Resuelve el sistema, sustituye los valores en $p(x)$ y **comprueba** cada dato antes de buscar las raíces.

1B.3.6 Polinomio a partir de su gráfica

1. Lee las raíces reales: los cortes con el eje x.
2. Asigna multiplicidad: si la curva *cruza* el eje, 1 (o impar); si lo *toca* y regresa, 2 (o par). El polinomio de menor grado usa la menor multiplicidad posible.
3. Escribe $p(x) = a(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots$.
4. Calcula a con un punto de la gráfica que no sea raíz: $p(x_0) = y_0$.
5. Comprueba el signo de a con el comportamiento de los extremos: si la curva sube a la derecha, $a > 0$.

1B.3.7 Polinomios con potencias múltiplos de una

Si solo aparecen x^{2k}, x^k y constante ($x^8 + x^4 - 6$, $x^6 + 8x^3 + 12$):

1. Sustituye $u = x^k$: queda una cuadrática en u.
2. Resuelve para u (factorización o fórmula general).
3. Regresa: $x^k = u_1$ y $x^k = u_2$. Cada ecuación tiene k raíces, que son las raíces k-ésimas de u (Unidad 1A).

1B.3.8 Cota superior de las raíces

1. Con $a_n > 0$, divide sintéticamente entre $x - c$ para $c = 1, 2, 3, \ldots$
2. El primer c cuyo renglón de resultados (cociente y residuo) no tenga números negativos es una cota superior: ninguna raíz real es mayor que c.
3. Para la cota inferior, aplica lo mismo a $p(-x)$ y cambia el signo.

1B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíz imaginaria dada en un polinomio real

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 3.

Determine todas las raíces del polinomio

$$f(x) = 2x^6 - x^5 - 2x^2 + x,$$

si se sabe que $\alpha = i$ es una de ellas.

Resolución.

1. No hay término independiente: $f(x) = x\,(2x^5 - x^4 - 2x + 1)$. Primera raíz: $x = 0$.
2. Los coeficientes son reales, así que $\bar{\alpha} = -i$ también es raíz. Se divide $g(x) = 2x^5 - x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ entre $x - i$ y luego entre $x + i$:

	2	-1	0	0	-2	1
i		$2i$	$-2-i$	$1-2i$	$2+i$	-1
	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i	0

	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i
$-i$		$-2i$	i	$2i$	$-i$
	2	-1	-2	1	0

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Álgebra y Geometría Analítica

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.1.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Números complejos 9

Unidad 1 · Parte B · Polinomios 20

Unidad 2 · Álgebra vectorial 33

Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio 57

Unidad 4 · Parte A · Curvas polares 80

Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio 96

Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas 109

Apéndice A · Formulario 131

Apéndice B · Exámenes 134

Apéndice C · Fe de erratas 136

Apéndice D · Fuentes 137

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 139

2. Si los coeficientes son fracciones, multiplica por el común denominador; las raíces no cambian.
3. Haz la lista $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
4. Prueba primero los más pequeños (±1, ±2) con división sintética. Cada vez que uno sea raíz, sigue con el cociente.
5. Cuando el cociente sea de grado 2, usa la fórmula general: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

1B.3.3 Regla de los signos de Descartes

1. Si $a_0 = 0$, factoriza x^k y trabaja con el otro factor.
2. Cuenta los cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$ (los ceros se saltan): da las posibles raíces positivas.
3. Escribe $p(-x)$: cambian de signo los coeficientes de las potencias **impares**. Cuenta sus cambios: posibles raíces negativas.
4. Arma la tabla: positivas y negativas bajan de dos en dos; las complejas completan el grado y siempre son un número par. Por ejemplo, para un polinomio de grado 5 con 2 cambios en $p(x)$ y 1 en $p(-x)$:

	1^{a}	2^{a}
Positivas	2	0
Negativas	1	1
Complejas	2	4
Total	5	5

Descartes no da las raíces; solo dice cuáles candidatos racionales vale la pena probar: si no hay positivas posibles, no se prueban los candidatos positivos.

1B.3.4 Raíz compleja dada

1. Revisa los coeficientes.
2. **Si son reales:** el conjugado también es raíz. Divide dos veces seguidas (entre $x-\alpha$ y entre $x-\bar{\alpha}$), o divide una vez entre el factor cuadrático $x^2-2ax+(a^2+b^2)$. El cociente tiene dos grados menos.
3. **Si alguno es complejo:** divide solo entre $x-\alpha$. El cociente puede quedar con coeficientes reales; a partir de ahí, posibles raíces racionales o fórmula general.
4. En la división sintética con complejos, multiplica con $i^2=-1$ y suma partes reales con reales e imaginarias con imaginarias. El residuo debe salir exactamente 0; si no, hay un error de cuentas.

1B.3.5 Coeficientes desconocidos

Cada dato se convierte en una ecuación lineal para los coeficientes:

- «c es raíz», «$x-c$ es factor», «es divisible entre $x-c$», «la gráfica corta el eje en c»: $p(c)=0$.
- «la gráfica contiene al punto (a,b)»: $p(a)=b$. Si $a=0$, da directo el término independiente.
- «α es raíz de multiplicidad 2»: dos divisiones sintéticas seguidas entre $x-\alpha$, cada una con residuo 0 (equivale a $p(\alpha)=0$ y $p'(\alpha)=0$).

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«expresar como producto de factores lineales»	todas las raíces y a_n	1B.3.1
coeficientes con i y una raíz dada	dividir solo entre $x-\alpha$, sin conjugado	1B.3.4
«determinar A y B si 1 y -1 son raíces», «si contiene al punto», «si es divisible entre $x-2$»	ecuaciones para los coeficientes	1B.3.5
«raíz de multiplicidad 2»	dos divisiones con residuo cero	1B.3.5
«regla de los signos de Descartes», «posibilidades en que pueden presentarse las raíces»	tabla de posibilidades	1B.3.3
«posibles raíces racionales»	lista $\pm p/q$	1B.3.2
una gráfica y «el polinomio de menor grado»	raíces, multiplicidades y a_n	1B.3.6
x^8+x^4-6, x^6+8x^3+12 (solo potencias múltiplos de una)	cambio de variable $u=x^k$	1B.3.7
«una cota superior de las raíces»	división sintética con resultados ≥ 0	1B.3.8
$f(x)=p(x)\,q(x)$	raíces de cada factor por separado	1B.3.2

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 División sintética

Para dividir $p(x)$ entre $x-c$:

1. Escribe en un renglón **todos** los coeficientes, de la potencia mayor a la menor, con cero en las potencias que faltan. Pon c a la izquierda.
2. Baja el primer coeficiente al renglón de resultados.
3. Multiplica ese resultado por c, escríbelo bajo el siguiente coeficiente y suma. Repite hasta el final.
4. El último número es el residuo, $p(c)$. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos.
5. Si el residuo es 0, c es raíz: sigue trabajando con el cociente (polinomio *deflactado*).

Por ejemplo, $x^3-6x^2+11x-6$ entre $x-1$:

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6).$$

1B.3.2 Posibles raíces racionales y raíces reales

1. Si hay potencias de x en todos los términos, factoriza x^k: $x=0$ es raíz de multiplicidad k.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Álgebra y Geometría Analítica** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en el final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Es la asignatura de primer semestre del **Plan 2026**, el que cursa la Generación 2027 y las siguientes. Junta temas que en los planes anteriores estaban en dos materias: los números complejos y los polinomios de *Álgebra*, y el álgebra vectorial, la recta y el plano, las curvas y las superficies de *Geometría Analítica*. Si tu plan es el 2010 o el 2016, este no es tu cuaderno: usa *Curso de Emergencia, Álgebra* y *Curso de Emergencia, Geometría Analítica*.

El cuaderno sigue los cuatro temas del programa 2026. Los temas 1 y 4 se dividen en partes, una por subtema:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y cómo estudiar.
1. Parte A: números complejos. Parte B: polinomios.
2. Álgebra vectorial (con los sistemas de referencia cartesiano y polar).
3. La recta y el plano en el espacio.
4. Parte A: curvas polares. Parte B: curvas en el espacio. Parte C: superficies cuádricas.

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa 2026). «Analizar los conceptos fundamentales del álgebra y de la geometría analítica para la resolución de problemas elementales de la Ingeniería, apoyándose en el uso de software.»

De dónde salen los ejercicios.

- Todavía no hay exámenes del Plan 2026. Los temas que no cambiaron se estudian con los exámenes finales de los planes 2010 y 2016: los de *Álgebra* (complejos y polinomios), los de *Geometría Analítica* y los problemas de geometría de *Cálculo y Geometría Analítica*. Son los mismos ejercicios de los cuadernos de esas materias.
- Lo que es nuevo en el programa 2026 (las coordenadas polares como sistema de referencia, las cuádricas en forma vectorial y paramétrica y el uso de software) va con ejercicios propios, marcados como tales.
- Ningún examen tiene resolución publicada. **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional.
- Cada ejercicio de examen indica el examen del que se adaptó; los de Cálculo y Geometría Analítica dicen también la asignatura. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.

Sin calculadora. Los exámenes de los planes anteriores no permiten dispositivos electrónicos: las resoluciones usan valores exactos (fracciones, radicales, ángulos notables). Un ángulo que no es notable se deja indicado, como $\arccos\frac{2}{3}$. El software es para estudiar y comprobar, no para el examen.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto salía el tema en los exámenes de los planes anteriores, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.
9. Un recuadro **Con la computadora**: un programa corto en Python (con la biblioteca sympy) que resuelve o comprueba un problema de la unidad. El programa pide «apoyarse en software»; el código del recuadro corre tal cual está impreso.

Formato de cada resolución. Planteamiento ⟶ pasos numerados ⟶ **resultado** en negritas. En los problemas de «posición relativa de dos rectas» y de «identificación de superficies», cada condición se revisa por separado, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 propone una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. En consecuencia, tiene exactamente n raíces, contando multiplicidades, y se escribe como producto de n factores lineales:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

Multiplicidad. α es raíz de multiplicidad k si $(x - \alpha)^k$ divide a p, pero $(x - \alpha)^{k+1}$ no. En la división sintética: α da residuo cero k veces seguidas. En la gráfica de un polinomio real, una raíz de multiplicidad impar *cruza* el eje; una de multiplicidad par lo *toca* sin cruzarlo.

Raíces conjugadas. Si los coeficientes son **reales** y $a + bi$ es raíz, también lo es $a - bi$. Las dos juntas dan un factor cuadrático real:

$$(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Del mismo modo, si los coeficientes son **racionales** y $a + \sqrt{b}$ es raíz ($\sqrt{b}$ irracional), también lo es $a - \sqrt{b}$. Si algún coeficiente es complejo, el conjugado de una raíz **no** es necesariamente raíz.

Posibles raíces racionales. Si los coeficientes son enteros y $\frac{p}{q}$ (fracción reducida) es raíz, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n. La lista de candidatos es

$$\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}.$$

Regla de los signos de Descartes. Con p de coeficientes reales y $a_0 \neq 0$:

- el número de raíces reales **positivas** es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$, o menor que él en un número par;
- el número de raíces reales **negativas** es igual al número de cambios de signo de $p(-x)$, o menor en un número par.

Si $a_0 = 0$, primero se factoriza la potencia de x: $x = 0$ es raíz y Descartes se aplica al otro factor.

Cota de las raíces. Un número $c > 0$ es *cota superior* de las raíces reales si ninguna raíz real es mayor que c. Si al dividir sintéticamente p (con $a_n > 0$) entre $x - c$ todos los números del renglón de resultados son mayores o iguales que cero, c es cota superior. Una cota inferior de p es el negativo de una cota superior de $p(-x)$.

Relaciones entre raíces y coeficientes. Si $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (coeficiente principal 1), la suma de las raíces es $-a_{n-1}$ y su producto es $(-1)^n a_0$. Sirven para comprobar el resultado.

1B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«si se sabe que $\alpha = i$ (o $1 - 3i$) es raíz»	dividir entre $x - \alpha$ y seguir	1B.3.1, 1B.3.4

Unidad 1 · Parte B · Polinomios

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 1). «Identificar las operaciones elementales de los números complejos en sus formas binómica, trigonométrica y exponencial para aplicarlas en el cálculo de las raíces de polinomios apoyándose en software.»

Contenido de esta parte. 1.2 Teorema Fundamental del Álgebra y raíces de polinomios. Cálculo de raíces de polinomios empleando software.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema completo en los 17 finales del Plan 2010 y en los 41 del Plan 2016 de Álgebra. En el Plan 2010: raíz compleja dada, 7 de 17; coeficientes desconocidos a partir de raíces o puntos, 2; polinomio a partir de su gráfica, 2; regla de Descartes, 2; producto de dos polinomios, 2; polinomio bicuadrado con cota de raíces, 2.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1B.1 y el procedimiento 1B.3.1 (división sintética, 20 min).
  2. Sigue el ejemplo 1B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1B.5.3, 1B.5.6 y 1B.5.7 con cronómetro (15 min cada uno).
  4. Si vas con poco tiempo, salta la cota de raíces (1B.3.8) y la regla de los signos de Descartes (1B.3.3).

1B.1 Conceptos y expresiones

Polinomio. Un polinomio de grado n en x es

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

con coeficientes reales o complejos. a_n es el *coeficiente principal* y a_0 el *término independiente*. Dos polinomios son iguales si tienen los mismos coeficientes en cada potencia.

Raíz. El número $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz (o cero) de p si $p(\alpha) = 0$. En la gráfica de un polinomio con coeficientes reales, las raíces reales son los puntos donde la curva toca o corta el eje x.

Algoritmo de la división. Para $p(x)$ y $d(x) \neq 0$ existen polinomios únicos $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (residuo) tales que

$$p(x) = d(x)\,q(x) + r(x), \qquad r = 0 \text{ o } \operatorname{grado} r < \operatorname{grado} d.$$

p es *divisible* entre d si $r(x) = 0$.

Teorema del residuo. El residuo de dividir $p(x)$ entre $x - c$ es $p(c)$.

Teorema del factor. $x - c$ es factor de $p(x)$ si y solo si $p(c) = 0$.

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 30 minutos, más el repaso exprés de la sección 0.6 si hace falta. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué trae el examen, qué unidades pesan más y en qué orden estudiarlas.
- **Plan 2026:** todavía no hay exámenes de esta asignatura. Todo el cuaderno está **basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron**.

0.1 Tu plan y tu cuaderno

- **Plan 2026** (Generación 2027 y posteriores): la asignatura de primer semestre es *Álgebra y Geometría Analítica*. Es este cuaderno.
- **Planes 2010 y 2016** (generaciones anteriores): tus materias son *Álgebra* y *Geometría Analítica* (o *Cálculo y Geometría Analítica*), con sus propios cuadernos.
- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera y el nombre de la materia que debes. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

0.2 Cómo es el examen

El programa 2026 dice que la evaluación final es un **examen final**. Mientras no haya exámenes publicados del Plan 2026, lo más parecido son los finales de las materias anteriores con los mismos temas: los de *Álgebra* (17 del Plan 2010 y 41 del Plan 2016), los de *Geometría Analítica* (9 del Plan 2010) y los problemas de geometría de *Cálculo y Geometría Analítica* (39 del Plan 2016). En ellos:

- **Duración:** 2 horas.
- **Problemas:** 6 u 8, de 10 a 20 puntos cada uno, que suman 100; cada problema es de un solo tema y suele tener dos o tres incisos.
- **Material:** ninguno: «No se permite el uso de algún dispositivo electrónico». Los resultados se dejan **exactos**: $\sqrt{14}$, $\frac{3}{\sqrt{26}}$, $2\operatorname{cis}135°$, $\operatorname{ang}\cos\frac{2}{3}$. No hace falta sacar decimales.
- **Plantilla fija:** los temas salen siempre en el orden del programa. Es razonable esperar, en el final 2026, un problema de complejos, uno de polinomios, uno o dos de vectores, uno o dos de recta y plano, y uno o dos de curvas y superficies.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en los finales de los planes anteriores (las versiones de un mismo examen cuentan por separado). Es una guía de qué se pregunta y cómo, no una predicción del examen 2026.

Unidad	Tema	Plan 2010	Plan 2016
1A	Números complejos	**17 de 17** (Álgebra)	**41 de 41** (Álgebra)
1B	Polinomios	**17 de 17** (Álgebra)	**41 de 41** (Álgebra)
2	Álgebra vectorial	**9 de 9** (11 problemas)	**38 de 39**
3	Recta y plano	**9 de 9** (13 problemas)	**39 de 39**
4A	Curvas polares	**9 de 9**	—
4B	Curvas en el espacio	**9 de 9**	1 de 39
4C	Superficies	**9 de 9** (16 problemas)	—

Observaciones:

- Todos los temas del programa 2026 salieron en todos los finales de la materia de legado que los tenía: **ninguna unidad se puede saltar**.
- Lo que más sale:
  - complejos: una ecuación con una potencia de la incógnita, datos en varias formas y a veces en el diagrama de Argand;
  - polinomios: todas las raíces a partir de una raíz o un factor dado;
  - vectores: área de un paralelogramo o un triángulo, componente escalar o vectorial, coordenadas de un punto en una figura y volumen con el producto mixto;
  - recta y plano: plano que contiene dos rectas o una recta y un punto, distancias, ángulos e intersecciones;
  - curvas polares: simetría, intersecciones con los ejes y bosquejo; curvas en el espacio: ecuaciones cartesianas e identificación; superficies: un cono o cilindro por generatrices y la identificación de tres o cuatro cuádricas.
- **Nuevo en el programa 2026, sin exámenes todavía:** las coordenadas polares como sistema de referencia (Unidad 2), las cuádricas en forma vectorial y paramétrica (Unidad 4C) y el uso de software. Cada uno tiene ejercicios propios en su unidad.
- **Fuera del programa 2026:** las secciones cónicas en el plano como tema propio, la lemniscata y las cónicas en forma polar (Unidad 4A, se pueden saltar) y las superficies regladas y de revolución por su nombre.

0.4 Orden de estudio

El cuaderno sigue el orden del programa, y conviene estudiarlo casi así: la Unidad 2 (vectores) se usa en todas las que siguen. Los complejos y los polinomios son independientes de la geometría, y las raíces n-ésimas de la Unidad 1A se usan en la 1B.

Semana	Ruta de 5 semanas
1	Unidad 0 (con el repaso exprés) y Unidad 2
2	Unidad 3
3	Unidades 1A y 1B
4	Unidades 4A, 4B y 4C
5	Simulacros (Apéndice B) y repaso del formulario (Apéndice A)

1A.10 Con la computadora

sympy escribe $e^{i\theta}$ como `exp(I*theta)`, con θ en radianes; `arg` da el argumento en $(-\pi, \pi]$ y `deg` lo pasa a grados. El programa saca las tres raíces cúbicas de cis 300°, las del ejemplo 1A.4, y comprueba que al elevarlas al cubo se recupera el dato. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import I, pi, exp, simplify, deg, arg, Abs

