\}$.

Ejercicio 3.5.13 · Ángulo e intersección de una recta y un plano

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 7.

Sean la recta $L:\ \frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{-3}=\frac{2-z}{3}$ y el plano $\pi:\ x-y-z+19=0$. Determine: a) el ángulo entre L y π; b) las coordenadas del punto I de intersección de L y π.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2-z}{3}=\frac{z-2}{-3}$: $P_0(-3,5,2)$, $\vec{u}=(3,-3,-3)$, paralelo a $(1,-1,-1)$. $\vec{n}=(1,-1,-1)$.
2. **a)** $\vec{u}=3\vec{n}$: la recta es paralela a la normal, es decir, **perpendicular** al plano. Con la fórmula: $\operatorname{sen}\varphi=\frac{|3+3+3|}{\sqrt{27}\sqrt{3}}=1$, $\varphi=90^\circ$.
3. **b)** Con $L:\ (-3+t,\ 5-t,\ 2-t)$: $(-3+t)-(5-t)-(2-t)+19=3t+9=0$, $t=-3$. $I(-6,8,5)$; comprobación: $-6-8-5+19=0$.

Resultado: $\varphi=90^\circ$; $I(-6,8,5)$.

Ejercicio 3.5.14 · Punto de un plano más cercano a un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-1, tipo C, problema 6.

Obtenga las coordenadas del punto P del plano $\pi:\ 3x-y+2z=4$ más cercano al punto $M(1,5,-4)$.

Resolución.

1. **Recta perpendicular por M:** dirección $\vec{n}=(3,-1,2)$: $(1+3t,\ 5-t,\ -4+2t)$.
2. **Intersección con π:** $3(1+3t)-(5-t)+2(-4+2t)=14t-10=4$, $t=1$.
3. **Punto:** $P(4,4,-2)$; comprobación: $12-4-4=4$. (La distancia de M al plano es $|\overrightarrow{MP}|=|\vec{n}|=\sqrt{14}$.)

Resultado: $P(4,4,-2)$.

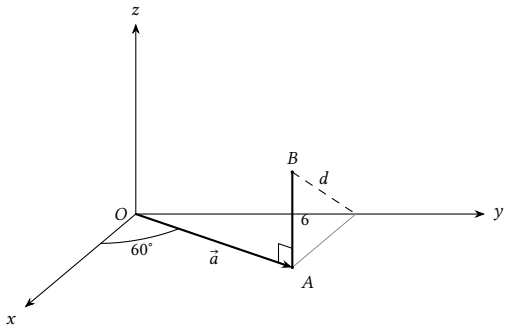
Ejercicio 3.5.15 · Recta por el origen que corta perpendicularmente a otra

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 1.

Sea la recta $M:\ x=4,\ y=5+t,\ z=-2t$. Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al origen y corta perpendicularmente a M.

Resolución.

1. **Datos:** $\vec{u}_M=(0,1,-2)$; punto genérico de M: $F(4,\ 5+t,\ -2t)$.
2. **Perpendicularidad:** $\overrightarrow{OF}\cdot\vec{u}_M=5+t+4t=0$, $t=-1$, $F(4,4,2)$.
3. **Recta:** por O y F, dirección $(4,4,2)$, o $(2,2,1)$.



Resolución.

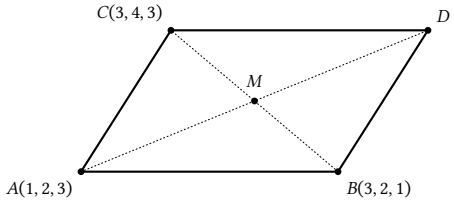
1. **A:** $\vec{a}=16(\cos 60^\circ,\operatorname{sen}60^\circ,0)=\left(8,8\sqrt{3},0\right)$.
2. **B:** $\overrightarrow{AB}=6\hat{k}$ (hacia arriba), así que $B\left(8,8\sqrt{3},6\right)$.
3. **Distancia al eje y:** $d=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{64+36}=10$. (Con vectores: $d=\frac{|\overrightarrow{OB}\times\hat{\jmath}|}{|\hat{\jmath}|}=|(-6,0,8)|=10$.)

Resultado: $d=10$ unidades.

Ejercicio 2.6.14 · Paralelogramo: punto de cruce de las diagonales y ángulo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-2, tipo A, problema 5.

Los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$, $C(3,4,3)$ y D son los vértices del paralelogramo de la figura, cuyas diagonales se cortan en M. Determine: a) las coordenadas de M; b) el coseno del ángulo entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** los vértices en orden son A, B, D, C; las diagonales son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
2. **a)** Las diagonales se cortan en su punto medio: $M=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}(6,6,4)=(3,3,2)$. (Con $D=B+C-A=(5,4,1)$, también $\frac{1}{2}(A+D)=(3,3,2)$.)
3. **b)** $\overrightarrow{AB}=(2,0,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$: $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{8}}=\frac{1}{2}$ ($\theta=60^\circ$).

Resultado: a) $M(3,3,2)$; b) $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

1. **Datos de R:** $\frac{-2-y}{-1} = y+2$ y $\frac{2z-2}{2} = z-1$: $P_R(1,-2,1)$, $\vec{u}_R = (3,1,1)$. De L: $P_L(3,4,-7)$, $\vec{u}_L = (1,-1,1)$.
2. **Dirección común:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (-1-1,\ 3-1,\ 1+3) = (-2,2,4)$; se usa $\vec{w} = (1,-1,-2)$, $|\vec{w}| = \sqrt{6}$.
3. **a)** $\overrightarrow{P_LP_R} = (-2,-6,8)$, $\overrightarrow{P_LP_R} \cdot \vec{w} = -2+6-16 = -12$:

$$d = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

4. **b)** Los planos con normal $\vec{w}$ que contienen a cada recta son $x-y-2z = 13$ (por P_L: $3-4+14$) y $x-y-2z = 1$ (por P_R: $1+2-2$). El equidistante tiene el término medio: $x-y-2z = 7$. Comprobación: su distancia a P_L es $\frac{|13-7|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, la mitad de d.
5. **c)** Perpendicular a las dos: dirección $\vec{w}$. $P:\ \vec{p} = (2,3,-1) + t(1,-1,-2)$.

Resultado: $d = 2\sqrt{6}$; $\pi:\ x-y-2z-7 = 0$; $P:\ \vec{p} = (2,3,-1) + t(1,-1,-2)$.

Ejercicio 3.5.9 · Intersección de dos rectas, plano que las contiene y distancia

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas $L:\ 1-x = \frac{y-3}{2};\ z = 4$ y $R:\ \vec{p} = (4-t,\ 1-2t,\ 2+2t)$. Determine: a) si existen, las coordenadas del punto I de intersección de L y R; b) una ecuación vectorial del plano π que contiene a L y a R; c) la distancia del punto $B(3,4,5)$ a L.

Resolución.

