Resuelve el sistema, sustituye los valores en $p(x)$ y **comprueba** cada dato antes de buscar las raíces.

1B.3.6 Polinomio a partir de su gráfica

1. Lee las raíces reales: los cortes con el eje x.
2. Asigna multiplicidad: si la curva *cruza* el eje, 1 (o impar); si lo *toca* y regresa, 2 (o par). El polinomio de menor grado usa la menor multiplicidad posible.
3. Escribe $p(x) = a(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots$.
4. Calcula a con un punto de la gráfica que no sea raíz: $p(x_0) = y_0$.
5. Comprueba el signo de a con el comportamiento de los extremos: si la curva sube a la derecha, $a > 0$.

1B.3.7 Polinomios con potencias múltiplos de una

Si solo aparecen x^{2k}, x^k y constante ($x^8 + x^4 - 6$, $x^6 + 8x^3 + 12$):

1. Sustituye $u = x^k$: queda una cuadrática en u.
2. Resuelve para u (factorización o fórmula general).
3. Regresa: $x^k = u_1$ y $x^k = u_2$. Cada ecuación tiene k raíces, que son las raíces k-ésimas de u (Unidad 1A).

1B.3.8 Cota superior de las raíces

1. Con $a_n > 0$, divide sintéticamente entre $x - c$ para $c = 1, 2, 3, \ldots$
2. El primer c cuyo renglón de resultados (cociente y residuo) no tenga números negativos es una cota superior: ninguna raíz real es mayor que c.
3. Para la cota inferior, aplica lo mismo a $p(-x)$ y cambia el signo.

1B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíz imaginaria dada en un polinomio real

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 3.

Determine todas las raíces del polinomio

$$f(x) = 2x^6 - x^5 - 2x^2 + x,$$

si se sabe que $\alpha = i$ es una de ellas.

Resolución.

1. No hay término independiente: $f(x) = x\,(2x^5 - x^4 - 2x + 1)$. Primera raíz: $x = 0$.
2. Los coeficientes son reales, así que $\bar{\alpha} = -i$ también es raíz. Se divide $g(x) = 2x^5 - x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ entre $x - i$ y luego entre $x + i$:

	2	-1	0	0	-2	1
i		$2i$	$-2-i$	$1-2i$	$2+i$	-1
	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i	0

	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i
$-i$		$-2i$	i	$2i$	$-i$
	2	-1	-2	1	0

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Álgebra y Geometría Analítica

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.1.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«expresar como producto de factores lineales»	todas las raíces y a_n	1B.3.1
coeficientes con i y una raíz dada	dividir solo entre $x-\alpha$, sin conjugado	1B.3.4
«determinar A y B si 1 y -1 son raíces», «si contiene al punto», «si es divisible entre $x-2$»	ecuaciones para los coeficientes	1B.3.5
«raíz de multiplicidad 2»	dos divisiones con residuo cero	1B.3.5
«regla de los signos de Descartes», «posibilidades en que pueden presentarse las raíces»	tabla de posibilidades	1B.3.3
«posibles raíces racionales»	lista $\pm p/q$	1B.3.2
una gráfica y «el polinomio de menor grado»	raíces, multiplicidades y a_n	1B.3.6
x^8+x^4-6, x^6+8x^3+12 (solo potencias múltiplos de una)	cambio de variable $u=x^k$	1B.3.7
«una cota superior de las raíces»	división sintética con resultados ≥ 0	1B.3.8
$f(x)=p(x)\,q(x)$	raíces de cada factor por separado	1B.3.2

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 División sintética

Para dividir $p(x)$ entre $x-c$:

1. Escribe en un renglón **todos** los coeficientes, de la potencia mayor a la menor, con cero en las potencias que faltan. Pon c a la izquierda.
2. Baja el primer coeficiente al renglón de resultados.
3. Multiplica ese resultado por c, escríbelo bajo el siguiente coeficiente y suma. Repite hasta el final.
4. El último número es el residuo, $p(c)$. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos.
5. Si el residuo es 0, c es raíz: sigue trabajando con el cociente (polinomio *deflactado*).

Por ejemplo, $x^3-6x^2+11x-6$ entre $x-1$:

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6).$$

1B.3.2 Posibles raíces racionales y raíces reales

1. Si hay potencias de x en todos los términos, factoriza x^k: $x=0$ es raíz de multiplicidad k.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Álgebra y Geometría Analítica** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en el final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Es la asignatura de primer semestre del **Plan 2026**, el que cursa la Generación 2027 y las siguientes. Junta temas que en los planes anteriores estaban en dos materias: los números complejos y los polinomios de *Álgebra*, y el álgebra vectorial, la recta y el plano, las curvas y las superficies de *Geometría Analítica*. Si tu plan es el 2010 o el 2016, este no es tu cuaderno: usa *Curso de Emergencia, Álgebra* y *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*.

El cuaderno sigue los cuatro temas del programa 2026. Los temas 1 y 4 se dividen en partes, una por subtema:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y cómo estudiar.
1. Parte A: números complejos. Parte B: polinomios.
2. Álgebra vectorial (con los sistemas de referencia cartesiano y polar).
3. La recta y el plano en el espacio.
4. Parte A: curvas polares. Parte B: curvas en el espacio. Parte C: superficies cuádricas.

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa 2026). «Analizar los conceptos fundamentales del álgebra y de la geometría analítica para la resolución de problemas elementales de la Ingeniería, apoyándose en el uso de software.»

De dónde salen los ejercicios.