c = exp(5*pi*I/3)                  # cis 300°
# raíces cúbicas: módulo 1, ángulos (300° + 360°k)/3
w = [exp(I*(5*pi/3 + 2*pi*k)/3) for k in range(3)]
for r in w:
    assert simplify(r**3 - c) == 0     # w³ = cis 300°
    print(Abs(r), deg(arg(r)) % 360, r.evalf(4))
ang = sorted(deg(arg(r)) % 360 for r in w)
assert ang == [100, 220, 340]
```

Ejercicio propuesto 1A.6.6

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3.

Sean $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$, $z_2 = 8e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_3 = 3\operatorname{cis}180^\circ$ y $z_4 = -3 + 4i$. Obtenga $z \in \mathbb{C}$ que satisface

$$z^{3/2} = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 z_2}.$$

Resultado: $z^{3/2} = 4\operatorname{cis}90^\circ$: $z = 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}60^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}180^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}300^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

1A.7 Errores frecuentes

- **Sumar en forma polar.** $2\operatorname{cis}30^\circ + 2\operatorname{cis}60^\circ$ no es $4\operatorname{cis}90^\circ$. Las sumas y restas siempre en binómica.
- **Equivocar el cuadrante.** La tangente solo da el ángulo de referencia: $-1 - i$ está en el tercer cuadrante, su argumento es 225°, no 45°.
- **Leer mal el ángulo del diagrama.** Un ángulo marcado desde el eje imaginario o desde el semieje real negativo hay que convertirlo: 45° desde el semieje imaginario positivo hacia la izquierda es 135°.
- **Olvidar raíces.** $w^n = c$ tiene n soluciones. Con una sola, el problema queda incompleto.
- **Dividir el argumento sin sumar vueltas.** Las raíces son $\frac{\Phi + 360^\circ k}{n}$, no solo $\frac{\Phi}{n}$.
- **Exponente racional al revés.** $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$ (tres valores), no $w = \sqrt{c^3}$.
- **Conjugar mal.** $\overline{r\operatorname{cis}\theta} = r\operatorname{cis}(-\theta)$: cambia el signo del argumento, no el del módulo.
- **Potencias de i.** $i^{17} = i$, no $-i$: el residuo de 17 entre 4 es 1.

1A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $z = a + bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$.
- $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$; $\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis}n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta + 360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^q}$.
- $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.
- $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

1A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe cada dato en una línea propia y redúcelo: potencias de i, vueltas completas, coeficientes negativos.
2. Sumas y restas en binómica; luego todo a polar con el argumento en grados.
3. Despeja la potencia de la incógnita y deja el lado conocido como $R\operatorname{cis}\Phi$.
4. Saca las n raíces y escríbelas en una lista $w_0, \ldots, w_{n-1}$, en la forma que pide el enunciado.
5. Si quedan 5 minutos, eleva w_0 a la n para comprobar.

Ruta de 2 semanas. Primera semana: Unidades 2 y 3 (vectores, recta y plano) y la Unidad 1A. Segunda semana: Unidad 1B, la identificación de cuádricas y los conos y cilindros (Unidad 4C), Unidades 4B y 4A y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

1. la lemniscata y las cónicas en forma polar (Unidad 4A), que no vienen en el programa 2026;
2. la cota de raíces y la regla de los signos de Descartes (Unidad 1B);
3. el intervalo paramétrico de las curvas con raíces (Unidad 4B).

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por lo mecánico: productos punto, cruz y mixto, ecuaciones de planos, identificación de cuádricas y las raíces de un complejo.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: qué vector es normal, qué punto está en la recta, qué parámetro se elimina, qué potencia de la incógnita se despeja.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.
5. Comprueba al final: sustituye los puntos en la ecuación del plano, revisa que dos vectores perpendiculares den producto punto 0, evalúa el polinomio en sus raíces y eleva una raíz de un complejo a la potencia del enunciado.

0.6 Repaso exprés

Cuatro herramientas que se usan en todo el cuaderno.

0.6.1 Determinantes de 2×2 y de 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla por el primer renglón con signos $+\ -\ +$. Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4 - 2) - 2(12 - 0) + 0 = -6 - 24 = -30.$$

Si dos renglones son iguales o proporcionales, el determinante vale 0; intercambiar dos renglones cambia el signo. El producto cruz (Unidad 2) es un determinante con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en el primer renglón, y el producto mixto es el determinante de las componentes de los tres vectores.

0.6.2 Completar cuadrados

Para $ax^2 + bx$ con $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

Ejemplo: $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$; $4y^2 + 8y = 4\left[(y+1)^2 - 1\right] = 4(y+1)^2 - 4$. Es el paso que lleva una cónica de una curva en el espacio (Unidad 4B) o una cuádrica (Unidad 4C) a su forma ordinaria: se completa el cuadrado en cada variable por separado y lo que sobra se pasa al otro lado.

0.6.3 Valores exactos y ángulos notables

Seno, coseno y tangente de los ángulos notables, que se usan sin calculadora en todo el cuaderno:

θ	0°	30°	45°	60°	90°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Para otro cuadrante se usa el ángulo de referencia y el signo del cuadrante: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En el primer cuadrante todas son positivas; en el segundo, solo el seno; en el tercero, solo la tangente; en el cuarto, solo el coseno. En la forma polar de los complejos (Unidad 1A) y en las curvas polares (Unidad 4A) los ángulos van en grados.

0.6.4 Identidades para eliminar un parámetro

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \qquad \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \qquad \csc^2 t - \cot^2 t = 1,$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1, \qquad \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t.$$

Si $x = h + a\cos t$ y $y = k + b\operatorname{sen} t$, entonces $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (una elipse); con sec y tan sale una hipérbola (Unidades 4B y 4C).

0.7 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.

Ejercicio propuesto 1A.6.3

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 2.

Determine los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^{4/3} = \frac{(i)^7\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) + \left(-\sqrt{3} + 2i\right)}{-\operatorname{cis} 270^\circ}.$$

Resultado: $z^{4/3} = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

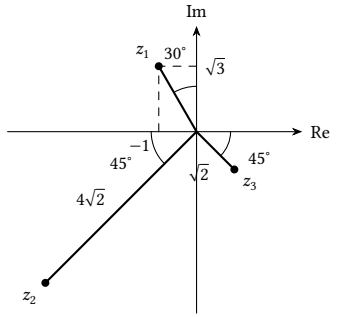
Ejercicio propuesto 1A.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.

Determine los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{2/3} = \frac{6z_1 z_3}{\left[z_2 - 2\bar{z}_3\right](e^{\pi i})},$$

donde, en el diagrama, z_1 es el punto $(-1, \sqrt{3})$ (a 30° del semieje imaginario positivo); z_2 tiene módulo $4\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real negativo; z_3 tiene módulo $\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real positivo.



Resultado: $w^{2/3} = 2\operatorname{cis} 30^\circ$: $w = 2\sqrt{2}\operatorname{cis} 45^\circ = 2 + 2i$ y $w = 2\sqrt{2}\operatorname{cis} 225^\circ = -2 - 2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 1A.6.5

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sean $z_1 = 20e^{\pi i}$, $z_2 = 5\operatorname{cis} 45^\circ$, $z_3 = 8 + 8\sqrt{3}\,i$ y $z_4 = 4\operatorname{cis} 135^\circ$. Obtenga, en forma polar, los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_1 = z_2 z_3 z_4$.

Resultado: $z^4 = 16\operatorname{cis} 60^\circ$: $z = 2\operatorname{cis} 15^\circ,\ 2\operatorname{cis} 105^\circ,\ 2\operatorname{cis} 195^\circ,\ 2\operatorname{cis} 285^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

1. z aparece sin potencias: se despeja como en los reales, $z = (3+3i)^2\left(\frac{1}{9}\operatorname{cis}300^\circ\right)\operatorname{cis}30^\circ$.
2. $(3+3i)^2 = 9+18i+9i^2 = 18i = 18\operatorname{cis}90^\circ$.
3. $z = 18\cdot\frac{1}{9}\operatorname{cis}(90^\circ+300^\circ+30^\circ) = 2\operatorname{cis}420^\circ = 2\operatorname{cis}60^\circ$.
4. **Resultado:** $z = 2\operatorname{cis}60^\circ = 1+\sqrt{3}\,i$.

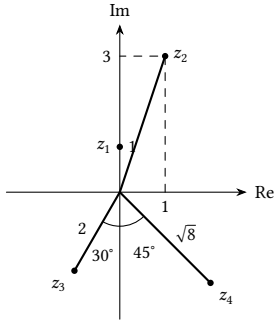
1A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1A**.

Ejercicio propuesto 1A.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Los números z_1, z_2, z_3, z_4 están en el diagrama: z_1 sobre el eje imaginario a altura 1; z_2 en el punto $(1,3)$; z_3 con módulo 2 a 30° del semieje imaginario negativo, hacia la izquierda; z_4 con módulo $\sqrt{8}$ a 45° del semieje imaginario negativo, hacia la derecha. Obtenga los números $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_3^3 = \frac{2z_2-z_4}{z_1}$ y grafíquelos.



Resultado: $z^4 = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$ (un cuadrado inscrito en la circunferencia unitaria).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 1A.6.2

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w\in\mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{3/2}z_1 = \frac{\sqrt{2}\,(z_2-\bar{z}_3)}{z_4\,i^{17}},$$

donde $z_1 = 1+i$, $z_2 = 3\operatorname{cis}180^\circ$, $z_3 = -3-6i$ y $z_4 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$.
Resultado: $w^{3/2} = 3$: $w = \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}0^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}120^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}240^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Unidad 1 · Parte A · Números complejos

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 1). «Identificar las operaciones elementales de los números complejos en sus formas binómica, trigonométrica y exponencial para aplicarlas en el cálculo de las raíces de polinomios apoyándose en software.»

Contenido de esta parte. 1.1 Formas de representación: binómica, trigonométrica y exponencial del número complejo. Suma, resta, multiplicación, división y raíces de números complejos. Uso de software para operar números complejos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema en cada uno de los 17 finales del Plan 2010 y de los 41 del Plan 2016 de Álgebra. En el Plan 2010, 8 de 17 dan datos en un diagrama de Argand y 4 de 17 piden raíces n-ésimas; casi todos terminan en una potencia o raíz de la incógnita.
- **Tiempo:** de 2.5 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1A.1 y ten a la mano la tabla de ángulos notables de la sección 0.6.3 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 1A.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1A.5.4, 1A.5.5 y 1A.5.6 con cronómetro (15 min cada uno).
  4. Comprueba un resultado con el programa de la sección «Con la computadora».

1A.1 Conceptos y expresiones

Las tres formas. Un número complejo se escribe de tres maneras equivalentes:

$$z = a+bi, \qquad z = r\operatorname{cis}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \qquad z = re^{i\theta}.$$

Son las formas binómica, polar y exponencial. $a = \operatorname{Re}z$ es la parte real, $b = \operatorname{Im}z$ la parte imaginaria, $r = |z| \geq 0$ el *módulo* y θ el *argumento*. En los exámenes el argumento de la forma polar se da en grados y el de la exponencial en radianes: $2\operatorname{cis}60^\circ = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Conversiones.

- Binómica a polar: $r = \sqrt{a^2+b^2}$; θ es el ángulo cuyo coseno es a/r y cuyo seno es b/r. Se ubica el cuadrante por los signos de a y b y se usa el ángulo de referencia, cuya tangente es $|b/a|$.
- Polar a binómica: $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$, con los valores exactos de la tabla de ángulos notables (sección 0.6.3).
- Polar a exponencial: el mismo r y θ en radianes: $180^\circ = \pi$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

Valores que conviene saber de memoria.

$$1 = \operatorname{cis} 0^\circ, \quad i = \operatorname{cis} 90^\circ, \quad -1 = \operatorname{cis} 180^\circ, \quad -i = \operatorname{cis} 270^\circ,$$

$$1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis} 45^\circ, \qquad 1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 60^\circ, \qquad \sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis} 30^\circ.$$

Potencias de i. Se repiten cada cuatro: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Para i^n se usa el residuo de dividir n entre 4: $i^{17} = i^1 = i$, $i^{20} = i^0 = 1$, $i^7 = i^3 = -i$.

Ángulos fuera de $[0^\circ, 360^\circ)$. El argumento no es único: $r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$ para todo entero k. Se reduce restando vueltas completas: $\operatorname{cis} 1140^\circ = \operatorname{cis}(1140^\circ - 3\cdot 360^\circ) = \operatorname{cis} 60^\circ$; $e^{2\pi i} = 1$; $\operatorname{cis}(-60^\circ) = \operatorname{cis} 300^\circ$. Un coeficiente negativo se corrige sumando 180°: $-1\operatorname{cis} 180^\circ = 1\operatorname{cis} 0^\circ = 1$.

Conjugado y módulo. $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$. Propiedades:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2, \qquad z\bar{z} = |z|^2,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Operaciones. La suma y la resta se hacen en forma binómica. El producto, el cociente y las potencias, en forma polar o exponencial:

$$r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2), \qquad \frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2),$$

$$(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis} n\theta \quad \text{(De Moivre)}.$$

El cociente en forma binómica se hace multiplicando por el conjugado del denominador: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Raíces n-ésimas. Todo $z = r\operatorname{cis}\theta \neq 0$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\ \operatorname{cis}\frac{\theta + 360^\circ k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Todas tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ (raíz real positiva) y están repartidas cada $\frac{360^\circ}{n}$ sobre una circunferencia: forman un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Exponente racional. En los enunciados aparece $w^{p/q} = c$, que se entiende como $\left(\sqrt[q]{w}\right)^p = c$. Para despejar se eleva a la q y luego se sacan las raíces p-ésimas:

$$w^{p/q} = c \quad \Longrightarrow \quad w^p = c^q \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt[q]{c^q} \quad (p \text{ valores}).$$

Por ejemplo, $w^{2/3} = c$ da $w = \sqrt{c^3}$, dos valores; $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$, tres valores.

Igualdad de complejos. En forma binómica, $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$: una ecuación compleja con incógnitas *reales* da dos ecuaciones reales. En forma polar, $r_1\operatorname{cis}\theta_1 = r_2\operatorname{cis}\theta_2$ si y solo si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + 360^\circ k$.

Diagrama de Argand. Es el plano con la parte real en el eje horizontal y la imaginaria en el vertical. Un número se puede dar por sus coordenadas (a, b) o por su módulo (la longitud del segmento) y un ángulo. Ese ángulo puede estar medido desde cualquier semieje: hay que convertirlo al argumento medido desde el semieje real positivo, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Resolución.

1. Lectura: el argumento de z_1 es $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$: $z_1 = 8\operatorname{cis}135^\circ$ y $\bar{z}_1 = 8\operatorname{cis}225^\circ$. $z_3 = 8 - 4i$ y $z_2 = \operatorname{cis}270^\circ$.
2. Agrupar las x: $x^{3/2}(z_3 - 8) = 4\bar{z}_1 z_2$, con $z_3 - 8 = -4i = 4\operatorname{cis}270^\circ$.
3. $x^{3/2} = \frac{4\cdot 8\operatorname{cis}225^\circ\cdot\operatorname{cis}270^\circ}{4\operatorname{cis}270^\circ} = 8\operatorname{cis}225^\circ$.
4. Exponente racional: $x = \sqrt[3]{(8\operatorname{cis}225^\circ)^2} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis}450^\circ} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis}90^\circ}$.
5. Raíces cúbicas: módulo 4, argumentos $30^\circ + 120^\circ k$.
6. **Resultado:** $x_0 = 4\operatorname{cis}30^\circ$, $x_1 = 4\operatorname{cis}150^\circ$, $x_2 = 4\operatorname{cis}270^\circ = -4i$.

Ejercicio 1A.5.6 · Las otras raíces cúbicas

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3.

Si $z_1 = 2\operatorname{cis}60^\circ$ es una de las raíces cúbicas de z, determine las otras raíces cúbicas de z y expréselas en forma binómica y exponencial.

Resolución.

1. Las tres raíces tienen el mismo módulo y están separadas $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
2. Las otras dos: $2\operatorname{cis}180^\circ$ y $2\operatorname{cis}300^\circ$.
3. Binómica: $2\operatorname{cis}180^\circ = -2$; $2\operatorname{cis}300^\circ = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$.
4. Exponencial: $2e^{\pi i}$ y $2e^{\frac{5}{3}\pi i}$.
5. **Resultado:** $-2 = 2e^{\pi i}$ y $1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$. Además, $z = z_1^3 = 8\operatorname{cis}180^\circ = -8$.

Ejercicio 1A.5.7 · Igualdad con forma polar

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 3.

Determine los valores reales de a y de b para que

$$\frac{a + 4i}{2 + bi} = 2\operatorname{cis}225^\circ.$$

Resolución.

1. $2\operatorname{cis}225^\circ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.
2. Quitar el denominador:
$$a + 4i = (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)(2 + bi) = (-2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,b) + (-2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b)i.$$
3. Partes imaginarias: $4 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b \Rightarrow b = \frac{-4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2$.
4. Partes reales: $a = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}(-2\sqrt{2} - 2) = -2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$.
5. **Resultado:** $a = -4 - 4\sqrt{2}$, $b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Ejercicio 1A.5.8 · Ecuación lineal en z

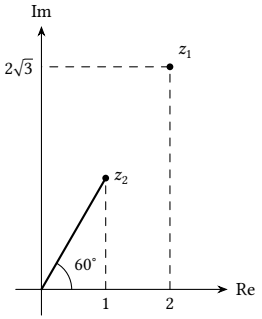
Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3.

Determine $z \in \mathbb{C}$ que resuelve la ecuación

$$2z = (3 + 3i)^2\left(\tfrac{1}{9}\operatorname{cis}300^\circ\right)\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right) + z.$$

Resolución.

donde z_1 y z_2 están en el diagrama: z_1 es el punto de coordenadas $(2, 2\sqrt{3})$; z_2 está sobre la recta que forma 60° con el semieje real positivo y su parte real es 1.



Resolución.

1. Lectura: $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$. Para $z_2 = 1 + bi$, $\tan 60^\circ = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \sqrt{3}$: $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.
2. $z_1 - z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 60^\circ$; $(z_1 - z_2)^3 = 8\operatorname{cis} 180^\circ$.
3. $z_3 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$. Despejar: $w^4 = 2\operatorname{cis} 60^\circ \cdot 8\operatorname{cis} 180^\circ = 16\operatorname{cis} 240^\circ$.
4. Raíces cuartas: $\sqrt[4]{16} = 2$, argumentos $\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} = 60^\circ + 90^\circ k$.
5. **Resultado:** $w_0 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$, $w_1 = 2\operatorname{cis} 150^\circ$, $w_2 = 2\operatorname{cis} 240^\circ$, $w_3 = 2\operatorname{cis} 330^\circ$: los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 2.

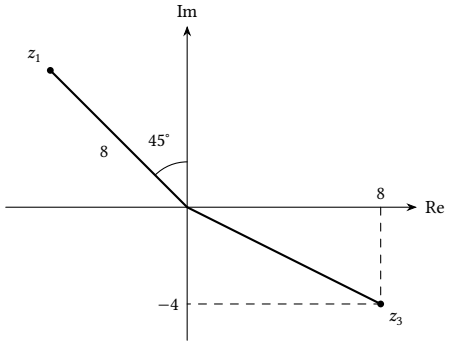
Ejercicio 1A.5.5 · Exponente racional con datos en el diagrama

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 2.

Obtenga el o los valores de $x \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$x^{3/2} z_3 = 4\bar{z}_1 z_2 + 8x^{3/2}, \qquad z_2 = e^{\frac{3}{2}\pi i},$$

donde z_1 tiene módulo 8 y forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, y z_3 es el punto $(8, -4)$.



1A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento (sección)
«Obtener los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen $w^3 \ldots = \ldots$», datos en varias formas	Una sola forma (1A.3.1), simplificar (1A.3.2), raíces (1A.3.3)
«z_1 y z_2 están en el diagrama de Argand»	Leer módulo y argumento de la figura (1A.3.1)
$w^{3/2}$, $z^{4/3}$, $x^{2/3}$ en la ecuación	Exponente racional (1A.3.3)
«Determinar $x, y \in \mathbb{R}$», «los valores de a y b»	Igualdad de complejos (1A.3.4)
$\bar{z}$, $\lvert z\rvert$ o «el módulo sea igual a…» con incógnita	Escribir $z = a + bi$ (1A.3.5)
«Una de las raíces cúbicas de z es…»	Repartir cada $360^\circ/n$ (1A.3.3)
«En forma polar», «en forma binómica»	Convertir el resultado al final (1A.1)

1A.3 Procedimientos

1A.3.1 Pasar los datos a una sola forma

1. Reduce las potencias de i con el residuo entre 4 y los argumentos a $[0^\circ, 360^\circ)$.
2. Si hay sumas o restas, hazlas en forma binómica: convierte a binómica los números que van a sumarse.
3. Todo lo que se multiplica, divide o eleva a potencia, pásalo a forma polar con el argumento en grados.
4. Diagrama de Argand: lee el módulo (la longitud) o las coordenadas, y convierte el ángulo marcado al argumento desde el semieje real positivo. Por ejemplo, un segmento de longitud 8 que forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, es $8\operatorname{cis} 135^\circ$.

1A.3.2 Simplificar el lado conocido

1. Calcula primero los paréntesis (sumas y restas en binómica) y pasa cada resultado a polar.
2. Multiplica módulos y suma argumentos; divide módulos y resta argumentos; con De Moivre, eleva el módulo y multiplica el argumento.
3. Reduce el argumento final a $[0^\circ, 360^\circ)$. El lado conocido debe quedar como $c = R\operatorname{cis}\Phi$.

1A.3.3 Despejar la potencia y sacar las raíces

1. Despeja la potencia de la incógnita: $w^n = R\operatorname{cis}\Phi$.
2. Si el exponente es racional, $w^{p/q} = c$, cambia a $w^p = c^q$ (eleva c a la q con De Moivre).
3. Raíces: $w_k = \sqrt[n]{R}\operatorname{cis}\frac{\Phi + 360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Basta con calcular $\frac{\Phi}{n}$ y sumar $\frac{360^\circ}{n}$ cada vez.
4. Si te dan una raíz w_0 y piden las demás, solo suma $\frac{360^\circ}{n}$ al argumento; el número original es w_0^n.
5. Escribe el resultado en la forma que piden. Si te piden graficarlo, dibuja la circunferencia de radio $\sqrt[n]{R}$ y los n puntos.

1A.3.4 Igualdad de complejos con incógnitas reales

1. Pasa todo a forma binómica y desarrolla los productos (recuerda $i^2 = -1$).
2. Separa: parte real del lado izquierdo igual a parte real del derecho; lo mismo con la imaginaria.
3. Resuelve el sistema de dos ecuaciones reales.

1A.3.5 Ecuaciones con conjugado o con módulo

1. Si z aparece junto con $\bar{z}$ o con $|z|$, no sirve sacar raíces: escribe $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z|^2 = a^2 + b^2$.
2. Iguala partes reales e imaginarias y resuelve para a y b.
3. Si solo hay un módulo, usa $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ sin hacer la división.
4. Si z aparece en forma lineal (sin potencias), despéjala como en una ecuación real.

1A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíces cúbicas con datos en varias formas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{w^3\,(z_3 z_2)}{z_4} = z_1,$$

donde $z_1 = -1 \operatorname{cis} 180^\circ$, $z_2 = i^{20}$, $z_3 = 2 \operatorname{cis} 1140^\circ$ y $z_4 = 2e^{2\pi i}$.

Resolución.

1. Una sola forma (polar):
   - $z_1 = -1 \operatorname{cis} 180^\circ = -(-1) = 1 = \operatorname{cis} 0^\circ$;
   - $z_2 = i^{20} = i^0 = 1$, porque $20 = 4 \cdot 5$;
   - $z_3 = 2 \operatorname{cis}(1140^\circ - 1080^\circ) = 2 \operatorname{cis} 60^\circ$;
   - $z_4 = 2e^{2\pi i} = 2 \operatorname{cis} 360^\circ = 2$.
2. Despejar: $w^3 = \frac{z_1 z_4}{z_3 z_2} = \frac{(1)(2)}{2 \operatorname{cis} 60^\circ} = \operatorname{cis}(-60^\circ) = \operatorname{cis} 300^\circ$.
3. Raíces cúbicas: $w_k = \sqrt[3]{1} \operatorname{cis} \frac{300^\circ + 360^\circ k}{3} = \operatorname{cis}(100^\circ + 120^\circ k)$.
4. **Resultado:** $w_0 = \operatorname{cis} 100^\circ$, $w_1 = \operatorname{cis} 220^\circ$, $w_2 = \operatorname{cis} 340^\circ$.
5. Comprobación: $w_0^3 = \operatorname{cis} 300^\circ$, y $\operatorname{cis} 300^\circ \cdot 2 \operatorname{cis} 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = \operatorname{cis} 360^\circ = 1 = z_1$.

1A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1A.5.1 · Igualdad de complejos

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 2.

Determine los valores $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$(3 + 2i)(x + 4i) = (6 + 2yi)(1 + 2i).$$

Resolución.

1. Lado izquierdo: $3x + 12i + 2xi + 8i^2 = (3x - 8) + (2x + 12)i$.

2. Lado derecho: $6 + 12i + 2yi + 4yi^2 = (6 - 4y) + (12 + 2y)i$.
3. Partes reales: $3x - 8 = 6 - 4y$. Partes imaginarias: $2x + 12 = 12 + 2y$, es decir, $x = y$.
4. Sustituyendo: $3x - 8 = 6 - 4x \Rightarrow 7x = 14$.
5. **Resultado:** $x = 2$, $y = 2$.

Ejercicio 1A.5.2 · Módulo con un parámetro

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que el módulo del número complejo $z = \frac{x+i}{1+i}$ sea igual a $\sqrt{5}$.

Resolución.

1. No hace falta dividir: $|z| = \frac{|x+i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}$.
2. Condición: $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9$.
3. **Resultado:** $x = 3$ o $x = -3$.
4. Comprobación con $x = 3$: $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$, y $|2 - i| = \sqrt{5}$.

Ejercicio 1A.5.3 · Ecuación con conjugado y potencia

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^2 = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 + z_2},$$

donde $z_1 = \operatorname{cis} 45^\circ$, $z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$, $z_3 = 5e^{\pi i}$ y $z_4 = -5 + 2i$.

Resolución.

1. Numerador: $z_3 = 5 \operatorname{cis} 180^\circ = -5$ y $\bar{z}_4 = -5 - 2i$, así que $z_3 - \bar{z}_4 = 2i = 2 \operatorname{cis} 90^\circ$ y $(2i)^3 = 8 \operatorname{cis} 270^\circ$.
2. Denominador (suma en binómica): $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, y

   $$z_1 + z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i = 5 \operatorname{cis} 45^\circ,$$

   pues $r = \sqrt{2 \cdot \frac{50}{4}} = 5$ y las dos partes son iguales y positivas.
3. $z^2 = \frac{8 \operatorname{cis} 270^\circ}{5 \operatorname{cis} 45^\circ} = \frac{8}{5} \operatorname{cis} 225^\circ$.
4. Raíces cuadradas: $\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ y argumentos $\frac{225^\circ + 360^\circ k}{2}$, $k = 0, 1$.
5. **Resultado:** $z_0 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \operatorname{cis} 112.5^\circ$, $z_1 = \frac{2\sqrt{10}}{5} \operatorname{cis} 292.5^\circ$.

Ejercicio 1A.5.4 · Datos en el diagrama de Argand: raíces cuartas

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 2.

Determine los valores de $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\frac{w^4}{z_3} = (z_1 - z_2)^3, \qquad z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i},$$

3. **b)**

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-5&-1&0\\-2&-8&2\end{vmatrix}=(-2-0)\hat{\imath}-(-10-0)\hat{\jmath}+(40-2)\hat{k}=(-2,10,38),$$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+100+1444}=\sqrt{1548}=6\sqrt{43}$; área $3\sqrt{43}$.

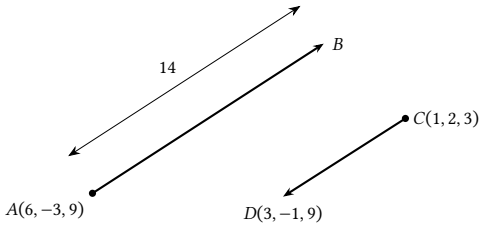
4. **c)** $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=6-40+304=270$; $V=\frac{270}{6}=45$.

Resultado: a) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; b) $3\sqrt{43}$ unidades de área; c) 45 unidades cúbicas.

Ejercicio 2.6.12 · Segmento dirigido paralelo a otro

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 2.

El segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, de longitud 14, es paralelo al segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$, como se muestra en la figura, con $A(6,-3,9)$, $C(1,2,3)$ y $D(3,-1,9)$. Empleando álgebra vectorial, determine las coordenadas del punto B.



Resolución.

1. **Dirección:** $\overrightarrow{CD}=D-C=(2,-3,6)$, $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{4+9+36}=7$.
2. **Sentido:** en la figura las flechas apuntan en sentidos contrarios, así que $\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección de $\overrightarrow{DC}=(-2,3,-6)$.
3. **Vector:** $\overrightarrow{AB}=14\cdot\frac{(-2,3,-6)}{7}=(-4,6,-12)$.
4. **Punto:** $B=A+\overrightarrow{AB}=(6-4,\,-3+6,\,9-12)=(2,3,-3)$.

Resultado: $B(2,3,-3)$. (Si se tomara el mismo sentido que $\overrightarrow{CD}$, saldría $B(10,-9,21)$; la figura descarta esa opción.)

Ejercicio 2.6.13 · Distancia de un punto al eje y

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 2.

En la figura, el punto A está en el plano XY y su vector de posición $\vec{a}$ forma un ángulo de 60° con el eje x; el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al eje z. Si $|\vec{a}|=16$ y $|\overrightarrow{AB}|=6$, determine la distancia entre el punto B y el eje y.

3. Queda $2x^3-x^2-2x+1$. Se agrupa: $x^2(2x-1)-(2x-1)=(2x-1)(x^2-1)=(2x-1)(x-1)(x+1)$.
4. Comprobación con raíces racionales: los candidatos son $\pm1,\pm\frac{1}{2}$, y los tres que salen están en la lista.
5. **Raíces:** $0,\ i,\ -i,\ \frac{1}{2},\ 1,\ -1$. Son seis, como el grado.

$$f(x)=2x\,(x-i)(x+i)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x-1)(x+1).$$

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Coeficientes a partir de dos raíces

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 3.

Dado el polinomio $P(x)=x^4+x^3-7x^2-Ax+2B$, determine:

- a) los valores de A y B si 1 y -1 son raíces de P;
- b) la expresión de $P(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $P(1)=1+1-7-A+2B=0\ \Rightarrow\ -A+2B=5$.
2. $P(-1)=1-1-7+A+2B=0\ \Rightarrow\ A+2B=7$.
3. Sumando: $4B=12$, $B=3$; entonces $A=7-6=1$. a) $A=1,\ B=3$.
4. $P(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$. Se divide entre $x-1$ y el cociente entre $x+1$:

	1	1	−7	−1	6
1		1	2	−5	−6
−1	1	2	−5	−6	0
		−1	−1	6	
	1	1	−6	0	

5. $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$.
6. b) $P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$. Comprobación: producto de raíces $1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-3)=6=(-1)^4a_0$.

Ejercicio 1B.5.2 · Coeficientes a partir de tres puntos de la gráfica

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 3.

La gráfica del polinomio $p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+A$ contiene a los puntos $(-1,-6)$, $(0,2)$ y $(1,0)$. Determine:

- a) los valores de $A,B,C\in\mathbb{R}$;
- b) todas las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. $p(0)=A=2$.
2. $p(1)=A+B+C+A=0\ \Rightarrow\ B+C=-4$.
3. $p(-1)=-A+B-C+A=-6\ \Rightarrow\ B-C=-6$.
4. Sumando: $2B=-10$, $B=-5$; $C=-4+5=1$. a) $A=2,\ B=-5,\ C=1$.

5. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$. El punto $(1, 0)$ dice que $x = 1$ es raíz:

	2	−5	1	2
1		2	−3	−2
	2	−3	−2	0

6. $2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$.
7. b) **Raíces:** $1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$.

Ejercicio 1B.5.3 · Coeficientes complejos con una raíz dada

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 3.

Para el polinomio

$$P(x) = x^5 + (-2 + i)x^4 + (-6 - i)x^3 + (8 - 7i)x^2 + (5 + i)x + (-6 + 6i),$$

determine sus raíces, si una de ellas es $1 - i$, y represéntelo como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. Hay coeficientes complejos: $1+i$ **no** tiene por qué ser raíz. Se divide solo entre $x-(1-i)$:

	1	$-2+i$	$-6-i$	$8-7i$	$5+i$	$-6+6i$
$1-i$		$1-i$	$-1+i$	$-7+7i$	$1-i$	$6-6i$
	1	−1	−7	1	6	0

   Por ejemplo, en la segunda columna: $(1 - i)(1) = 1 - i$ y $(-2 + i) + (1 - i) = -1$.
2. El cociente es real: $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$. Candidatos racionales: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
3. $x = 1$ y luego $x = -1$:

	1	−1	−7	1	6
1		1	0	−7	−6
−1	1	0	−7	−6	0
		−1	1	6	
	1	−1	−6	0	

4. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.
5. **Raíces:** $1 - i,\ 1,\ -1,\ 3,\ -2$.

$$P(x) = (x - 1 + i)(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2).$$

Ejercicio 1B.5.4 · Polinomio bicuadrado y cota superior

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces del polinomio $p(x) = x^8 + x^4 - 6$ y una cota superior de sus raíces reales.

Resolución.

1. Con $u = x^4$: $u^2 + u - 6 = (u + 3)(u - 2) = 0$, así que $u = 2$ o $u = -3$.
2. $x^4 = 2$: raíces cuartas de $2 = 2\,\mathrm{cis}\,0^\circ$. Módulo $\sqrt[4]{2}$, ángulos $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$:

$$x = \sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[4]{2}\,i, \quad -\sqrt[4]{2}, \quad -\sqrt[4]{2}\,i.$$

Ejercicio 2.6.9 · Volumen con un vector dado por cosenos directores

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 5.

Tres aristas concurrentes del paralelepípedo P son los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, -2, 3)$ y $2\vec{w}$. Dos de los cosenos directores del vector unitario $\vec{w}$ son $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Obtenga: a) $\overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u}$; b) el volumen de P.

Resolución.

1. $\vec{w}$**:** $\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$, así que $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
2. **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 2 + 3 = 5$, $|\vec{v}|^2 = 13$: $\overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{5}{13}(0, -2, 3) = \left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 2\left(0 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + 1\left(0 - \frac{3}{2}\right) + 1\,(0 + 1) = -3\sqrt{3} - \frac{1}{2}.$$

   Con la arista $2\vec{w}$ el producto mixto se duplica: $V = 2\left|-3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right| = 6\sqrt{3} + 1$.

Resultado: a) $\left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$; b) $V = 6\sqrt{3} + 1$ unidades cúbicas.

Ejercicio 2.6.10 · Componente escalar y producto mixto con parámetros

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-2, tipo A, problema 5.

Sean $\vec{a} = (-2, 3, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -4)$ y $\vec{c} = (m, n, -6)$. Determine m y n tales que $\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{c} = \frac{29}{\sqrt{17}}$ y el producto mixto $[\,\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\,] = -67$.

Resolución.

1. **Componente:** $|\vec{b}| = \sqrt{17}$ y $\vec{c} \cdot \vec{b} = n + 24$: $\frac{n+24}{\sqrt{17}} = \frac{29}{\sqrt{17}} \Rightarrow n = 5$.
2. **Producto mixto:**

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ m & n & -6 \end{vmatrix} = -2(-6 + 4n) - 3(0 + 4m) + 1(0 - m) = 12 - 8n - 13m.$$

3. Con $n = 5$: $12 - 40 - 13m = -67 \Rightarrow -13m = -39 \Rightarrow m = 3$.

Resultado: $m = 3$, $n = 5$; $\vec{c} = (3, 5, -6)$.

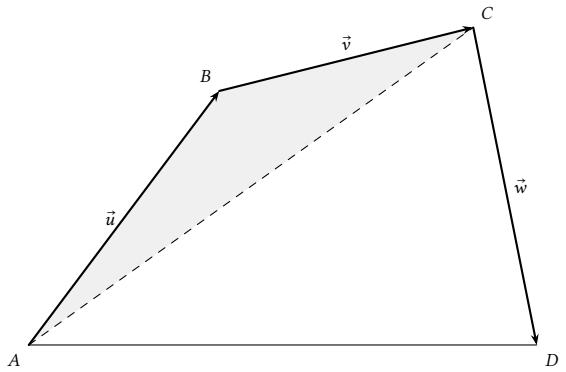
Ejercicio 2.6.11 · Tetraedro: componente escalar, área de una cara y volumen

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo C, problema 5.

Un tetraedro tiene sus vértices en $A(3, 4, -1)$, $B(-2, 3, -1)$, $C(1, -4, 1)$ y $D(0, 0, 7)$. Obtenga: a) la componente escalar de $\overrightarrow{CD}$ sobre $\overrightarrow{AC}$; b) el área del triángulo ABC; c) el volumen del tetraedro.

Resolución.

1. **Vectores:** $\overrightarrow{AB} = (-5, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -8, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-3, -4, 8)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 4, 6)$.
2. **a)** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 32 + 12 = -18$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$: $\mathrm{comp}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{CD} = \frac{-18}{6\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Resolución.

1. **Diagonal y cuarto lado:** $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = (14, 10, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (16, 0, 0)$.
2. **Triángulo** ABC**:** $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 12 - 64) = (0, 0, -52)$; área $\frac{1}{2} \cdot 52 = 26$.
3. **Triángulo** ACD**:** $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 14 & 10 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0 - 160) = (0, 0, -160)$; área 80.
4. **Suma:** $26 + 80 = 106$. (Comprobación: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|$ con $\overrightarrow{BD} = \vec{v} + \vec{w} = (10, -8, 0)$ da $\frac{1}{2} \cdot 212 = 106$.)

Resultado: 106 unidades de área.

Ejercicio 2.6.8 · Paralelepípedo de volumen dado y componente vectorial

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 2.

Los vectores $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{v} = -2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{w} = 12\hat{\imath} + b\hat{\jmath} - 12\hat{k}$ están sobre tres aristas concurrentes de un paralelepípedo. a) Determine el conjunto de valores de b para los cuales el volumen del paralelepípedo es de 162 unidades cúbicas. b) Obtenga la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Resolución.

1. **a) Producto mixto:**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 12 & b & -12 \end{vmatrix} = 1(-24 + b) - 2(24 + 12) + 2(-2b - 24) = -3b - 144.$$

2. $|-3b - 144| = 162$: $-3b - 144 = 162 \Rightarrow b = -102$, o $-3b - 144 = -162 \Rightarrow b = 6$.
3. **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 4 - 2 = 0$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{0}{9}\vec{v} = \vec{0}$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

Resultado: a) $b \in \{-102,\ 6\}$; b) $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

3. $x^4 = -3 = 3\,\text{cis}\,180°$: módulo $\sqrt[4]{3}$, ángulos $\frac{180° + 360°k}{4} = 45°, 135°, 225°, 315°$. En forma binómica, $\sqrt[4]{3}\,\text{cis}\,45° = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1 + i)$, y las otras tres son

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1 + i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1 - i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

4. **Ocho raíces:** $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm\sqrt[4]{2}\,i$ y $\sqrt[4]{3}\,\text{cis}\,\theta$ con $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$.
5. Cota superior. Con $c = 1$ el residuo es negativo:

	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
1		1	1	1	1	2	2	2	2
	1	1	1	1	2	2	2	2	−4

Con $c = 2$, todos los resultados son positivos:

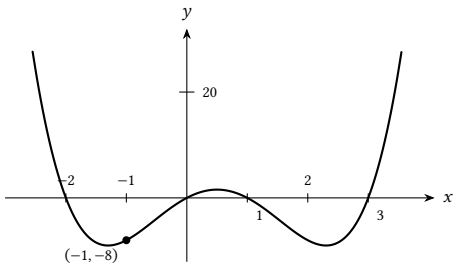
	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
2		2	4	8	16	34	68	136	272
	1	2	4	8	17	34	68	136	266

6. **Cota superior:** $c = 2$**.** En efecto, la única raíz real positiva es $\sqrt[4]{2} < 2$.

Ejercicio 1B.5.5 · Polinomio de menor grado a partir de su gráfica

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -2, 0, 1 y 3 (en los cuatro puntos lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(-1, -8)$.



Resolución.

1. Cuatro cruces del eje, cada uno de multiplicidad 1 (la curva atraviesa el eje): el menor grado es 4.
2. $p(x) = a\,(x + 2)\,x\,(x - 1)(x - 3)$.
3. Punto $(-1, -8)$: $a\,(1)(-1)(-2)(-4) = -8a = -8$, así que $a = 1$. Es positivo, como indican los extremos que suben.
4. $p(x) = x(x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$.

Ejercicio 1B.5.6 · Regla de los signos de Descartes y factores lineales

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 3.

Para el polinomio $h(x) = x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $h(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $h(x) = x^3\,q(x)$ con $q(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. $x = 0$ es raíz de multiplicidad 3.
2. Descartes en q. Signos de $q(x)$: $+\ +\ +\ +\ +$, 0 cambios: **ninguna raíz positiva**.
3. $q(-x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$: signos $+\ -\ +\ -\ +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 raíces negativas.

	1^{a}	2^{a}	3^{a}
Positivas	0	0	0
Negativas	4	2	0
Complejas	0	2	4
Total	4	4	4

   (Contando $x = 0$, h tiene además tres raíces nulas.)
4. Candidatos racionales de q: $\pm1, \pm2$; solo se prueban los negativos.

	1	3	3	3	2
-1		-1	-2	-1	-2
-2	1	2	1	2	0
		-2	0	-2	
	1	0	1	0	

5. Queda $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la segunda posibilidad de la tabla.
6. $h(x) = x^3(x+1)(x+2)(x-i)(x+i)$.

Ejercicio 1B.5.7 · Raíz de multiplicidad 2

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 4.

Sea $p(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + kx^2 + mx - m$.

- a) Obtenga k y m si $\alpha = 1$ es raíz de multiplicidad 2.
- b) Con esos valores, determine las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. Primera división entre $x - 1$:

	1	-1	-5	k	m	$-m$
1		1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$
	1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$	$k-5$

   Residuo $k - 5 = 0$: $k = 5$. El cociente es $x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + m$.
2. Segunda división entre $x - 1$:

	1	0	-5	0	m
1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	$m-4$

   Residuo $m - 4 = 0$: $m = 4$.

1. **Módulo de $\vec{a}$:** $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos 60° \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}|\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = 8$.
2. **Área:** $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,60° = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$.

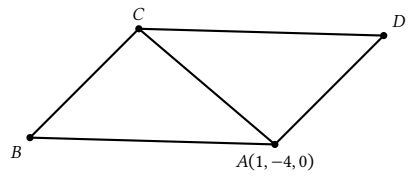
Resultado: $A = 6$ unidades de área.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 5, y 2º final 2016-2, tipo A, problema 5, con $|\vec{b}| = 3$ y componente escalar 2: $|\vec{a}| = 4$ y $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Ejercicio 2.6.6 · Área de una armadura y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 5.

En la armadura de la figura, los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{BA}$ son paralelos, así como $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Sean el punto $A(1, -4, 0)$ y los segmentos dirigidos $\overrightarrow{BD} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\overrightarrow{BC} = (1, 3, -1)$. Determine: a) el área del paralelogramo $ABCD$; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\hat{k} \times \hat{\jmath}$.



Resolución.

1. **Lados desde B:** los lados que salen de B son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y $\overrightarrow{BD}$ es la diagonal (no dibujada): $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, así que $\overrightarrow{BA} = (3, -2, -1) - (1, 3, -1) = (2, -5, 0)$.
2. **a)**

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (5-0)\hat{\imath} - (-2-0)\hat{\jmath} + (6+5)\hat{k} = (5, 2, 11),$$

   $A = \sqrt{25 + 4 + 121} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$. (Da lo mismo $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}|$, porque $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.)
3. **b)** $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$. Con $\vec{e} = -\hat{\imath}$, $|\vec{e}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{e}}\,\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{e}\right)\vec{e} = (-1)(-\hat{\imath}) = \hat{\imath}$.

Resultado: a) $5\sqrt{6}$ unidades de área; b) $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$. El punto A no se necesita.

Ejercicio 2.6.7 · Área de un cuadrilátero dado por tres lados

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 3.

Los vectores $\vec{u} = (6, 8, 0)$, $\vec{v} = (8, 2, 0)$ y $\vec{w} = (2, -10, 0)$ son los lados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ del cuadrilátero $ABCD$ de la figura. Obtenga el área del cuadrilátero.

y $A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Resultado: a) $(0, 0, -3)$; b) $120°$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades de área.

Ejercicio 2.6.3 · Vector perpendicular con módulo dado y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 5.

Sean $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 4\hat{k} - 2\hat{\imath}$, $\vec{c} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{d} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$. Determine: a) las componentes del vector $\vec{u}$ perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$ y tal que $|\vec{u}| = |\vec{a}|$; b) los cosenos directores de $\vec{a}$; c) el vector $\vec{v}$ tal que $2\vec{a} - 3\vec{v}$ es la componente vectorial de $\vec{d}$ sobre $\vec{c}$.

Resolución.

1. **a)** Con $\vec{b} = (-2, 0, 4)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0+4)\hat{\imath} - (-4-4)\hat{\jmath} + (2-0)\hat{k} = (4, 8, 2) = 2(2, 4, 1).$$

   $|(2, 4, 1)| = \sqrt{21}$ y $|\vec{a}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, así que $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{21}}(2, 4, 1) = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2, 4, 1)$.
2. **b)** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\gamma = 0$.
3. **c)** $\vec{d} \cdot \vec{c} = 2 - 1 - 2 = -1$, $|\vec{c}|^2 = 6$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{c}}\,\vec{d} = -\frac{1}{6}(1, -1, 2)$.
4. Despeje: $2\vec{a} - 3\vec{v} = -\frac{1}{6}\vec{c} \Rightarrow \vec{v} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{18}\vec{c} = \left(2, -\frac{4}{3}, 0\right) + \left(\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Resultado: a) $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2, 4, 1)$; b) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$; c) $\vec{v} = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Ejercicio 2.6.4 · Vector unitario paralelo a un plano coordenado y a 45° de otro

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2024-2, tipo A, problema 5.

Obtenga un vector unitario $\hat{v}$, paralelo al plano XZ, que forma un ángulo de $45°$ con el vector $\vec{u} = (2, 0, 2)$.

Resolución.

1. **Incógnitas:** paralelo al plano XZ significa componente y nula: $\hat{v} = (x, 0, z)$, con $x^2 + z^2 = 1$.
2. **Ángulo:** $\hat{v} \cdot \vec{u} = |\hat{v}||\vec{u}| \cos 45° \Rightarrow 2x + 2z = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, es decir, $x + z = 1$.
3. **Sistema:** $(x+z)^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ dan $2xz = 0$: $x = 0,\ z = 1$ o $x = 1,\ z = 0$.
4. **Comprobación:** $\hat{k} \cdot (2, 0, 2) = 2 = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resultado: $\hat{v} = \hat{\imath} = (1, 0, 0)$ o $\hat{v} = \hat{k} = (0, 0, 1)$ (basta dar uno).

Ejercicio 2.6.5 · Área de un triángulo con ángulo y componente escalar

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 2.

Dos de los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman un ángulo de $60°$. La componente escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es 4 y $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Obtenga el área del triángulo.

Resolución.

3. Queda $x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x-2)(x+2)$.
4. b) **Raíces:** 1 (doble), $-1,\ 2,\ -2$: $p(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2)(x+2)$.

Ejercicio 1B.5.8 · Raíz compleja de un polinomio real

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 4.

Sea $p(x) = x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18$. Determine todas sus raíces si $\alpha_1 = 1 - i$ es una de ellas.

Resolución.

1. Coeficientes reales: $\alpha_2 = 1 + i$ también es raíz. Factor cuadrático: $(x - 1 + i)(x - 1 - i) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.
2. Al dividir, $x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)$. Se comprueba multiplicando: $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 9x^2 - 18x + 18$.
3. $x^2 + 9 = 0$: $x = \pm 3i$.
4. **Raíces:** $1 - i,\ 1 + i,\ 3i,\ -3i$.

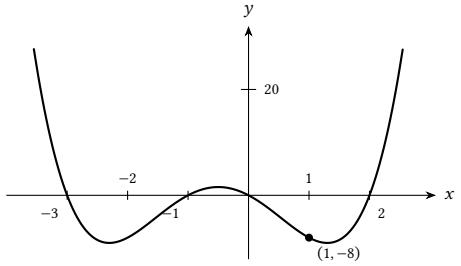
1B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1B**.

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo B, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -3, -1, 0 y 2 (en los cuatro lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(1, -8)$.



Resultado: $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 3.

Exprese el polinomio $h(x) = x^6 + (2-i)x^5 + (-3-2i)x^4 + (-6+3i)x^3 + 6ix^2$ como producto de factores lineales, si se sabe que i es una de sus raíces.

Resultado: $h(x) = x^2(x-i)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $f(x) = p(x)\,q(x)$, donde $p(x) = x^2+1$ y $q(x) = x^6-3x^5-9x^4+20x^3$.

Resultado: $i,\ -i,\ 0$ (triple), $4,\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 3.

Para $g(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $g(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resultado: Posibilidades (positivas, negativas, complejas) del factor de grado 4: $(4,0,0)$, $(2,0,2)$, $(0,0,4)$. $g(x) = x^3(x-1)(x-2)(x-i)(x+i)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 4.

Sea $p(x) = Ax^3 + 2x^2 - Bx + 2$. Determine:

- a) los valores de A y $B \in \mathbb{R}$ si $p(1) = -4$ y $p(2) = 0$;
- b) las raíces de $p(x)$ con esos valores.

Resultado: a) $A = 1$, $B = 9$. b) $2,\ -2+\sqrt{5},\ -2-\sqrt{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 1B.6.6

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $p(x) = x^5 - (1-3i)x^4 + 5x^3 - (5-15i)x^2 + 4x - (4-12i)$, si se sabe que $1-3i$ es raíz.

Resultado: $1-3i,\ i,\ -i,\ 2i,\ -2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

1B.7 Errores frecuentes

- **Olvidar los ceros en la división sintética.** En $2x^5 - x^4 - 2x + 1$ faltan x^3 y x^2: sus coeficientes son 0 y deben escribirse.
- **Usar el conjugado con coeficientes complejos.** Si algún coeficiente tiene i, el conjugado de una raíz no es raíz en general. Se divide solo entre $x-\alpha$.
- **No usar el conjugado con coeficientes reales.** Si son reales, el conjugado sí es raíz y ahorra una búsqueda.
- **Perder la raíz $x = 0$.** Cuando no hay término independiente, x^k se factoriza primero y cuenta como raíz de multiplicidad k.

4. **Comprobación con los lados:** $\vec{a}\times\vec{b} = (-2,10,4)$ y $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$.

Resultado: a) $\cos\theta = \frac{1}{11}$ (el ángulo vecino tiene coseno $-\frac{1}{11}$); b) $A = 2\sqrt{30}$ unidades de área.

2.6 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.6.1 · Tres vectores con módulo dado

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 3.

Obtenga los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, de módulo 5, 7 y 3 respectivamente, tales que $\vec{a}$ es paralelo al vector $\vec{v} = (6,-2,3)$; $\vec{b}$ tiene cosenos directores $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\cos\beta = \cos\gamma$; y $\vec{c}$ es perpendicular tanto a $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{k}$ como a $\vec{w} = (-3,1,4)$.

Resolución.

1. $\vec{a}$**:** $|\vec{v}| = \sqrt{36+4+9} = 7$, así que $\vec{a} = \pm\frac{5}{7}(6,-2,3) = \pm\left(\frac{30}{7},-\frac{10}{7},\frac{15}{7}\right)$.
2. $\vec{b}$**:** $\frac{1}{9} + 2\cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$. Entonces $\vec{b} = 7\left(-\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3},\pm\frac{14}{3},\pm\frac{14}{3}\right)$, con los dos signos iguales.
3. $\vec{c}$**:** perpendicular a los dos, paralelo a su producto cruz (aquí $\vec{v} = (3,0,-4)$):

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (0+4)\hat{\imath} - (12-12)\hat{\jmath} + (3-0)\hat{k} = (4,0,3), \qquad |\vec{v}\times\vec{w}| = 5.$$

Con módulo 3: $\vec{c} = \pm\frac{3}{5}(4,0,3) = \pm\left(\frac{12}{5},0,\frac{9}{5}\right)$.

Resultado: $\vec{a} = \pm\left(\frac{30}{7},-\frac{10}{7},\frac{15}{7}\right)$; $\vec{b} = \left(-\frac{7}{3},\frac{14}{3},\frac{14}{3}\right)$ o $\left(-\frac{7}{3},-\frac{14}{3},-\frac{14}{3}\right)$; $\vec{c} = \pm\left(\frac{12}{5},0,\frac{9}{5}\right)$.

Ejercicio 2.6.2 · Ángulos directores, componente vectorial y área por diagonales

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sean el vector $\vec{v}$ de módulo 2, cuyos ángulos directores son α, $\beta = 30^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$, y el vector $\vec{u} = -3\hat{k}$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre un vector $\vec{w}$ paralelo al eje z; b) el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo cuyas diagonales son $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución.

1. $\vec{v}$**:** $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2 30^\circ - \cos^2 60^\circ = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$, así que $\alpha = 90^\circ$ y

$$\vec{v} = 2\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(0,\sqrt{3},1\right).$$

2. **a)** Con $\vec{w} = k\hat{k}$ $(k \neq 0)$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{w}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{-3k}{k^2}k\hat{k} = -3\hat{k}$. No depende de k: $\vec{u}$ ya es paralelo al eje z.
3. **b)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$: $\cos\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, así que $\theta = 120^\circ$.
4. **c)**

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = (0+3\sqrt{3})\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k} = \left(3\sqrt{3},0,0\right),$$

2.4.7 Coordenadas de puntos en una figura

1. Copia la figura y marca qué es cada vector: de qué punto a qué punto va y cuáles lados son iguales como vectores (lados opuestos de un paralelogramo con el *mismo* sentido).
2. Parte de un punto conocido y avanza sumando vectores: $B = A + \overrightarrow{AB}$, $A = D - \overrightarrow{AD}$.
3. Con longitud y dirección: $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con el signo que diga la figura.
4. Para el pie de una perpendicular usa la componente vectorial (sección 2.2.9); para un punto medio, $\frac{1}{2}(A + B)$.
5. Comprueba una condición que no usaste (un lado opuesto, un ángulo recto, un módulo).

2.4.8 Problemas con parámetros

1. Escribe los vectores con el parámetro.
2. Traduce cada condición a una ecuación: perpendicular, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; paralelo, componentes proporcionales ($\vec{b} = k\vec{a}$); área, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = A^2$; volumen, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \pm V$; componente, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = c$.
3. Resuelve primero la ecuación lineal y sustituye en la cuadrática.
4. Da el *conjunto* de valores (casi siempre dos) y comprueba uno.

2.5 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Paralelogramo dado por sus diagonales

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Sea el paralelogramo P cuyas diagonales son los vectores $\vec{u} = 2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k}$ y $\vec{v} = (4, 0, 2)$. Obtenga: a) el coseno de uno de los ángulos interiores de P; b) el área de P.

Resolución.

1. **Lados a partir de las diagonales:** si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los lados que salen de un vértice, $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$. Sumando y restando:

$$\vec{a} = \tfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \tfrac{1}{2}(6, 2, -2) = (3, 1, -1),$$
$$\vec{b} = \tfrac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \tfrac{1}{2}(-2, 2, -6) = (-1, 1, -3).$$

2. **a) Ángulo interior:** entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que salen del mismo vértice.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -3 + 1 + 3 = 1, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{11}} = \frac{1}{11}.$$

   El otro ángulo interior es el suplementario, con coseno $-\frac{1}{11}$.

3. **b) Área con las diagonales:**

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4-0)\hat{\imath} - (4+16)\hat{\jmath} + (0-8)\hat{k} = (4, -20, -8),$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{16+400+64} = \sqrt{480} = 4\sqrt{30}, \qquad A = \tfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = 2\sqrt{30}.$$

- **Aplicar Descartes con $a_0 = 0$.** Primero se factoriza la potencia de x.
- **Equivocar $p(-x)$.** Cambian de signo solo los coeficientes de las potencias impares.
- **Contar mal las raíces.** Deben ser tantas como el grado, contando multiplicidades. Si faltan, falta una división.
- **Olvidar el coeficiente principal.** El producto de factores lineales lleva a_n al frente: $2x^6 - \cdots = 2x(x-i)\cdots$
- **Gráfica: suponer $a = 1$.** El coeficiente principal se calcula con un punto de la gráfica que no sea raíz.
- **Cuentas con i.** En la división sintética con complejos, $i \cdot i = -1$; un residuo distinto de 0 indica un error.

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x-a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\leq$ cambios de $p(x)$; negativas $\leq$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe el grado: es el número de raíces que debes entregar.
2. Factoriza x^k si no hay término independiente.
3. Mira los coeficientes: ¿reales (usa el conjugado) o complejos (no)?
4. Divide entre cada raíz conocida con división sintética, mostrando la tabla.
5. Con el cociente real, lista los candidatos racionales; si piden Descartes, haz la tabla antes de probar.
6. Llega a grado 2 y usa la fórmula general.
7. Escribe las raíces en una lista y el polinomio como producto de factores lineales, con a_n al frente. Comprueba con suma o producto de raíces.

Si no se encuentra el camino, la división sintética entre la raíz dada con residuo 0 y el cociente bien escrito ya valen buena parte del problema.

1B.10 Con la computadora

`factor` con `extension=I` factoriza sobre los complejos y `roots` da cada raíz con su multiplicidad. El programa revisa el polinomio del ejemplo 1B.4: comprueba que i es raíz y escribe los factores lineales. Para un polinomio cuyas raíces no tienen forma cerrada, `Poly(f).nroots()` da aproximaciones decimales. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import I, Rational, factor, roots, symbols
from sympy import expand

x = symbols("x")
f = 2*x**6 - x**5 - 2*x**2 + x
assert expand(f.subs(x, I)) == 0       # i es raíz
print(factor(f, extension=I))
r = roots(f, x)          # {raíz: multiplicidad}
print(r)
assert set(r) == {0, 1, -1, I, -I, Rational(1, 2)}
```