1. **Datos:** $L:\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2}$, $z = 4$: $P_L(1,3,4)$, $\vec{u}_L = (-1,2,0)$. R: $P_R(4,1,2)$, $\vec{u}_R = (-1,-2,2)$.
2. **a)** $1-s = 4-t$, $3+2s = 1-2t$, $4 = 2+2t$. De la tercera, $t = 1$; de la primera, $s = -2$; en la segunda, $3-4 = -1 = 1-2$: se cumple. $I(3,-1,4)$.
3. **b)** Se cortan; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4)+r(-1,2,0)+s(-1,-2,2)$. (Su normal es $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (4,2,4)$: $2x+y+2z-13 = 0$.)
4. **c)** $\overrightarrow{P_LB} = (2,1,1)$,

$$\overrightarrow{P_LB} \times \vec{u}_L = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,5), \qquad d = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}.$$

Resultado: $I(3,-1,4)$; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4) + r(-1,2,0) + s(-1,-2,2)$; $d = \sqrt{6}$.

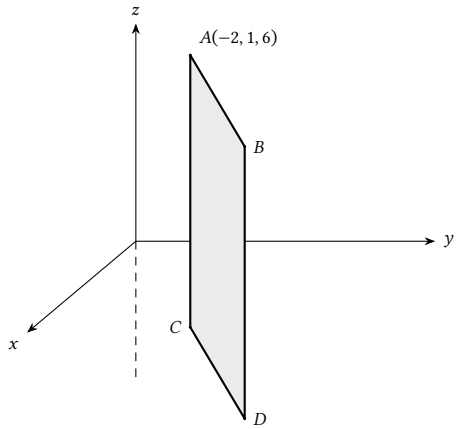
Ejercicio 3.5.10 · Plano perpendicular al plano XZ y distancia del origen a una recta

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 3.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-4}{8} = \frac{-y-1}{5} = \frac{z+1}{3}$. Obtenga: a) la ecuación cartesiana del plano π que es perpendicular al plano coordenado XZ y contiene a la recta L; b) la distancia del origen a la recta L.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2x-4}{8} = \frac{x-2}{4}$ y $\frac{-y-1}{5} = \frac{y+1}{-5}$: $P_0(2,-1,-1)$, $\vec{u} = (4,-5,3)$.



Resolución.

1. B**:** $|\vec{v}| = 5$, así que $\overrightarrow{AB} = 10 \cdot \frac{(4,3,0)}{5} = (8,6,0)$ (en la figura B está a la derecha de A): $B = (6,7,6)$.
2. C**:** C está 10 unidades abajo de A: $\overrightarrow{AC} = (0,0,-10)$, $C = (-2,1,-4)$.
3. D**:** $D = B + \overrightarrow{AC} = (6,7,-4)$. Comprobación: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ y los dos miden 10.
4. **b)** $\overrightarrow{BC} = (-8,-6,-10)$, $\overrightarrow{CD} = (8,6,0)$: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -64-36 = -100$, $|\overrightarrow{CD}|^2 = 100$, así que $\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{CD}}\,\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CD} = (-8,-6,0)$.

Resultado: a) $B(6,7,6)$, $C(-2,1,-4)$, $D(6,7,-4)$; b) $(-8,-6,0)$.

2.7 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.7.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 2.

Sea el triángulo T cuyos vértices son el origen $O(0,0,0)$ y los puntos A y B, que están sobre los ejes x y y respectivamente. Determine unas coordenadas de A y de B tales que el área de T sea igual a 4 y la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

Resultado: $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$, o bien $A(-4,0,0)$ y $B(0,-2,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 2.7.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 2.

Sean los puntos $P(1,2,-3)$, $Q(0,1,2)$, $R(-1,3,-2)$ y S. a) Compruebe que P, Q y R son tres de los cuatro vértices de un rectángulo cuyo ángulo recto tiene vértice en R. b) Determine las coordenadas del cuarto vértice S.

Resultado: $\pi_1:\ 4x-3y=0$, $\pi_2:\ y=4$; $\theta=\operatorname{ang\,cos}\frac{3}{5}$; $L:\ x=3,\ y=4,\ z=t$; $d=4$.

Ejercicio 3.5.5 · Recta de intersección, plano por dos rectas y ángulo recta–plano

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 3.

Sean la recta L, intersección de los planos $\pi_1:\ x-3y+z+2=0$ y $\pi_2:\ x-4y+2z+1=0$, y el plano π_3 que contiene a las rectas $L_1:\ \vec{p}=(1,1,4)+t(1,-1,5)$ y $L_2:\ \vec{p}=(-1,-1,-2)+r(1,3,1)$. a) Determine las coordenadas del punto I de intersección de L y π_3. b) Obtenga el coseno de uno de los ángulos que forman L y π_3.

Resolución.

1. **Recta L:** $(1,-3,1)\times(1,-4,2)=(-6+4,\ 1-2,\ -4+3)=(-2,-1,-1)$; se toma $\vec{u}=(2,1,1)$. Con $z=0$: $x-3y=-2$, $x-4y=-1$, de donde $y=-1$, $x=-5$. $L:\ \vec{p}=(-5,-1,0)+t(2,1,1)$.
2. **Plano π_3:**

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&-1&5\\1&3&1\end{vmatrix}=(-1-15,\ 5-1,\ 3+1)=(-16,4,4).$$

   Se comprueba que L_1 y L_2 son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_2}=(-2,-2,-6)$ y $(-2,-2,-6)\cdot(-16,4,4)=32-8-24=0$. Con $\vec{n}=(4,-1,-1)$ y $(1,1,4)$: $4(x-1)-(y-1)-(z-4)=0$, es decir, $\pi_3:\ 4x-y-z+1=0$.
3. **a)** En π_3: $4(-5+2t)-(-1+t)-t+1=6t-18=0$, $t=3$. $I(1,2,3)$; comprobación: $4-2-3+1=0$.
4. **b)** $\vec{u}\cdot\vec{n}=8-1-1=6$, $|\vec{u}|=\sqrt{6}$, $|\vec{n}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad\cos\varphi=\sqrt{1-\tfrac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Resultado: $I(1,2,3)$; $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$, con φ el ángulo entre L y π_3 (el ángulo entre L y la normal tiene coseno $\frac{\sqrt{3}}{3}$).

Ejercicio 3.5.6 · Punto más cercano entre dos rectas y plano paralelo a ambas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Sean el punto $A(1,-3,0)$ y las rectas

$$L:\ x-3=\frac{-y-1}{-2}=\frac{2-z}{-1}\qquad\text{y}\qquad M:\ \vec{p}=(0,1,3)+t\,(2,0,2),\ t\in\mathbb{R}.$$

Determine: a) las coordenadas del punto B de la recta L más cercano a M; b) una ecuación cartesiana del plano π paralelo a L y a M que contiene al punto A.

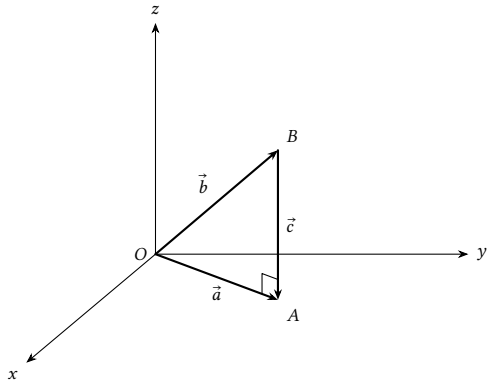
Resolución.