- Todavía no hay exámenes del Plan 2026. Los temas que no cambiaron se estudian con los exámenes finales de los planes 2010 y 2016: los de *Álgebra* (complejos y polinomios), los de *Geometría Analítica* y los problemas de geometría de *Cálculo y Geometría Analítica*. Son los mismos ejercicios de los cuadernos de esas materias.
- Lo que es nuevo en el programa 2026 (las coordenadas polares como sistema de referencia, las cuádricas en forma vectorial y paramétrica y el uso de software) va con ejercicios propios, marcados como tales.
- Ningún examen tiene resolución publicada. **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional.
- Cada ejercicio de examen indica el examen del que se adaptó; los de Cálculo y Geometría Analítica dicen también la asignatura. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora. Los exámenes de los planes anteriores no permiten dispositivos electrónicos: las resoluciones usan valores exactos (fracciones, radicales, ángulos notables). Un ángulo que no es notable se deja indicado, como $\arccos\frac{2}{3}$. El software es para estudiar y comprobar, no para el examen.

Unidad 1 · Parte B · Polinomios

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 1). «Identificar las operaciones elementales de los números complejos en sus formas binómica, trigonométrica y exponencial para aplicarlas en el cálculo de las raíces de polinomios apoyándose en software.»

Contenido de esta parte. 1.2 Teorema Fundamental del Álgebra y raíces de polinomios. Cálculo de raíces de polinomios empleando software.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema completo en los 17 finales del Plan 2010 y en los 41 del Plan 2016 de Álgebra. En el Plan 2010: raíz compleja dada, 7 de 17; coeficientes desconocidos a partir de raíces o puntos, 2; polinomio a partir de su gráfica, 2; regla de Descartes, 2; producto de dos polinomios, 2; polinomio bicuadrado con cota de raíces, 2.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1B.1 y el procedimiento 1B.3.1 (división sintética, 20 min).
  2. Sigue el ejemplo 1B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1B.5.3, 1B.5.6 y 1B.5.7 con cronómetro (15 min cada uno).
  4. Si vas con poco tiempo, salta la cota de raíces (1B.3.8) y la regla de los signos de Descartes (1B.3.3).

1B.1 Conceptos y expresiones

Polinomio. Un polinomio de grado n en x es

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

con coeficientes reales o complejos. a_n es el *coeficiente principal* y a_0 el *término independiente*. Dos polinomios son iguales si tienen los mismos coeficientes en cada potencia.

Raíz. El número $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz (o cero) de p si $p(\alpha) = 0$. En la gráfica de un polinomio con coeficientes reales, las raíces reales son los puntos donde la curva toca o corta el eje x.

Algoritmo de la división. Para $p(x)$ y $d(x) \neq 0$ existen polinomios únicos $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (residuo) tales que

$$p(x) = d(x)\,q(x) + r(x), \qquad r = 0 \text{ o } \operatorname{grado} r < \operatorname{grado} d.$$

p es *divisible* entre d si $r(x) = 0$.

Teorema del residuo. El residuo de dividir $p(x)$ entre $x - c$ es $p(c)$.

Teorema del factor. $x - c$ es factor de $p(x)$ si y solo si $p(c) = 0$.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 30 minutos, más el repaso exprés de la sección 0.6 si hace falta. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué trae el examen, qué unidades pesan más y en qué orden estudiarlas.
- **Plan 2026:** todavía no hay exámenes de esta asignatura. Todo el cuaderno está **basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron**.

0.1 Tu plan y tu cuaderno

- **Plan 2026** (Generación 2027 y posteriores): la asignatura de primer semestre es *Álgebra y Geometría Analítica*. Es este cuaderno.
- **Planes 2010 y 2016** (generaciones anteriores): tus materias son *Álgebra* y *Geometría Analítica* (o *Cálculo y Geometría Analítica*), con sus propios cuadernos.
- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera y el nombre de la materia que debes. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

0.2 Cómo es el examen

El programa 2026 dice que la evaluación final es un **examen final**. Mientras no haya exámenes publicados del Plan 2026, lo más parecido son los finales de las materias anteriores con los mismos temas: los de *Álgebra* (17 del Plan 2010 y 41 del Plan 2016), los de *Geometría Analítica* (9 del Plan 2010) y los problemas de geometría de *Cálculo y Geometría Analítica* (39 del Plan 2016). En ellos:

- **Duración:** 2 horas.
- **Problemas:** 6 u 8, de 10 a 20 puntos cada uno, que suman 100; cada problema es de un solo tema y suele tener dos o tres incisos.
- **Material:** ninguno: «No se permite el uso de algún dispositivo electrónico». Los resultados se dejan **exactos**: $\sqrt{14}$, $\frac{3}{\sqrt{26}}$, $2\operatorname{cis}135°$, $\operatorname{ang}\cos\frac{2}{3}$. No hace falta sacar decimales.
- **Plantilla fija:** los temas salen siempre en el orden del programa. Es razonable esperar, en el final 2026, un problema de complejos, uno de polinomios, uno o dos de vectores, uno o dos de recta y plano, y uno o dos de curvas y superficies.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en los finales de los planes anteriores (las versiones de un mismo examen cuentan por separado). Es una guía de qué se pregunta y cómo, no una predicción del examen 2026.

Ejercicio propuesto 1A.6.6

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3.

Sean $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$, $z_2 = 8e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_3 = 3\operatorname{cis}180^\circ$ y $z_4 = -3 + 4i$. Obtenga $z \in \mathbb{C}$ que satisface

$$z^{3/2} = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 z_2}.$$

Resultado: $z^{3/2} = 4\operatorname{cis}90^\circ$: $z = 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}60^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}180^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}300^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

1A.7 Errores frecuentes

- **Sumar en forma polar.** $2\operatorname{cis}30^\circ + 2\operatorname{cis}60^\circ$ no es $4\operatorname{cis}90^\circ$. Las sumas y restas siempre en binómica.
- **Equivocar el cuadrante.** La tangente solo da el ángulo de referencia: $-1 - i$ está en el tercer cuadrante, su argumento es 225°, no 45°.
- **Leer mal el ángulo del diagrama.** Un ángulo marcado desde el eje imaginario o desde el semieje real negativo hay que convertirlo: 45° desde el semieje imaginario positivo hacia la izquierda es 135°.
- **Olvidar raíces.** $w^n = c$ tiene n soluciones. Con una sola, el problema queda incompleto.
- **Dividir el argumento sin sumar vueltas.** Las raíces son $\frac{\Phi + 360^\circ k}{n}$, no solo $\frac{\Phi}{n}$.
- **Exponente racional al revés.** $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$ (tres valores), no $w = \sqrt{c^3}$.
- **Conjugar mal.** $\overline{r\operatorname{cis}\theta} = r\operatorname{cis}(-\theta)$: cambia el signo del argumento, no el del módulo.
- **Potencias de i.** $i^{17} = i$, no $-i$: el residuo de 17 entre 4 es 1.