2.4.2 Ángulo entre vectores y ángulos de un triángulo

1. Escribe los dos vectores que *salen* del vértice del ángulo pedido (para el ángulo A del triángulo ABC: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$).
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ y sustituye en $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.
3. Racionaliza; si el coseno es notable, da el ángulo en grados; si no, $\theta = \text{ang cos}(\ldots)$.

2.4.3 Componente escalar y componente vectorial

1. Identifica quién se proyecta ($\vec{a}$) y *sobre* quién ($\vec{b}$). Si el vector se da como segmento, conviértelo: $\overrightarrow{AB} = B - A$.
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y $|\vec{b}|$ (o $|\vec{b}|^2$).
3. Escalar: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Vectorial: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$, simplificada y en componentes.
4. Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, las dos componentes son cero: los vectores son perpendiculares.

2.4.4 Vector perpendicular a dos vectores o con ángulo dado

1. **Perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$:** calcula $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$ y saca factores comunes.
2. **Unitario:** $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$; **con módulo r:** $\pm\frac{r}{|\vec{n}|}\vec{n}$.
3. **Con condiciones sueltas** (paralelo a un plano coordenado, ángulo dado con otro vector): escribe el vector con incógnitas (paralelo al plano XZ: $(x, 0, z)$), plantea una ecuación por condición ($|\hat{v}| = 1$; $\hat{v}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta$) y resuelve el sistema.
4. Comprueba con el producto escalar que da 0 (o el coseno pedido).

2.4.5 Áreas

1. Escoge dos lados que salgan del mismo vértice. Con vértices: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Con diagonales: usa directamente $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$.
2. Calcula el producto cruz con el determinante y su módulo; simplifica el radical.
3. Paralelogramo: $|\vec{a}\times\vec{b}|$. Triángulo: $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$. Diagonales: $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$. Cuadrilátero: suma de dos triángulos separados por una diagonal.
4. **Sin componentes** (datos de módulos, ángulo y componente escalar): obtén los módulos que falten con $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$ y usa $A = |\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta$ (o la mitad).
5. Si $\vec{a}\perp\vec{b}$, el área del paralelogramo es $|\vec{a}||\vec{b}|$ (rectángulo).

2.4.6 Volúmenes y coplanaridad

1. Escribe las tres aristas que salen de un mismo vértice (con vértices: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$). Si una arista es $2\vec{w}$, el volumen se multiplica por 2.
2. Calcula el determinante de 3×3 con las tres aristas como renglones.
3. Paralelepípedo: el valor absoluto. Tetraedro: un sexto del valor absoluto.
4. Volumen con parámetro: $|\text{determinante}| = V$ da *dos* ecuaciones, $\det = V$ y $\det = -V$. Coplanaridad: $\det = 0$.

- **Rectángulo y cuadrado:** además, lados consecutivos perpendiculares ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) y, en el cuadrado, del mismo módulo.
- **Segmento con dirección y longitud dadas:** $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con $\hat{u}$ el unitario de la dirección y el sentido que indique la figura.
- **Pie de la perpendicular** desde B a la recta AC: $Q = A + \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}$.
- **Simétrico** de P respecto a un punto M: $P' = 2M - P$.

Se lee la figura con cuidado: el orden de los vértices en el nombre ($ABCD$, $ADCB$) y el sentido de cada flecha deciden los signos.

2.3 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«de módulo 5 y paralelo a», «cosenos directores», «ángulos directores»	un vector con módulo y dirección	2.4.1
«coseno del ángulo», «ángulo entre», «ángulo interior», «ángulo A»	coseno o ángulo	2.4.2
«componente escalar», «componente vectorial», «en la dirección de», «comp esc», «comp vect»	proyección	2.4.3
«unitario perpendicular tanto a … como a», «paralelo al plano XZ y a 45°»	un vector por condiciones	2.4.4
«área del paralelogramo», «del triángulo», «diagonales», «cuadrilátero»	área	2.4.5
«volumen del paralelepípedo», «aristas concurrentes», «tetraedro», «producto mixto»	volumen	2.4.6
una figura con puntos sin coordenadas: «coordenadas del punto», «cuarto vértice», «punto medio»	coordenadas	2.4.7
«el valor de b», «el conjunto de valores», «tal que su área sea 6»	parámetro	2.4.8

2.4 Procedimientos

2.4.1 Vector con módulo y dirección dados

1. **Paralelo a $\vec{v}$ con módulo r:** $\vec{a} = \pm r\,\hat{v} = \pm\frac{r}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Si el enunciado no da el sentido, hay dos respuestas.
2. **Con cosenos directores:** completa el que falta con $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (hay dos signos si no se especifica) y escribe $\vec{a} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
3. **Con ángulos directores:** $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$. Si el que falta da $\cos^2 = 0$, el ángulo es 90°.
4. Comprueba el módulo al final.

Unidad 2 · Álgebra vectorial

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 2). «Aplicar los conceptos y operaciones del álgebra vectorial para resolver y visualizar gráficamente problemas elementales de Ingeniería utilizando software.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema (a veces dos) en los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010 y en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016: área en 18, componente escalar o vectorial en 14, coordenadas de un punto en una figura en 12, volumen con el producto mixto en 10, ángulo o coseno en 8. Los sistemas de referencia polar y cartesiano (sección 2.1) son nuevos en el programa 2026: no hay exámenes de ellos.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 (30 min) y resuelve los dos propuestos de esa sección.
  2. Lee las secciones 2.2.5 a 2.2.8 (30 min): producto escalar, componentes, producto vectorial y producto mixto.
  3. Aprende los procedimientos 2.4.3 (componentes), 2.4.5 (áreas) y 2.4.6 (volúmenes): juntos cubren casi todos los problemas.
  4. Sigue el ejemplo de la sección 2.5 tapando la resolución (10 min).
  5. Resuelve con cronómetro, 12 min cada uno, los ejercicios 2.6.2, 2.6.5, 2.6.7, 2.6.8 y 2.6.15.

2.1 Sistemas de referencia en el plano y en el espacio

El programa 2026 empieza el álgebra vectorial con los sistemas de referencia. En el **plano cartesiano** un punto es una pareja $P(x, y)$: sus distancias dirigidas a los ejes. En el **plano polar** el mismo punto se describe con una distancia y un ángulo, $P(r, \theta)$; las *ecuaciones de transformación* pasan de un sistema al otro. En el **espacio cartesiano** el punto es una terna $P(x, y, z)$ (sección 2.2). Las coordenadas polares también se usan en la Unidad 4A para describir curvas.

2.1.1 Coordenadas polares

Se fija un punto O, el *polo*, y una semirrecta que parte de él, el *eje polar* (la parte positiva del eje x). Un punto P se describe con el par (r, θ): θ es el ángulo que va del eje polar al segmento OP, positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y r es la distancia dirigida de O a P. En este libro θ se escribe en grados, como en los exámenes.

- Si $r > 0$, el punto está sobre la semirrecta de ángulo θ; si $r < 0$, sobre la semirrecta opuesta, de ángulo $\theta + 180^\circ$, a distancia $|r|$.
- El polo es $(0, \theta)$ para *cualquier* θ.
- La *recta a* 90° es la recta perpendicular al eje polar por el polo (el eje y).

Cuando un enunciado pide las intersecciones «con el eje polar» se usa la recta completa que lo contiene ($\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$); «con la recta a 90°», los ángulos $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$.

2.1.2 Varias representaciones de un punto

A diferencia de las coordenadas cartesianas, un mismo punto tiene infinitas parejas polares:

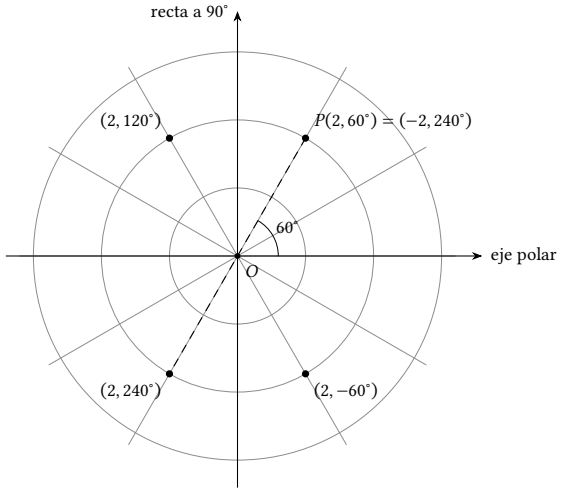
$$(r, \theta) = (r, \theta + 360^\circ k) = (-r, \theta + 180^\circ + 360^\circ k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Por ejemplo, $(2, 60^\circ) = (2, 420^\circ) = (2, -300^\circ) = (-2, 240^\circ) = (-2, -120^\circ)$. Por eso un punto puede estar en una curva aunque la pareja con la que se escribió no cumpla la ecuación: basta que *alguna* de sus representaciones la cumpla. «Dar unas coordenadas polares» de un punto es dar una cualquiera de ellas.

2.1.3 Simetría de puntos

El simétrico de $P(r, \theta)$ es:

- respecto al eje polar: $(r, -\theta)$, o también $(-r, 180^\circ - \theta)$;
- respecto a la recta a 90°: $(r, 180^\circ - \theta)$, o también $(-r, -\theta)$;
- respecto al polo: $(r, \theta + 180^\circ)$, o también $(-r, \theta)$.



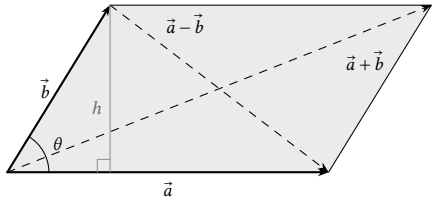
2.1.4 Conversión entre polares y cartesianas

Con el polo en el origen y el eje polar sobre el eje x positivo:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

- **De polar a cartesiana (un punto):** se aplican las dos primeras. $(4, 120^\circ) \to (4\cos 120^\circ, 4\,\mathrm{sen}\,120^\circ) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.

Para un triángulo de vértices A, B, C se usan dos lados que salen del mismo vértice: $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Un cuadrilátero se parte en dos triángulos con una diagonal.



$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
$h = |\vec{b}|\,\mathrm{sen}\,\theta$

2.2.8 Producto mixto, volumen y coplanaridad

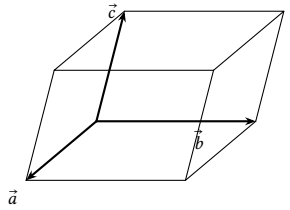
El *producto mixto* de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ es un número que se calcula con un determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

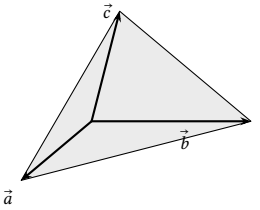
Algunos enunciados lo escriben $[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$. Una permutación cíclica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \to \vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ no lo cambia; intercambiar dos vectores le cambia el signo. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (área de la base $|\vec{b} \times \vec{c}|$ por la altura):

$$V_{\text{paralelepípedo}} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|, \qquad V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$

Para un tetraedro de vértices A, B, C, D se usan las tres aristas que salen de un vértice: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Tres vectores son **coplanares** si y solo si su producto mixto es cero (el paralelepípedo es plano); cuatro puntos están en un mismo plano si las tres aristas que salen de uno de ellos son coplanares.



$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$



$V = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

2.2.9 Coordenadas de puntos en una figura

Los problemas de «coordenadas de un punto» se resuelven sumando vectores a puntos conocidos ($B = A + \overrightarrow{AB}$). Las relaciones que más se usan:

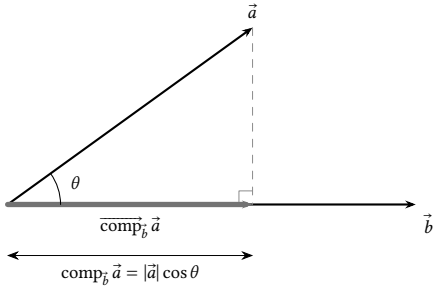
- **Paralelogramo:** los lados opuestos son el mismo vector. Si los vértices en orden son A, B, C, D, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y $D = A + C - B$ (el vértice que falta es la suma de sus dos vecinos menos el opuesto). Las diagonales se cortan en su punto medio común.

2.2.6 Componente escalar y componente vectorial

La *componente escalar* de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es la longitud con signo de la sombra de $\vec{a}$ sobre la dirección de $\vec{b}$; la *componente vectorial* es esa sombra como vector (la proyección ortogonal):

$$\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \left(\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}\right)\hat{b}.$$

La componente escalar es negativa si el ángulo es obtuso; la vectorial apunta entonces en sentido contrario a $\vec{b}$. Solo importa la *dirección* de $\vec{b}$: sobre $2\vec{b}$ o $-\vec{b}$ la componente vectorial es la misma. El orden importa: $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}$ (se divide entre $|\vec{b}|$) no es $\operatorname{comp}_{\vec{a}}\vec{b}$. Sobre un eje: $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\hat{\jmath}}\vec{a} = (0, a_2, 0)$. Los enunciados también dicen «componente de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$» o escriben «comp esc» y «comp vect».



2.2.7 Producto vectorial, paralelismo y área

El *producto vectorial* (o producto cruz) es el vector

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\right).$$

(Los determinantes de 3×3 se repasan en la Unidad 0.) Propiedades:

- $\vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$; su sentido sigue la regla de la mano derecha ($\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$).
- $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$ (no es conmutativo) y $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$.
- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$.
- **Paralelismo:** $\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.

Áreas. El paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene base $|\vec{a}|$ y altura $|\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$:

$$A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{a}\times\vec{b}|, \qquad A_{\text{triángulo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Si se dan las **diagonales** $\vec{d}_1 = \vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{d}_2 = \vec{a}-\vec{b}$, entonces $\vec{d}_1\times\vec{d}_2 = -2\,\vec{a}\times\vec{b}$ y

$$A_{\text{paralelogramo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|, \qquad \vec{a} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1+\vec{d}_2), \quad \vec{b} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1-\vec{d}_2).$$

- **De cartesiana a polar (un punto):** $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y θ con $\tan\theta = \frac{y}{x}$ *en el cuadrante del punto*. Para $(-2, 2\sqrt{3})$: $r = 4$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y el punto está en el segundo cuadrante, así que $\theta = 120^\circ$ (no -60°).
- **De una ecuación polar a cartesiana:** se busca que aparezcan $r\cos\theta$, $r\operatorname{sen}\theta$ y r^2; casi siempre se multiplica por r o se eleva al cuadrado. Multiplicar por r solo puede agregar el polo, que se revisa aparte.
- **De una ecuación cartesiana a polar:** se sustituyen $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ y se simplifica.

2.1.5 Distancia entre vectores

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une; por eso el programa la llama *distancia entre vectores*: si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de posición de A y B,

$$d(A,B) = |\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Con puntos dados en polares, primero se pasan a cartesianas con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

2.1.6 Ejemplo y ejercicios propuestos

Ejemplo resuelto · Del plano cartesiano al polar y de regreso

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 2.1).

Sean $A(-3,3)$ en cartesianas y $B(6,240^\circ)$ en polares. a) Obtenga unas coordenadas polares de A con $r>0$ y otras con $r<0$. b) Obtenga las coordenadas cartesianas de B. c) Calcule la distancia entre A y B. d) Escriba en forma polar la curva $x^2+y^2=4y$ e identifíquela.

Resolución.

1. **a)** $r = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\tan\theta = \frac{3}{-3} = -1$ y el punto está en el segundo cuadrante: $\theta = 135^\circ$. Así $A\left(3\sqrt{2}, 135^\circ\right)$, y con $r<0$, $A\left(-3\sqrt{2}, 315^\circ\right)$.
2. **b)** $x = 6\cos 240^\circ = 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, $y = 6\operatorname{sen}240^\circ = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$: $B\left(-3, -3\sqrt{3}\right)$.
3. **c)** $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(0, -3\sqrt{3}-3\right)$, así que $d(A,B) = 3+3\sqrt{3}$.
4. **d)** Con $x^2+y^2 = r^2$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$: $r^2 = 4r\operatorname{sen}\theta$, es decir $r = 4\operatorname{sen}\theta$ (el polo, $r=0$, ya está en esta curva con $\theta = 0^\circ$). Completando el cuadrado, $x^2+(y-2)^2 = 4$: circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2, que pasa por el polo.

Resultado: a) $\left(3\sqrt{2}, 135^\circ\right)$ o $\left(-3\sqrt{2}, 315^\circ\right)$; b) $\left(-3, -3\sqrt{3}\right)$; c) $3+3\sqrt{3}$; d) $r = 4\operatorname{sen}\theta$, circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2.

Las resoluciones de estos dos propuestos están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.1.1 · Conversión de puntos

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 2.1).

a) Obtenga unas coordenadas polares de $P\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$ con $r>0$ y $0^\circ \le \theta < 360^\circ$, y otras con $r<0$. b) Obtenga las coordenadas cartesianas de $Q(5, -90^\circ)$.

Resultado: a) $(4, 210^\circ)$ y $(-4, 30^\circ)$. b) $Q(0, -5)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 2.1.2 · Ecuación de transformación y distancia

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 2.1).

a) Obtenga la ecuación cartesiana de la curva $r = 6\cos\theta$ e identifíquela. b) Calcule la distancia entre los puntos $M(2, 30^\circ)$ y $N(4, 90^\circ)$, dados en polares.

Resultado: a) $(x-3)^2 + y^2 = 9$: circunferencia de centro $(3, 0)$ y radio 3. b) $d(M, N) = 2\sqrt{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

2.2 Conceptos y expresiones

2.2.1 Recordatorio: el espacio cartesiano

Un punto del espacio es una terna $P(x, y, z)$; los tres planos coordenados (XY, XZ, YZ) dividen el espacio en ocho octantes. La distancia entre $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

La distancia de $P(x, y, z)$ al eje y es $\sqrt{x^2 + z^2}$ (y de modo análogo para los otros ejes).