1. **Datos de L:** $\frac{-y-1}{-2}=\frac{y+1}{2}$ y $\frac{2-z}{-1}=z-2$: $L:\ x-3=\frac{y+1}{2}=z-2$, con $P_L(3,-1,2)$ y $\vec{u}_L=(1,2,1)$. De M: $P_M(0,1,3)$, $\vec{u}_M=(2,0,2)$.
2. **Puntos genéricos:** $P(s)=(3+s,\ -1+2s,\ 2+s)\in L$ y $Q(t)=(2t,\ 1,\ 3+2t)\in M$, con $\overrightarrow{QP}=(3+s-2t,\ -2+2s,\ -1+s-2t)$.

Ejercicio propuesto 2.7.8

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 6.

En la figura, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ está en el plano XY, $\vec{c}$ va de B a A y $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, con $|\vec{a}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ y $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$; b) el coseno del ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{a}$; c) el área del triángulo ABO.



Resultado: a) $\vec{a}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 5.

Un paralelepípedo P tiene aristas concurrentes en el vértice $A(3,-4,-2)$ que terminan en los puntos $B(-3,-3,0)$, $C(2,-8,0)$ y $D(-1,-7,0)$. Determine: a) el volumen de P; b) el coseno del ángulo que forman las aristas $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

Resultado: a) 20 unidades cúbicas; b) $\cos\theta=\frac{20}{\sqrt{609}}=\frac{20\sqrt{609}}{609}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 2.7.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 6.

Sean $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}$ el vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, con $A(-3,0,1)$ y $B(-5,1,5)$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$; b) un vector unitario $\vec{w}$ perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo P que tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados concurrentes.

Resultado: a) $\frac{4}{7}(-2,1,4)$; b) $\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ (o su opuesto); c) $5\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

1. **Forma simétrica ordenada:**

$$L:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{3},\qquad R:\ \frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+10}{-3}.$$

   Entonces $P_L(4,2,-5)$, $\vec{u}_L=(-1,4,3)$; $P_R(6,2,-10)$, $\vec{u}_R=(1,-4,-3)=-\vec{u}_L$.
2. **Posición:** $\vec{u}_R=-\vec{u}_L$: son paralelas (se cumple). P_R no está en L ($\frac{6-4}{-1}=-2\neq\frac{2-2}{4}=0$): no coinciden.
3. **Normal del plano:** con $\overrightarrow{P_LP_R}=(2,0,-5)$,

$$\vec{u}_L\times\overrightarrow{P_LP_R}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&4&3\\2&0&-5\end{vmatrix}=(-20,\ 1,\ -8).$$

4. **a)** Con $\vec{n}=(20,-1,8)$ y P_L: $20(x-4)-(y-2)+8(z+5)=0$, es decir, $20x-y+8z-38=0$. Comprobación con P_R: $120-2-80-38=0$.
5. **b)** Distancia de P_R a L: el producto cruz ya está hecho,

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_LP_R}\times\vec{u}_L|}{|\vec{u}_L|}=\frac{\sqrt{400+1+64}}{\sqrt{1+16+9}}=\frac{\sqrt{465}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{465}{26}}.$$

Resultado: $\pi:\ 20x-y+8z-38=0$; $d=\sqrt{\frac{465}{26}}=\frac{\sqrt{12090}}{26}\approx 4.2$.

Ejercicio 3.5.3 · Recta intersección de dos planos y punto más próximo

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Sean el punto $Q(3,1,-2)$ y los planos $\pi_1:\ -x-y+z+2=0$ y $\pi_2:\ 2x+3y-4z-7=0$. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L intersección de π_1 y π_2; b) las coordenadas del punto M de L más próximo a Q; c) el coseno del ángulo entre π_1 y π_2.

Resolución.

1. **Dirección:** $\vec{n}_1=(-1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(2,3,-4)$,

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&-1&1\\2&3&-4\end{vmatrix}=(4-3,\ 2-4,\ -3+2)=(1,-2,-1).$$

2. **Punto:** con $z=0$: $x+y=2$ y $2x+3y=7$, de donde $y=3$, $x=-1$. $P_0(-1,3,0)$ cumple las dos ecuaciones.
3. **a)** $L:\ \vec{p}=(-1,3,0)+t\,(1,-2,-1)$.
4. **b)** $\overrightarrow{P_0Q}=(4,-2,-2)$; $t=\dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\dfrac{4+4+2}{6}=\dfrac{5}{3}$. Entonces

$$M=\left(-1+\tfrac{5}{3},\ 3-\tfrac{10}{3},\ -\tfrac{5}{3}\right)=\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{5}{3}\right).$$

   Comprobación: $\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u}=\frac{7}{3}-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=0$.

2. **Confundir las dos componentes.** La escalar es un número, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$; la vectorial es un vector, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$. Y se divide entre el módulo del vector *sobre* el que se proyecta.
3. **Área de paralelogramo por diagonales sin el $\frac{1}{2}$.** Con las diagonales, $A=\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$; con los lados, $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$.
4. **Tomar una diagonal como lado.** En el ejercicio 2.6.6 $\overrightarrow{BD}$ es diagonal y en el 2.6.15 $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$ también; se lee la figura antes de multiplicar.
5. **Olvidar el valor absoluto o el $\frac{1}{6}$.** El producto mixto puede salir negativo; el volumen es su valor absoluto, y el del tetraedro es un sexto. Con parámetro, $|\det|=V$ da dos ecuaciones.
6. **Ángulo interior con un vector al revés.** El ángulo en A usa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$; con $\overrightarrow{BA}$ sale el suplemento (coseno con el signo cambiado).
7. **Cuarto vértice con la fórmula equivocada.** $D=A+C-B$ vale si B es el vértice opuesto a D. Se identifica primero cuál es el vértice opuesto (en el propuesto 2.7.2, R).
8. **Perder una solución.** «Paralelo a $\vec{v}$ con módulo 5», «unitario perpendicular» y los parámetros cuadráticos tienen dos respuestas; se dan las dos o se dice que hay dos.
9. **Errores en el determinante.** El término de $\hat{\jmath}$ lleva signo menos: $-(a_1b_3-a_3b_1)$. Se comprueba que $\vec{a}\times\vec{b}$ sea perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

2.9 Formulario de emergencia de la unidad

- $\overrightarrow{AB}=B-A\cdot|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\cdot\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot$ punto medio $\frac{1}{2}(A+B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\hat{v}$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\cdot\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
- $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.
- $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a}\times\vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D=A+C-B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M-P$.

2.10 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe en componentes todos los vectores y segmentos del enunciado ($\overrightarrow{AB}=B-A$) antes de calcular nada.
2. Si hay figura, cópiala y marca qué vectores son lados, cuáles diagonales y el sentido de cada flecha.
3. Calcula una sola vez los productos que se repiten ($\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$, módulos) y úsalos en todos los incisos.