1A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $z = a + bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$.
- $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$; $\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis}n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta + 360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^q}$.
- $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.
- $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

1A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe cada dato en una línea propia y redúcelo: potencias de i, vueltas completas, coeficientes negativos.
2. Sumas y restas en binómica; luego todo a polar con el argumento en grados.
3. Despeja la potencia de la incógnita y deja el lado conocido como $R\operatorname{cis}\Phi$.
4. Saca las n raíces y escríbelas en una lista $w_0, \ldots, w_{n-1}$, en la forma que pide el enunciado.
5. Si quedan 5 minutos, eleva w_0 a la n para comprobar.

Ruta de 2 semanas. Primera semana: Unidades 2 y 3 (vectores, recta y plano) y la Unidad 1A. Segunda semana: Unidad 1B, la identificación de cuádricas y los conos y cilindros (Unidad 4C), Unidades 4B y 4A y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

1. la lemniscata y las cónicas en forma polar (Unidad 4A), que no vienen en el programa 2026;
2. la cota de raíces y la regla de los signos de Descartes (Unidad 1B);
3. el intervalo paramétrico de las curvas con raíces (Unidad 4B).

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por lo mecánico: productos punto, cruz y mixto, ecuaciones de planos, identificación de cuádricas y las raíces de un complejo.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: qué vector es normal, qué punto está en la recta, qué parámetro se elimina, qué potencia de la incógnita se despeja.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.
5. Comprueba al final: sustituye los puntos en la ecuación del plano, revisa que dos vectores perpendiculares den producto punto 0, evalúa el polinomio en sus raíces y eleva una raíz de un complejo a la potencia del enunciado.

0.6 Repaso exprés

Cuatro herramientas que se usan en todo el cuaderno.

0.6.1 Determinantes de 2×2 y de 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla por el primer renglón con signos $+\ -\ +$. Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4 - 2) - 2(12 - 0) + 0 = -6 - 24 = -30.$$

Si dos renglones son iguales o proporcionales, el determinante vale 0; intercambiar dos renglones cambia el signo. El producto cruz (Unidad 2) es un determinante con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en el primer renglón, y el producto mixto es el determinante de las componentes de los tres vectores.

0.6.2 Completar cuadrados

Para $ax^2 + bx$ con $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

1. z aparece sin potencias: se despeja como en los reales, $z = (3+3i)^2\left(\frac{1}{9}\operatorname{cis}300^\circ\right)\operatorname{cis}30^\circ$.
2. $(3+3i)^2 = 9+18i+9i^2 = 18i = 18\operatorname{cis}90^\circ$.
3. $z = 18\cdot\frac{1}{9}\operatorname{cis}(90^\circ+300^\circ+30^\circ) = 2\operatorname{cis}420^\circ = 2\operatorname{cis}60^\circ$.
4. **Resultado:** $z = 2\operatorname{cis}60^\circ = 1+\sqrt{3}\,i$.

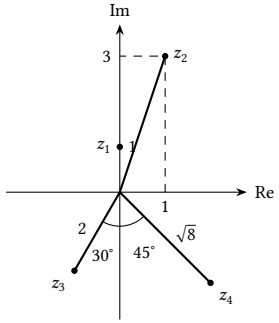
1A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1A**.

Ejercicio propuesto 1A.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Los números z_1, z_2, z_3, z_4 están en el diagrama: z_1 sobre el eje imaginario a altura 1; z_2 en el punto $(1,3)$; z_3 con módulo 2 a 30° del semieje imaginario negativo, hacia la izquierda; z_4 con módulo $\sqrt{8}$ a 45° del semieje imaginario negativo, hacia la derecha. Obtenga los números $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_3^3 = \frac{2z_2-z_4}{z_1}$ y grafíquelos.



Resultado: $z^4 = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$ (un cuadrado inscrito en la circunferencia unitaria).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 1A.6.2

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w\in\mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{3/2}z_1 = \frac{\sqrt{2}\,(z_2-\bar{z}_3)}{z_4\,i^{17}},$$

donde $z_1 = 1+i$, $z_2 = 3\operatorname{cis}180^\circ$, $z_3 = -3-6i$ y $z_4 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$.
Resultado: $w^{3/2} = 3$: $w = \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}0^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}120^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}240^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Unidad 1 · Parte A · Números complejos

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 1). «Identificar las operaciones elementales de los números complejos en sus formas binómica, trigonométrica y exponencial para aplicarlas en el cálculo de las raíces de polinomios apoyándose en software.»

Contenido de esta parte. 1.1 Formas de representación: binómica, trigonométrica y exponencial del número complejo. Suma, resta, multiplicación, división y raíces de números complejos. Uso de software para operar números complejos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema en cada uno de los 17 finales del Plan 2010 y de los 41 del Plan 2016 de Álgebra. En el Plan 2010, 8 de 17 dan datos en un diagrama de Argand y 4 de 17 piden raíces n-ésimas; casi todos terminan en una potencia o raíz de la incógnita.
- **Tiempo:** de 2.5 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1A.1 y ten a la mano la tabla de ángulos notables de la sección 0.6.3 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 1A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1A.5.4, 1A.5.5 y 1A.5.6 con cronómetro (15 min cada uno).
  4. Comprueba un resultado con el programa de la sección «Con la computadora».