2.2.2 Segmento dirigido y vector

El *segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ va del punto inicial A al punto final B. Sus componentes son las diferencias de coordenadas, final menos inicial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

Dos segmentos dirigidos con las mismas componentes representan el mismo *vector*, sin importar dónde empiecen. El vector de posición del punto $P(x, y, z)$ es $\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. De aquí salen dos reglas que se usan siempre:

- $B = A + \overrightarrow{AB}$: un punto se obtiene sumando a otro el vector que los une.
- El **punto medio** de AB es $M = \frac{1}{2}(A+B)$, y el punto que divide a AB en la razón $\frac{AP}{AB} = k$ es $P = A + k\,\overrightarrow{AB}$.

2.2.3 Módulo, vector unitario y cosenos directores

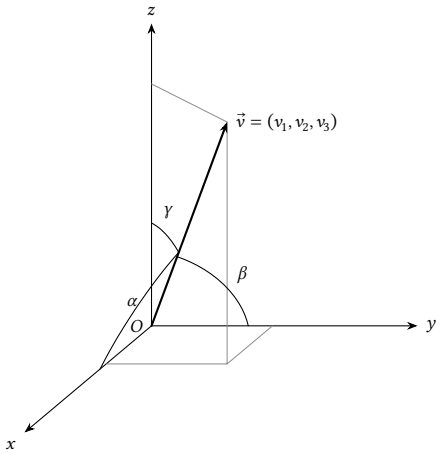
El *módulo* de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es su longitud, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Un vector de módulo 1 es *unitario*; el unitario en la dirección de $\vec{v} \neq \vec{0}$ es

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Los *ángulos directores* α, β, γ son los que forma $\vec{v}$ con los ejes x, y, z (cada uno entre 0° y 180°). Sus cosenos, los *cosenos directores*, son las componentes de $\hat{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Así, un vector de módulo r con cosenos directores conocidos es $\vec{v} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Si se conocen dos cosenos, la identidad da el tercero salvo el signo.



2.2.4 Operaciones con vectores

Con $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y un escalar λ:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \qquad |\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|.$$

La suma se dibuja con la regla del paralelogramo: si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ salen del mismo punto, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (no nulos) son **paralelos** si $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ para algún $\lambda \neq 0$: con $\lambda > 0$ tienen el mismo sentido y con $\lambda < 0$, sentido contrario. En componentes, sus coordenadas son proporcionales.

2.2.5 Producto escalar, ángulo y perpendicularidad

El *producto escalar* (o producto punto) es el número

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,$$

donde $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ es el ángulo entre los vectores. Es conmutativo, distributivo sobre la suma y cumple $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. De ahí:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}, \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

El signo de $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dice si el ángulo es agudo (+), recto (0) u obtuso (−). Un ángulo no notable se deja como $\theta = \operatorname{ang}\cos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. El **ángulo interior** de un triángulo o paralelogramo en el vértice A se calcula con los dos vectores que *salen* de A.

Resolución.

1. **Dirección de R:** $\frac{-y-1}{-1}=\frac{y+1}{1}$ y $\frac{-z+2}{-1}=\frac{z-2}{1}$: $R:\ \frac{x+3}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$, $\vec{u}=(-1,1,1)$.
2. **Ángulo recta–plano (seno):** $\vec{n}=(1,B,1)$, $\vec{u}\cdot\vec{n}=-1+B+1=B$:

$$\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}=\frac{|B|}{\sqrt{3}\sqrt{2+B^2}}.$$

3. **Ecuación:** $2|B|=\sqrt{3}\sqrt{2+B^2}\Rightarrow 4B^2=6+3B^2\Rightarrow B^2=6$.

Resultado: $B\in\{-\sqrt{6},\ \sqrt{6}\}$.

Ejercicio 3.5.13 · Ángulo e intersección de una recta y un plano

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 7.

Sean la recta $L:\ \frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{-3}=\frac{2-z}{3}$ y el plano $\pi:\ x-y-z+19=0$. Determine: a) el ángulo entre L y π; b) las coordenadas del punto I de intersección de L y π.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2-z}{3}=\frac{z-2}{-3}$: $P_0(-3,5,2)$, $\vec{u}=(3,-3,-3)$, paralelo a $(1,-1,-1)$. $\vec{n}=(1,-1,-1)$.
2. **a)** $\vec{u}=3\vec{n}$: la recta es paralela a la normal, es decir, **perpendicular** al plano. Con la fórmula: $\operatorname{sen}\varphi=\frac{|3+3+3|}{\sqrt{27}\sqrt{3}}=1$, $\varphi=90^\circ$.
3. **b)** Con $L:\ (-3+t,\ 5-t,\ 2-t)$: $(-3+t)-(5-t)-(2-t)+19=3t+9=0$, $t=-3$. $I(-6,8,5)$; comprobación: $-6-8-5+19=0$.

Resultado: $\varphi=90^\circ$; $I(-6,8,5)$.

Ejercicio 3.5.14 · Punto de un plano más cercano a un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-1, tipo C, problema 6.

Obtenga las coordenadas del punto P del plano $\pi:\ 3x-y+2z=4$ más cercano al punto $M(1,5,-4)$.

Resolución.

1. **Recta perpendicular por M:** dirección $\vec{n}=(3,-1,2)$: $(1+3t,\ 5-t,\ -4+2t)$.
2. **Intersección con π:** $3(1+3t)-(5-t)+2(-4+2t)=14t-10=4$, $t=1$.
3. **Punto:** $P(4,4,-2)$; comprobación: $12-4-4=4$. (La distancia de M al plano es $|\overrightarrow{MP}|=|\vec{n}|=\sqrt{14}$.)

Resultado: $P(4,4,-2)$.

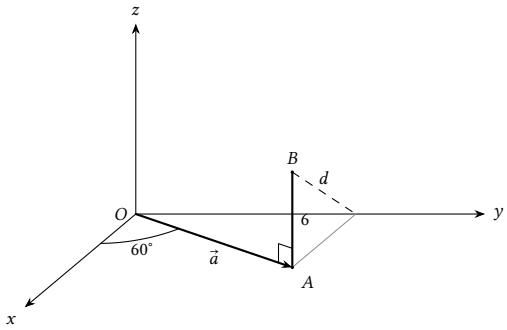
Ejercicio 3.5.15 · Recta por el origen que corta perpendicularmente a otra

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 1.

Sea la recta $M:\ x=4,\ y=5+t,\ z=-2t$. Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al origen y corta perpendicularmente a M.

Resolución.

1. **Datos:** $\vec{u}_M=(0,1,-2)$; punto genérico de M: $F(4,\ 5+t,\ -2t)$.
2. **Perpendicularidad:** $\overrightarrow{OF}\cdot\vec{u}_M=5+t+4t=0$, $t=-1$, $F(4,4,2)$.
3. **Recta:** por O y F, dirección $(4,4,2)$, o $(2,2,1)$.



Resolución.

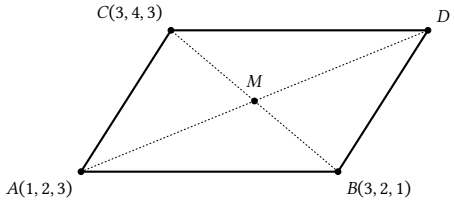
1. **A:** $\vec{a}=16(\cos 60^\circ,\operatorname{sen}60^\circ,0)=\left(8,8\sqrt{3},0\right)$.
2. **B:** $\overrightarrow{AB}=6\hat{k}$ (hacia arriba), así que $B\left(8,8\sqrt{3},6\right)$.
3. **Distancia al eje y:** $d=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{64+36}=10$. (Con vectores: $d=\frac{|\overrightarrow{OB}\times\hat{\jmath}|}{|\hat{\jmath}|}=|(-6,0,8)|=10$.)

Resultado: $d=10$ unidades.

Ejercicio 2.6.14 · Paralelogramo: punto de cruce de las diagonales y ángulo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-2, tipo A, problema 5.

Los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$, $C(3,4,3)$ y D son los vértices del paralelogramo de la figura, cuyas diagonales se cortan en M. Determine: a) las coordenadas de M; b) el coseno del ángulo entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



Resolución.

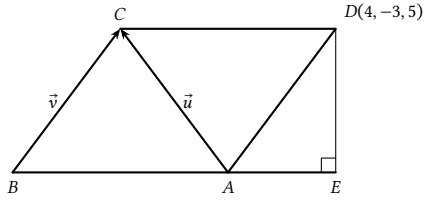
1. **Lectura de la figura:** los vértices en orden son A, B, D, C; las diagonales son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
2. **a)** Las diagonales se cortan en su punto medio: $M=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}(6,6,4)=(3,3,2)$. (Con $D=B+C-A=(5,4,1)$, también $\frac{1}{2}(A+D)=(3,3,2)$.)
3. **b)** $\overrightarrow{AB}=(2,0,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$: $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{8}}=\frac{1}{2}$ ($\theta=60^\circ$).

Resultado: a) $M(3,3,2)$; b) $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2.6.15 · Vértices de un paralelogramo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 5.

Sea el paralelogramo $ADCB$ de la figura, donde $\vec{u} = (5, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 4, 6)$, y el punto E es el pie de la perpendicular desde D a la recta BA. Determine las coordenadas de los puntos A, C, B y E.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ es un lado y $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ es una diagonal. Los lados opuestos son iguales como vectores: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
2. A**:** $A = D - \vec{v} = (4, -3, 5) - (-1, 4, 6) = (5, -7, -1)$.
3. C**:** $C = A + \vec{u} = (10, -6, -1)$. B**:** $B = C - \vec{v} = (11, -10, -7)$.
4. **Comprobación:** $\overrightarrow{CD} = (-6, 3, 6) = \overrightarrow{BA}$.
5. E**:** es A más la componente vectorial de $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ sobre la dirección $\overrightarrow{BA} = (-6, 3, 6)$:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA} = 6 + 12 + 36 = 54, \quad |\overrightarrow{BA}|^2 = 81, \quad \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{BA}}\, \vec{v} = \tfrac{54}{81}(-6, 3, 6) = (-4, 2, 4),$$

$E = A + (-4, 2, 4) = (1, -5, 3)$. Comprobación: $\overrightarrow{ED} = (3, 2, 2)$ y $(3, 2, 2) \cdot (-6, 3, 6) = 0$.

Resultado: $A(5, -7, -1)$, $C(10, -6, -1)$, $B(11, -10, -7)$, $E(1, -5, 3)$.

Ejercicio 2.6.16 · Cuadrado en el espacio

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2017-1, tipo A, problema 5.

El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lados de 10 unidades; los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos al eje z y los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, al vector $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, con $A(-2, 1, 6)$. Determine: a) las coordenadas de B, C y D; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\overrightarrow{CD}$.

2. **a)** El plano XZ tiene normal $\hat{\jmath}$; π contiene las direcciones $\vec{u}$ y $\hat{\jmath}$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 0, 4).$$

   Por P_0: $-3(x - 2) + 4(z + 1) = 0$, es decir, $3x - 4z - 10 = 0$. (No tiene término en y, como todo plano perpendicular al XZ.)
3. **b)** $\overrightarrow{OP_0} \times \vec{u} = (2, -1, -1) \times (4, -5, 3) = (-3 - 5,\ -4 - 6,\ -10 + 4) = (-8, -10, -6)$, de módulo $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; $|\vec{u}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. $d = 2$.

Resultado: $\pi:\ 3x - 4z - 10 = 0$; $d = 2$.

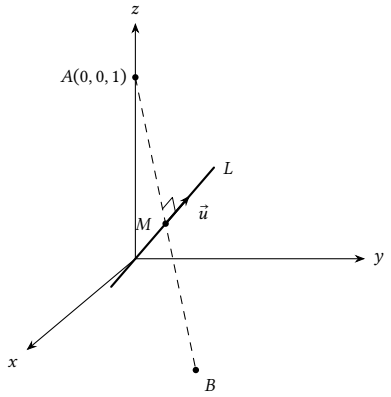
Ejercicio 3.5.11 · Punto simétrico respecto a una recta

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 3.

Determine las coordenadas cartesianas del punto B, simétrico del punto $A(0, 0, 1)$ respecto a la recta L que contiene al origen y es paralela al vector $\vec{u} = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$.

Resolución.

1. **Recta:** $\vec{u}$ es paralelo a $(1, 1, 1)$: $L:\ \vec{p} = t\,(1, 1, 1)$.
2. **Pie de la perpendicular:** $t = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot (1, 1, 1)}{3} = \dfrac{1}{3}$, $M\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$. Comprobación: $\overrightarrow{MA} = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MA} \cdot (1, 1, 1) = 0$.
3. **Simétrico:** M es el punto medio de AB: $B = 2M - A = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3} - 1\right)$.



Resultado: $B\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 3.5.12 · Parámetro para un ángulo de 30° entre recta y plano

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 5.

Sean la recta $R:\ \frac{3+x}{-1} = \frac{-y-1}{-1} = \frac{-z+2}{-1}$ y el plano $\pi:\ x + By + z = 0$. Determine el conjunto de valores que puede tomar B para que R y π formen un ángulo de 30°.

1. **Datos de R:** $\frac{-2-y}{-1} = y+2$ y $\frac{2z-2}{2} = z-1$: $P_R(1,-2,1)$, $\vec{u}_R = (3,1,1)$. De L: $P_L(3,4,-7)$, $\vec{u}_L = (1,-1,1)$.
2. **Dirección común:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (-1-1,\ 3-1,\ 1+3) = (-2,2,4)$; se usa $\vec{w} = (1,-1,-2)$, $|\vec{w}| = \sqrt{6}$.
3. **a)** $\overrightarrow{P_LP_R} = (-2,-6,8)$, $\overrightarrow{P_LP_R} \cdot \vec{w} = -2+6-16 = -12$:

$$d = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

4. **b)** Los planos con normal $\vec{w}$ que contienen a cada recta son $x-y-2z = 13$ (por P_L: $3-4+14$) y $x-y-2z = 1$ (por P_R: $1+2-2$). El equidistante tiene el término medio: $x-y-2z = 7$. Comprobación: su distancia a P_L es $\frac{|13-7|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, la mitad de d.
5. **c)** Perpendicular a las dos: dirección $\vec{w}$. $P:\ \vec{p} = (2,3,-1) + t(1,-1,-2)$.

Resultado: $d = 2\sqrt{6}$; $\pi:\ x-y-2z-7 = 0$; $P:\ \vec{p} = (2,3,-1) + t(1,-1,-2)$.

Ejercicio 3.5.9 · Intersección de dos rectas, plano que las contiene y distancia

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas $L:\ 1-x = \frac{y-3}{2};\ z = 4$ y $R:\ \vec{p} = (4-t,\ 1-2t,\ 2+2t)$. Determine: a) si existen, las coordenadas del punto I de intersección de L y R; b) una ecuación vectorial del plano π que contiene a L y a R; c) la distancia del punto $B(3,4,5)$ a L.

Resolución.

1. **Datos:** $L:\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2}$, $z = 4$: $P_L(1,3,4)$, $\vec{u}_L = (-1,2,0)$. R: $P_R(4,1,2)$, $\vec{u}_R = (-1,-2,2)$.
2. **a)** $1-s = 4-t$, $3+2s = 1-2t$, $4 = 2+2t$. De la tercera, $t = 1$; de la primera, $s = -2$; en la segunda, $3-4 = -1 = 1-2$: se cumple. $I(3,-1,4)$.
3. **b)** Se cortan; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4)+r(-1,2,0)+s(-1,-2,2)$. (Su normal es $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (4,2,4)$: $2x+y+2z-13 = 0$.)
4. **c)** $\overrightarrow{P_LB} = (2,1,1)$,

$$\overrightarrow{P_LB} \times \vec{u}_L = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,5), \qquad d = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}.$$

Resultado: $I(3,-1,4)$; $\pi:\ \vec{p} = (3,-1,4) + r(-1,2,0) + s(-1,-2,2)$; $d = \sqrt{6}$.

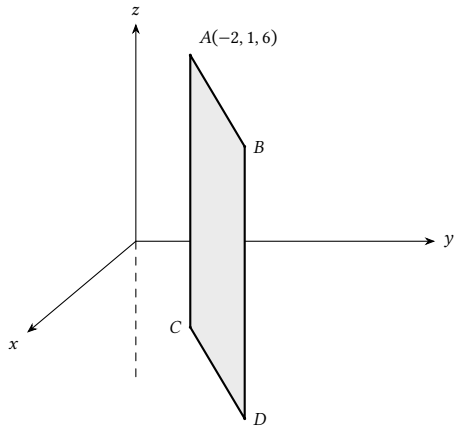
Ejercicio 3.5.10 · Plano perpendicular al plano XZ y distancia del origen a una recta

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 3.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-4}{8} = \frac{-y-1}{5} = \frac{z+1}{3}$. Obtenga: a) la ecuación cartesiana del plano π que es perpendicular al plano coordenado XZ y contiene a la recta L; b) la distancia del origen a la recta L.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{2x-4}{8} = \frac{x-2}{4}$ y $\frac{-y-1}{5} = \frac{y+1}{-5}$: $P_0(2,-1,-1)$, $\vec{u} = (4,-5,3)$.



Resolución.

1. B**:** $|\vec{v}| = 5$, así que $\overrightarrow{AB} = 10 \cdot \frac{(4,3,0)}{5} = (8,6,0)$ (en la figura B está a la derecha de A): $B = (6,7,6)$.
2. C**:** C está 10 unidades abajo de A: $\overrightarrow{AC} = (0,0,-10)$, $C = (-2,1,-4)$.
3. D**:** $D = B + \overrightarrow{AC} = (6,7,-4)$. Comprobación: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ y los dos miden 10.
4. **b)** $\overrightarrow{BC} = (-8,-6,-10)$, $\overrightarrow{CD} = (8,6,0)$: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -64-36 = -100$, $|\overrightarrow{CD}|^2 = 100$, así que $\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{CD}}\,\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CD} = (-8,-6,0)$.

Resultado: a) $B(6,7,6)$, $C(-2,1,-4)$, $D(6,7,-4)$; b) $(-8,-6,0)$.

2.7 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.7.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 2.

Sea el triángulo T cuyos vértices son el origen $O(0,0,0)$ y los puntos A y B, que están sobre los ejes x y y respectivamente. Determine unas coordenadas de A y de B tales que el área de T sea igual a 4 y la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

Resultado: $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$, o bien $A(-4,0,0)$ y $B(0,-2,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 2.7.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 2.

Sean los puntos $P(1,2,-3)$, $Q(0,1,2)$, $R(-1,3,-2)$ y S. a) Compruebe que P, Q y R son tres de los cuatro vértices de un rectángulo cuyo ángulo recto tiene vértice en R. b) Determine las coordenadas del cuarto vértice S.

Resultado: a) $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$; b) $S(2,0,1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.3

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 2.

Sean $\vec{a}=(6,-4,4)$, $\vec{b}=(2,1,-2)$ y $\vec{c}=(2,2,c_3)$. a) Determine c_3 tal que $\vec{a}$ sea perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$. b) Obtenga el área A del paralelogramo que tiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como lados no paralelos.

Resultado: a) $c_3=-1$; b) $A=6\sqrt{17}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 2.

Sean $\vec{a}=3\hat{\imath}+2\hat{k}$, $\vec{b}=(-4,1,3)$, $\vec{c}=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}+10\hat{k}$ y $\vec{d}=3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-6\hat{k}$, donde $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{d}$ y $-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}=-36$. Determine las componentes de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

Resultado: $\vec{u}=(-1,1,2)$, $\vec{v}=(-6,-12,12)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.5

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 3.

Sean los puntos $A(2,0,-2)$, $B(4,2,-1)$, $C(c_1,0,2)$ y $D(4,2,d_3)$. Determine c_1 y d_3 para que los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean paralelos.

Resultado: $c_1=2$, $d_3=3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.6

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 4.

Sean $\vec{v}=-\hat{\imath}+a\hat{k}$ y $\vec{u}=\hat{\imath}+b\hat{\jmath}+\hat{k}$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, obtenga el conjunto de valores de a y el de b para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean dos lados de un paralelogramo de área 6.

Resultado: $a=1$; $b\in\{-4,\ 4\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.7

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 5.

Sean los puntos $A\left(4\sqrt{2},0,-4\right)$ y $B\left(0,4\sqrt{2},-4\right)$, y sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Determine: a) la componente vectorial del vector de posición de B sobre el vector $\hat{\jmath}$; b) la componente escalar del vector de posición de A sobre el vector de posición de C.

Resultado: a) $\left(0,4\sqrt{2},0\right)$; b) $4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

3. **Perpendicular común:** $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_L=6s-4t-2=0$ y $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_M=4s-8t+4=0$. De la segunda, $s=2t-1$; en la primera, $8t-8=0$: $t=1$, $s=1$.
4. **a)** $B=P(1)=(4,1,3)$. (El punto de M más cercano es $Q(1)=(2,1,5)$; $\overrightarrow{QB}=(2,0,-2)$ es perpendicular a las dos rectas y la distancia entre ellas es $2\sqrt{2}$.)
5. **b)** $\vec{n}=\vec{u}_L\times\vec{u}_M=(4-0,\ 2-2,\ 0-4)=(4,0,-4)$, o $(1,0,-1)$. Por A: $(x-1)-(z-0)=0$.

Resultado: $B(4,1,3)$; $\pi:\ x-z-1=0$.

Ejercicio 3.5.7 · Distancia entre rectas que se cruzan y plano por dos rectas

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 3.

Sean las rectas

$$L_1:\ \frac{1-x}{-2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+5}{3},\qquad L_2:\ \vec{p}=(5+2t,\ -5-3t,\ 1+5t),\qquad L_3:\ \begin{cases}x=5+4r\\ y=2+2r\\ z=-4+r\end{cases}$$

Determine: a) la distancia entre L_1 y L_2; b) una ecuación cartesiana del plano π al que pertenecen L_1 y L_3; c) las coordenadas del punto de intersección del plano $z+4=0$ con la recta L_2.

Resolución.

1. **Datos:** $\frac{1-x}{-2}=\frac{x-1}{2}$: $P_1(1,0,-5)$, $\vec{u}_1=(2,-2,3)$; $P_2(5,-5,1)$, $\vec{u}_2=(2,-3,5)$; $P_3(5,2,-4)$, $\vec{u}_3=(4,2,1)$.
2. **a)** $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=(-10+9,\ 6-10,\ -6+4)=(-1,-4,-2)$, de módulo $\sqrt{21}$; $\overrightarrow{P_1P_2}=(4,-5,6)$ y $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)=-4+20-12=4\neq0$: se cruzan, y

$$d=\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

3. **b)** $\vec{u}_1\times\vec{u}_3=(-2-6,\ 12-2,\ 4+8)=(-8,10,12)$, o $(4,-5,-6)$. Son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_3}=(4,2,1)$ y $(4,2,1)\cdot(4,-5,-6)=16-10-6=0$. Por P_1: $4(x-1)-5y-6(z+5)=0$, es decir, $4x-5y-6z-34=0$. Comprobación con P_3: $20-10+24-34=0$.
4. **c)** $1+5t=-4\Rightarrow t=-1$: $(5-2,\ -5+3,\ 1-5)=(3,-2,-4)$.

Resultado: $d=\frac{4\sqrt{21}}{21}$; $\pi:\ 4x-5y-6z-34=0$; $(3,-2,-4)$.

Ejercicio 3.5.8 · Plano equidistante y perpendicular común

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 6.

Sean las rectas

$$L:\ \vec{r}(t)=(3,4,-7)+t\,(1,-1,1)\qquad\text{y}\qquad R:\ \frac{x-1}{3}=\frac{-2-y}{-1}=\frac{2z-2}{2}.$$

Determine: a) la distancia entre L y R; b) la ecuación cartesiana del plano π que es paralelo a L y a R y equidista de ellas; c) una ecuación vectorial de la recta P perpendicular a L y a R que contiene al punto $A(2,3,-1)$.

Resolución.

Resultado: $\pi_1:\ 4x-3y=0$, $\pi_2:\ y=4$; $\theta=\operatorname{ang\,cos}\frac{3}{5}$; $L:\ x=3,\ y=4,\ z=t$; $d=4$.

Ejercicio 3.5.5 · Recta de intersección, plano por dos rectas y ángulo recta–plano

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 3.

Sean la recta L, intersección de los planos $\pi_1:\ x-3y+z+2=0$ y $\pi_2:\ x-4y+2z+1=0$, y el plano π_3 que contiene a las rectas $L_1:\ \vec{p}=(1,1,4)+t(1,-1,5)$ y $L_2:\ \vec{p}=(-1,-1,-2)+r(1,3,1)$. a) Determine las coordenadas del punto I de intersección de L y π_3. b) Obtenga el coseno de uno de los ángulos que forman L y π_3.

Resolución.

1. **Recta L:** $(1,-3,1)\times(1,-4,2)=(-6+4,\ 1-2,\ -4+3)=(-2,-1,-1)$; se toma $\vec{u}=(2,1,1)$. Con $z=0$: $x-3y=-2$, $x-4y=-1$, de donde $y=-1$, $x=-5$. $L:\ \vec{p}=(-5,-1,0)+t(2,1,1)$.
2. **Plano π_3:**

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&-1&5\\1&3&1\end{vmatrix}=(-1-15,\ 5-1,\ 3+1)=(-16,4,4).$$

   Se comprueba que L_1 y L_2 son coplanares: $\overrightarrow{P_1P_2}=(-2,-2,-6)$ y $(-2,-2,-6)\cdot(-16,4,4)=32-8-24=0$. Con $\vec{n}=(4,-1,-1)$ y $(1,1,4)$: $4(x-1)-(y-1)-(z-4)=0$, es decir, $\pi_3:\ 4x-y-z+1=0$.
3. **a)** En π_3: $4(-5+2t)-(-1+t)-t+1=6t-18=0$, $t=3$. $I(1,2,3)$; comprobación: $4-2-3+1=0$.
4. **b)** $\vec{u}\cdot\vec{n}=8-1-1=6$, $|\vec{u}|=\sqrt{6}$, $|\vec{n}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad\cos\varphi=\sqrt{1-\tfrac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Resultado: $I(1,2,3)$; $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$, con φ el ángulo entre L y π_3 (el ángulo entre L y la normal tiene coseno $\frac{\sqrt{3}}{3}$).

Ejercicio 3.5.6 · Punto más cercano entre dos rectas y plano paralelo a ambas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Sean el punto $A(1,-3,0)$ y las rectas

$$L:\ x-3=\frac{-y-1}{-2}=\frac{2-z}{-1}\qquad\text{y}\qquad M:\ \vec{p}=(0,1,3)+t\,(2,0,2),\ t\in\mathbb{R}.$$

Determine: a) las coordenadas del punto B de la recta L más cercano a M; b) una ecuación cartesiana del plano π paralelo a L y a M que contiene al punto A.

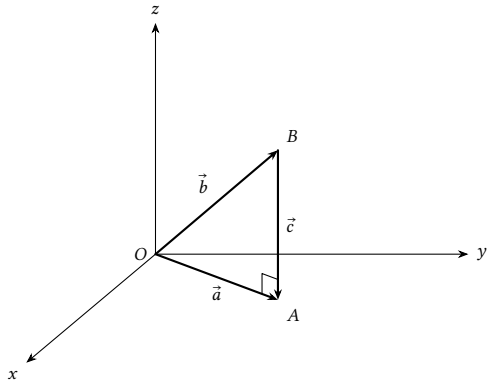
Resolución.

1. **Datos de L:** $\frac{-y-1}{-2}=\frac{y+1}{2}$ y $\frac{2-z}{-1}=z-2$: $L:\ x-3=\frac{y+1}{2}=z-2$, con $P_L(3,-1,2)$ y $\vec{u}_L=(1,2,1)$. De M: $P_M(0,1,3)$, $\vec{u}_M=(2,0,2)$.
2. **Puntos genéricos:** $P(s)=(3+s,\ -1+2s,\ 2+s)\in L$ y $Q(t)=(2t,\ 1,\ 3+2t)\in M$, con $\overrightarrow{QP}=(3+s-2t,\ -2+2s,\ -1+s-2t)$.

Ejercicio propuesto 2.7.8

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 6.

En la figura, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ está en el plano XY, $\vec{c}$ va de B a A y $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, con $|\vec{a}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ y $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$; b) el coseno del ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{a}$; c) el área del triángulo ABO.



Resultado: a) $\vec{a}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 142.

Ejercicio propuesto 2.7.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 5.

Un paralelepípedo P tiene aristas concurrentes en el vértice $A(3,-4,-2)$ que terminan en los puntos $B(-3,-3,0)$, $C(2,-8,0)$ y $D(-1,-7,0)$. Determine: a) el volumen de P; b) el coseno del ángulo que forman las aristas $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

Resultado: a) 20 unidades cúbicas; b) $\cos\theta=\frac{20}{\sqrt{609}}=\frac{20\sqrt{609}}{609}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 2.7.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 6.

Sean $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}$ el vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, con $A(-3,0,1)$ y $B(-5,1,5)$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$; b) un vector unitario $\vec{w}$ perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo P que tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados concurrentes.

Resultado: a) $\frac{4}{7}(-2,1,4)$; b) $\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ (o su opuesto); c) $5\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 2.7.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 5.

Sea el triángulo T de vértices $A(-1,0,2)$, $B(2,1,-1)$ y $C(1,-2,2)$. Determine: a) el coseno del ángulo A; b) la componente escalar de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{BC}$; c) el área de T.

Resultado: a) $\frac{2}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{19}$; b) $-\frac{15}{\sqrt{19}} = -\frac{15\sqrt{19}}{19}$; c) $\sqrt{34}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 2.7.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-1, tipo A, problema 5.

Los vértices de un tetraedro son $A(4,1,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,3,4)$ y $D(6,d_2,1)$. Obtenga el valor de d_2 para que el volumen del tetraedro sea de 5 unidades cúbicas.

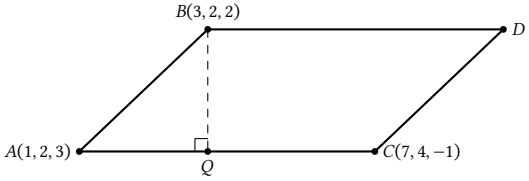
Resultado: $d_2 = 5$ o $d_2 = -5$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 143.

Ejercicio propuesto 2.7.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 5.

Sea el paralelogramo de la figura, con $A(1,2,3)$, $B(3,2,2)$ y $C(7,4,-1)$; Q es el pie de la perpendicular desde B al lado $\overline{AC}$. Obtenga: a) las coordenadas de Q; b) el área del triángulo ABC.



Resultado: a) $Q\left(\frac{19}{7}, \frac{18}{7}, \frac{13}{7}\right)$; b) $\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 2.7.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2026-2, tipo A, problema 5.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coinciden con los lados no paralelos de un paralelogramo de 6 unidades de área; además $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y forman un ángulo agudo. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resultado: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\sqrt{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

2.8 Errores frecuentes

1. **Restar al revés.** $\overrightarrow{AB} = B - A$ (final menos inicial). Un signo mal en $\overrightarrow{AB}$ cambia componentes, ángulos y coordenadas de puntos.

5. **c)** $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 - 3 - 4 = -9$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{29}$:

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{87}} = \frac{3\sqrt{87}}{29}.$$

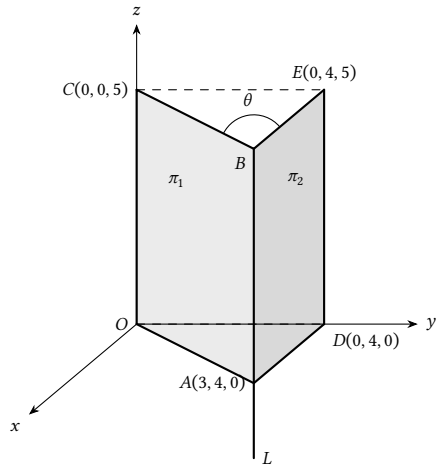
(El ángulo obtuso entre las normales tiene coseno $-\frac{3\sqrt{87}}{29}$.)