3.3.7 Punto más cercano, simétrico y perpendicular común

1. **Punto de una recta más cercano a Q:** $M = P_0 + t\,\vec{u}$ con $t = \dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ (es decir, $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u}=0$).
2. **Punto de un plano más cercano a Q:** recta por Q con dirección $\vec{n}$; su intersección con el plano (3.3.6).
3. **Simétrico:** $Q' = 2M - Q$.
4. **Puntos más cercanos entre dos rectas que se cruzan:** con $P(s)\in L_1$ y $Q(t)\in L_2$, pide $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_1 = 0$ y $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_2 = 0$; el sistema da s y t. La recta PQ es la perpendicular común, de dirección $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$.

3.3.8 Puntos o planos a una distancia dada

1. Escribe el punto buscado con el parámetro de su recta, $P(t)$, o el plano buscado con su incógnita, $Ax+By+Cz+D=0$.
2. Plantea la distancia con la fórmula que toca e iguálala al dato.
3. Un valor absoluto da dos ecuaciones ($\pm$); una distancia entre puntos se eleva al cuadrado. Casi siempre hay dos soluciones: escribe las dos.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Posición relativa de dos rectas

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 4.

Sean las rectas

$$L_1:\ \vec{p} = (1,2,1) + t\,(1,-1,-2) \qquad \text{y} \qquad L_2:\ \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

En caso de que L_1 y L_2 sean paralelas, obtenga la ecuación cartesiana del plano que las contiene; en caso de que se crucen, calcule la distancia entre ellas; en caso de que se corten, determine las coordenadas de su punto de intersección.

Resolución.

1. **Datos:** $P_1(1,2,1)$, $\vec{u}_1 = (1,-1,-2)$; de las paramétricas de L_2 con $\lambda=0$, $P_2(0,7,4)$, y $\vec{u}_2 = (1,3,-1)$.
2. **¿Son paralelas?**

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1+6)\,\hat{\imath} - (-1+2)\,\hat{\jmath} + (3+1)\,\hat{k} = (7,-1,4) \neq \vec{0}.$$

   No se cumple: no son paralelas. (También se ve directo: $\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$ pediría $k=1$ y $k=-\frac{1}{3}$.)
3. **¿Son coplanares?** $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,5,3)$ y

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2) = -7 - 5 + 12 = 0.$$

Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 3). «Aplicar los conceptos de recta y plano, a través de sus diferentes ecuaciones, para visualizar las relaciones entre estos elementos geométricos utilizando software.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, uno o dos problemas en los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010 (13 problemas) y uno en los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016: plano que contiene dos rectas o una recta y un punto, distancias de un punto a un plano o a una recta, rectas y planos perpendiculares, ángulos e intersecciones.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 (40 min): ecuaciones de la recta y del plano, paralelismo, ángulos y distancias.
  2. Aprende los procedimientos 3.3.2 (plano), 3.3.3 (posición de dos rectas) y 3.3.4 (distancias).
  3. Sigue el ejemplo de la sección 3.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve con cronómetro, 15 min cada uno, los ejercicios 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.11 y 3.5.12.

3.1 Conceptos y expresiones

Todo lo de esta unidad se reduce a dos datos por objeto: una recta queda determinada por **un punto y un vector director**; un plano, por **un punto y un vector normal**. Los productos punto, cruz y mixto (Unidad 2.1.6) hacen el resto.

3.1.1 La recta

La recta L que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (a,b,c) \neq \vec{0}$ (*vector director*) es el conjunto de puntos P tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{u}$.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«valores de m (o B, h) para que formen 30°», «sean perpendiculares»	parámetro	3.3.5
«intersección de la recta con el plano», «de las rectas»	punto común	3.3.6
«punto más cercano», «más próximo», «simétrico», «perpendicular común»	pie de perpendicular	3.3.7
«punto de la recta que diste k unidades», «plano a distancia 7»	ecuación con valor absoluto	3.3.8

3.3 Procedimientos

3.3.1 Ecuaciones de una recta

1. **Por dos puntos** A, B: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $P_0 = A$.
2. **De simétricas a vectorial:** lleva cada fracción a la forma $\frac{x-x_0}{a}$ (coeficiente 1 en la variable); lee $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{u} = (a, b, c)$. Una ecuación aparte como $z = 4$ da componente 0.
3. **De forma general a vectorial:** $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Para el punto, da un valor a una variable (por ejemplo $z = 0$) y resuelve el sistema de 2×2 que queda. Comprueba el punto en *las dos* ecuaciones.
4. **Recta perpendicular a un plano** por un punto: $\vec{u} = \vec{n}$.
5. **Recta paralela a dos planos** (o perpendicular a dos rectas): $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (o $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$).

3.3.2 Ecuación de un plano

1. **Consigue un punto y dos vectores del plano**, no paralelos:
   - tres puntos A, B, C: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$;
   - un punto Q y una recta $(P_0, \vec{u})$ que no lo contiene: $\vec{u}$ y $\overrightarrow{P_0Q}$;
   - dos rectas que se cortan: $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ (antes comprueba que se cortan, 3.3.3);
   - dos rectas paralelas: $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ ($\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ es $\vec{0}$ y no sirve);
   - «paralelo a las rectas L y M»: $\vec{u}_L$ y $\vec{u}_M$;
   - «perpendicular al plano π_0»: $\vec{n}_0$ es uno de los vectores; «perpendicular al plano XZ»: $\hat{\jmath}$; «contiene al eje Y»: $\hat{\jmath}$ y el origen.
2. **Normal:** $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$; simplifica dividiendo entre un factor común.
3. **Ecuación:** $\vec{n} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$.
4. **Comprueba** con un punto que no usaste para el término independiente.
5. Si piden la vectorial o las paramétricas: $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$.

3.3.3 Posición relativa de dos rectas

1. **Datos:** $P_1, \vec{u}_1, P_2, \vec{u}_2$ (3.3.1).
2. **¿Paralelas?** Calcula $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Si es $\vec{0}$, se cumple; ve al paso 5.

- **Ecuación cartesiana:** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$, es decir, $Ax+By+Cz+D = 0$ con $D = -\vec{n} \cdot \vec{p}_0$. Los coeficientes de x, y, z son el vector normal.
- **Ecuación vectorial:** $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\,\vec{a} + s\,\vec{b}$, con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no paralelos y contenidos en el plano; $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + ra_1 + sb_1$, $y = y_0 + ra_2 + sb_2$, $z = z_0 + ra_3 + sb_3$.
- **Planos coordenados:** $XY:\ z = 0$, normal $\hat{k}$; $XZ:\ y = 0$, normal $\hat{\jmath}$; $YZ:\ x = 0$, normal $\hat{\imath}$. Un plano «perpendicular al plano XZ» contiene la dirección $\hat{\jmath}$; uno «paralelo al plano YZ» tiene normal $\hat{\imath}$.

De paramétricas a cartesiana: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ y un punto (el que se obtiene con $r = s = 0$). De cartesiana a vectorial: un punto que la satisfaga y dos vectores perpendiculares a $\vec{n}$ y no paralelos entre sí (por ejemplo, para $\vec{n} = (3, -1, 3)$: $(1, 3, 0)$ y $(0, 3, 1)$).