1A.1 Conceptos y expresiones

Las tres formas. Un número complejo se escribe de tres maneras equivalentes:

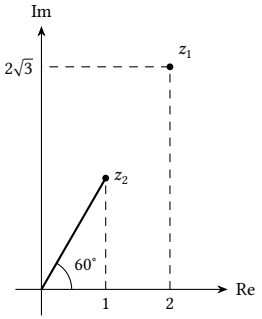
$$z = a+bi, \qquad z = r\operatorname{cis}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \qquad z = re^{i\theta}.$$

Son las formas binómica, polar y exponencial. $a = \operatorname{Re}z$ es la parte real, $b = \operatorname{Im}z$ la parte imaginaria, $r = |z| \geq 0$ el *módulo* y θ el *argumento*. En los exámenes el argumento de la forma polar se da en grados y el de la exponencial en radianes: $2\operatorname{cis}60^\circ = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Conversiones.

- Binómica a polar: $r = \sqrt{a^2+b^2}$; θ es el ángulo cuyo coseno es a/r y cuyo seno es b/r. Se ubica el cuadrante por los signos de a y b y se usa el ángulo de referencia, cuya tangente es $|b/a|$.
- Polar a binómica: $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$, con los valores exactos de la tabla de ángulos notables (sección 0.6.3).
- Polar a exponencial: el mismo r y θ en radianes: $180^\circ = \pi$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

donde z_1 y z_2 están en el diagrama: z_1 es el punto de coordenadas $(2, 2\sqrt{3})$; z_2 está sobre la recta que forma 60° con el semieje real positivo y su parte real es 1.



Resolución.

1. Lectura: $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$. Para $z_2 = 1 + bi$, $\tan 60^\circ = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \sqrt{3}$: $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.
2. $z_1 - z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 60^\circ$; $(z_1 - z_2)^3 = 8\operatorname{cis} 180^\circ$.
3. $z_3 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$. Despejar: $w^4 = 2\operatorname{cis} 60^\circ \cdot 8\operatorname{cis} 180^\circ = 16\operatorname{cis} 240^\circ$.
4. Raíces cuartas: $\sqrt[4]{16} = 2$, argumentos $\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} = 60^\circ + 90^\circ k$.
5. **Resultado:** $w_0 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$, $w_1 = 2\operatorname{cis} 150^\circ$, $w_2 = 2\operatorname{cis} 240^\circ$, $w_3 = 2\operatorname{cis} 330^\circ$: los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 2.

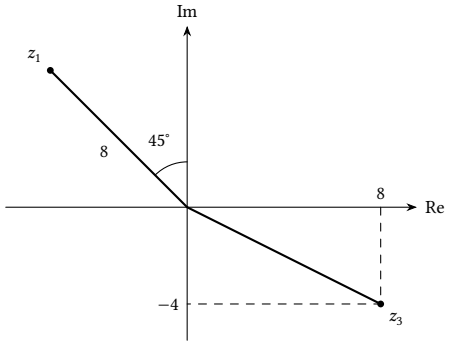
Ejercicio 1A.5.5 · Exponente racional con datos en el diagrama

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 2.

Obtenga el o los valores de $x \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$x^{3/2} z_3 = 4\bar{z}_1 z_2 + 8x^{3/2}, \qquad z_2 = e^{\frac{3}{2}\pi i},$$

donde z_1 tiene módulo 8 y forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, y z_3 es el punto $(8, -4)$.



1A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento (sección)
«Obtener los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen $w^3 \ldots = \ldots$», datos en varias formas	Una sola forma (1A.3.1), simplificar (1A.3.2), raíces (1A.3.3)
«z_1 y z_2 están en el diagrama de Argand»	Leer módulo y argumento de la figura (1A.3.1)
$w^{3/2}$, $z^{4/3}$, $x^{2/3}$ en la ecuación	Exponente racional (1A.3.3)
«Determinar $x, y \in \mathbb{R}$», «los valores de a y b»	Igualdad de complejos (1A.3.4)
$\bar{z}$, $\lvert z\rvert$ o «el módulo sea igual a…» con incógnita	Escribir $z = a + bi$ (1A.3.5)
«Una de las raíces cúbicas de z es…»	Repartir cada $360^\circ/n$ (1A.3.3)
«En forma polar», «en forma binómica»	Convertir el resultado al final (1A.1)

1A.3 Procedimientos

1A.3.1 Pasar los datos a una sola forma

1. Reduce las potencias de i con el residuo entre 4 y los argumentos a $[0^\circ, 360^\circ)$.
2. Si hay sumas o restas, hazlas en forma binómica: convierte a binómica los números que van a sumarse.
3. Todo lo que se multiplica, divide o eleva a potencia, pásalo a forma polar con el argumento en grados.
4. Diagrama de Argand: lee el módulo (la longitud) o las coordenadas, y convierte el ángulo marcado al argumento desde el semieje real positivo. Por ejemplo, un segmento de longitud 8 que forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, es $8\operatorname{cis} 135^\circ$.

1A.3.2 Simplificar el lado conocido

1. Calcula primero los paréntesis (sumas y restas en binómica) y pasa cada resultado a polar.
2. Multiplica módulos y suma argumentos; divide módulos y resta argumentos; con De Moivre, eleva el módulo y multiplica el argumento.
3. Reduce el argumento final a $[0^\circ, 360^\circ)$. El lado conocido debe quedar como $c = R\operatorname{cis}\Phi$.

1A.3.3 Despejar la potencia y sacar las raíces

1. Despeja la potencia de la incógnita: $w^n = R\operatorname{cis}\Phi$.
2. Si el exponente es racional, $w^{p/q} = c$, cambia a $w^p = c^q$ (eleva c a la q con De Moivre).
3. Raíces: $w_k = \sqrt[n]{R}\operatorname{cis}\frac{\Phi + 360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Basta con calcular $\frac{\Phi}{n}$ y sumar $\frac{360^\circ}{n}$ cada vez.
4. Si te dan una raíz w_0 y piden las demás, solo suma $\frac{360^\circ}{n}$ al argumento; el número original es w_0^n.
5. Escribe el resultado en la forma que piden. Si te piden graficarlo, dibuja la circunferencia de radio $\sqrt[n]{R}$ y los n puntos.