Resultado: $L:\ \vec{p} = (-1,3,0) + t(1,-2,-1)$; $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; $\cos\theta = \frac{3\sqrt{87}}{29}$.

Ejercicio 3.5.4 · Los dos planos de una figura

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 5.

Sean los planos π_1 y π_2 de la figura. Obtenga: a) la ecuación cartesiana de cada uno; b) el ángulo θ que forman; c) unas ecuaciones paramétricas de la recta L, intersección de π_1 y π_2; d) la distancia del origen a π_2.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** π_1 pasa por O, $C(0,0,5)$ y $A(3,4,0)$; π_2, por $D(0,4,0)$, $E(0,4,5)$ y A. B está sobre la vertical de A, a la altura de C y E: $B(3,4,5)$.
2. **a)** π_1**:** $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = (0,0,5) \times (3,4,0) = (-20,15,0)$, o sea $\vec{n}_1 = (4,-3,0)$. Como pasa por el origen: $\pi_1:\ 4x - 3y = 0$. Comprobación con A: $12 - 12 = 0$.
3. **a)** π_2**:** D, E y A tienen $y = 4$: $\pi_2:\ y - 4 = 0$, $\vec{n}_2 = (0,1,0)$. (Con productos: $\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DA} = (0,0,5) \times (3,0,0) = (0,15,0)$.)
4. **b)** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \dfrac{3}{5}$. Lo confirma la figura: $\overrightarrow{BC} = (-3,-4,0)$, $\overrightarrow{BE} = (-3,0,0)$, $\cos\theta = \frac{9}{5\cdot 3} = \frac{3}{5}$. Entonces $\theta = \operatorname{ang}\cos\frac{3}{5} \approx 53.1^\circ$.
5. **c)** $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (4,-3,0) \times (0,1,0) = (0,0,4)$: dirección $\hat{k}$, por A: $x = 3$, $y = 4$, $z = t$.
6. **d)** $d(O,\pi_2) = \dfrac{|0-4|}{1} = 4$.

1. **Forma simétrica ordenada:**

$$L:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{3},\qquad R:\ \frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+10}{-3}.$$

   Entonces $P_L(4,2,-5)$, $\vec{u}_L=(-1,4,3)$; $P_R(6,2,-10)$, $\vec{u}_R=(1,-4,-3)=-\vec{u}_L$.
2. **Posición:** $\vec{u}_R=-\vec{u}_L$: son paralelas (se cumple). P_R no está en L ($\frac{6-4}{-1}=-2\neq\frac{2-2}{4}=0$): no coinciden.
3. **Normal del plano:** con $\overrightarrow{P_LP_R}=(2,0,-5)$,

$$\vec{u}_L\times\overrightarrow{P_LP_R}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&4&3\\2&0&-5\end{vmatrix}=(-20,\ 1,\ -8).$$

4. **a)** Con $\vec{n}=(20,-1,8)$ y P_L: $20(x-4)-(y-2)+8(z+5)=0$, es decir, $20x-y+8z-38=0$. Comprobación con P_R: $120-2-80-38=0$.
5. **b)** Distancia de P_R a L: el producto cruz ya está hecho,

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_LP_R}\times\vec{u}_L|}{|\vec{u}_L|}=\frac{\sqrt{400+1+64}}{\sqrt{1+16+9}}=\frac{\sqrt{465}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{465}{26}}.$$

Resultado: $\pi:\ 20x-y+8z-38=0$; $d=\sqrt{\frac{465}{26}}=\frac{\sqrt{12090}}{26}\approx 4.2$.

Ejercicio 3.5.3 · Recta intersección de dos planos y punto más próximo

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Sean el punto $Q(3,1,-2)$ y los planos $\pi_1:\ -x-y+z+2=0$ y $\pi_2:\ 2x+3y-4z-7=0$. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L intersección de π_1 y π_2; b) las coordenadas del punto M de L más próximo a Q; c) el coseno del ángulo entre π_1 y π_2.

Resolución.

1. **Dirección:** $\vec{n}_1=(-1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(2,3,-4)$,

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&-1&1\\2&3&-4\end{vmatrix}=(4-3,\ 2-4,\ -3+2)=(1,-2,-1).$$

2. **Punto:** con $z=0$: $x+y=2$ y $2x+3y=7$, de donde $y=3$, $x=-1$. $P_0(-1,3,0)$ cumple las dos ecuaciones.
3. **a)** $L:\ \vec{p}=(-1,3,0)+t\,(1,-2,-1)$.
4. **b)** $\overrightarrow{P_0Q}=(4,-2,-2)$; $t=\dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\dfrac{4+4+2}{6}=\dfrac{5}{3}$. Entonces

$$M=\left(-1+\tfrac{5}{3},\ 3-\tfrac{10}{3},\ -\tfrac{5}{3}\right)=\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{5}{3}\right).$$

   Comprobación: $\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u}=\frac{7}{3}-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=0$.

2. **Confundir las dos componentes.** La escalar es un número, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$; la vectorial es un vector, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$. Y se divide entre el módulo del vector *sobre* el que se proyecta.
3. **Área de paralelogramo por diagonales sin el $\frac{1}{2}$.** Con las diagonales, $A=\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$; con los lados, $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$.
4. **Tomar una diagonal como lado.** En el ejercicio 2.6.6 $\overrightarrow{BD}$ es diagonal y en el 2.6.15 $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$ también; se lee la figura antes de multiplicar.
5. **Olvidar el valor absoluto o el $\frac{1}{6}$.** El producto mixto puede salir negativo; el volumen es su valor absoluto, y el del tetraedro es un sexto. Con parámetro, $|\det|=V$ da dos ecuaciones.
6. **Ángulo interior con un vector al revés.** El ángulo en A usa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$; con $\overrightarrow{BA}$ sale el suplemento (coseno con el signo cambiado).
7. **Cuarto vértice con la fórmula equivocada.** $D=A+C-B$ vale si B es el vértice opuesto a D. Se identifica primero cuál es el vértice opuesto (en el propuesto 2.7.2, R).
8. **Perder una solución.** «Paralelo a $\vec{v}$ con módulo 5», «unitario perpendicular» y los parámetros cuadráticos tienen dos respuestas; se dan las dos o se dice que hay dos.
9. **Errores en el determinante.** El término de $\hat{\jmath}$ lleva signo menos: $-(a_1b_3-a_3b_1)$. Se comprueba que $\vec{a}\times\vec{b}$ sea perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

2.9 Formulario de emergencia de la unidad

- $\overrightarrow{AB}=B-A\cdot|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\cdot\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot$ punto medio $\frac{1}{2}(A+B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\hat{v}$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\cdot\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
- $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.
- $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a}\times\vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D=A+C-B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M-P$.

2.10 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe en componentes todos los vectores y segmentos del enunciado ($\overrightarrow{AB}=B-A$) antes de calcular nada.
2. Si hay figura, cópiala y marca qué vectores son lados, cuáles diagonales y el sentido de cada flecha.
3. Calcula una sola vez los productos que se repiten ($\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$, módulos) y úsalos en todos los incisos.

4. Escribe la fórmula antes de sustituir: comp, $\overrightarrow{\text{comp}}$, área o volumen. Así se ve si falta un $\frac{1}{2}$, un $\frac{1}{6}$ o un valor absoluto.
5. Comprueba: el producto cruz es perpendicular a los dos factores, el punto obtenido cumple la condición que no usaste, los parámetros dan el área o volumen pedidos.
6. Deja los resultados exactos (radicales racionalizados o no, pero simplificados) con sus unidades.

Un producto cruz bien hecho resuelve la mitad de los problemas de esta unidad: área, vector perpendicular, paralelismo y volumen salen de él.

2.11 Con la computadora

Con `Matrix` un vector es una columna: `dot` es el producto escalar, `cross` el vectorial y `norm` el módulo. El programa calcula, para $\vec{a} = (2, -1, 3)$ y $\vec{b} = (1, 4, -2)$, el producto escalar, el producto vectorial, el área del paralelogramo que forman y las componentes escalar y vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$. En ingeniería, los mismos cálculos dan la resultante de dos fuerzas ($\vec{a} + \vec{b}$), el trabajo de una fuerza en un desplazamiento ($\vec{F} \cdot \vec{d}$) y su momento ($\vec{r} \times \vec{F}$). El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import Matrix, sqrt

a = Matrix([2, -1, 3])
b = Matrix([1, 4, -2])
p = a.dot(b)                        # producto escalar
c = a.cross(b)                      # producto vectorial
area = c.norm()                     # área del paralelogramo
comp = p / b.norm()      # componente escalar sobre b
vcomp = p / b.dot(b) * b  # componente vectorial
print(p, c.T, area, comp, vcomp.T)
assert p == -8 and c == Matrix([-10, 7, 9])
assert area == sqrt(230) and comp == -8/sqrt(21)
```


Se cumple: las rectas están en un mismo plano y, como no son paralelas, **se cortan**. No se cruzan.

4. **Punto de intersección:** se igualan las paramétricas con parámetros distintos:

$$1 + t = \lambda, \qquad 2 - t = 7 + 3\lambda, \qquad 1 - 2t = 4 - \lambda.$$

Con la primera en la segunda: $2 - t = 7 + 3 + 3t$, de donde $t = -2$ y $\lambda = -1$.
5. **Comprobación** en la tercera: $1 - 2(-2) = 5$ y $4 - (-1) = 5$. Se cumple.
6. **Punto:** con $t = -2$ en L_1: $(1 - 2,\ 2 + 2,\ 1 + 4) = (-1, 4, 5)$; con $\lambda = -1$ en L_2: $(-1,\ 4,\ 5)$. Coinciden.

Resultado: las rectas se cortan en $I(-1, 4, 5)$. No son paralelas (no hay un único plano que pedir por ese caso) ni se cruzan (su distancia es 0).

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Plano por tres puntos y distancia de un punto

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 6.

Los puntos $A(1, -2, 0)$, $B(3, -1, 1)$ y $C(4, 1, -2)$ pertenecen al plano π. Determine: a) una ecuación vectorial de π y sus ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana de π; c) la distancia del punto $P(-2, 5, 1)$ a π.

Resolución.

1. **Vectores del plano:** $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, -2)$.
2. **a)** $\pi:\ \vec{p} = (1, -2, 0) + r\,(2, 1, 1) + s\,(3, 3, -2)$; paramétricas $x = 1 + 2r + 3s$, $y = -2 + r + 3s$, $z = r - 2s$.
3. **Normal:**

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 3,\ 3 + 4,\ 6 - 3) = (-5, 7, 3).$$

4. **b)** $-5(x - 1) + 7(y + 2) + 3z = 0$, es decir, $5x - 7y - 3z - 19 = 0$. Comprobación con C: $20 - 7 + 6 - 19 = 0$.
5. **c)** $d = \dfrac{|5(-2) - 7(5) - 3(1) - 19|}{\sqrt{25 + 49 + 9}} = \dfrac{67}{\sqrt{83}} = \dfrac{67\sqrt{83}}{83}$.

Resultado: $\vec{p} = (1, -2, 0) + r(2, 1, 1) + s(3, 3, -2)$; $\pi:\ 5x - 7y - 3z - 19 = 0$; $d = \frac{67\sqrt{83}}{83}$.

Ejercicio 3.5.2 · Plano que contiene dos rectas paralelas y su distancia

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

Sean las rectas

$$L:\ \ 4 - x = \frac{2y - 4}{8} = \frac{z + 5}{3} \qquad \text{y} \qquad R:\ \ x - 6 = \frac{2 - y}{4} = \frac{-2z - 20}{6}.$$

Determine: a) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L y a R; b) la distancia entre L y R.

Resolución.

3.3.7 Punto más cercano, simétrico y perpendicular común

1. **Punto de una recta más cercano a Q:** $M = P_0 + t\,\vec{u}$ con $t = \dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ (es decir, $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u}=0$).
2. **Punto de un plano más cercano a Q:** recta por Q con dirección $\vec{n}$; su intersección con el plano (3.3.6).
3. **Simétrico:** $Q' = 2M - Q$.
4. **Puntos más cercanos entre dos rectas que se cruzan:** con $P(s)\in L_1$ y $Q(t)\in L_2$, pide $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_1 = 0$ y $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_2 = 0$; el sistema da s y t. La recta PQ es la perpendicular común, de dirección $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$.

3.3.8 Puntos o planos a una distancia dada

1. Escribe el punto buscado con el parámetro de su recta, $P(t)$, o el plano buscado con su incógnita, $Ax+By+Cz+D=0$.
2. Plantea la distancia con la fórmula que toca e iguálala al dato.
3. Un valor absoluto da dos ecuaciones ($\pm$); una distancia entre puntos se eleva al cuadrado. Casi siempre hay dos soluciones: escribe las dos.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Posición relativa de dos rectas

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 4.

Sean las rectas

$$L_1:\ \vec{p} = (1,2,1) + t\,(1,-1,-2) \qquad \text{y} \qquad L_2:\ \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

En caso de que L_1 y L_2 sean paralelas, obtenga la ecuación cartesiana del plano que las contiene; en caso de que se crucen, calcule la distancia entre ellas; en caso de que se corten, determine las coordenadas de su punto de intersección.

Resolución.

1. **Datos:** $P_1(1,2,1)$, $\vec{u}_1 = (1,-1,-2)$; de las paramétricas de L_2 con $\lambda=0$, $P_2(0,7,4)$, y $\vec{u}_2 = (1,3,-1)$.
2. **¿Son paralelas?**

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1+6)\,\hat{\imath} - (-1+2)\,\hat{\jmath} + (3+1)\,\hat{k} = (7,-1,4) \neq \vec{0}.$$

   No se cumple: no son paralelas. (También se ve directo: $\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$ pediría $k=1$ y $k=-\frac{1}{3}$.)
3. **¿Son coplanares?** $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,5,3)$ y

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2) = -7 - 5 + 12 = 0.$$

Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 3). «Aplicar los conceptos de recta y plano, a través de sus diferentes ecuaciones, para visualizar las relaciones entre estos elementos geométricos utilizando software.»

Instrucciones de emergencia

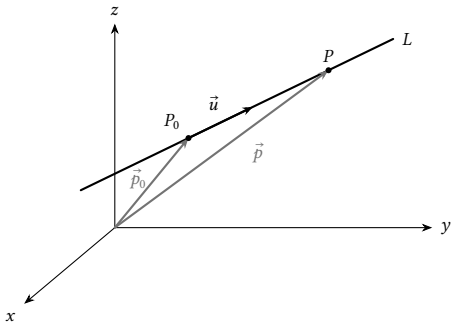
- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, uno o dos problemas en los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010 (13 problemas) y uno en los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016: plano que contiene dos rectas o una recta y un punto, distancias de un punto a un plano o a una recta, rectas y planos perpendiculares, ángulos e intersecciones.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 (40 min): ecuaciones de la recta y del plano, paralelismo, ángulos y distancias.
  2. Aprende los procedimientos 3.3.2 (plano), 3.3.3 (posición de dos rectas) y 3.3.4 (distancias).
  3. Sigue el ejemplo de la sección 3.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve con cronómetro, 15 min cada uno, los ejercicios 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.11 y 3.5.12.

3.1 Conceptos y expresiones

Todo lo de esta unidad se reduce a dos datos por objeto: una recta queda determinada por **un punto y un vector director**; un plano, por **un punto y un vector normal**. Los productos punto, cruz y mixto (Unidad 2.1.6) hacen el resto.

3.1.1 La recta

La recta L que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (a,b,c) \neq \vec{0}$ (*vector director*) es el conjunto de puntos P tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{u}$.



- **Ecuación vectorial:** $L:\ \vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$.
- **Ecuaciones cartesianas en forma simétrica** (si $a, b, c \neq 0$):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

  Si una componente es cero, esa coordenada es constante y se escribe aparte: con $\vec{u} = (a, b, 0)$, $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$; $z = z_0$.
- **Forma general** (intersección de dos planos no paralelos):

$$L:\ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

  El Plan 2016 no la nombra, pero la usa en «la recta intersección de dos planos».

Observación (leer la forma simétrica). Antes de leer el punto y el vector, cada fracción debe quedar como $\frac{x-x_0}{a}$, con coeficiente 1 en la variable. Así,

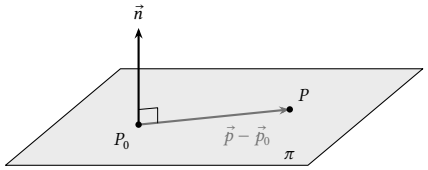
$$4 - x = \frac{2y - 4}{8} = \frac{z + 5}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 5}{3},$$

con punto $(4, 2, -5)$ y vector $(-1, 4, 3)$: en $4 - x$ se cambia el signo del denominador, y en $\frac{2y-4}{8}$ se divide numerador y denominador entre 2.

Dos puntos A y B dan la recta con $P_0 = A$ y $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

3.1.2 El plano

El plano π que pasa por P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ (*vector normal*) es el conjunto de puntos P con $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.



3. **¿Se cortan?** Calcula $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$. Si vale 0, se cortan: iguala las paramétricas (con parámetros *distintos*, t y λ), resuelve con dos ecuaciones y comprueba la tercera.
4. **¿Se cruzan?** Si el producto mixto no es cero: $d = \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$.
5. **Paralelas:** si P_2 está en L_1, coinciden; si no, el plano que las contiene tiene $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2}$, y su distancia es la de P_2 a L_1.

En el examen escribe cada caso con «se cumple» o «no se cumple»: así se ve que se revisaron los tres.

3.3.4 Distancias

1. **Punto–plano:** sustituye el punto en $Ax + By + Cz + D$, toma valor absoluto y divide entre $|\vec{n}|$.
2. **Punto–recta:** $\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}$, su módulo, entre $|\vec{u}|$.
3. **Recta–recta:** primero la posición relativa (3.3.3); si se cruzan, la fórmula del producto mixto; si son paralelas, punto–recta.
4. **Plano–plano:** comprueba que sean paralelos (normales proporcionales); escribe los dos con el *mismo* $\vec{n}$ y usa $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$, o la distancia de un punto de uno al otro. Si no son paralelos, $d = 0$.
5. Racionaliza: $\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$.

3.3.5 Ángulos y problemas con parámetro

1. Identifica qué se compara: rectas $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, planos $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ o recta y plano $(\vec{u}, \vec{n})$.
2. Usa coseno en los dos primeros casos y **seno** en recta–plano.
3. **Con parámetro:** deja el parámetro en los vectores, escribe la fórmula con el valor conocido ($\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) y eleva al cuadrado para quitar el valor absoluto y la raíz. Resuelve la ecuación de segundo grado: casi siempre hay **dos** valores («el conjunto de valores»).
4. Para 90° no hace falta la fórmula: basta la condición de perpendicularidad de la tabla de 3.1.3, que es lineal en el parámetro.

3.3.6 Intersecciones

1. **Recta–plano:** sustituye las paramétricas de la recta en la ecuación cartesiana del plano, despeja t y sustitúyelo en la recta. Si la ecuación queda $0 = 0$, la recta está contenida en el plano; si queda $0 = k \neq 0$, es paralela.
2. **Recta–recta:** iguala las paramétricas con parámetros distintos; dos ecuaciones dan los parámetros, la tercera comprueba.
3. **Plano–plano:** la recta de 3.3.1, paso 3.
4. **Recta y un plano coordenado** (por ejemplo $z = -4$): iguala la coordenada y despeja t.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«valores de m (o B, h) para que formen 30°», «sean perpendiculares»	parámetro	3.3.5
«intersección de la recta con el plano», «de las rectas»	punto común	3.3.6
«punto más cercano», «más próximo», «simétrico», «perpendicular común»	pie de perpendicular	3.3.7
«punto de la recta que diste k unidades», «plano a distancia 7»	ecuación con valor absoluto	3.3.8

3.3 Procedimientos

3.3.1 Ecuaciones de una recta

1. **Por dos puntos** A, B: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $P_0 = A$.
2. **De simétricas a vectorial:** lleva cada fracción a la forma $\frac{x-x_0}{a}$ (coeficiente 1 en la variable); lee $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{u} = (a, b, c)$. Una ecuación aparte como $z = 4$ da componente 0.
3. **De forma general a vectorial:** $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Para el punto, da un valor a una variable (por ejemplo $z = 0$) y resuelve el sistema de 2×2 que queda. Comprueba el punto en *las dos* ecuaciones.
4. **Recta perpendicular a un plano** por un punto: $\vec{u} = \vec{n}$.
5. **Recta paralela a dos planos** (o perpendicular a dos rectas): $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (o $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$).

3.3.2 Ecuación de un plano

1. **Consigue un punto y dos vectores del plano**, no paralelos:
   - tres puntos A, B, C: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$;
   - un punto Q y una recta $(P_0, \vec{u})$ que no lo contiene: $\vec{u}$ y $\overrightarrow{P_0Q}$;
   - dos rectas que se cortan: $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ (antes comprueba que se cortan, 3.3.3);
   - dos rectas paralelas: $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ ($\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ es $\vec{0}$ y no sirve);
   - «paralelo a las rectas L y M»: $\vec{u}_L$ y $\vec{u}_M$;
   - «perpendicular al plano π_0»: $\vec{n}_0$ es uno de los vectores; «perpendicular al plano XZ»: $\hat{\jmath}$; «contiene al eje Y»: $\hat{\jmath}$ y el origen.
2. **Normal:** $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$; simplifica dividiendo entre un factor común.
3. **Ecuación:** $\vec{n} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$.
4. **Comprueba** con un punto que no usaste para el término independiente.
5. Si piden la vectorial o las paramétricas: $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$.

3.3.3 Posición relativa de dos rectas

1. **Datos:** $P_1, \vec{u}_1, P_2, \vec{u}_2$ (3.3.1).
2. **¿Paralelas?** Calcula $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Si es $\vec{0}$, se cumple; ve al paso 5.

- **Ecuación cartesiana:** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$, es decir, $Ax+By+Cz+D = 0$ con $D = -\vec{n} \cdot \vec{p}_0$. Los coeficientes de x, y, z son el vector normal.
- **Ecuación vectorial:** $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\,\vec{a} + s\,\vec{b}$, con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no paralelos y contenidos en el plano; $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + ra_1 + sb_1$, $y = y_0 + ra_2 + sb_2$, $z = z_0 + ra_3 + sb_3$.
- **Planos coordenados:** $XY:\ z = 0$, normal $\hat{k}$; $XZ:\ y = 0$, normal $\hat{\jmath}$; $YZ:\ x = 0$, normal $\hat{\imath}$. Un plano «perpendicular al plano XZ» contiene la dirección $\hat{\jmath}$; uno «paralelo al plano YZ» tiene normal $\hat{\imath}$.

De paramétricas a cartesiana: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ y un punto (el que se obtiene con $r = s = 0$). De cartesiana a vectorial: un punto que la satisfaga y dos vectores perpendiculares a $\vec{n}$ y no paralelos entre sí (por ejemplo, para $\vec{n} = (3, -1, 3)$: $(1, 3, 0)$ y $(0, 3, 1)$).

3.1.3 Paralelismo y perpendicularidad

Con $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vectores directores de rectas y $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ vectores normales de planos:

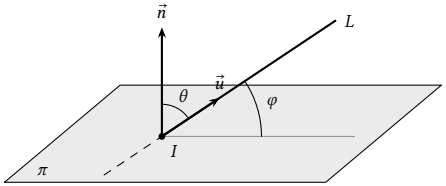
Objetos	Paralelos	Perpendiculares
Recta y recta	$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ ($\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$)	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
Plano y plano	$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ ($\vec{n}_1 = k\,\vec{n}_2$)	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
Recta y plano	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (la recta va «a lo largo» del plano)	$\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$ ($\vec{u}$ es normal al plano)

Observación. En recta–plano las condiciones se *invierten*: paralelismo con producto punto y perpendicularidad con producto cruz, porque se compara la dirección de la recta con la *normal* del plano. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto de la recta satisface la ecuación del plano, la recta está *contenida* en el plano.

3.1.4 Ángulos

- **Entre dos rectas:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|}$, con $0° \le \theta \le 90°$.
- **Entre dos planos:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$ (el ángulo entre sus normales).
- **Entre una recta y un plano:** es el ángulo φ entre la recta y su proyección sobre el plano, complemento del ángulo θ entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$. Por eso lleva **seno**:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}.$$



Sin valor absoluto se obtiene el ángulo obtuso $(180^\circ - \theta)$; los exámenes piden el agudo salvo que digan otra cosa. Un ángulo que no es notable se deja como ang cos $\frac{a}{b}$ o ang sen $\frac{a}{b}$.

3.1.5 Distancias

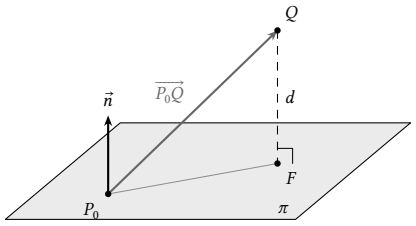
- **Punto Q a plano** $Ax + By + Cz + D = 0$:

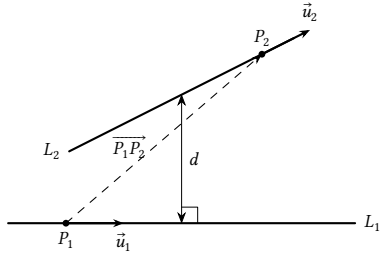
$$d = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = |\text{comp}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0Q}|.$$

- **Punto Q a recta** $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u}$: $d = \dfrac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ (altura del paralelogramo de lados $\overrightarrow{P_0Q}$ y $\vec{u}$).
- **Rectas que se cruzan** (L_1 por P_1 con $\vec{u}_1$; L_2 por P_2 con $\vec{u}_2$):

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}.$$

  Si se cortan, el numerador es cero y $d = 0$.
- **Rectas paralelas:** distancia de un punto de una a la otra (fórmula punto–recta).
- **Planos paralelos** $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (con el *mismo* vector normal): $d = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Si no son paralelos, se cortan y $d = 0$.
- **Recta paralela a un plano:** distancia de un punto de la recta al plano. Si la recta no es paralela, lo corta y $d = 0$.





3.1.6 Posición relativa e intersecciones

Dos rectas pueden ser:

- **paralelas** (o coincidentes): $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$; son coincidentes si además P_2 está en L_1;
- **se cortan** en un punto: no son paralelas y son coplanares, $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0$;
- **se cruzan** (no son paralelas ni se cortan): $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \neq 0$.

Las paralelas y las que se cortan determinan un plano; las que se cruzan, no.

Recta y plano: si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, se cortan en un punto; si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la recta es paralela al plano (sin puntos comunes) o está contenida en él. **Dos planos:** si no son paralelos, se cortan en una recta de dirección $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Punto más cercano y simétrico. El punto M de una recta (o de un plano) más cercano a Q es el pie de la perpendicular trazada desde Q: $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{u}$ (o $\overrightarrow{MQ} \parallel \vec{n}$). El *simétrico* de Q respecto a la recta o al plano es Q' con M punto medio de QQ': $\vec{q}\,' = 2\vec{m} - \vec{q}$.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«ecuación vectorial», «paramétricas», «forma simétrica» de una recta	pasar entre formas	3.3.1
«recta intersección de los planos», dos ecuaciones juntas	forma general a vectorial	3.3.1
«plano que contiene a los puntos», «al punto y a la recta», «a las rectas»	plano por puntos o rectas	3.3.2
«paralelo a las rectas», «perpendicular al plano XZ», «cuyo vector normal es perpendicular a»	plano con condición	3.3.2
«en caso de que sean paralelas… se crucen… se corten»	posición relativa	3.3.3
«distancia del punto al plano», «a la recta», «entre las rectas», «entre los planos»	una distancia	3.3.4
«ángulo entre», «coseno del ángulo»	ángulo	3.3.5

Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 4). «Aplicar los conceptos de superficies cuádricas y curvas en coordenadas polares y cartesianas, así como sus respectivas ecuaciones, para visualizarlos gráficamente empleando software.»

Contenido de esta parte. 4.2 Curvas en el espacio: ecuaciones vectorial y paramétricas. Representación gráfica empleando software.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema en cada uno de los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010: intervalo paramétrico y extensión en 6, ecuaciones cartesianas e identificación en 7, bosquejo en 4; en 8 de los 9 la curva está en un plano paralelo a uno coordenado. En los finales de Cálculo y Geometría Analítica (Plan 2016) salió una vez.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4B.1.3 y 4B.1.4 (20 min): identidades y cónicas en paramétricas.
  2. Aprende el procedimiento 4B.3.2 (eliminar el parámetro e identificar) y sigue el ejemplo 4B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4B.5.1, 4B.5.2 y 4B.5.6 con cronómetro: 15 min cada uno, con bosquejo.
  4. El intervalo paramétrico y la extensión sirven para saber qué arco de la cónica recorren las paramétricas, es decir, para la representación gráfica que pide el programa.

4B.1 Conceptos y expresiones

4B.1.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas

Una *curva* C en el espacio se describe con un parámetro t (o θ): a cada valor del parámetro le corresponde un punto $P(x, y, z)$ de la curva. En **forma vectorial**,

$$C: \quad \vec{p}(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k},$$

donde $\vec{p}$ es el vector de posición del punto. Las **ecuaciones paramétricas** son las mismas tres funciones escritas por separado:

$$C: \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Pasar de una forma a la otra es solo reescribir: las componentes del vector son las paramétricas. Una misma curva admite muchas parametrizaciones distintas.

Resultado: $L:\ x = 2s,\ y = 2s,\ z = s$ (corta a M en $F(4, 4, 2)$).

Ejercicio 3.5.16 · Plano en paramétricas, recta en forma general y recta perpendicular

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 2.

Sean el plano π y la recta L dados por

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 2 - r \\ z = 2r + s \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L: \begin{cases} x + y - z - \frac{10}{3} = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Determine el ángulo entre π y L. b) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de la recta R perpendicular a π que contiene al punto C, intersección de π con L.

Resolución.

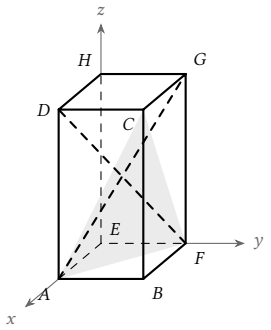
1. **Plano:** vectores $(1, -1, 2)$ y $(0, 0, 1)$; $\vec{n} = (1, -1, 2) \times (0, 0, 1) = (-1, -1, 0)$, o $(1, 1, 0)$. Por $(1, 2, 0)$: $\pi:\ x + y - 3 = 0$.
2. **Recta:** $\vec{u} = (1, 1, -1) \times (2, -3, -2) = (-2 - 3,\ -2 + 2,\ -3 - 2) = (-5, 0, -5)$, o $(1, 0, 1)$.
3. **a)** $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{|1 + 0 + 0|}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$: $\varphi = 30^\circ$.
4. **Punto** C**:** con $x + y = 3$ en la primera ecuación de L, $3 - z = \frac{10}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$; en la segunda, $2x - 3y = -\frac{2}{3}$; con $x + y = 3$: $y = \frac{4}{3}$, $x = \frac{5}{3}$. $C\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
5. **b)** R tiene dirección $\vec{n} = (1, 1, 0)$: $x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3}$; $z = -\frac{1}{3}$.

Resultado: $\varphi = 30^\circ$; $R:\ x - \frac{5}{3} = y - \frac{4}{3},\ z = -\frac{1}{3}$.

Ejercicio 3.5.17 · Rectas y plano en un prisma

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 4.

En el paralelepípedo recto de la figura, la base $ABFE$ es un cuadrado de lado 2 en el plano $z = 0$, sus caras son paralelas a los planos coordenados y la altura es el doble del lado de la base. Determine: a) una ecuación vectorial de la recta L_1 que contiene a los vértices A y G; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L_2 que contiene a F y a D; c) la ecuación cartesiana del plano π que contiene a A, F y C.



Resolución.

1. **Ejes:** el enunciado no da coordenadas; se elige el origen en E, con los ejes sobre EA, EF y EH (figura). Entonces $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $F(0,2,0)$, $D(2,0,4)$, $C(2,2,4)$, $G(0,2,4)$, $H(0,0,4)$. Con otra elección los números cambian, pero no el procedimiento.
2. **a)** $\overrightarrow{AG} = (-2,2,4)$, o $(-1,1,2)$: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0) + t(-1,1,2)$.
3. **b)** $\overrightarrow{FD} = (2,-2,4)$, o $(1,-1,2)$: $L_2:\ x = s,\ y = 2-s,\ z = 2s$.
4. **c)** $\overrightarrow{AF} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,2,4)$; $\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{AC} = (8,8,-4)$, o $(2,2,-1)$. Por A: $2(x-2) + 2y - z = 0$. Comprobación con C: $4+4-4-4 = 0$.

Resultado: $L_1:\ \vec{p} = (2,0,0)+t(-1,1,2)$; $L_2:\ x = s,\ y = 2-s,\ z = 2s$; $\pi:\ 2x+2y-z-4 = 0$ (con el origen en E).

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 4.

Sea el plano π, perpendicular al plano cartesiano XY, que contiene a la recta $L:\ \vec{p} = t\,(2,1,-3)$, y sea el plano π_0 que contiene a las rectas L_1 y L_2, paralelas a los vectores $\vec{u}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{k}$ y $\vec{u}_2 = 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + m\hat{k}$, respectivamente. Obtenga el conjunto de valores que puede tomar m para que π y π_0 formen un ángulo de 90°.

Resultado: $m = \frac{7}{2}$ (un solo valor).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 4.

Sea el plano π que contiene a la recta $L:\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3}$ y es perpendicular al plano XZ. a) Obtenga una ecuación cartesiana de π. b) Calcule la distancia del origen a π.

Resultado: $\pi:\ x - z + 8 = 0$; $d = 4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 4.

Sean la recta $L:\ \begin{cases} \frac{x}{h} = \frac{z}{\sqrt{3}} \\ y = 4 \end{cases}$ y el plano π que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y es paralelo al plano coordenado YZ. Determine el conjunto de valores de h para los cuales el ángulo entre L y π es de 60°.

Resultado: $h \in \{-3,\ 3\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 144.