3.1.3 Paralelismo y perpendicularidad

Con $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vectores directores de rectas y $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ vectores normales de planos:

Objetos	Paralelos	Perpendiculares
Recta y recta	$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ ($\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$)	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
Plano y plano	$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ ($\vec{n}_1 = k\,\vec{n}_2$)	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
Recta y plano	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (la recta va «a lo largo» del plano)	$\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$ ($\vec{u}$ es normal al plano)

Observación. En recta–plano las condiciones se *invierten*: paralelismo con producto punto y perpendicularidad con producto cruz, porque se compara la dirección de la recta con la *normal* del plano. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto de la recta satisface la ecuación del plano, la recta está *contenida* en el plano.

3.1.4 Ángulos

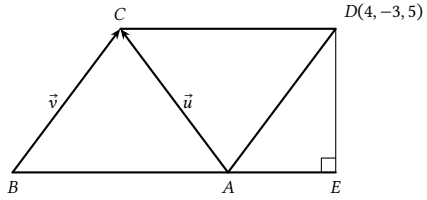
- **Entre dos rectas:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|}$, con $0° \le \theta \le 90°$.
- **Entre dos planos:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$ (el ángulo entre sus normales).
- **Entre una recta y un plano:** es el ángulo φ entre la recta y su proyección sobre el plano, complemento del ángulo θ entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$. Por eso lleva **seno**:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}.$$

Ejercicio 2.6.15 · Vértices de un paralelogramo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 5.

Sea el paralelogramo $ADCB$ de la figura, donde $\vec{u} = (5, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 4, 6)$, y el punto E es el pie de la perpendicular desde D a la recta BA. Determine las coordenadas de los puntos A, C, B y E.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ es un lado y $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ es una diagonal. Los lados opuestos son iguales como vectores: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
2. A**:** $A = D - \vec{v} = (4, -3, 5) - (-1, 4, 6) = (5, -7, -1)$.
3. C**:** $C = A + \vec{u} = (10, -6, -1)$. B**:** $B = C - \vec{v} = (11, -10, -7)$.
4. **Comprobación:** $\overrightarrow{CD} = (-6, 3, 6) = \overrightarrow{BA}$.
5. E**:** es A más la componente vectorial de $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ sobre la dirección $\overrightarrow{BA} = (-6, 3, 6)$:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA} = 6 + 12 + 36 = 54, \quad |\overrightarrow{BA}|^2 = 81, \quad \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{BA}}\, \vec{v} = \tfrac{54}{81}(-6, 3, 6) = (-4, 2, 4),$$

$E = A + (-4, 2, 4) = (1, -5, 3)$. Comprobación: $\overrightarrow{ED} = (3, 2, 2)$ y $(3, 2, 2) \cdot (-6, 3, 6) = 0$.

Resultado: $A(5, -7, -1)$, $C(10, -6, -1)$, $B(11, -10, -7)$, $E(1, -5, 3)$.

Ejercicio 2.6.16 · Cuadrado en el espacio

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2017-1, tipo A, problema 5.

El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lados de 10 unidades; los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos al eje z y los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, al vector $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, con $A(-2, 1, 6)$. Determine: a) las coordenadas de B, C y D; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\overrightarrow{CD}$.

2. **a)** El plano XZ tiene normal $\hat{\jmath}$; π contiene las direcciones $\vec{u}$ y $\hat{\jmath}$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 0, 4).$$

   Por P_0: $-3(x - 2) + 4(z + 1) = 0$, es decir, $3x - 4z - 10 = 0$. (No tiene término en y, como todo plano perpendicular al XZ.)
3. **b)** $\overrightarrow{OP_0} \times \vec{u} = (2, -1, -1) \times (4, -5, 3) = (-3 - 5,\ -4 - 6,\ -10 + 4) = (-8, -10, -6)$, de módulo $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; $|\vec{u}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. $d = 2$.

Resultado: $\pi:\ 3x - 4z - 10 = 0$; $d = 2$.

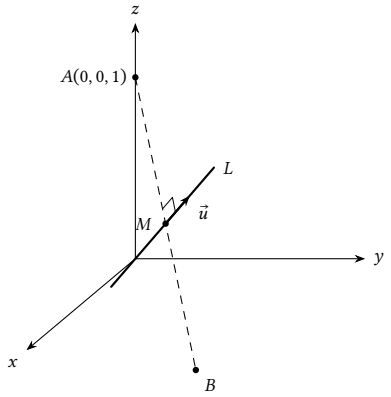
Ejercicio 3.5.11 · Punto simétrico respecto a una recta

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3.

Determine las coordenadas cartesianas del punto B, simétrico del punto $A(0, 0, 1)$ respecto a la recta L que contiene al origen y es paralela al vector $\vec{u} = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$.

Resolución.

1. **Recta:** $\vec{u}$ es paralelo a $(1, 1, 1)$: $L:\ \vec{p} = t\,(1, 1, 1)$.
2. **Pie de la perpendicular:** $t = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot (1, 1, 1)}{3} = \dfrac{1}{3}$, $M\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$. Comprobación: $\overrightarrow{MA} = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MA} \cdot (1, 1, 1) = 0$.
3. **Simétrico:** M es el punto medio de AB: $B = 2M - A = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3} - 1\right)$.



Resultado: $B\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 3.5.12 · Parámetro para un ángulo de 30° entre recta y plano

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 5.

Sean la recta $R:\ \frac{3+x}{-1} = \frac{-y-1}{-1} = \frac{-z+2}{-1}$ y el plano $\pi:\ x + By + z = 0$. Determine el conjunto de valores que puede tomar B para que R y π formen un ángulo de 30°.

Resultado: a) $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$; b) $S(2,0,1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.3

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 2.

Sean $\vec{a}=(6,-4,4)$, $\vec{b}=(2,1,-2)$ y $\vec{c}=(2,2,c_3)$. a) Determine c_3 tal que $\vec{a}$ sea perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$. b) Obtenga el área A del paralelogramo que tiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como lados no paralelos.

Resultado: a) $c_3=-1$; b) $A=6\sqrt{17}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 2.

Sean $\vec{a}=3\hat{\imath}+2\hat{k}$, $\vec{b}=(-4,1,3)$, $\vec{c}=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}+10\hat{k}$ y $\vec{d}=3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-6\hat{k}$, donde $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{d}$ y $-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}=-36$. Determine las componentes de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

Resultado: $\vec{u}=(-1,1,2)$, $\vec{v}=(-6,-12,12)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.5

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 3.

Sean los puntos $A(2,0,-2)$, $B(4,2,-1)$, $C(c_1,0,2)$ y $D(4,2,d_3)$. Determine c_1 y d_3 para que los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean paralelos.

Resultado: $c_1=2$, $d_3=3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.6

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 4.

Sean $\vec{v}=-\hat{\imath}+a\hat{k}$ y $\vec{u}=\hat{\imath}+b\hat{\jmath}+\hat{k}$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, obtenga el conjunto de valores de a y el de b para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean dos lados de un paralelogramo de área 6.

Resultado: $a=1$; $b\in\{-4,\ 4\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.7

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 5.

Sean los puntos $A\left(4\sqrt{2},0,-4\right)$ y $B\left(0,4\sqrt{2},-4\right)$, y sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Determine: a) la componente vectorial del vector de posición de B sobre el vector $\hat{\jmath}$; b) la componente escalar del vector de posición de A sobre el vector de posición de C.