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Números complejos 9

Unidad 1 · Parte B · Polinomios 20

Unidad 2 · Álgebra vectorial 33

Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio 57

Unidad 4 · Parte A · Curvas polares 80

Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio 96

Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas 109

Apéndice A · Formulario 131

Apéndice B · Exámenes 134

Apéndice C · Fe de erratas 136

Apéndice D · Fuentes 137

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 139

2. Si los coeficientes son fracciones, multiplica por el común denominador; las raíces no cambian.
3. Haz la lista $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
4. Prueba primero los más pequeños (±1, ±2) con división sintética. Cada vez que uno sea raíz, sigue con el cociente.
5. Cuando el cociente sea de grado 2, usa la fórmula general: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

1B.3.3 Regla de los signos de Descartes

1. Si $a_0 = 0$, factoriza x^k y trabaja con el otro factor.
2. Cuenta los cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$ (los ceros se saltan): da las posibles raíces positivas.
3. Escribe $p(-x)$: cambian de signo los coeficientes de las potencias **impares**. Cuenta sus cambios: posibles raíces negativas.
4. Arma la tabla: positivas y negativas bajan de dos en dos; las complejas completan el grado y siempre son un número par. Por ejemplo, para un polinomio de grado 5 con 2 cambios en $p(x)$ y 1 en $p(-x)$:

	1^{a}	2^{a}
Positivas	2	0
Negativas	1	1
Complejas	2	4
Total	5	5

Descartes no da las raíces; solo dice cuáles candidatos racionales vale la pena probar: si no hay positivas posibles, no se prueban los candidatos positivos.

1B.3.4 Raíz compleja dada

1. Revisa los coeficientes.
2. **Si son reales:** el conjugado también es raíz. Divide dos veces seguidas (entre $x-\alpha$ y entre $x-\bar{\alpha}$), o divide una vez entre el factor cuadrático $x^2-2ax+(a^2+b^2)$. El cociente tiene dos grados menos.
3. **Si alguno es complejo:** divide solo entre $x-\alpha$. El cociente puede quedar con coeficientes reales; a partir de ahí, posibles raíces racionales o fórmula general.
4. En la división sintética con complejos, multiplica con $i^2=-1$ y suma partes reales con reales e imaginarias con imaginarias. El residuo debe salir exactamente 0; si no, hay un error de cuentas.

1B.3.5 Coeficientes desconocidos

Cada dato se convierte en una ecuación lineal para los coeficientes:

- «c es raíz», «$x-c$ es factor», «es divisible entre $x-c$», «la gráfica corta el eje en c»: $p(c)=0$.
- «la gráfica contiene al punto (a,b)»: $p(a)=b$. Si $a=0$, da directo el término independiente.
- «α es raíz de multiplicidad 2»: dos divisiones sintéticas seguidas entre $x-\alpha$, cada una con residuo 0 (equivale a $p(\alpha)=0$ y $p'(\alpha)=0$).

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto salía el tema en los exámenes de los planes anteriores, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.
9. Un recuadro **Con la computadora**: un programa corto en Python (con la biblioteca sympy) que resuelve o comprueba un problema de la unidad. El programa pide «apoyarse en software»; el código del recuadro corre tal cual está impreso.

Formato de cada resolución. Planteamiento ⟶ pasos numerados ⟶ **resultado** en negritas. En los problemas de «posición relativa de dos rectas» y de «identificación de superficies», cada condición se revisa por separado, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 propone una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. En consecuencia, tiene exactamente n raíces, contando multiplicidades, y se escribe como producto de n factores lineales:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

Multiplicidad. α es raíz de multiplicidad k si $(x - \alpha)^k$ divide a p, pero $(x - \alpha)^{k+1}$ no. En la división sintética: α da residuo cero k veces seguidas. En la gráfica de un polinomio real, una raíz de multiplicidad impar *cruza* el eje; una de multiplicidad par lo *toca* sin cruzarlo.

Raíces conjugadas. Si los coeficientes son **reales** y $a + bi$ es raíz, también lo es $a - bi$. Las dos juntas dan un factor cuadrático real:

$$(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Del mismo modo, si los coeficientes son **racionales** y $a + \sqrt{b}$ es raíz ($\sqrt{b}$ irracional), también lo es $a - \sqrt{b}$. Si algún coeficiente es complejo, el conjugado de una raíz **no** es necesariamente raíz.

Posibles raíces racionales. Si los coeficientes son enteros y $\frac{p}{q}$ (fracción reducida) es raíz, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n. La lista de candidatos es

$$\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}.$$

Regla de los signos de Descartes. Con p de coeficientes reales y $a_0 \neq 0$:

- el número de raíces reales **positivas** es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$, o menor que él en un número par;
- el número de raíces reales **negativas** es igual al número de cambios de signo de $p(-x)$, o menor en un número par.

Si $a_0 = 0$, primero se factoriza la potencia de x: $x = 0$ es raíz y Descartes se aplica al otro factor.

Cota de las raíces. Un número $c > 0$ es *cota superior* de las raíces reales si ninguna raíz real es mayor que c. Si al dividir sintéticamente p (con $a_n > 0$) entre $x - c$ todos los números del renglón de resultados son mayores o iguales que cero, c es cota superior. Una cota inferior de p es el negativo de una cota superior de $p(-x)$.

Relaciones entre raíces y coeficientes. Si $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (coeficiente principal 1), la suma de las raíces es $-a_{n-1}$ y su producto es $(-1)^n a_0$. Sirven para comprobar el resultado.