```
assert simplify((x**2 + y**2 - 2*y)**2 - (x**2 + y**2)) == 0
# polo: r = 0
polo = solve(r, t)
print([p * 180 / pi for p in polo])
# simetría respecto a la recta a 90°: t → 180° − t
assert simplify(r.subs(t, pi - t) - r) == 0
```

8. **Cuadrante de θ al pasar a polares.** $\tan\theta = \frac{y}{x}$ da dos ángulos; el correcto es el del cuadrante del punto.
9. **Cartesiana con r suelta.** $x^2 + y^2 - 2y = r$ aún no es cartesiana: se eleva al cuadrado con $r^2 = x^2 + y^2$.

4A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $(r, \theta) = (r, \theta + 360°k) = (-r, \theta + 180° + 360°k)$; el polo es $(0, \theta)$ para todo θ.
- $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r, θ): eje polar $(r, -\theta)$; recta a $90°$ $(r, 180° - \theta)$; polo $(r, \theta + 180°) = (-r, \theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta \to -\theta$ o $(-r, 180° - \theta)$; recta a $90°$ $\theta \to 180° - \theta$ o $(-r, -\theta)$; polo $r \to -r$ o $\theta + 180°$. Suficientes, no necesarias.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $r = a\operatorname{sen}\theta$: centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r = a \pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a = b$, caracol con lazo si $a < b$.
- $r = a\operatorname{sen} n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta}$: foco en el polo; $e < 1$ elipse, $e = 1$ parábola, $e > 1$ hipérbola.

4A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Nombra la curva en el primer renglón (cardioide, caracol, rosa, lemniscata, circunferencia o cónica): eso ya dice su forma y su simetría.
2. Simetría: prueba 1, prueba 2 y, si las dos fallan, un contraejemplo con un punto notable.
3. Intersecciones: los dos ángulos de cada eje, el polo con $r = 0$, y revisa puntos repetidos.
4. Tabla con 4 o 5 ángulos notables y los puntos más alejados del polo ($|r|$ máximo).
5. Bosquejo sobre una rejilla polar, con los puntos calculados marcados y escritos.
6. Si piden la cartesiana, multiplica por r, sustituye y completa cuadrados.

Si el tiempo no alcanza, el nombre de la curva, sus intersecciones con los ejes y un bosquejo con tres puntos ya valen la mayor parte del problema.

4A.10 Con la computadora

El programa revisa el caracol $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ del ejercicio 4A.5.3: sustituye $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación cartesiana que se obtuvo, busca dónde pasa por el polo ($r = 0$; sympy da los ángulos en $(-180°, 180°]$: $-30°$ es $330°$) y comprueba la simetría respecto a la recta a $90°$. Para el bosquejo, `sympy.plotting.plot_polar(r, (t, 0, 2*pi))` dibuja la curva si está instalada matplotlib. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import symbols, sin, cos, simplify, solve, pi

t = symbols("theta", real=True)
r = 1 + 2*sin(t)                    # caracol con lazo
x, y = r*cos(t), r*sin(t)
# cartesiana: (x² + y² - 2y)² = x² + y²
```


Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 3.

El vector normal $\vec{N}$ del plano π es perpendicular al vector $\vec{v} = (3, 5, 8)$. Además, π contiene a la recta $L:\ \frac{2-2x}{-2} = \frac{y+5}{-3} = z$. Determine una ecuación cartesiana de π.

Resultado: $\pi:\ 29x + 5y - 14z - 4 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 3.

Sean la recta $L:\ \begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ z = 7 \end{cases}$ y el plano $\pi:\ -2x - 6y + 6z = 38$. Determine la intersección de la recta con el plano.

Resultado: la recta está contenida en el plano: la intersección es toda la recta, $x = 2 + 3t,\ y = -t,\ z = 7$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 5.

Sean las rectas $M:\ x = 3 - 2t_M,\ y = -1 + t_M,\ z = 2t_M$ y $N:\ x = -1 - t_N,\ y = -3 + t_N,\ z = -4 + 2t_N$, y el plano $\pi:\ 5x - y + 2z - 2 = 0$. Determine la ecuación cartesiana del plano π_1 paralelo a π que contiene al punto A, intersección de las rectas M y N.

Resultado: $A(-9, 5, 12)$; $\pi_1:\ 5x - y + 2z + 26 = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.7

Adaptado de: 2º parcial 2005-2, tipo A, problema 6.

Determine la distancia entre los planos $\pi_1:\ 2x + y + 4z = 16$ y $\pi_2:\ x = 4r - 4s,\ y = 8s,\ z = 2 - 2r$.

Resultado: $d = \frac{8\sqrt{21}}{21}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.8

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo A, problema 6.

Los puntos $A(-1, 1, 1)$ y $B(1, -2, 0)$ pertenecen al plano π, que contiene al origen. Determine: a) una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana de π; b) la distancia del punto $C(3, 0, -1)$ a π; c) las ecuaciones en forma simétrica de la recta L perpendicular a π que contiene a C.

Resultado: $\vec{p} = r(-1, 1, 1) + s(1, -2, 0)$, $\pi:\ 2x + y + z = 0$; $d = \frac{5\sqrt{6}}{6}$; $L:\ \frac{x-3}{2} = y = z + 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 145.

Ejercicio propuesto 3.6.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x-y+3z-9=0$ y $\pi_2:\ x+\beta y+z+D=0$. Determine: a) el valor de β para que π_1 y π_2 sean paralelos y el valor de D para que π_2 contenga al origen; b) la distancia del origen a π_1; c) una ecuación vectorial de π_1; d) unas ecuaciones paramétricas de la recta L perpendicular a π_1 que contiene al punto $A(0,0,3)$.

Resultado: $\beta=-\frac{1}{3}$, $D=0$; $d=\frac{9\sqrt{19}}{19}$; $\vec{p}=(3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$; $L:\ x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo A, problema 7.

Sean los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,1,2)$ y el plano $\pi_1:\ 2x+3y+4z-8=0$. Determine: a) unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la recta L que contiene a A y es perpendicular a π_1; b) la distancia de B a π_1; c) unas ecuaciones paramétricas del plano π_2 que contiene a B y a L.

Resultado: $L:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{4}$; $d=\frac{\sqrt{29}}{29}$; $\pi_2:\ x=2+2r-4s,\ y=1+3r,\ z=-1+4r+3s$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-2, tipo A, problema 7.

Sean los planos $\pi_1:\ x-2y+3z-1=0$ y $\pi_2:\ x-y-z+1=0$. Obtenga: a) el ángulo entre π_1 y π_2; b) unas ecuaciones paramétricas de la recta L intersección de π_1 y π_2.

Resultado: 90°; $L:\ x=-3+5t,\ y=-2+4t,\ z=t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-2, tipo A, problema 6.

Sean los planos $\pi_1:\ 3x+2y+z+4=0$ y $\pi_2:\ x=4-3t-2r,\ y=3t,\ z=2r$. a) Determine la distancia entre π_1 y π_2. b) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al punto $P(2,3,-1)$ y es paralela a π_1 y a π_2.

Resultado: los planos no son paralelos: se cortan y su distancia es 0; $L:\ x=2+t,\ y=3-2t,\ z=-1+t$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 146.

Ejercicio propuesto 3.6.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 6.

Sean la recta $L:\ x=1+2t,\ y=2-t,\ z=-2t$ y el plano $\pi:\ 2x-3y+2z=-7$. Obtenga: a) las coordenadas del punto P de intersección de L y π; b) las coordenadas de un punto Q de L que diste $\frac{3}{\sqrt{17}}$ unidades de π.

Ejercicio propuesto 4A.6.2

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación $r=2+2\cos\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección de C con el eje polar. c) Identifique a C y bosqueje su gráfica en el plano polar.

Resultado: a) Sí es simétrica. b) $(4,0^\circ)$ y el polo, $(0,180^\circ)$. c) Cardioide con la punta en el polo, abierta hacia la derecha hasta $(4,0^\circ)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

Ejercicio propuesto 4A.6.3

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r=\cos\theta$. a) Obtenga unas coordenadas polares de cada uno de los puntos de intersección de C con el eje polar. b) Determine si C es simétrica respecto al polo. c) Obtenga la ecuación cartesiana de C e identifíquela.

Resultado: a) $(1,0^\circ)$ y el polo. b) No es simétrica respecto al polo. c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$: circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

Ejercicio propuesto 4A.6.4

Adaptado de: Serie de ejercicios de curvas en el plano polar, ejercicio 15.

Dada la curva de ecuación polar $r=10+15\operatorname{sen}\theta$, determine: a) si es simétrica respecto al eje polar; b) todas sus intersecciones con el eje polar y con la recta $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Resultado: a) No es simétrica respecto al eje polar. b) Eje polar: $(10,0^\circ)$, $(10,180^\circ)$ y el polo; recta a 90°: $(25,90^\circ)$, $(-5,270^\circ)=(5,90^\circ)$ y el polo.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 148.

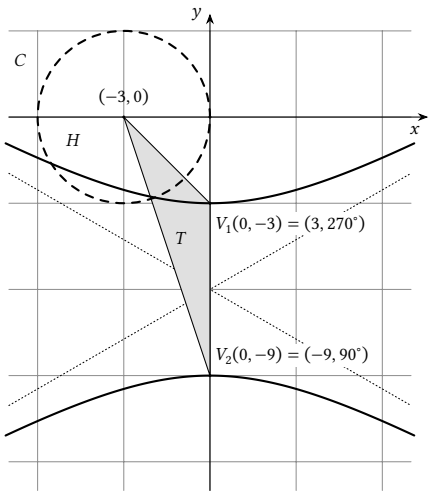
4A.7 Errores frecuentes

1. **Concluir «no es simétrica» porque la prueba falla.** Las pruebas son suficientes, no necesarias; para negar la simetría hace falta un contraejemplo (ejercicio 4A.5.1) o la ecuación cartesiana.
2. **Olvidar el polo.** Casi todas las curvas del examen pasan por él; en las intersecciones con los ejes o entre curvas se revisa con $r=0$ y se cuenta como punto.
3. **Sustituir un solo ángulo.** El eje polar pide $\theta=0^\circ$ *y* 180°; la recta a 90°, 90° *y* 270°. Y luego hay que ver si dos resultados son el mismo punto, como $(-2,90^\circ)=(2,270^\circ)$.
4. **Dibujar $r<0$ en la dirección θ.** El punto $(-4,90^\circ)$ está abajo, en 270°.
5. **Contar mal los pétalos.** $r=a\operatorname{sen}n\theta$ tiene n pétalos si n es impar y $2n$ si es par: $r=2\cos2\theta$ tiene 4, no 2.
6. **Lemniscata donde no existe.** $r^2=4\operatorname{sen}2\theta$ no tiene puntos en el segundo ni en el cuarto cuadrante; escribe el intervalo de θ antes de la tabla.
7. **Cónica sin reducir el denominador.** $r=\frac{k}{c+d\operatorname{sen}\theta}$ se divide entre c para leer $e=\frac{d}{c}$. Y el vértice con $r<0$ va en la dirección opuesta: $(-9,90^\circ)=(0,-9)$.

6. **b) Área:** T tiene vértices $(0,-3)$, $(0,-9)$ y $(-3,0)$. La base V_1V_2 está sobre el eje y y mide 6; la altura es la distancia de $(-3,0)$ al eje y, 3:

$$A = \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

7. **c) Bosquejo:** ramas de la hipérbola con vértices $(0,-3)$ y $(0,-9)$ y asíntotas $y = -6 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$; la circunferencia es tangente al eje y en el polo.



Resultado: a) $H:\ \frac{(y+6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1\ (x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0)$; $C:\ (x+3)^2 + y^2 = 9$; b) $A = 9$ unidades de área.

4A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4A**.

Ejercicio propuesto 4A.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

Sean las curvas $C_1:\ r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $C_2:\ r^2 = 4\cos 2\theta$. a) De la curva C_1, determine unas coordenadas polares de los puntos de intersección con la recta a 90°. b) Identifique la curva C_2, dé coordenadas polares de tres puntos de ella y bosqueje su gráfica.

Resultado: a) El polo y $(2, 90°)$. b) Lemniscata con lazos sobre el eje polar; por ejemplo $(2, 0°)$, $(2, 180°)$, $\left(\sqrt{2}, 30°\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Resultado: $P(-1,3,2)$; $Q(1,2,0)$ o $Q(-3,4,4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 3.6.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 6.

Sean las rectas $L:\ \frac{x+3}{2} = \frac{y+18}{6} = 2 - z$ y $R:\ \frac{2x-8}{2} = \frac{y+8}{2};\ z = -5$. Obtenga: a) la distancia entre L y R; b) el coseno del ángulo entre L y R.

Resultado: $d = 6$; $\cos\theta = \frac{14\sqrt{205}}{205}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 3.6.15

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 6.

Sea la recta $L:\ \frac{2x-18}{6} = y - 8;\ z = 6$. Obtenga las coordenadas del punto B de L que se encuentra a 3 unidades del punto $Q(-1,3,4)$.

Resultado: $B(0,5,6)$ o $B(-3,4,6)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

Ejercicio propuesto 3.6.16

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2026-1, tipo A, problema 6.

Determine una ecuación cartesiana de un plano que es perpendicular a la recta $L:\ \vec{r} = (-1,8,1) + t\,(3,-2,6)$ y cuya distancia al origen es 7.

Resultado: $3x - 2y + 6z - 49 = 0$ (o $3x - 2y + 6z + 49 = 0$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 147.

3.7 Errores frecuentes

1. **Leer mal la forma simétrica.** En $4 - x$, $\frac{2-y}{4}$ o $\frac{2x-4}{8}$ el punto y el vector no se leen directo: primero se deja cada fracción como $\frac{x-x_0}{a}$.
2. **Coseno en el ángulo recta–plano.** El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$ es el complemento del que se pide; con $\vec{u}$ y $\vec{n}$ va **seno**.
3. **Confundir las condiciones recta–plano.** Recta paralela al plano: $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$; perpendicular: $\vec{u} \parallel \vec{n}$. Es al revés que entre dos rectas.
4. **Plano por dos rectas paralelas con $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$.** Ese producto es $\vec{0}$; el segundo vector es $\overrightarrow{P_1P_2}$.
5. **Plano por dos rectas que se cruzan.** No existe: antes de calcular el plano se revisa con el producto mixto que las rectas sean coplanares.
6. **Mismo parámetro en las dos rectas.** Al igualar paramétricas, cada recta lleva su parámetro (t y λ); con el mismo se «pierde» la intersección.
7. **Distancia entre planos que no son paralelos.** $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$ exige el mismo vector normal en las dos ecuaciones; si no son paralelos, se cortan y $d = 0$ (propuesto 3.6.12).
8. **Una sola solución con valor absoluto.** «El conjunto de valores» de un parámetro o «un punto a distancia k» casi siempre tiene dos respuestas.

9. **Punto de la recta general sin comprobar.** El punto obtenido con $z = 0$ debe satisfacer las *dos* ecuaciones de los planos.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Recta: $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{u} \cdot \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ · general: $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- Plano: $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A, B, C) \cdot \vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ · perpendiculares: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ (igual con normales). Recta ∥ plano: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; recta ⊥ plano: $\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q, \pi) = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{|\vec{n}|}$ · $d(Q, L) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$ · planos paralelos: $\frac{|D_1 - D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $= 0$ se cortan, $\neq 0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t = \frac{\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ · simétrico: $Q' = 2M - Q$.

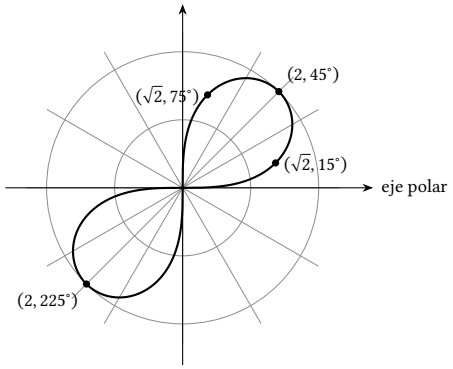
3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe de cada recta su punto y su vector, y de cada plano su normal, antes de cualquier otra cosa; ordena las formas simétricas.
2. Haz un dibujo a mano alzada: qué es paralelo, qué se corta, qué distancia se pide.
3. Calcula los productos cruz con el determinante completo y comprueba el resultado con un producto punto (debe dar 0 con cada factor).
4. Antes de un plano por dos rectas o de una distancia entre rectas o planos, decide la posición relativa.
5. Comprueba cada ecuación de plano con un punto que no usaste y cada intersección en la ecuación que no usaste.
6. Deja los resultados exactos y racionalizados; los ángulos no notables, con ang cos o ang sen.

Si el tiempo no alcanza, el punto y el vector de cada recta y la normal de cada plano, bien escritos, ya son una parte importante del puntaje.

3.10 Con la computadora

El programa obtiene el plano que pasa por $P(1, 0, 2)$, $Q(2, 1, 0)$ y $R(0, 3, 1)$ con el producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$, como en el procedimiento 3.3.2, y la distancia del origen a ese plano. Para *ver* rectas y planos, el módulo `sympy.plotting` los dibuja si además está instalada la biblioteca matplotlib (`plot3d_parametric_surface` para un plano en paramétricas, `plot3d_parametric_line` para una recta). El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.



Resultado: a) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto al polo); b) $(2, 45°)$ y $(2, 225°)$ (este último es $(-2, 45°)$); c) lemniscata en los cuadrantes I y III.

Ejercicio 4A.5.5 · Hipérbola en polares, circunferencia y área de un triángulo

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 1.

Sean la hipérbola H y la circunferencia C representadas por

$$H: \ r = \frac{9}{1 - 2\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y} \qquad C: \ r = -6\cos\theta.$$

a) Obtenga la ecuación cartesiana de cada una de las curvas H y C en el plano XY. b) Determine el área del triángulo T formado por los vértices de H y el centro de la circunferencia C. c) Bosqueje las curvas H y C, así como el triángulo T.

Resolución.

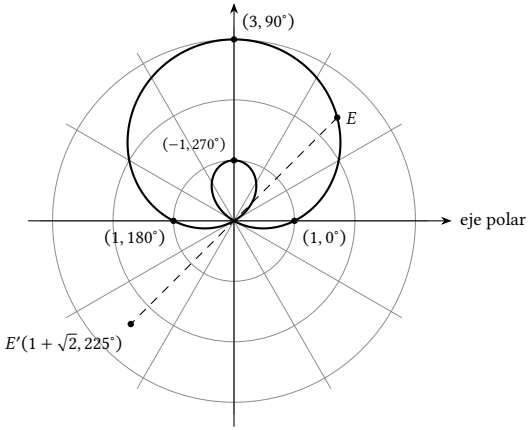
1. **Identificación:** $r = \frac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$ con $e = 2 > 1$: hipérbola con un foco en el polo, $ep = 9$, $p = \frac{9}{2}$, directriz $y = -\frac{9}{2}$ y eje focal sobre la recta a 90°.
2. **a) Cartesiana de H:** $r - 2r\operatorname{sen}\theta = 9 \Rightarrow r = 9 + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 = (9 + 2y)^2 = 81 + 36y + 4y^2$:

$$x^2 - 3y^2 - 36y - 81 = 0.$$

3. **a) Forma ordinaria:** $x^2 - 3\left(y^2 + 12y + 36\right) + 108 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 - 3(y + 6)^2 = -27$:

$$\frac{(y + 6)^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1.$$

   Centro $(0, -6)$, $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$, $c = \sqrt{9 + 27} = 6$: focos $(0, 0)$ y $(0, -12)$; el polo es un foco, como debe ser.
4. **a) Cartesiana de C:** $r^2 = -6r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = -6x \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 9$. Centro $(-3, 0)$, es decir $(3, 180°)$, y radio 3.
5. **b) Vértices de H:** $\theta = 270° : \ r = \frac{9}{1+2} = 3, V_1(3, 270°) = (0, -3); \theta = 90° : \ r = \frac{9}{1-2} = -9$, $V_2(-9, 90°) = (0, -9)$. Coinciden con $(0, -6 \pm 3)$.



Resultado: a) tres intersecciones: $(1, 0^\circ)$, $(1, 180^\circ)$ y el polo; b) $E'\left(1+\sqrt{2}, 225^\circ\right)$; c) $\left(x^2+y^2-2y\right)^2 = x^2+y^2$.

Ejercicio 4A.5.4 · Lemniscata: simetría y puntos más alejados del polo

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$. a) Determine si C es simétrica respecto al eje polar. b) Obtenga unas coordenadas polares de los puntos de la curva más alejados del polo. c) Bosqueje la gráfica de C.

Resolución.

1. **Nombre y dónde existe:** lemniscata ($r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, $a = 2$); $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$ para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ y $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$.
2. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r^2 = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia.
3. **a) Prueba 2** ($r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$): $r^2 = 4\operatorname{sen}(360^\circ - 2\theta) = -4\operatorname{sen} 2\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **a) Contraejemplo:** $(2, 45^\circ)$ está en C ($4 = 4\operatorname{sen} 90^\circ$). Su simétrico es $(2, -45^\circ)$: $4\operatorname{sen}(-90^\circ) = -4 \neq 4$. Las demás representaciones cambian 2θ en múltiplos de 360° y r solo de signo, y r^2 no cambia: ninguna cumple. No es simétrica respecto al eje polar.
5. **b) Máximo:** $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta \leq 4$, con igualdad si $\operatorname{sen} 2\theta = 1$: $2\theta = 90^\circ$ o 450°, es decir, $\theta = 45^\circ$ o 225°, con $|r| = 2$.
6. **c) Tabla:** $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$ ($r^2 = 4\operatorname{sen} 30^\circ = 2$ en 15°). Como $r \to -r$ no cambia la ecuación, es simétrica respecto al polo: el lazo del tercer cuadrante es el reflejo del primero.

Con la computadora

```
from sympy import Matrix, symbols, sqrt, Abs

x, y, z = symbols("x y z")
P = Matrix([1, 0, 2])
Q = Matrix([2, 1, 0])
R = Matrix([0, 3, 1])
n = (Q - P).cross(R - P)           # normal al plano PQR
plano = n.dot(Matrix([x, y, z]) - P).expand()
print(n.T, plano, "= 0")
d = Abs(plano.subs({x: 0, y: 0, z: 0})) / n.norm()
print("distancia del origen:", d)
assert n == Matrix([5, 3, 4])
assert plano == 5*x + 3*y + 4*z - 13
assert d == 13*sqrt(2)/10
```

Unidad 4 · Parte A · Curvas polares

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 4). «Aplicar los conceptos de superficies cuádricas y curvas en coordenadas polares y cartesianas, así como sus respectivas ecuaciones, para visualizarlos gráficamente empleando software.»

Contenido de esta parte. 4.1 Curvas polares: caracoles, cardioides, rosas de n pétalos y circunferencias. Representación gráfica empleando software.

Instrucciones de emergencia

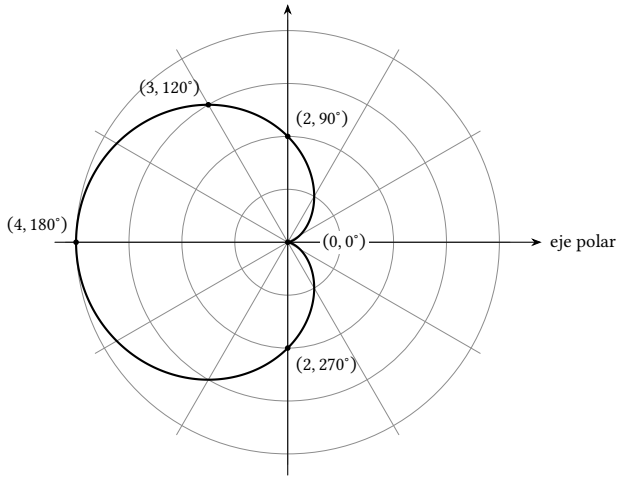
- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema en cada uno de los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010, siempre el problema 1. Curvas: cardioide 3, lemniscata 3, circunferencia 3, rosa 2, caracol 1 y cónica en polares 1. Lo que piden: bosquejo 7, intersecciones con el eje polar o con la recta a 90° 6, simetría 5, ecuación cartesiana 3, tres puntos o puntos más alejados del polo 3.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte; en el examen, de 15 a 20 minutos para el problema.
- **Ruta corta:**
  1. Repasa las coordenadas polares de la Unidad 2 (secciones 2.1.2 a 2.1.4).
  2. Lee el catálogo: secciones 4A.1.1 a 4A.1.3 (20 min); basta reconocer cada ecuación y saber su forma.
  3. Aprende los procedimientos 4A.3.4 (simetría) y 4A.3.5 (intersecciones con los ejes).
  4. Sigue los incisos a y b del ejemplo 4A.4 tapando la resolución.
  5. Resuelve los ejercicios 4A.5.1, 4A.5.2 y 4A.5.3 con cronómetro (15 min cada uno, con bosquejo).
  6. **Fuera del programa 2026:** la lemniscata (sección 4A.1.4, inciso c del ejemplo, ejercicio 4A.5.4, inciso b del propuesto 4A.6.1) y las cónicas en forma polar (sección 4A.1.5, procedimiento 4A.3.8, ejercicio 4A.5.5). Si vas con poco tiempo, sáltalas.

4A.1 Conceptos y expresiones

Las coordenadas polares, las varias representaciones de un punto, la simetría de puntos y las ecuaciones de transformación están en la Unidad 2 (secciones 2.1.1 a 2.1.4). Aquí empieza el catálogo de curvas.

4A.1.1 Rectas y circunferencias

- $\theta = \alpha$: recta por el polo con inclinación α.
- $r\cos\theta = a$ ($x = a$) y $r\operatorname{sen}\theta = b$ ($y = b$): rectas vertical y horizontal.
- $r = a$: circunferencia de centro en el polo y radio $|a|$.
- $r = a\cos\theta$: circunferencia que pasa por el polo, de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ en cartesianas y radio $\frac{|a|}{2}$, pues $r^2 = ar\cos\theta$ da $x^2 + y^2 = ax$.



Resultado: a) sí es simétrica respecto al eje polar; b) tres intersecciones: el polo $(0, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$; c) cardioide que se abre hacia la izquierda.

Ejercicio 4A.5.3 · Caracol con lazo: eje polar, punto simétrico y cartesiana

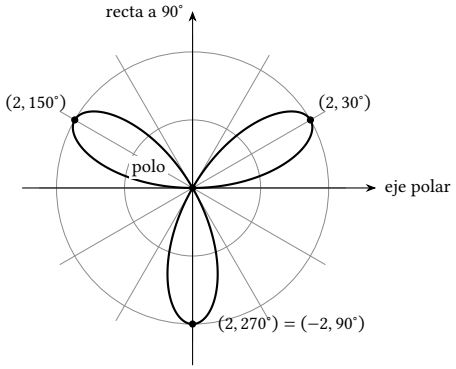
Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 1.

Sea la curva C de ecuación polar $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$. a) Obtenga el número de intersecciones de C con el eje polar y las coordenadas polares de esas intersecciones. b) Si E es el punto de C que corresponde a $\theta = 45^\circ$, obtenga las coordenadas polares del punto E', simétrico de E respecto al polo. c) Obtenga una ecuación cartesiana de C.

Resolución.

1. **Nombre:** $r = a + b\operatorname{sen}\theta$ con $a = 1 < b = 2$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90°.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 1$; $\theta = 180^\circ : r = 1$. Puntos $(1, 0^\circ)$ y $(1, 180^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0 \iff \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \iff \theta = 210^\circ$ o 330°. El polo está en la curva.
4. **a) Comprobación:** el lazo ($210^\circ < \theta < 330^\circ$, con $r < 0$) queda arriba del eje polar y solo lo toca en el polo. Con la cartesiana del inciso c y $y = 0$: $x^4 = x^2$, $x = 0, \pm 1$. Son tres puntos.
5. **b) Punto** E**:** $r = 1 + 2\operatorname{sen}45^\circ = 1 + \sqrt{2}$; $E\left(1 + \sqrt{2}, 45^\circ\right)$.
6. **b) Simétrico respecto al polo:** se suma 180° al ángulo:
$$E'\left(1 + \sqrt{2}, 225^\circ\right), \quad \text{o también} \quad E'\left(-1 - \sqrt{2}, 45^\circ\right).$$
7. **c) Multiplicar por** r**:** $r^2 = r + 2r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r + 2y \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = r$.
8. **c) Elevar al cuadrado:**
$$\left(x^2 + y^2 - 2y\right)^2 = x^2 + y^2.$$
Al elevar al cuadrado se agrega $r = -1 + 2\operatorname{sen}\theta$, que es la misma curva ($(r, \theta) \to (-r, \theta + 180^\circ)$ la convierte en $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$); y el polo ya estaba. La ecuación no agrega puntos.

5. **b) Contraejemplo:** $(2, 30^\circ)$ está en la curva ($2\operatorname{sen} 90^\circ = 2$). Su simétrico respecto al eje polar es $(2, -30^\circ) = (2, 330^\circ)$. Con $\theta = 330^\circ$: $2\operatorname{sen} 990^\circ = 2\operatorname{sen} 270^\circ = -2 \neq 2$. Con la otra representación, $(-2, 150^\circ)$: $2\operatorname{sen} 450^\circ = 2 \neq -2$. Sumar 360° a θ suma 1080° a 3θ y no cambia nada. El simétrico no está en la curva.
6. **c) Tabla** (primer pétalo): $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan $r = 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0$. Para $60^\circ < \theta < 120^\circ$, $r < 0$: ese pétalo se dibuja centrado en 270°. El tercero está centrado en 150°. Con la prueba 1 para la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$): $2\operatorname{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\operatorname{sen} 3\theta$; sí es simétrica respecto a ella.