Resultado: a) $\left(0,4\sqrt{2},0\right)$; b) $4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

3. **Perpendicular común:** $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_L=6s-4t-2=0$ y $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_M=4s-8t+4=0$. De la segunda, $s=2t-1$; en la primera, $8t-8=0$: $t=1$, $s=1$.
4. **a)** $B=P(1)=(4,1,3)$. (El punto de M más cercano es $Q(1)=(2,1,5)$; $\overrightarrow{QB}=(2,0,-2)$ es perpendicular a las dos rectas y la distancia entre ellas es $2\sqrt{2}$.)
5. **b)** $\vec{n}=\vec{u}_L\times\vec{u}_M=(4-0,\ 2-2,\ 0-4)=(4,0,-4)$, o $(1,0,-1)$. Por A: $(x-1)-(z-0)=0$.

Resultado: $B(4,1,3)$; $\pi:\ x-z-1=0$.

Ejercicio 3.5.7 · Distancia entre rectas que se cruzan y plano por dos rectas

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 3.

Sean las rectas

$$L_1:\ \frac{1-x}{-2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+5}{3},\qquad L_2:\ \vec{p}=(5+2t,\ -5-3t,\ 1+5t),\qquad L_3:\ \begin{cases}x=5+4r\\ y=2+2r\\ z=-4+r\end{cases}$$

Determine: a) la distancia entre L_1 y L_2; b) una ecuación cartesiana del plano π al que pertenecen L_1 y L_3; c) las coordenadas del punto de intersección del plano $z+4=0$ con la recta L_2.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{1-x}{-2}=\frac{x-1}{2}$: $P_1(1,0,-5)$, $\vec{u}_1=(2,-2,3)$; $P_2(5,-5,1)$, $\vec{u}_2=(2,-3,5)$; $P_3(5,2,-4)$, $\vec{u}_3=(4,2,1)$.
2. **a)** $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=(-10+9,\ 6-10,\ -6+4)=(-1,-4,-2)$, de módulo $\sqrt{21}$; $\overrightarrow{P_1P_2}=(4,-5,6)$ y $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)=-4+20-12=4\neq0$: se cruzan, y

$$d=\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

3. **b)** $\vec{u}_1\times\vec{u}_3=(-2-6,\ 12-2,\ 4+8)=(-8,10,12)$, o $(4,-5,-6)$. Son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_3}=(4,2,1)$ y $(4,2,1)\cdot(4,-5,-6)=16-10-6=0$. Por P_1: $4(x-1)-5y-6(z+5)=0$, es decir, $4x-5y-6z-34=0$. Comprobación con P_3: $20-10+24-34=0$.
4. **c)** $1+5t=-4\Rightarrow t=-1$: $(5-2,\ -5+3,\ 1-5)=(3,-2,-4)$.

Resultado: $d=\frac{4\sqrt{21}}{21}$; $\pi:\ 4x-5y-6z-34=0$; $(3,-2,-4)$.

Ejercicio 3.5.8 · Plano equidistante y perpendicular común

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas

$$L:\ \vec{r}(t)=(3,4,-7)+t\,(1,-1,1)\qquad\text{y}\qquad R:\ \frac{x-1}{3}=\frac{-2-y}{-1}=\frac{2z-2}{2}.$$

Determine: a) la distancia entre L y R; b) la ecuación cartesiana del plano π que es paralelo a L y a R y equidista de ellas; c) una ecuación vectorial de la recta P perpendicular a L y a R que contiene al punto $A(2,3,-1)$.

Resolución.

Ejercicio propuesto 2.7.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 5.

Sea el triángulo T de vértices $A(-1,0,2)$, $B(2,1,-1)$ y $C(1,-2,2)$. Determine: a) el coseno del ángulo A; b) la componente escalar de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{BC}$; c) el área de T.

Resultado: a) $\frac{2}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{19}$; b) $-\frac{15}{\sqrt{19}} = -\frac{15\sqrt{19}}{19}$; c) $\sqrt{34}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 2.7.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-1, tipo A, problema 5.

Los vértices de un tetraedro son $A(4,1,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,3,4)$ y $D(6,d_2,1)$. Obtenga el valor de d_2 para que el volumen del tetraedro sea de 5 unidades cúbicas.

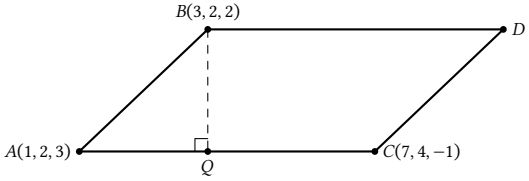
Resultado: $d_2 = 5$ o $d_2 = -5$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 2.7.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 5.

Sea el paralelogramo de la figura, con $A(1,2,3)$, $B(3,2,2)$ y $C(7,4,-1)$; Q es el pie de la perpendicular desde B al lado $\overline{AC}$. Obtenga: a) las coordenadas de Q; b) el área del triángulo ABC.



Resultado: a) $Q\left(\frac{19}{7}, \frac{18}{7}, \frac{13}{7}\right)$; b) $\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 2.7.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2026-2, tipo A, problema 5.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coinciden con los lados no paralelos de un paralelogramo de 6 unidades de área; además $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y forman un ángulo agudo. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resultado: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\sqrt{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

2.8 Errores frecuentes

1. **Restar al revés.** $\overrightarrow{AB} = B - A$ (final menos inicial). Un signo mal en $\overrightarrow{AB}$ cambia componentes, ángulos y coordenadas de puntos.

5. **c)** $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 - 3 - 4 = -9$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{29}$:

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{87}} = \frac{3\sqrt{87}}{29}.$$

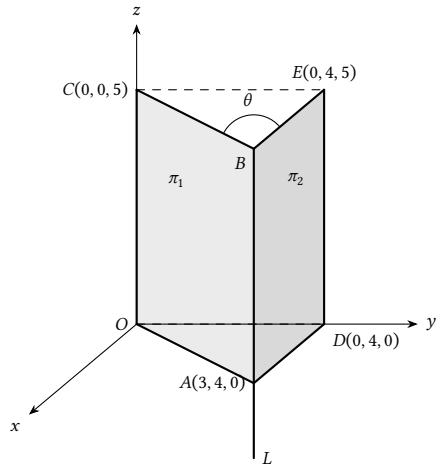
(El ángulo obtuso entre las normales tiene coseno $-\frac{3\sqrt{87}}{29}$.)

Resultado: $L:\ \vec{p} = (-1,3,0) + t(1,-2,-1)$; $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; $\cos\theta = \frac{3\sqrt{87}}{29}$.

Ejercicio 3.5.4 · Los dos planos de una figura

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 5.