1B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«si se sabe que $\alpha = i$ (o $1 - 3i$) es raíz»	dividir entre $x - \alpha$ y seguir	1B.3.1, 1B.3.4

Unidad	Tema	Plan 2010	Plan 2016
1A	Números complejos	**17 de 17** (Álgebra)	**41 de 41** (Álgebra)
1B	Polinomios	**17 de 17** (Álgebra)	**41 de 41** (Álgebra)
2	Álgebra vectorial	**9 de 9** (11 problemas)	**38 de 39**
3	Recta y plano	**9 de 9** (13 problemas)	**39 de 39**
4A	Curvas polares	**9 de 9**	—
4B	Curvas en el espacio	**9 de 9**	1 de 39
4C	Superficies	**9 de 9** (16 problemas)	—

Observaciones:

- Todos los temas del programa 2026 salieron en todos los finales de la materia de legado que los tenía: **ninguna unidad se puede saltar**.
- Lo que más sale:
  - complejos: una ecuación con una potencia de la incógnita, datos en varias formas y a veces en el diagrama de Argand;
  - polinomios: todas las raíces a partir de una raíz o un factor dado;
  - vectores: área de un paralelogramo o un triángulo, componente escalar o vectorial, coordenadas de un punto en una figura y volumen con el producto mixto;
  - recta y plano: plano que contiene dos rectas o una recta y un punto, distancias, ángulos e intersecciones;
  - curvas polares: simetría, intersecciones con los ejes y bosquejo; curvas en el espacio: ecuaciones cartesianas e identificación; superficies: un cono o cilindro por generatrices y la identificación de tres o cuatro cuádricas.
- **Nuevo en el programa 2026, sin exámenes todavía:** las coordenadas polares como sistema de referencia (Unidad 2), las cuádricas en forma vectorial y paramétrica (Unidad 4C) y el uso de software. Cada uno tiene ejercicios propios en su unidad.
- **Fuera del programa 2026:** las secciones cónicas en el plano como tema propio, la lemniscata y las cónicas en forma polar (Unidad 4A, se pueden saltar) y las superficies regladas y de revolución por su nombre.

0.4 Orden de estudio

El cuaderno sigue el orden del programa, y conviene estudiarlo casi así: la Unidad 2 (vectores) se usa en todas las que siguen. Los complejos y los polinomios son independientes de la geometría, y las raíces n-ésimas de la Unidad 1A se usan en la 1B.

Semana	Ruta de 5 semanas
1	Unidad 0 (con el repaso exprés) y Unidad 2
2	Unidad 3
3	Unidades 1A y 1B
4	Unidades 4A, 4B y 4C
5	Simulacros (Apéndice B) y repaso del formulario (Apéndice A)

1A.10 Con la computadora

sympy escribe $e^{i\theta}$ como `exp(I*theta)`, con θ en radianes; `arg` da el argumento en $(-\pi, \pi]$ y `deg` lo pasa a grados. El programa saca las tres raíces cúbicas de cis 300°, las del ejemplo 1A.4, y comprueba que al elevarlas al cubo se recupera el dato. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import I, pi, exp, simplify, deg, arg, Abs