Resultado: a) el polo y $(2, 270^\circ)$ (equivalente a $(-2, 90^\circ)$); b) no es simétrica respecto al eje polar (sí respecto a la recta a 90°); c) rosa de 3 pétalos de longitud 2.

Ejercicio 4A.5.2 · Cardioide: simetría e intersecciones con la recta a 90 grados

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 1.

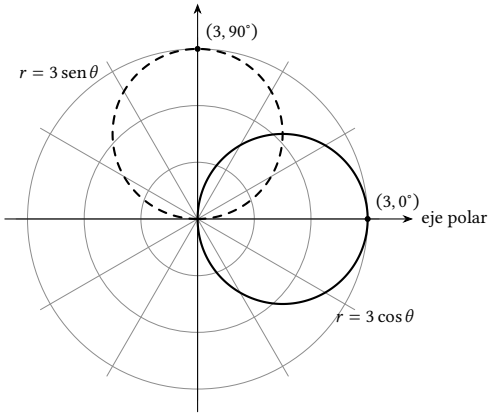
Sea la curva $C_1:\ r = 2(1 - \cos\theta)$. a) Determine si C_1 es simétrica respecto al eje polar. b) Determine el número de intersecciones de C_1 con la recta a 90° y obtenga unas coordenadas polares de esos puntos. c) Bosqueje la gráfica de C_1.

Resolución.

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\big(1 - \cos(-\theta)\big) = 2(1 - \cos\theta)$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 90^\circ:\ r = 2(1 - 0) = 2$; $\theta = 270^\circ:\ r = 2$. Puntos $(2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$, distintos.
3. **b) Polo:** $r = 0 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0^\circ$. El polo es un tercer punto. Como $r \geq 0$ siempre, no hay más.
4. **c) Nombre y tabla:** $r = a - b\cos\theta$ con $a = b = 2$: cardioide. $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 0, 1, 2, 3, 4$. La punta está en el polo y el punto más alejado es $(4, 180^\circ)$; la mitad de abajo es el reflejo de la de arriba.

- $r = a\operatorname{sen}\theta$: circunferencia por el polo de centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ y radio $\frac{|a|}{2}$ ($x^2 + y^2 = ay$).

Con $a < 0$ el centro queda del otro lado: $r = -6\cos\theta$ tiene centro $(-3, 0)$. Las dos circunferencias se recorren completas con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.



4A.1.2 Cardioides y caracoles

$r = a \pm b\cos\theta$ y $r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$, con $a, b > 0$, son *caracoles* (limazones):

- $a = b$: **cardioide**, con punta (cúspide) en el polo. $r = a(1 + \cos\theta)$ tiene la punta hacia la izquierda y su punto más alejado es $(2a, 0^\circ)$ (figura del ejemplo 4A.4).
- $a < b$: caracol **con lazo interior**; pasa por el polo cuando $\cos\theta = \mp\frac{a}{b}$ (o $\operatorname{sen}\theta = \mp\frac{a}{b}$).
- $a > b$: caracol sin lazo, que no pasa por el polo.

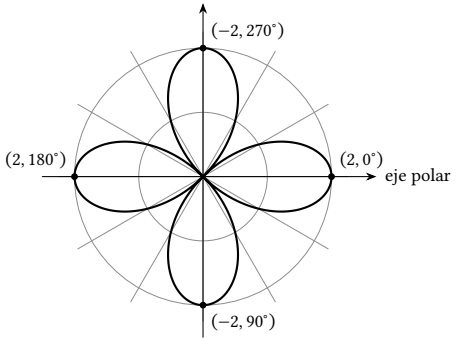
Con $\cos\theta$ son simétricos respecto al eje polar; con $\operatorname{sen}\theta$, respecto a la recta a 90°. El signo $\pm$ decide hacia qué lado se abren: $r = a + b\operatorname{sen}\theta$ se alarga hacia arriba ($r = a + b$ en 90°).

4A.1.3 Rosas

$r = a\operatorname{sen} n\theta$ y $r = a\cos n\theta$ ($n \geq 2$ entero) son **rosas** de pétalos de longitud $|a|$:

- n impar: n pétalos, y la curva se recorre completa con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$;
- n par: $2n$ pétalos, con $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Los pétalos están separados por ángulos iguales. Con $\cos n\theta$ un pétalo está centrado en el eje polar ($\theta = 0^\circ$); con $\operatorname{sen} n\theta$, el primero está centrado en $\theta = \frac{90^\circ}{n}$. Los extremos de los pétalos son las soluciones de $|\operatorname{sen} n\theta| = 1$ (o $|\cos n\theta| = 1$) y la curva pasa por el polo donde $\operatorname{sen} n\theta = 0$ (o $\cos n\theta = 0$).



4A.1.4 Lemniscatas

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$ y $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ son **lemniscatas**: dos lazos que se tocan en el polo, de longitud $|a|$.

- Solo existen para los θ que hacen el lado derecho ≥ 0: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ para $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ y $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$ (lazos sobre el eje polar); $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$, para $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ y $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$ (lazos sobre la recta a 90°); $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, en los cuadrantes I y III (lazos sobre la recta a 45°).
- Cada θ válido da dos valores, $r = \pm|a|\sqrt{\ldots}$: un punto en cada lazo.
- Como r aparece al cuadrado, las tres son simétricas respecto al polo.

4A.1.5 Cónicas en forma polar

Una cónica con un foco en el polo y excentricidad e tiene ecuación

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta},$$

donde $p > 0$ es la distancia del foco a la directriz: $x = p$ con $+\cos$, $x = -p$ con $-\cos$, $y = p$ con $+\operatorname{sen}$, $y = -p$ con $-\operatorname{sen}$. Es elipse si $e < 1$, parábola si $e = 1$ e hipérbola si $e > 1$. Si el denominador no empieza con 1 ($r = \frac{k}{c + d\operatorname{sen}\theta}$), se divide entre c.
Con $\cos\theta$ el eje focal es el eje polar y los vértices salen de $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$; con $\operatorname{sen}\theta$ el eje focal es la recta a 90° y los vértices salen de $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$. En una hipérbola uno de los dos valores de r es negativo: ese vértice está en la rama que no contiene al foco.

4A.1.6 Simetría de una curva

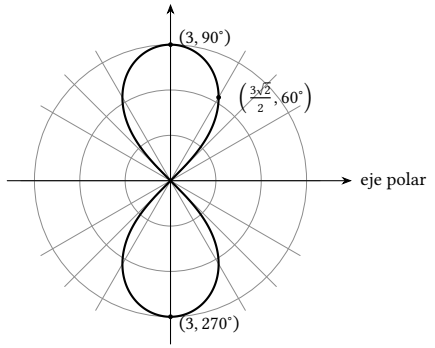
Una curva es simétrica respecto a un eje o al polo si el simétrico de cada uno de sus puntos también está en ella. Las pruebas usuales son sustituciones en la ecuación:

Simetría respecto a	Prueba 1	Prueba 2
eje polar	$\theta \to -\theta$	$r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$
recta a 90°	$\theta \to 180^\circ - \theta$	$r \to -r$, $\theta \to -\theta$

8. **c) Dónde existe:** $-9\cos 2\theta \geq 0 \iff \cos 2\theta \leq 0 \iff 90^\circ \leq 2\theta \leq 270^\circ$, es decir, $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ (y, sumando 180°, $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$).
9. **c) Puntos:**

$$\theta = 90^\circ:\ r^2 = -9\cos 180^\circ = 9, \quad r = \pm 3;$$
$$\theta = 60^\circ:\ r^2 = -9\cos 120^\circ = \tfrac{9}{2}, \quad r = \pm\tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Puntos: $(3, 90^\circ)$, $(-3, 90^\circ) = (3, 270^\circ)$ y $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$: los lazos se tocan en el polo.



Resultado: a) cardioide, $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; b) rosa de 3 pétalos, $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$; c) lemniscata, $(3, 90^\circ)$, $(3, 270^\circ)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 60^\circ\right)$.

4A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4A.5.1 · Rosa de tres pétalos: recta a 90 grados y simetría

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 1.

Sea la curva de ecuación polar $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$. a) Obtenga las coordenadas de sus puntos de intersección con la recta a 90°. b) Determine si es simétrica respecto al eje polar. c) Bosqueje su gráfica.

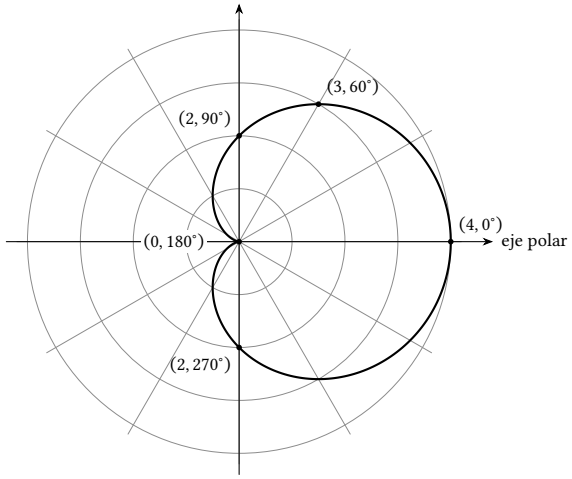
Resolución.

1. **a) Sustitución:**

$$\theta = 90^\circ:\ r = 2\operatorname{sen} 270^\circ = -2; \qquad \theta = 270^\circ:\ r = 2\operatorname{sen} 810^\circ = 2\operatorname{sen} 90^\circ = 2.$$

   $(-2, 90^\circ)$ y $(2, 270^\circ)$ son el mismo punto, $(0, -2)$ en cartesianas.
2. **a) Polo:** $r = 0$ cuando $\operatorname{sen} 3\theta = 0$, por ejemplo en $\theta = 0^\circ$. El polo está en la curva y en la recta a 90°.
3. **b) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2\operatorname{sen}(-3\theta) = -2\operatorname{sen} 3\theta$. Cambia.
4. **b) Prueba 2** ($r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$): $-r = 2\operatorname{sen}(540^\circ - 3\theta) = 2\operatorname{sen}(180^\circ - 3\theta) = 2\operatorname{sen} 3\theta$, es decir, $r = -2\operatorname{sen} 3\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.

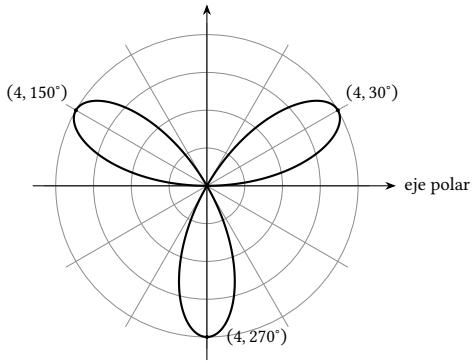
3. **a) Bosquejo:** con $\theta = 60^\circ$, $r = 3$. La curva sale de $(4, 0^\circ)$, sube por $(3, 60^\circ)$ y $(2, 90^\circ)$, llega al polo en 180° y la mitad de abajo es el reflejo.



4. **b) Nombre:** $r = a \operatorname{sen} n\theta$ con $n = 3$ impar: **rosa de 3 pétalos** de longitud 4.
5. **b) Puntos:** los extremos de los pétalos, donde $|\operatorname{sen} 3\theta| = 1$:

   $$\theta = 30^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 90^\circ = 4; \qquad \theta = 150^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 450^\circ = 4;$$
   $$\theta = 90^\circ: \ r = 4 \operatorname{sen} 270^\circ = -4.$$

   El tercero es $(-4, 90^\circ) = (4, 270^\circ)$. Puntos: $(4, 30^\circ)$, $(4, 150^\circ)$, $(4, 270^\circ)$.
6. **b) Bosquejo:** la curva pasa por el polo en 0°, 60°, 120° y 180° ($\operatorname{sen} 3\theta = 0$); entre ellos traza un pétalo. Los pétalos están centrados en 30°, 150° y 270°, separados 120°.



7. **c) Nombre:** $r^2 = -9 \cos 2\theta$, de la forma $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$ con $a = 3$: **lemniscata** con los lazos sobre la recta a 90°.

Simetría respecto a	Prueba 1	Prueba 2
polo	$r \to -r$	$\theta \to \theta + 180^\circ$

Si alguna de las dos pruebas deja la ecuación igual (o equivalente), la curva *es* simétrica. **Las pruebas son suficientes, no necesarias:** si las dos fallan, todavía no se sabe. Para concluir que *no* es simétrica se da un contraejemplo: un punto de la curva cuyo simétrico no la cumple con *ninguna* de sus representaciones; o se pasa a cartesianas, donde la prueba sí es definitiva ($y \to -y$ para el eje polar, $x \to -x$ para la recta a 90°, las dos para el polo). Si una curva tiene dos de las tres simetrías, tiene la tercera.

4A.1.7 Intersección de dos curvas polares

Como un punto tiene muchas representaciones, resolver el sistema $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$ no basta:

- se resuelve $f(\theta) = g(\theta)$;
- se resuelve también con la otra representación de la segunda curva, $f(\theta) = -g(\theta + 180^\circ)$;
- **el polo** se revisa aparte: está en las dos curvas si cada una tiene $r = 0$ para *algún* θ, aunque sean ángulos distintos.

Por ejemplo, $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 3\cos\theta$: de $1 + \cos\theta = 3\cos\theta$ sale $\cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\left(\frac{3}{2}, 60^\circ\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 300^\circ\right)$; la segunda ecuación, $1 + \cos\theta = -3\cos(\theta + 180^\circ)$, es la misma que la primera porque $-3\cos(\theta + 180^\circ) = 3\cos\theta$: no da puntos nuevos. Además, la primera pasa por el polo en 180° y la segunda en 90°: el polo es el tercer punto de intersección.

4A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«el simétrico de E respecto al polo», «unas coordenadas polares de» un punto	representaciones y simétricos	4A.3.1
«obtener una ecuación cartesiana»	conversión	4A.3.2
«identificar», «dar el nombre»	catálogo	4A.3.3
«determinar si es simétrica respecto al eje polar, al polo o a la recta a 90°»	pruebas o contraejemplo	4A.3.4
«intersecciones con el eje polar» o «con la recta a 90°», «número de intersecciones»	sustitución y polo	4A.3.5
«coordenadas de tres puntos», «puntos más alejados del polo»	tabla, máximo de $\lvert r\rvert$	4A.3.6
«bosquejar su gráfica»	bosquejo	4A.3.7
$r = \frac{k}{c \pm d \operatorname{sen}\theta}$ o con $\cos\theta$; «vértices», «área del triángulo»	cónica en polares	4A.3.8
dos curvas y «sus puntos de intersección»	intersección de curvas	4A.3.9

4A.3 Procedimientos

4A.3.1 Representaciones de un punto y puntos simétricos

1. Escribe el punto con la pareja dada; si viene de una curva, calcula r con su θ.
2. Aplica la regla de la sección 2.1.3 según el eje o el polo.
3. Si se pide «unas coordenadas», da una pareja; si conviene, da también la equivalente con $r > 0$ y $0^\circ \le \theta < 360^\circ$.

4A.3.2 De polar a cartesiana

1. Si hay $\cos\theta$ o $\operatorname{sen}\theta$ solos, multiplica la ecuación por r; si hay un cociente, quita el denominador.
2. Sustituye $r\cos\theta = x$, $r\operatorname{sen}\theta = y$, $r^2 = x^2 + y^2$.
3. Si queda r sola, aíslala y eleva al cuadrado: $r = E \Rightarrow x^2 + y^2 = E^2$.
4. Completa cuadrados para identificar la cónica (circunferencia, hipérbola…). Revisa si el polo pertenece a la curva original.

4A.3.3 Identificar la curva

1. $r = a\cos\theta$, $r = a\operatorname{sen}\theta$: circunferencia por el polo.
2. $r = a \pm b\cos\theta$ o con $\operatorname{sen}\theta$: cardioide si $a = b$; caracol con lazo si $a < b$; sin lazo si $a > b$.
3. $r = a\operatorname{sen} n\theta$, $r = a\cos n\theta$: rosa de n pétalos (n impar) o $2n$ (n par).
4. $r^2 = \pm a^2\cos 2\theta$, $r^2 = \pm a^2\operatorname{sen} 2\theta$: lemniscata (si aparece $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$, despeja primero r^2).
5. $r = \frac{k}{c \pm d\cos\theta}$: divide entre c y compara con $\frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$; $e = \frac{d}{c}$.

4A.3.4 Simetría

1. Aplica la prueba 1 de la tabla de la sección 4A.1.6. Si la ecuación no cambia, la curva es simétrica: termina.
2. Si cambia, aplica la prueba 2. Si no cambia, es simétrica: termina.
3. Si las dos fallan, escribe que las pruebas no deciden. Toma un punto notable de la curva (el extremo de un pétalo, el punto más alejado), calcula su simétrico y comprueba que *ninguna* representación, $(r', \theta' + 360^\circ k)$ ni $(-r', \theta' + 180^\circ + 360^\circ k)$, cumple la ecuación. Entonces no es simétrica.

4A.3.5 Intersecciones con el eje polar y la recta a 90 grados

1. **Eje polar:** sustituye $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$. **Recta a** 90°**:** sustituye $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$.
2. Escribe cada punto; si $r < 0$, da también su representación con $r > 0$ y revisa si dos resultados son el mismo punto.
3. **Polo:** resuelve $r = 0$. Si tiene solución, el polo está en la curva y en las dos rectas.
4. Si la curva tiene puntos con $r < 0$ (lazos), comprueba en cartesianas: $y = 0$ (eje polar) o $x = 0$ (recta a 90°) en la ecuación cartesiana da todas las intersecciones.

4A.3.6 Tabla de valores y puntos más alejados del polo

1. Evalúa r en ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, …); en rosas y lemniscatas, en los que hacen notable a $n\theta$ o a 2θ.
2. **Puntos más alejados:** maximiza $|r|$ (o r^2): ocurre donde el seno o el coseno vale ± 1. Escribe todos los θ en $[0^\circ, 360^\circ)$ y los puntos que dan.
3. Para «tres puntos», escoge puntos notables: extremos de pétalos o lazos, intersecciones con los ejes.

4A.3.7 Bosquejo

1. Dibuja una rejilla polar ligera: circunferencias y rayos cada 30° o 45°.
2. Marca los puntos de la tabla, las intersecciones con los ejes y el polo si pertenece.
3. Usa las simetrías para dibujar solo una parte y reflejarla.
4. Une los puntos en el orden en que crece θ; con $r < 0$, el punto va en la dirección $\theta + 180^\circ$.
5. Escribe el nombre de la curva y las coordenadas de los puntos marcados.

4A.3.8 Cónica en forma polar

1. Escribe la ecuación con denominador $1 \pm e\cos\theta$ (o $\operatorname{sen}\theta$) y lee e: identifica la cónica.
2. **Vértices:** evalúa r en los dos ángulos del eje focal y convierte a cartesianas (uno puede salir con $r < 0$).
3. **Cartesiana:** $r(1 \pm e\operatorname{sen}\theta) = ep \Rightarrow r = ep \mp ey \Rightarrow x^2 + y^2 = (ep \mp ey)^2$; completa cuadrados y lee centro y semiejes. Comprueba que los vértices coinciden.
4. Para áreas y distancias, trabaja con los puntos en cartesianas.

4A.3.9 Intersección de dos curvas polares

1. Iguala las r y resuelve para θ en $[0^\circ, 360^\circ)$.
2. Iguala la primera con la otra representación de la segunda, $f(\theta) = -g(\theta + 180^\circ)$, y descarta los puntos repetidos.
3. Revisa el polo por separado ($r = 0$ en cada curva).
4. Si hay duda, resuelve el sistema en cartesianas.

4A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Catálogo: cardioide, rosa y lemniscata

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 1.

Para cada una de las curvas siguientes, dé su nombre, las coordenadas polares de tres de sus puntos y bosqueje su gráfica indicando esos puntos: a) $r = 2 + 2\cos\theta$; b) $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$; c) $r^2 + 9\cos 2\theta = 0$.

Resolución.

1. **a) Nombre:** es $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$: **cardioide**. Con $\theta \to -\theta$ no cambia: simétrica respecto al eje polar.
2. **a) Puntos:**

$$\theta = 0^\circ : r = 4; \quad \theta = 90^\circ : r = 2; \quad \theta = 180^\circ : r = 0; \quad \theta = 270^\circ : r = 2.$$

Tres puntos: $(4, 0^\circ)$, $(2, 90^\circ)$, $(2, 270^\circ)$; además pasa por el polo, $(0, 180^\circ)$, donde tiene la punta.

3. **a) Paramétricas:**

$$x = 2 + 3s\cos\theta, \qquad y = -4 + s(6 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad z = -1 + 3s; \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

4. **Eliminación de s:** $3s = z + 1$.
5. **Eliminación de θ:**

$$3s\cos\theta = x - 2 \quad \Rightarrow\ \cos\theta = \frac{x-2}{z+1},$$

$$3s\,\mathrm{sen}\,\theta = y + 4 - 6s = y + 4 - 2(z+1) \quad \Rightarrow\ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y - 2z + 2}{z+1}.$$

6. **b) Ecuación cartesiana:** con $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$,

$$(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 2$ queda $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$; el vértice da $0 + (-4+2+2)^2 = 0$.

Resultado: $x = 2 + 3s\cos\theta$, $y = -4 + s(6 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $z = -1 + 3s$; $(x-2)^2 + (y - 2z + 2)^2 = (z+1)^2$.

Ejercicio 4C.5.2 · Cono que contiene a una elipse en $z = 6$

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 8.

Sea el cono C con vértice $V(0, 2, 0)$ que contiene a la curva $9x^2 + 4(y-2)^2 - 36 = 0$, $z = 6$. Obtenga una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana que definan a C.

Resolución.

1. **Directriz:** dividiendo entre 36, $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 6)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (2\cos\theta,\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 6)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (0, 2, 0) + s\,(2\cos\theta,\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 6)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación:** $z = 6s \Rightarrow s = \frac{z}{6}$; $\cos\theta = \frac{x}{2s} = \frac{3x}{z}$; $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{y-2}{3s} = \frac{2(y-2)}{z}$.
5. **Ecuación cartesiana:** $\frac{9x^2}{z^2} + \frac{4(y-2)^2}{z^2} = 1$, es decir

$$9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2.$$

   Es un cono elíptico con vértice $(0, 2, 0)$ y eje paralelo al eje z (tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero).

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0, 2, 0) + s(2\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta, 6)$; $9x^2 + 4(y-2)^2 = z^2$.

Ejercicio 4C.5.3 · Cilindro con directriz elíptica y generatrices oblicuas

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 6.

Sea S la superficie cilíndrica formada por rectas paralelas al vector $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$ y que contiene a la curva $H:\ 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$, $z = 3$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) unas ecuaciones paramétricas de S; c) una ecuación cartesiana de S.

Resolución.

1. **Directriz:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3)$.

4B.1.2 Curva en un plano paralelo a uno coordenado; ecuaciones cartesianas

Si una de las coordenadas es constante, por ejemplo $z(t) = 3$ para todo t, la curva está en el plano $z = 3$, paralelo al plano coordenado XY. Lo mismo con $x = k$ (paralelo al plano YZ) o $y = k$ (paralelo al plano XZ).

Una curva en el espacio se describe en forma cartesiana con **dos ecuaciones** (dos superficies que se cortan en ella). Para una curva plana son la ecuación del plano y la de la curva dentro de él:

$$C:\ \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

La primera ecuación, sola, sería una superficie (un cilindro); la segunda la recorta al plano. Por eso el examen pide «unas ecuaciones cartesianas» o «una pareja de ecuaciones cartesianas»: siempre son dos.

4B.1.3 Identidades para eliminar el parámetro

Para obtener las ecuaciones cartesianas se elimina el parámetro. Con funciones trigonométricas se despejan $\mathrm{sen}\,t$, $\cos t$, $\tan t$… y se usa una identidad:

$$\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t = 1, \qquad \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \qquad \csc^2 t - \cot^2 t = 1,$$

$$\cos 2t = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,t = 2\cos^2 t - 1, \qquad \mathrm{sen}\,2t = 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t, \qquad \csc t = \frac{1}{\mathrm{sen}\,t}.$$

Si aparece $\cos t + \mathrm{sen}\,t$ y $\cos t - \mathrm{sen}\,t$, se usa $(\cos t + \mathrm{sen}\,t)^2 + (\cos t - \mathrm{sen}\,t)^2 = 2$. Si el parámetro aparece sin funciones trigonométricas ($x = 2t$, $z = \frac{2}{t}$), se despeja t de una ecuación y se sustituye en las otras.

4B.1.4 Cónicas en forma paramétrica

En un plano con coordenadas (u, v) (dos de x, y, z; la tercera es constante), con centro o vértice (h, k):

Cónica	Paramétricas	Cartesiana
Circunferencia	$u = h + r\cos t$, $v = k + r\,\mathrm{sen}\,t$	$(u-h)^2 + (v-k)^2 = r^2$
Elipse	$u = h + a\cos t$, $v = k + b\,\mathrm{sen}\,t$	$\frac{(u-h)^2}{a^2} + \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$
Hipérbola	$u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$	$\frac{(u-h)^2}{a^2} - \frac{(v-k)^2}{b^2} = 1$
Parábola	$u = h + t$, $v = k + \frac{t^2}{4p}$	$(u-h)^2 = 4p\,(v-k)$

En la elipse y la circunferencia, $t \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez. En la hipérbola, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da la rama con $u \geq h + a$ ($\sec t > 0$) y $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la otra. El eje focal de la hipérbola es el de la variable que lleva sec.

Elementos que se piden al identificar: centro (o vértice en la parábola), plano que la contiene, semiejes a y b, vértices, focos (con $c^2 = a^2 - b^2$ en la elipse, $c^2 = a^2 + b^2$ en la

hipérbola, p en la parábola), asíntotas de la hipérbola y directriz de la parábola. Todos son puntos o rectas *del espacio*: llevan la tercera coordenada constante.

4B.1.5 Intervalo paramétrico

El **intervalo paramétrico** es el conjunto de valores del parámetro para los que la ecuación vectorial está definida: el *dominio común* de las tres funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Si el enunciado da un intervalo ($\theta \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), es ese. Las restricciones vienen de:

- **raíces de índice par:** $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$; en un denominador, $\frac{1}{\sqrt{u}}$ exige $u > 0$;
- **cocientes:** denominador $\neq 0$; $\frac{2}{t}$ excluye $t = 0$;
- **trigonométricas:** $\tan t$ y $\sec t$ excluyen $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot t$ y $\csc t$ excluyen $t = k\pi$.

Con funciones periódicas basta dar un periodo que recorra la curva una vez (por ejemplo $[0, 2\pi)$ sin los puntos excluidos), o todos los reales sin los puntos excluidos.

4B.1.6 Extensión: intervalos de variación

La **extensión** de la curva son los intervalos de variación de x, y y z: el conjunto de valores que toma cada función en el intervalo paramétrico (su recorrido). Es lo que el examen llama «el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas».

La extensión puede **recortar** la cónica: las ecuaciones cartesianas describen la cónica completa, pero las paramétricas solo recorren una parte. Casos típicos:

- $y = 2\cos 2\theta$, $x = 4\operatorname{sen}\theta$: la cartesiana es una parábola completa, pero $|x| \leq 4$ y $y \geq -2$; solo se recorre un arco (figura del ejercicio 4B.5.1);
- $y = a - b\operatorname{sen}^2 t$: como $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, y va de $a - b$ a a;
- raíces: $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = 2\cos t$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da $z \geq 0$: media circunferencia;
- puntos excluidos: $z = 3 + \frac{4}{\csc\theta} = 3 + 4\operatorname{sen}\theta$ no existe donde $\operatorname{sen}\theta = 0$, así que a la elipse le faltan dos puntos.

4B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«ecuación vectorial» $\vec{p} = (\ldots)$ y «unas ecuaciones paramétricas», o al revés	reescribir componente por componente	4B.3.1
«ecuaciones cartesianas», «una pareja de ecuaciones», «identificarla»	eliminar el parámetro, nombre y elementos	4B.3.2
sec y tan; csc; $\cos 2\theta$; $\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta$	la identidad que corresponde	4B.3.2
«intervalo paramétrico»	dominio común de las funciones	4B.3.3
«intervalos de variación», «conjunto de valores de x, y, z»	recorrido de cada función	4B.3.4

- **Vértice** $(-2, 3, -1)$; **eje** la recta $x = -2$, $y = 3$, paralela al eje z; abre hacia z positivo.
- **Trazas:** $z = k > -1$, circunferencias de centro $(-2, 3, k)$ y radio $\sqrt{k+1}$; plano $x = -2$, parábola $(y-3)^2 = z + 1$; plano $y = 3$, parábola $(x+2)^2 = z + 1$.
- **Intervalos:** el primer miembro es ≥ 0, así que $z + 1 \geq 0$: $z \in [-1, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

2. **b) Tipo:** tres cuadrados con el mismo coeficiente, todos positivos, igualados a una constante positiva: se cumple la forma de la **esfera**.
   - **Centro** $(1, 2, -3)$, **radio** 2. Simétrica respecto a cualquier plano que pase por el centro.
   - **Trazas:** con el plano $z = -3$, la circunferencia $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$; con $x = 1$ y $y = 2$, circunferencias de radio 2.
   - **Intervalos:** $x \in [1-2, 1+2] = [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$.
3. **c) Forma ordinaria:** multiplicando por -1,

$$\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1.$$

   - **Tipo:** tres cuadrados, uno positivo y dos negativos, igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**; no se cumple la de una hoja (habría dos positivos). Denominadores de x y z iguales: es de revolución.
   - **Centro** $(3, 5, -2)$; **eje** la recta $x = 3$, $z = -2$, paralela al eje y; **vértices** $(3, 3, -2)$ y $(3, 7, -2)$.
   - **Trazas:** plano $z = -2$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$; plano $x = 3$, hipérbola $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(z+2)^2}{9} = 1$; plano $y = 5$, ningún punto; plano $y = 9$, circunferencia $(x-3)^2 + (z+2)^2 = 27$.
   - **Intervalos:** $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{9} = \frac{(y-5)^2}{4} - 1 \geq 0 \Rightarrow |y-5| \geq 2$: $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$; $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

Resultado: a) paraboloide circular, vértice $(-2, 3, -1)$, eje paralelo a z, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \geq -1$; b) esfera de centro $(1, 2, -3)$ y radio 2, $x \in [-1, 3]$, $y \in [0, 4]$, $z \in [-5, -1]$; c) hiperboloide de dos hojas de revolución, centro $(3, 5, -2)$, eje paralelo a y, $x, z \in \mathbb{R}$, $y \in (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$.

4C.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4C.5.1 · Cono con directriz circular en $z = 2$

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

Sea el cono S con vértice en $V(2, -4, -1)$ y cuya intersección con el plano $z = 2$ es la curva de ecuación $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$. Obtenga para S: a) unas ecuaciones paramétricas; b) una ecuación cartesiana.

Resolución.

1. **Directriz:** circunferencia de centro $(2, 2, 2)$ y radio 3: $\vec{q}(\theta) = (2 + 3\cos\theta,\ 2 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 2)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (3\cos\theta,\ 6 + 3\operatorname{sen}\theta,\ 3)$.