Sean los planos π_1 y π_2 de la figura. Obtenga: a) la ecuación cartesiana de cada uno; b) el ángulo θ que forman; c) unas ecuaciones paramétricas de la recta L, intersección de π_1 y π_2; d) la distancia del origen a π_2.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** π_1 pasa por O, $C(0,0,5)$ y $A(3,4,0)$; π_2, por $D(0,4,0)$, $E(0,4,5)$ y A. B está sobre la vertical de A, a la altura de C y E: $B(3,4,5)$.
2. **a)** π_1**:** $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = (0,0,5) \times (3,4,0) = (-20,15,0)$, o sea $\vec{n}_1 = (4,-3,0)$. Como pasa por el origen: $\pi_1:\ 4x - 3y = 0$. Comprobación con A: $12 - 12 = 0$.
3. **a)** π_2**:** D, E y A tienen $y = 4$: $\pi_2:\ y - 4 = 0$, $\vec{n}_2 = (0,1,0)$. (Con productos: $\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DA} = (0,0,5) \times (3,0,0) = (0,15,0)$.)
4. **b)** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \dfrac{3}{5}$. Lo confirma la figura: $\overrightarrow{BC} = (-3,-4,0)$, $\overrightarrow{BE} = (-3,0,0)$, $\cos\theta = \frac{9}{5\cdot 3} = \frac{3}{5}$. Entonces $\theta = \operatorname{ang}\cos\frac{3}{5} \approx 53.1^\circ$.
5. **c)** $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (4,-3,0) \times (0,1,0) = (0,0,4)$: dirección $\hat{k}$, por A: $x = 3$, $y = 4$, $z = t$.
6. **d)** $d(O,\pi_2) = \dfrac{|0-4|}{1} = 4$.

4. Escribe la fórmula antes de sustituir: comp, $\overrightarrow{\text{comp}}$, área o volumen. Así se ve si falta un $\frac{1}{2}$, un $\frac{1}{6}$ o un valor absoluto.
5. Comprueba: el producto cruz es perpendicular a los dos factores, el punto obtenido cumple la condición que no usaste, los parámetros dan el área o volumen pedidos.
6. Deja los resultados exactos (radicales racionalizados o no, pero simplificados) con sus unidades.

Un producto cruz bien hecho resuelve la mitad de los problemas de esta unidad: área, vector perpendicular, paralelismo y volumen salen de él.

2.11 Con la computadora

Con `Matrix` un vector es una columna: `dot` es el producto escalar, `cross` el vectorial y `norm` el módulo. El programa calcula, para $\vec{a} = (2, -1, 3)$ y $\vec{b} = (1, 4, -2)$, el producto escalar, el producto vectorial, el área del paralelogramo que forman y las componentes escalar y vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$. En ingeniería, los mismos cálculos dan la resultante de dos fuerzas ($\vec{a} + \vec{b}$), el trabajo de una fuerza en un desplazamiento ($\vec{F} \cdot \vec{d}$) y su momento ($\vec{r} \times \vec{F}$). El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import Matrix, sqrt