c = exp(5*pi*I/3)                  # cis 300°
# raíces cúbicas: módulo 1, ángulos (300° + 360°k)/3
w = [exp(I*(5*pi/3 + 2*pi*k)/3) for k in range(3)]
for r in w:
    assert simplify(r**3 - c) == 0     # w³ = cis 300°
    print(Abs(r), deg(arg(r)) % 360, r.evalf(4))
ang = sorted(deg(arg(r)) % 360 for r in w)
assert ang == [100, 220, 340]
```

Ejemplo: $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$; $4y^2 + 8y = 4\left[(y+1)^2 - 1\right] = 4(y+1)^2 - 4$. Es el paso que lleva una cónica de una curva en el espacio (Unidad 4B) o una cuádrica (Unidad 4C) a su forma ordinaria: se completa el cuadrado en cada variable por separado y lo que sobra se pasa al otro lado.

0.6.3 Valores exactos y ángulos notables

Seno, coseno y tangente de los ángulos notables, que se usan sin calculadora en todo el cuaderno:

θ	0°	30°	45°	60°	90°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Para otro cuadrante se usa el ángulo de referencia y el signo del cuadrante: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En el primer cuadrante todas son positivas; en el segundo, solo el seno; en el tercero, solo la tangente; en el cuarto, solo el coseno. En la forma polar de los complejos (Unidad 1A) y en las curvas polares (Unidad 4A) los ángulos van en grados.

0.6.4 Identidades para eliminar un parámetro

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \qquad \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \qquad \csc^2 t - \cot^2 t = 1,$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1, \qquad \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t.$$

Si $x = h + a\cos t$ y $y = k + b\operatorname{sen} t$, entonces $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (una elipse); con sec y tan sale una hipérbola (Unidades 4B y 4C).

0.7 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

Ejercicio propuesto 1A.6.3

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 2.

Determine los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^{4/3} = \frac{(i)^7\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) + \left(-\sqrt{3} + 2i\right)}{-\operatorname{cis} 270^\circ}.$$

Resultado: $z^{4/3} = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

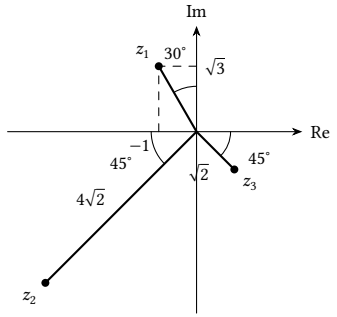
Ejercicio propuesto 1A.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.

Determine los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{2/3} = \frac{6z_1 z_3}{\left[z_2 - 2\bar{z}_3\right](e^{\pi i})},$$

donde, en el diagrama, z_1 es el punto $(-1, \sqrt{3})$ (a 30° del semieje imaginario positivo); z_2 tiene módulo $4\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real negativo; z_3 tiene módulo $\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real positivo.



Resultado: $w^{2/3} = 2\operatorname{cis} 30^\circ$: $w = 2\sqrt{2}\operatorname{cis} 45^\circ = 2 + 2i$ y $w = 2\sqrt{2}\operatorname{cis} 225^\circ = -2 - 2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 1A.6.5

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sean $z_1 = 20e^{\pi i}$, $z_2 = 5\operatorname{cis} 45^\circ$, $z_3 = 8 + 8\sqrt{3}\,i$ y $z_4 = 4\operatorname{cis} 135^\circ$. Obtenga, en forma polar, los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_1 = z_2 z_3 z_4$.

Resultado: $z^4 = 16\operatorname{cis} 60^\circ$: $z = 2\operatorname{cis} 15^\circ,\ 2\operatorname{cis} 105^\circ,\ 2\operatorname{cis} 195^\circ,\ 2\operatorname{cis} 285^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Valores que conviene saber de memoria.

$$1 = \operatorname{cis} 0^\circ, \quad i = \operatorname{cis} 90^\circ, \quad -1 = \operatorname{cis} 180^\circ, \quad -i = \operatorname{cis} 270^\circ,$$

$$1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis} 45^\circ, \qquad 1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 60^\circ, \qquad \sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis} 30^\circ.$$

Potencias de i. Se repiten cada cuatro: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Para i^n se usa el residuo de dividir n entre 4: $i^{17} = i^1 = i$, $i^{20} = i^0 = 1$, $i^7 = i^3 = -i$.

Ángulos fuera de $[0^\circ, 360^\circ)$. El argumento no es único: $r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$ para todo entero k. Se reduce restando vueltas completas: $\operatorname{cis} 1140^\circ = \operatorname{cis}(1140^\circ - 3\cdot 360^\circ) = \operatorname{cis} 60^\circ$; $e^{2\pi i} = 1$; $\operatorname{cis}(-60^\circ) = \operatorname{cis} 300^\circ$. Un coeficiente negativo se corrige sumando 180°: $-1\operatorname{cis} 180^\circ = 1\operatorname{cis} 0^\circ = 1$.

Conjugado y módulo. $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$. Propiedades:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2, \qquad z\bar{z} = |z|^2,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Operaciones. La suma y la resta se hacen en forma binómica. El producto, el cociente y las potencias, en forma polar o exponencial:

$$r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2), \qquad \frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2),$$

$$(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis} n\theta \quad \text{(De Moivre)}.$$

El cociente en forma binómica se hace multiplicando por el conjugado del denominador: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Raíces n-ésimas. Todo $z = r\operatorname{cis}\theta \neq 0$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\ \operatorname{cis}\frac{\theta + 360^\circ k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Todas tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ (raíz real positiva) y están repartidas cada $\frac{360^\circ}{n}$ sobre una circunferencia: forman un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Exponente racional. En los enunciados aparece $w^{p/q} = c$, que se entiende como $\left(\sqrt[q]{w}\right)^p = c$. Para despejar se eleva a la q y luego se sacan las raíces p-ésimas:

$$w^{p/q} = c \quad \Longrightarrow \quad w^p = c^q \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt[q]{c^q} \quad (p \text{ valores}).$$

Por ejemplo, $w^{2/3} = c$ da $w = \sqrt{c^3}$, dos valores; $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$, tres valores.

Igualdad de complejos. En forma binómica, $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$: una ecuación compleja con incógnitas *reales* da dos ecuaciones reales. En forma polar, $r_1\operatorname{cis}\theta_1 = r_2\operatorname{cis}\theta_2$ si y solo si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + 360^\circ k$.

Diagrama de Argand. Es el plano con la parte real en el eje horizontal y la imaginaria en el vertical. Un número se puede dar por sus coordenadas (a, b) o por su módulo (la longitud del segmento) y un ángulo. Ese ángulo puede estar medido desde cualquier semieje: hay que convertirlo al argumento medido desde el semieje real positivo, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Resolución.

1. Lectura: el argumento de z_1 es $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$: $z_1 = 8\operatorname{cis}135^\circ$ y $\bar{z}_1 = 8\operatorname{cis}225^\circ$. $z_3 = 8 - 4i$ y $z_2 = \operatorname{cis}270^\circ$.
2. Agrupar las x: $x^{3/2}(z_3 - 8) = 4\bar{z}_1 z_2$, con $z_3 - 8 = -4i = 4\operatorname{cis}270^\circ$.