a = Matrix([2, -1, 3])
b = Matrix([1, 4, -2])
p = a.dot(b)                        # producto escalar
c = a.cross(b)                      # producto vectorial
area = c.norm()                     # área del paralelogramo
comp = p / b.norm()      # componente escalar sobre b
vcomp = p / b.dot(b) * b  # componente vectorial
print(p, c.T, area, comp, vcomp.T)
assert p == -8 and c == Matrix([-10, 7, 9])
assert area == sqrt(230) and comp == -8/sqrt(21)
```


Se cumple: las rectas están en un mismo plano y, como no son paralelas, **se cortan**. No se cruzan.

4. **Punto de intersección:** se igualan las paramétricas con parámetros distintos:

$$1 + t = \lambda, \qquad 2 - t = 7 + 3\lambda, \qquad 1 - 2t = 4 - \lambda.$$

Con la primera en la segunda: $2 - t = 7 + 3 + 3t$, de donde $t = -2$ y $\lambda = -1$.
5. **Comprobación** en la tercera: $1 - 2(-2) = 5$ y $4 - (-1) = 5$. Se cumple.
6. **Punto:** con $t = -2$ en L_1: $(1 - 2,\ 2 + 2,\ 1 + 4) = (-1, 4, 5)$; con $\lambda = -1$ en L_2: $(-1,\ 4,\ 5)$. Coinciden.

Resultado: las rectas se cortan en $I(-1, 4, 5)$. No son paralelas (no hay un único plano que pedir por ese caso) ni se cruzan (su distancia es 0).

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Plano por tres puntos y distancia de un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 6.

Los puntos $A(1, -2, 0)$, $B(3, -1, 1)$ y $C(4, 1, -2)$ pertenecen al plano π. Determine: a) una ecuación vectorial de π y sus ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana de π; c) la distancia del punto $P(-2, 5, 1)$ a π.

Resolución.

1. **Vectores del plano:** $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, -2)$.
2. **a)** $\pi:\ \vec{p} = (1, -2, 0) + r\,(2, 1, 1) + s\,(3, 3, -2)$; paramétricas $x = 1 + 2r + 3s$, $y = -2 + r + 3s$, $z = r - 2s$.
3. **Normal:**

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 3,\ 3 + 4,\ 6 - 3) = (-5, 7, 3).$$

4. **b)** $-5(x - 1) + 7(y + 2) + 3z = 0$, es decir, $5x - 7y - 3z - 19 = 0$. Comprobación con C: $20 - 7 + 6 - 19 = 0$.
5. **c)** $d = \dfrac{|5(-2) - 7(5) - 3(1) - 19|}{\sqrt{25 + 49 + 9}} = \dfrac{67}{\sqrt{83}} = \dfrac{67\sqrt{83}}{83}$.

Resultado: $\vec{p} = (1, -2, 0) + r(2, 1, 1) + s(3, 3, -2)$; $\pi:\ 5x - 7y - 3z - 19 = 0$; $d = \frac{67\sqrt{83}}{83}$.

Ejercicio 3.5.2 · Plano que contiene dos rectas paralelas y su distancia

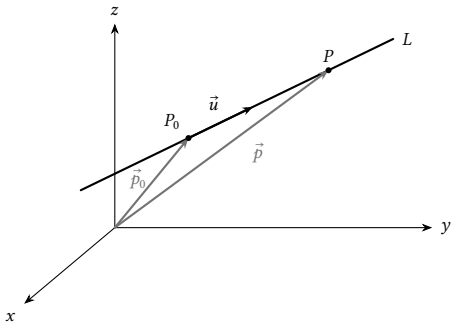
Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

Sean las rectas

$$L:\ \ 4 - x = \frac{2y - 4}{8} = \frac{z + 5}{3} \qquad \text{y} \qquad R:\ \ x - 6 = \frac{2 - y}{4} = \frac{-2z - 20}{6}.$$

Determine: a) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L y a R; b) la distancia entre L y R.

Resolución.



- **Ecuación vectorial:** $L:\ \vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$.
- **Ecuaciones cartesianas en forma simétrica** (si $a, b, c \neq 0$):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

  Si una componente es cero, esa coordenada es constante y se escribe aparte: con $\vec{u} = (a, b, 0)$, $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$; $z = z_0$.
- **Forma general** (intersección de dos planos no paralelos):

$$L:\ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

  El Plan 2016 no la nombra, pero la usa en «la recta intersección de dos planos».

Observación (leer la forma simétrica). Antes de leer el punto y el vector, cada fracción debe quedar como $\frac{x-x_0}{a}$, con coeficiente 1 en la variable. Así,

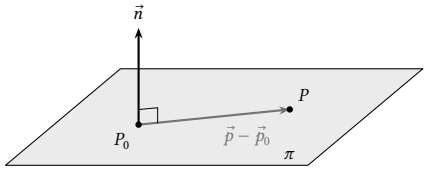
$$4 - x = \frac{2y - 4}{8} = \frac{z + 5}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 5}{3},$$

con punto $(4, 2, -5)$ y vector $(-1, 4, 3)$: en $4 - x$ se cambia el signo del denominador, y en $\frac{2y-4}{8}$ se divide numerador y denominador entre 2.

Dos puntos A y B dan la recta con $P_0 = A$ y $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

3.1.2 El plano

El plano π que pasa por P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ (*vector normal*) es el conjunto de puntos P con $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.



3. **¿Se cortan?** Calcula $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$. Si vale 0, se cortan: iguala las paramétricas (con parámetros *distintos*, t y λ), resuelve con dos ecuaciones y comprueba la tercera.
4. **¿Se cruzan?** Si el producto mixto no es cero: $d = \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$.
5. **Paralelas:** si P_2 está en L_1, coinciden; si no, el plano que las contiene tiene $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2}$, y su distancia es la de P_2 a L_1.

En el examen escribe cada caso con «se cumple» o «no se cumple»: así se ve que se revisaron los tres.

3.3.4 Distancias

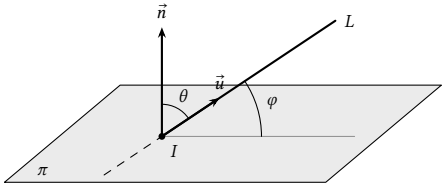
1. **Punto–plano:** sustituye el punto en $Ax + By + Cz + D$, toma valor absoluto y divide entre $|\vec{n}|$.
2. **Punto–recta:** $\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}$, su módulo, entre $|\vec{u}|$.
3. **Recta–recta:** primero la posición relativa (3.3.3); si se cruzan, la fórmula del producto mixto; si son paralelas, punto–recta.
4. **Plano–plano:** comprueba que sean paralelos (normales proporcionales); escribe los dos con el *mismo* $\vec{n}$ y usa $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$, o la distancia de un punto de uno al otro. Si no son paralelos, $d = 0$.
5. Racionaliza: $\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$.

3.3.5 Ángulos y problemas con parámetro

1. Identifica qué se compara: rectas $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, planos $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ o recta y plano $(\vec{u}, \vec{n})$.
2. Usa coseno en los dos primeros casos y **seno** en recta–plano.
3. **Con parámetro:** deja el parámetro en los vectores, escribe la fórmula con el valor conocido ($\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) y eleva al cuadrado para quitar el valor absoluto y la raíz. Resuelve la ecuación de segundo grado: casi siempre hay **dos** valores («el conjunto de valores»).
4. Para 90° no hace falta la fórmula: basta la condición de perpendicularidad de la tabla de 3.1.3, que es lineal en el parámetro.

3.3.6 Intersecciones

1. **Recta–plano:** sustituye las paramétricas de la recta en la ecuación cartesiana del plano, despeja t y sustitúyelo en la recta. Si la ecuación queda $0 = 0$, la recta está contenida en el plano; si queda $0 = k \neq 0$, es paralela.
2. **Recta–recta:** iguala las paramétricas con parámetros distintos; dos ecuaciones dan los parámetros, la tercera comprueba.
3. **Plano–plano:** la recta de 3.3.1, paso 3.
4. **Recta y un plano coordenado** (por ejemplo $z = -4$): iguala la coordenada y despeja t.



Sin valor absoluto se obtiene el ángulo obtuso $(180^\circ - \theta)$; los exámenes piden el agudo salvo que digan otra cosa. Un ángulo que no es notable se deja como ang cos $\frac{a}{b}$ o ang sen $\frac{a}{b}$.

3.1.5 Distancias

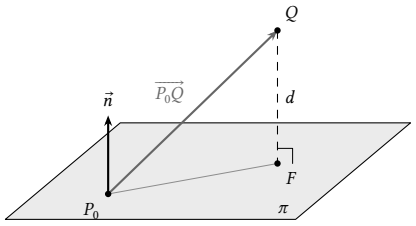
- **Punto Q a plano** $Ax + By + Cz + D = 0$:

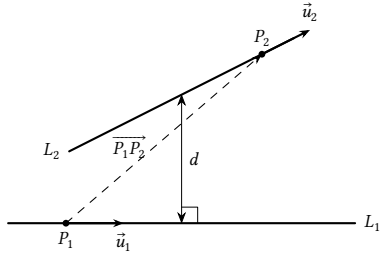
$$d = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = |\text{comp}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0Q}|.$$

- **Punto Q a recta** $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u}$: $d = \dfrac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ (altura del paralelogramo de lados $\overrightarrow{P_0Q}$ y $\vec{u}$).
- **Rectas que se cruzan** (L_1 por P_1 con $\vec{u}_1$; L_2 por P_2 con $\vec{u}_2$):

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}.$$

  Si se cortan, el numerador es cero y $d = 0$.
- **Rectas paralelas:** distancia de un punto de una a la otra (fórmula punto–recta).
- **Planos paralelos** $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (con el *mismo* vector normal): $d = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Si no son paralelos, se cortan y $d = 0$.
- **Recta paralela a un plano:** distancia de un punto de la recta al plano. Si la recta no es paralela, lo corta y $d = 0$.





3.1.6 Posición relativa e intersecciones

Dos rectas pueden ser:

- **paralelas** (o coincidentes): $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$; son coincidentes si además P_2 está en L_1;
- **se cortan** en un punto: no son paralelas y son coplanares, $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0$;
- **se cruzan** (no son paralelas ni se cortan): $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \neq 0$.

Las paralelas y las que se cortan determinan un plano; las que se cruzan, no.

Recta y plano: si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, se cortan en un punto; si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la recta es paralela al plano (sin puntos comunes) o está contenida en él. **Dos planos:** si no son paralelos, se cortan en una recta de dirección $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Punto más cercano y simétrico. El punto M de una recta (o de un plano) más cercano a Q es el pie de la perpendicular trazada desde Q: $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{u}$ (o $\overrightarrow{MQ} \parallel \vec{n}$). El *simétrico* de Q respecto a la recta o al plano es Q' con M punto medio de QQ': $\vec{q}\,' = 2\vec{m} - \vec{q}$.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«ecuación vectorial», «paramétricas», «forma simétrica» de una recta	pasar entre formas	3.3.1
«recta intersección de los planos», dos ecuaciones juntas	forma general a vectorial	3.3.1
«plano que contiene a los puntos», «al punto y a la recta», «a las rectas»	plano por puntos o rectas	3.3.2
«paralelo a las rectas», «perpendicular al plano XZ», «cuyo vector normal es perpendicular a»	plano con condición	3.3.2
«en caso de que sean paralelas… se crucen… se corten»	posición relativa	3.3.3
«distancia del punto al plano», «a la recta», «entre las rectas», «entre los planos»	una distancia	3.3.4
«ángulo entre», «coseno del ángulo»	ángulo	3.3.5