3. $x^{3/2} = \frac{4\cdot 8\operatorname{cis}225^\circ\cdot\operatorname{cis}270^\circ}{4\operatorname{cis}270^\circ} = 8\operatorname{cis}225^\circ$.
4. Exponente racional: $x = \sqrt[3]{(8\operatorname{cis}225^\circ)^2} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis}450^\circ} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis}90^\circ}$.
5. Raíces cúbicas: módulo 4, argumentos $30^\circ + 120^\circ k$.
6. **Resultado:** $x_0 = 4\operatorname{cis}30^\circ$, $x_1 = 4\operatorname{cis}150^\circ$, $x_2 = 4\operatorname{cis}270^\circ = -4i$.

Ejercicio 1A.5.6 · Las otras raíces cúbicas

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3.

Si $z_1 = 2\operatorname{cis}60^\circ$ es una de las raíces cúbicas de z, determine las otras raíces cúbicas de z y expréselas en forma binómica y exponencial.

Resolución.

1. Las tres raíces tienen el mismo módulo y están separadas $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
2. Las otras dos: $2\operatorname{cis}180^\circ$ y $2\operatorname{cis}300^\circ$.
3. Binómica: $2\operatorname{cis}180^\circ = -2$; $2\operatorname{cis}300^\circ = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$.
4. Exponencial: $2e^{\pi i}$ y $2e^{\frac{5}{3}\pi i}$.
5. **Resultado:** $-2 = 2e^{\pi i}$ y $1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$. Además, $z = z_1^3 = 8\operatorname{cis}180^\circ = -8$.

Ejercicio 1A.5.7 · Igualdad con forma polar

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 3.

Determine los valores reales de a y de b para que

$$\frac{a + 4i}{2 + bi} = 2\operatorname{cis}225^\circ.$$

Resolución.

1. $2\operatorname{cis}225^\circ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.
2. Quitar el denominador:
$$a + 4i = (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)(2 + bi) = (-2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,b) + (-2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b)i.$$
3. Partes imaginarias: $4 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b \Rightarrow b = \frac{-4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2$.
4. Partes reales: $a = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}(-2\sqrt{2} - 2) = -2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$.
5. **Resultado:** $a = -4 - 4\sqrt{2}$, $b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Ejercicio 1A.5.8 · Ecuación lineal en z

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3.

Determine $z \in \mathbb{C}$ que resuelve la ecuación

$$2z = (3 + 3i)^2\left(\tfrac{1}{9}\operatorname{cis}300^\circ\right)\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right) + z.$$

Resolución.

1A.3.4 Igualdad de complejos con incógnitas reales

1. Pasa todo a forma binómica y desarrolla los productos (recuerda $i^2 = -1$).
2. Separa: parte real del lado izquierdo igual a parte real del derecho; lo mismo con la imaginaria.
3. Resuelve el sistema de dos ecuaciones reales.

1A.3.5 Ecuaciones con conjugado o con módulo

1. Si z aparece junto con $\bar{z}$ o con $|z|$, no sirve sacar raíces: escribe $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z|^2 = a^2 + b^2$.
2. Iguala partes reales e imaginarias y resuelve para a y b.
3. Si solo hay un módulo, usa $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ sin hacer la división.
4. Si z aparece en forma lineal (sin potencias), despéjala como en una ecuación real.

1A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíces cúbicas con datos en varias formas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{w^3\,(z_3 z_2)}{z_4} = z_1,$$

donde $z_1 = -1 \operatorname{cis} 180^\circ$, $z_2 = i^{20}$, $z_3 = 2 \operatorname{cis} 1140^\circ$ y $z_4 = 2e^{2\pi i}$.

Resolución.

1. Una sola forma (polar):
   - $z_1 = -1 \operatorname{cis} 180^\circ = -(-1) = 1 = \operatorname{cis} 0^\circ$;
   - $z_2 = i^{20} = i^0 = 1$, porque $20 = 4 \cdot 5$;
   - $z_3 = 2 \operatorname{cis}(1140^\circ - 1080^\circ) = 2 \operatorname{cis} 60^\circ$;
   - $z_4 = 2e^{2\pi i} = 2 \operatorname{cis} 360^\circ = 2$.
2. Despejar: $w^3 = \frac{z_1 z_4}{z_3 z_2} = \frac{(1)(2)}{2 \operatorname{cis} 60^\circ} = \operatorname{cis}(-60^\circ) = \operatorname{cis} 300^\circ$.
3. Raíces cúbicas: $w_k = \sqrt[3]{1} \operatorname{cis} \frac{300^\circ + 360^\circ k}{3} = \operatorname{cis}(100^\circ + 120^\circ k)$.
4. **Resultado:** $w_0 = \operatorname{cis} 100^\circ$, $w_1 = \operatorname{cis} 220^\circ$, $w_2 = \operatorname{cis} 340^\circ$.
5. Comprobación: $w_0^3 = \operatorname{cis} 300^\circ$, y $\operatorname{cis} 300^\circ \cdot 2 \operatorname{cis} 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = \operatorname{cis} 360^\circ = 1 = z_1$.

1A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1A.5.1 · Igualdad de complejos

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 2.

Determine los valores $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$(3 + 2i)(x + 4i) = (6 + 2yi)(1 + 2i).$$

Resolución.

1. Lado izquierdo: $3x + 12i + 2xi + 8i^2 = (3x - 8) + (2x + 12)i$.

2. Lado derecho: $6 + 12i + 2yi + 4yi^2 = (6 - 4y) + (12 + 2y)i$.
3. Partes reales: $3x - 8 = 6 - 4y$. Partes imaginarias: $2x + 12 = 12 + 2y$, es decir, $x = y$.
4. Sustituyendo: $3x - 8 = 6 - 4x \Rightarrow 7x = 14$.
5. **Resultado:** $x = 2$, $y = 2$.

Ejercicio 1A.5.2 · Módulo con un parámetro

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que el módulo del número complejo $z = \frac{x+i}{1+i}$ sea igual a $\sqrt{5}$.

Resolución.

1. No hace falta dividir: $|z| = \frac{|x+i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}$.
2. Condición: $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9$.
3. **Resultado:** $x = 3$ o $x = -3$.
4. Comprobación con $x = 3$: $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$, y $|2 - i| = \sqrt{5}$.

Ejercicio 1A.5.3 · Ecuación con conjugado y potencia

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^2 = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 + z_2},$$

donde $z_1 = \operatorname{cis} 45^\circ$, $z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$, $z_3 = 5e^{\pi i}$ y $z_4 = -5 + 2i$.

Resolución.

1. Numerador: $z_3 = 5 \operatorname{cis} 180^\circ = -5$ y $\bar{z}_4 = -5 - 2i$, así que $z_3 - \bar{z}_4 = 2i = 2 \operatorname{cis} 90^\circ$ y $(2i)^3 = 8 \operatorname{cis} 270^\circ$.
2. Denominador (suma en binómica): $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, y

   $$z_1 + z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i = 5 \operatorname{cis} 45^\circ,$$

   pues $r = \sqrt{2 \cdot \frac{50}{4}} = 5$ y las dos partes son iguales y positivas.
3. $z^2 = \frac{8 \operatorname{cis} 270^\circ}{5 \operatorname{cis} 45^\circ} = \frac{8}{5} \operatorname{cis} 225^\circ$.
4. Raíces cuadradas: $\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ y argumentos $\frac{225^\circ + 360^\circ k}{2}$, $k = 0, 1$.
5. **Resultado:** $z_0 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \operatorname{cis} 112.5^\circ$, $z_1 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \operatorname{cis} 292.5^\circ$.

Ejercicio 1A.5.4 · Datos en el diagrama de Argand: raíces cuartas

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 2.

Determine los valores de $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\frac{w^4}{z_3} = (z_1 - z_2)^3, \qquad z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i},$$