2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$.
3. **a) Ecuación vectorial:**

$$S:\quad \vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s\,(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6), \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

4. **Paramétricas:** $x = s(-1 + 2\cos\theta)$, $y = s(3 + 3\operatorname{sen}\theta)$, $z = 6 - 6s$.
5. **Eliminación de s:** de la tercera, $s = \dfrac{6 - z}{6}$.
6. **Eliminación de θ:** de las dos primeras,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s} + 1\right) = \frac{6x + 6 - z}{2(6 - z)},$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{s} - 3\right) = \frac{6y - 18 + 3z}{3(6 - z)} = \frac{2y + z - 6}{6 - z}.$$

7. **Identidad:** $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$:

$$\frac{(6x - z + 6)^2}{4(6 - z)^2} + \frac{(2y + z - 6)^2}{(6 - z)^2} = 1.$$

8. **b) Ecuación cartesiana:** multiplicando por $4(6 - z)^2$,

$$(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z - 6)^2,$$

que desarrollada es $36x^2 + 16y^2 + z^2 - 12xz + 16yz + 72x - 96y - 12z + 36 = 0$.
9. **Comprobación:** $V(0,0,6)$: $0+4\cdot 0 = 0$, se cumple. Con $z = 0$: $(6x+6)^2+4(2y-6)^2 = 144$, es decir $36(x + 1)^2 + 16(y - 3)^2 = 144$, que es la directriz.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0,0,6) + s(-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\operatorname{sen}\theta,\ -6)$; $(6x - z + 6)^2 + 4(2y + z - 6)^2 = 4(z - 6)^2$.

Ejemplo resuelto · Identificación con intervalos de variación

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 6.

Para cada una de las siguientes ecuaciones cartesianas, identifique el lugar geométrico que representan, indicando los intervalos de variación para x, y, z:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z + 12 = 0$; b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$;

c) $\dfrac{(x - 3)^2}{9} - \dfrac{(y - 5)^2}{4} + \dfrac{(z + 2)^2}{9} = -1$.

Resolución.

1. **a) Completar cuadrados:** $(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - z + 12 - 4 - 9 = 0$, es decir

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = z + 1.$$

   - **Tipo:** dos cuadrados del mismo signo igualados a una variable lineal: se cumple la forma del paraboloide elíptico; los denominadores son iguales, así que es **paraboloide circular** (de revolución).

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«bosquejar la gráfica de C», «en el plano $z = 3$»	dibujo en su plano, con ejes 3D	4B.3.5
la curva dada con dos ecuaciones cartesianas, o una cónica con «centro» y «semiejes»	paramétricas y vectorial	4B.3.6

4B.3 Procedimientos

4B.3.1 Paramétricas y ecuación vectorial

1. **De vectorial a paramétricas:** cada componente de $\vec{p}$ es una ecuación: $\vec{p} = (1 + 3\tan\theta,\ -2 + 2\sec\theta,\ 3)$ da $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
2. **De paramétricas a vectorial:** $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, o separando punto fijo y términos con el parámetro: $\vec{p} = (-2, 1, 5) + 3\cos t\,\hat{\imath} + 4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.
3. Simplifica lo que se pueda antes de seguir: $\frac{4}{\csc\theta} = 4\operatorname{sen}\theta$, $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$. Anota el intervalo del parámetro junto a las ecuaciones.

4B.3.2 Ecuaciones cartesianas e identificación

1. **Plano:** la coordenada constante da la primera ecuación ($z = 3$).
2. **Despeje:** de las otras dos, aísla la función trigonométrica: $\tan\theta = \frac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \frac{y+2}{2}$.
3. **Identidad:** sustituye en la identidad de la sección 4B.1.3. Con $\cos 2\theta$, escríbelo como $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, o como $2\cos^2\theta - 1$ si trae $\cos\theta$.
4. **Forma ordinaria:** ordena la ecuación como en la tabla de la sección 4B.1.4 (completa cuadrados si la curva viene en forma general).
5. **Identificación:** nombre de la cónica y elementos: plano, centro o vértice, eje focal (paralelo a qué eje), semiejes, vértices, focos; asíntotas o directriz si aplica. Con la tercera coordenada en cada punto.
6. **Recorte:** si la extensión (4B.3.4) no cubre toda la cónica, dilo: «arco de parábola», «semicircunferencia», «elipse sin los puntos …».

4B.3.3 Intervalo paramétrico

1. Si el enunciado da el intervalo, ese es; pasa al paso 4.
2. Para cada componente, escribe su condición: radicando ≥ 0 (o > 0 si la raíz está en un denominador), denominador $\neq 0$, puntos excluidos de tan, sec, csc, cot.
3. Intersecta las condiciones: $t > -4$ y $-5 \leq t \leq 5$ dan $(-4, 5]$.
4. Escríbelo con intervalos. Si es periódico, da también un periodo que recorra la curva una vez.

4B.3.4 Extensión (intervalos de variación)

1. Para cada coordenada, calcula el recorrido de su función en el intervalo paramétrico.
2. **Trigonométricas:** parte de $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ (o del intervalo de $\operatorname{sen} t$ en el intervalo dado), $0 \leq \operatorname{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$, $\tan t \in \mathbb{R}$, y aplica las operaciones de la componente (multiplicar por un negativo invierte la desigualdad).

3. **Raíces y cocientes:** si la función es creciente o decreciente, evalúa en los extremos del intervalo y toma el límite en los extremos excluidos ($x \to \infty$ cuando el denominador tiende a 0).
4. La coordenada constante tiene un solo valor: $z = 3$.
5. Compara con la cónica completa: si la extensión es menor, la curva es solo un arco.

4B.3.5 Bosquejo en su plano

1. Traza los ejes x, y, z en perspectiva (x oblicuo hacia el frente).
2. Dibuja el plano de la curva (un paralelogramo) y una línea guía desde el centro o el vértice hasta el plano coordenado.
3. Marca el centro (o vértice), los vértices y, si aplica, las asíntotas de la hipérbola, con sus coordenadas completas.
4. Traza la curva solo en la extensión obtenida; los puntos excluidos, vacíos.

4B.3.6 De cartesianas a paramétricas

1. Lleva la ecuación de la curva a la forma ordinaria (completa cuadrados).
2. Usa la tabla de la sección 4B.1.4: en la elipse, $u - h = a\cos t$ y $v - k = b\,\mathrm{sen}\,t$; en la parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$, toma $u - h$ proporcional a t de modo que v quede sin fracciones ($y - 1 = 2t$ en $(y-1)^2 = 4(z-2)$ da $z = 2 + t^2$).
3. Si la cónica se da por sus elementos (centro, semiejes y a qué eje son paralelos), el semieje paralelo a un eje multiplica a $\cos t$ o $\mathrm{sen}\,t$ en esa coordenada.
4. La coordenada constante es la tercera ecuación. Escribe la ecuación vectorial con 4B.3.1 y comprueba sustituyendo en la cartesiana.

4B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Hipérbola con tangente y secante

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 4.

Sea la curva C representada por la ecuación vectorial $\vec{p} = (1{+}3\tan\theta,\ -2{+}2\sec\theta,\ 3)$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine una pareja de ecuaciones cartesianas de C e identifíquela. c) Bosqueje C.

Resolución.

1. **a)** $\tan\theta$ y $\sec\theta$ existen para $\cos\theta \neq 0$; $z = 3$ no restringe. El intervalo paramétrico es $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entero); para recorrer la curva una vez basta $\theta \in [0, 2\pi)$ sin $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.
2. **b) Paramétricas:** $x = 1 + 3\tan\theta$, $y = -2 + 2\sec\theta$, $z = 3$.
3. **Despeje:** $\tan\theta = \dfrac{x-1}{3}$, $\sec\theta = \dfrac{y+2}{2}$.
4. **Identidad** $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$:

$$C:\ \begin{cases} \dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

5. **Identificación:** hipérbola en el plano $z = 3$, con centro $C(1, -2, 3)$ y eje focal

para eliminar es $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$. Con $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ se obtienen las dos ramas.

3. **Parábola:** $Y^2 = 4pX$ se parametriza con $Y = \theta$, $X = \dfrac{\theta^2}{4p}$.
4. El valor de la tercera coordenada es el del plano de la directriz ($z = 0$, $z = 3$, $x = 0$).

4C.3.4 Identificación de una cuádrica

1. **Ordena:** pasa todo al primer miembro y agrupa por variable.
2. **Completa cuadrados** en cada variable que aparece al cuadrado con término lineal.
3. **Forma ordinaria:** deja los cuadrados a la izquierda y la constante (o la variable lineal) a la derecha; divide para que la constante sea 1 (o 0).
4. **Caso por caso con la tabla 4C.1.6:** cuenta cuadrados y signos, revisa si la constante es 1, 0 o -1 y si hay variable lineal; escribe cuál forma *se cumple* y, si hay duda, cuál *no se cumple*.
5. **Características:** centro o vértice (los valores que anulan cada paréntesis), eje (recta paralela al de la variable distinguida), semiejes (raíces de los denominadores), trazas con los planos por el centro (sustituye la variable del plano y nombra la cónica que queda).
6. **Extensión**, si la piden (4C.3.5), y simetrías.

4C.3.5 Intervalos de variación (extensión)

1. Parte de la forma ordinaria. Para la variable z, despeja de modo que los otros cuadrados queden solos: por ejemplo, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(z-l)^2}{c^2} - 1$.
2. El primer miembro es ≥ 0 y toma todos los valores no negativos: exige que el segundo miembro sea ≥ 0 y resuelve.
3. Elipsoide y esfera: cada variable está en $[h-a, h+a]$, etc. Hiperboloide de dos hojas: la variable del eje cumple $|z-l| \geq c$; las otras, todos los reales. Paraboloide elíptico: la variable lineal queda de un solo lado del vértice. Hiperboloide de una hoja, cono y paraboloide hiperbólico: todos los reales.
4. Escribe el resultado con intervalos: $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

4C.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Cono con vértice en el eje z y directriz elíptica

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 5.

Sea el cono S con vértice en $V(0, 0, 6)$ y cuya intersección con el plano XY es la curva

$$D:\ \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Obtenga para S: a) una ecuación vectorial; b) una ecuación cartesiana.

Resolución.

1. **Directriz:** es una elipse de centro $(-1, 3, 0)$, semieje 2 en x y 3 en y:

$$\vec{q}(\theta) = (-1 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«identificar la superficie representada por…» (varias ecuaciones)	nombre y características	4C.3.4
«intervalos de variación», «conjunto de valores de z»	extensión	4C.3.5
«trazas con los planos XZ y YZ», «curva intersección con el plano $z = k$»	cónicas de corte	4C.3.4, paso 5

4C.3 Procedimientos

4C.3.1 Cono por el método de las generatrices

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$. Si es la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ en el plano $z = l$: $\vec{q}(\theta) = (h + a\cos\theta,\ k + b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$. Si viene como $9x^2 + 4(y-2)^2 = 36$, divide primero entre 36.
2. **Dirección de la generatriz:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, del vértice al punto de la directriz.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Paramétricas:** las tres componentes de la anterior.
5. **Eliminación de s:** la componente que corresponde al plano de la directriz es lineal en s (por ejemplo $z = 6 - 6s$); despeja s.
6. **Eliminación de θ:** de las otras dos componentes despeja $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (aparecen divididos entre s) y sustituye en $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$.
7. **Simplifica:** multiplica por el denominador común; deja la ecuación como una igualdad de cuadrados.
8. **Comprueba** con dos cosas: el vértice satisface la ecuación, y al hacer $z = l$ se recupera la directriz.

4C.3.2 Cilindro por el método de las generatrices

1. **Parametriza la directriz** $\vec{q}(\theta)$ como en 4C.3.1.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$, con $\vec{u}$ el vector de las generatrices.
3. **Paramétricas:** sus tres componentes.
4. **Eliminación de s:** en la componente del plano de la directriz ($z = 3 + 2s$) despeja s.
5. **Eliminación de θ:** despeja $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$) y usa la identidad.
6. **Comprueba:** con $s = 0$ (es decir, en el plano de la directriz) se recupera la directriz.

Observación. Si las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz, o si el enunciado describe «circunferencias en planos paralelos con centro en una recta», el cilindro es recto: la vectorial es $\vec{p} = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}$ igual, y la cartesiana es la ecuación de la directriz sin la variable de $\vec{u}$.

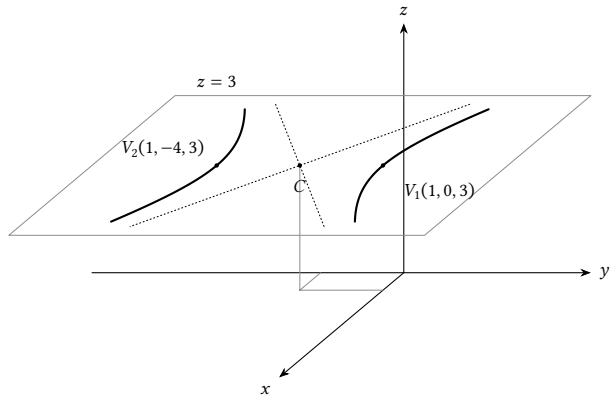
4C.3.3 Parametrizar la directriz

1. **Elipse o circunferencia:** lleva a la forma $\frac{(X)^2}{a^2} + \frac{(Y)^2}{b^2} = 1$ y usa $X = a\cos\theta, Y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$.
2. **Hipérbola:** $\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$ se parametriza con $Y = a\sec\theta$, $X = b\tan\theta$, y la identidad

paralelo al eje y (el término positivo es el de y); $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
- vértices $V(1, -2 \pm 2, 3)$: $V_1(1, 0, 3)$ y $V_2(1, -4, 3)$;
- focos $F\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$;
- asíntotas: $y + 2 = \pm\frac{2}{3}(x - 1)$, $z = 3$.

Con $\theta \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, $\sec\theta \geq 1$ y $y \geq 0$: rama de V_1; con $\theta \in \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$, $y \leq -4$: rama de V_2. Se recorren las dos ramas completas.

6. **c) Bosquejo:** el plano $z = 3$, el centro, los vértices, las asíntotas y las dos ramas.



Resultado: intervalo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $C:\ \frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$, $z = 3$: hipérbola de centro $(1, -2, 3)$, eje focal paralelo al eje y, $a = 2$, $b = 3$, vértices $(1, 0, 3)$ y $(1, -4, 3)$, focos $\big(1, -2 \pm \sqrt{13}, 3\big)$.

4B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4B.5.1 · Parábola con coseno del ángulo doble

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 5.

Sea la curva $C:\ x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y = 2\cos 2\theta,\ z = 3$; $\theta \geq 0$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C y el intervalo de valores para x, y y z. b) Bosqueje la gráfica de C en el plano $z = 3$.

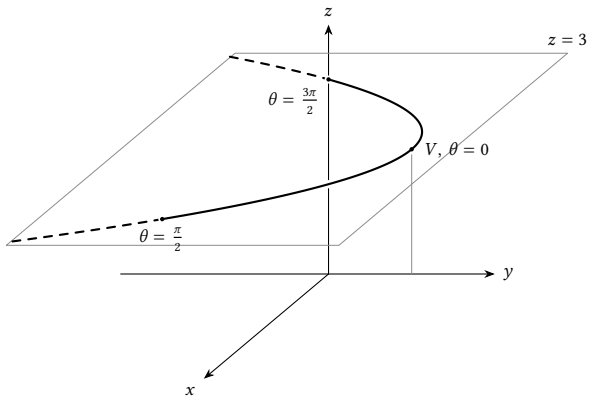
Resolución.

1. **a) Identidad:** como x trae $\mathrm{sen}\,\theta$, se usa $\cos 2\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$ con $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{4}$:

$$y = 2\left(1 - 2\cdot\frac{x^2}{16}\right) = 2 - \frac{x^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad x^2 = -4(y-2).$$

2. **Cartesianas:** $C:\ x^2 = -4(y-2)$, $z = 3$. Parábola de vértice $V(0, 2, 3)$, eje paralelo al eje y, $4p = -4$, $p = -1$: abre hacia las y negativas, foco $(0, 1, 3)$, directriz $y = 3$, $z = 3$.
3. **Intervalos** ($\theta \geq 0$ contiene periodos completos): $-1 \leq \mathrm{sen}\,\theta \leq 1$ da $x \in [-4, 4]$; $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$ da $y \in [-2, 2]$; $z = 3$.

4. **Recorte:** la parábola completa no tiene límite en x; aquí solo se recorre el arco con $|x| \le 4$, que va de $(-4,-2,3)$ a $(4,-2,3)$ pasando por el vértice. Al crecer θ el punto va y viene sobre ese arco.
5. **b) Bosquejo:** el arco en el plano $z = 3$, con sus extremos.



Resultado: $x^2 = -4(y-2)$, $z = 3$: arco de parábola con vértice $(0,2,3)$; $x \in [-4,4]$, $y \in [-2,2]$, $z = 3$.

Ejercicio 4B.5.2 · Elipse con suma y diferencia de seno y coseno

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 4.

Sea la curva $C:\ x = 2\sqrt{2}\cos\theta + 2\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta,\ y = 3\sqrt{3}\cos\theta - 3\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\theta,\ z = 4$. Determine unas ecuaciones cartesianas de C e identifíquela.

Resolución.

1. **Despeje:** $\dfrac{x}{2\sqrt{2}} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ y $\dfrac{y}{3\sqrt{3}} = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$.
2. **Identidad:** al sumar los cuadrados se cancelan los productos $\pm 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$:

$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 = 2\big(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\big) = 2.$$

3. **Sustitución:**

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{27} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{54} = 1.$$

4. **Identificación:** elipse en el plano $z = 4$, centro $C(0,0,4)$, eje mayor paralelo al eje y ($54 > 16$); $a = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, $c = \sqrt{54-16} = \sqrt{38}$. Vértices $\big(0, \pm 3\sqrt{6}, 4\big)$, extremos del eje menor $(\pm 4, 0, 4)$, focos $\big(0, \pm\sqrt{38}, 4\big)$.

3. **Eje**: la recta paralela a un eje coordenado que pasa por el centro o el vértice, por ejemplo $x = 1$, $y = -2$ (paralela al eje z). En un paraboloide, hacia dónde abre.
4. **Trazas**: con los planos que pasan por el centro paralelos a los coordenados (o con los planos coordenados), nombrando la cónica de cada una; y la traza $z = k$ (o la del eje) en general.
5. **Extensión** (intervalos de variación de x, y, z): de la forma ordinaria, despejando cada cuadrado y pidiendo que sea ≥ 0.
6. **Simetrías**: una cuádrica con centro es simétrica respecto a su centro y a los tres planos que pasan por él paralelos a los coordenados; un paraboloide, respecto a su eje y a los dos planos que lo contienen.

Los exámenes no exigen los seis puntos, pero el nombre solo no vale: nombre, centro o vértice, eje y dos trazas son el mínimo seguro. Si el enunciado pide «intervalos de variación», la extensión es obligatoria.

4C.1.8 Ecuación vectorial de una cuádrica

Las cuádricas también se escriben con dos parámetros. Basta conocer estas, que salen de las identidades $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ y $\sec^2 - \tan^2 = 1$ ($\theta \in [0, 2\pi)$):

- Elipsoide: $\vec{p} = (a\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\cos\varphi)$, $\varphi \in [0,\pi]$.
- Hiperboloide de una hoja: $\vec{p} = (a\sec\varphi\cos\theta,\ b\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\tan\varphi)$, $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$.
- Hiperboloide de dos hojas: $\vec{p} = (a\tan\varphi\cos\theta,\ b\tan\varphi\operatorname{sen}\theta,\ c\sec\varphi)$.
- Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ r^2)$, $r \ge 0$.
- Cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$: $\vec{p} = (ar\cos\theta,\ br\operatorname{sen}\theta,\ cr)$, $r \in \mathbb{R}$.

Con centro (h,k,l) se suma (h,k,l). En los exámenes esto solo se pide para conos y cilindros, por generatrices.

4C.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«cono con vértice en V» y «cuya intersección con el plano… es la curva», o «que contiene a la curva»	ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana	4C.3.1
«superficie cilíndrica», «cilindro con eje paralelo a $\vec{v}$», «superficie reglada… rectas paralelas al vector»	ecuación vectorial (o paramétricas) y cartesiana	4C.3.2
la directriz es una hipérbola o una cónica sin centro en el origen	parametrizar la directriz	4C.3.3
«circunferencias de radio r… con centro en la recta L»	cilindro recto	4C.3.2

4C.1.6 Tabla de reconocimiento

Después de completar cuadrados y pasar todo a la forma $\pm\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = 1,\ 0$ o -1 (con $X = x - h$, etc.), o con una variable lineal, la superficie se lee de los signos:

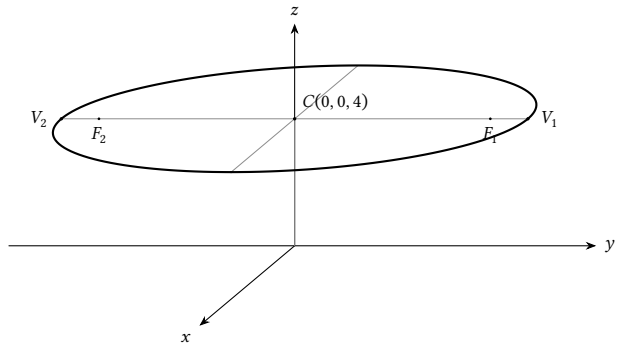
Forma (tras completar cuadrados)	Superficie
tres cuadrados, todos +, $= 1$	elipsoide (esfera si $a = b = c$)
tres cuadrados, todos +, $= 0$	un punto (el centro)
tres cuadrados, todos +, $= -1$	ningún punto (vacío)
tres cuadrados, dos + y uno −, $= 1$	hiperboloide de una hoja; eje: la variable con −
tres cuadrados, uno + y dos −, $= 1$	hiperboloide de dos hojas; eje: la variable con +
tres cuadrados con signos mixtos, $= 0$	cono; eje: la variable de signo solitario
dos cuadrados del mismo signo = término lineal de la tercera	paraboloide elíptico; eje: la variable lineal
dos cuadrados de signo contrario = término lineal de la tercera	paraboloide hiperbólico
dos cuadrados, + y +, $= 1$; falta la tercera variable	cilindro elíptico (circular si $a = b$)
dos cuadrados, + y −, $= 1$; falta la tercera variable	cilindro hiperbólico
dos cuadrados, + y −, $= 0$; falta la tercera variable	dos planos que se cortan
dos cuadrados, + y +, $= 0$; falta la tercera variable	una recta
un cuadrado y una variable lineal	cilindro parabólico
un solo cuadrado = constante ($x^2 = c$)	dos planos paralelos, uno, o vacío

Una ecuación con signo -1 a la derecha se multiplica por -1 antes de usar la tabla: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -1$ es $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$, un hiperboloide de dos hojas de eje y.

4C.1.7 Qué es «identificar» una superficie

El enunciado dice siempre que la identificación «requiere más información que el nombre». Para cada ecuación se escribe:

1. **Nombre** completo: «hiperboloide de una hoja», «paraboloide elíptico», «de revolución» si dos denominadores son iguales.
2. **Centro** (elipsoide, hiperboloides, esfera) o **vértice** (paraboloides, cono); en el paraboloide hiperbólico, el **punto silla**.



Resultado: $C:\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{54} = 1,\ z = 4$: elipse de centro $(0, 0, 4)$, eje mayor paralelo al eje y, $a = 3\sqrt{6}$, $b = 4$, focos $\left(0, \pm\sqrt{38}, 4\right)$.

Ejercicio 4B.5.3 · Intervalo paramétrico y extensión con raíces

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 6.

Sea la curva C de ecuación vectorial

$$\vec{p} = \left(\frac{3}{\sqrt{t+4}}\right)\hat{\imath} + \left(\sqrt{25 - t^2}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{6}{\sqrt{t+4}} + 1\right)\hat{k}.$$

Obtenga: a) unas ecuaciones paramétricas de C; b) el intervalo paramétrico; c) el conjunto de valores que pueden tomar las coordenadas x, y y z de los puntos de la curva.

Resolución.

1. **a)** $x = \frac{3}{\sqrt{t+4}}$, $y = \sqrt{25 - t^2}$, $z = \frac{6}{\sqrt{t+4}} + 1$.
2. **b) Condiciones:** en x y z la raíz está en el denominador: $t + 4 > 0$, $t > -4$. En y: $25 - t^2 \geq 0$, $-5 \leq t \leq 5$. Intersección: $t \in (-4, 5]$.
3. **c)** x**:** $t + 4$ recorre $(0, 9]$, así que $\sqrt{t+4} \in (0, 3]$ y $x = \frac{3}{\sqrt{t+4}}$ es decreciente: $x = 1$ en $t = 5$ y $x \to \infty$ cuando $t \to -4^+$. Entonces $x \in [1, \infty)$.
4. y**:** en $(-4, 5]$, t^2 toma todos los valores de $[0, 25]$ ($t = 0$ da 0; $t = 5$ da 25). Entonces $25 - t^2 \in [0, 25]$ y $y \in [0, 5]$.
5. z**:** $z = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{t+4}} + 1 = 2x + 1$; con $x \in [1, \infty)$, $z \in [3, \infty)$.

Observación. De $z = 2x + 1$ se ve que la curva está en ese plano, que no es paralelo a uno coordenado; el problema solo pide intervalos, no la identificación.

Resultado: intervalo paramétrico $(-4, 5]$; $x \in [1, \infty)$, $y \in [0, 5]$, $z \in [3, \infty)$.

Ejercicio 4B.5.4 · Parábola en el plano $x = 5$: de cartesianas a paramétricas

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 5.

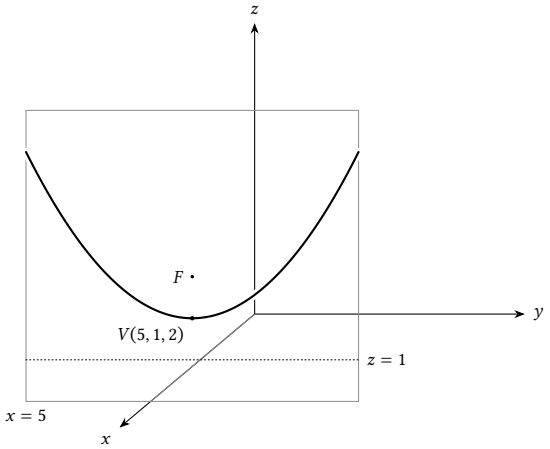
Sea la curva $C:\ x = 5,\ y^2 - 2y - 4z + 9 = 0$. a) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de C. b) Determine una ecuación vectorial de C. c) Identifique a C y bosqueje su gráfica.

Resolución.

1. **Forma ordinaria:** $y^2 - 2y + 1 = 4z - 9 + 1$, es decir, $(y-1)^2 = 4(z-2)$.
2. **a) Paramétricas:** con $y - 1 = 2t$ queda $4t^2 = 4(z-2)$, $z = 2 + t^2$:

$$x = 5, \qquad y = 1 + 2t, \qquad z = 2 + t^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Comprobación: $(1+2t)^2 - 2(1+2t) - 4(2+t^2) + 9 = 1 + 4t + 4t^2 - 2 - 4t - 8 - 4t^2 + 9 = 0$.
3. **b) Vectorial:** $\vec{p} = (5,\ 1+2t,\ 2+t^2) = (5,1,2) + 2t\,\hat{\jmath} + t^2\,\hat{k}$.
4. **c) Identificación:** parábola en el plano $x = 5$, vértice $V(5,1,2)$, eje paralelo al eje z, $4p = 4$, $p = 1$: abre hacia las z positivas; foco $F(5,1,3)$, directriz $z = 1$, $x = 5$; lado recto 4.



Resultado: $x = 5$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 + t^2$; $\vec{p} = (5,1,2) + 2t\,\hat{\jmath} + t^2\,\hat{k}$; parábola de vértice $(5,1,2)$, eje paralelo al eje z, foco $(5,1,3)$.

Ejercicio 4B.5.5 · Elipse dada por su centro y sus semiejes

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 3.

Determine unas ecuaciones paramétricas y una ecuación vectorial de la elipse con centro en $C(-2,1,5)$, semieje menor de longitud 3 y paralelo al eje de las abscisas, y semieje mayor de longitud 4 y paralelo al eje de las cotas.

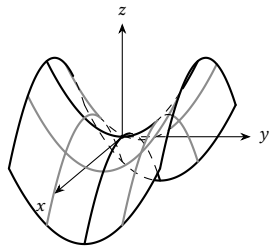
Resolución.

1. **Plano:** los semiejes son paralelos a x (abscisas) y a z (cotas); la elipse está en el plano $y = 1$ que pasa por el centro.
2. **Paramétricas** (sección 4B.1.4): el semieje 3 multiplica en x, el 4 en z:

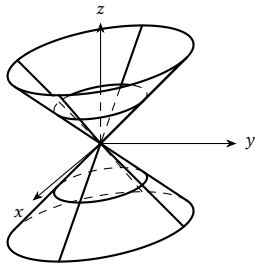
$$x = -2 + 3\cos t, \qquad y = 1, \qquad z = 5 + 4\,\mathrm{sen}\,t, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

3. **Vectorial:** $\vec{p} = (-2 + 3\cos t,\ 1,\ 5 + 4\,\mathrm{sen}\,t) = (-2,1,5) + 3\cos t\,\hat{\imath} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,\hat{k}$.
4. **Comprobación:** $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(z-5)^2}{16} = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t = 1$, $y = 1$; focos $\big(-2, 1, 5 \pm \sqrt{7}\big)$.

una parábola que abre hacia z positivo; la traza con $y = 0$, una parábola que abre hacia z negativo; las trazas $z = k \neq 0$ son hipérbolas, y la traza $z = 0$ es un par de rectas. Extensión: todos los reales.



Cono. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a *cero*. El vértice es el origen; el eje, el de la variable con signo solitario. Las trazas $z = k \neq 0$ son elipses, y las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son pares de rectas (generatrices). Extensión: todos los reales.



Cilindros cuádricos. Falta una variable: la ecuación es la de una cónica del plano de las otras dos, y las generatrices son paralelas al eje de la variable que falta. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (cilindro elíptico), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (cilindro hiperbólico), $y = ax^2$ (cilindro parabólico).

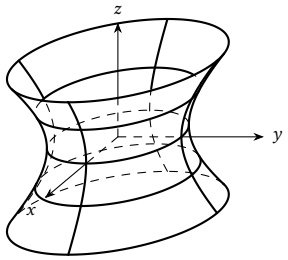
4C.1.5 Cuádricas trasladadas

Si el centro (o vértice) es (h,k,l), en cada forma canónica se cambia x por $x-h$, y por $y-k$ y z por $z-l$. El eje deja de ser un eje coordenado y pasa a ser una recta paralela a él: en $\frac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$ el eje es la recta $y = -2$, $z = 1$, paralela al eje x.

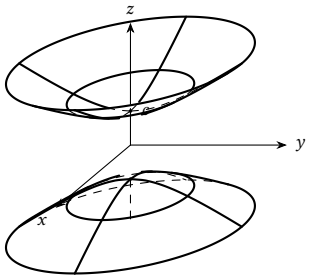
Cuando la ecuación viene desarrollada ($x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5z + 3 = 0$), se **completan cuadrados** variable por variable:

$$ax^2 + dx = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a}.$$

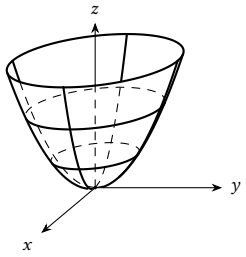
Los términos lineales de una variable que *también* está al cuadrado desaparecen al completar el cuadrado; los de una variable que *no* está al cuadrado se quedan y la convierten en la variable lineal de un paraboloide (o de un cilindro parabólico). Los exámenes del Plan 2010 no traen términos mixtos (xy, xz, yz).



Hiperboloide de dos hojas. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$: un cuadrado positivo, dos negativos, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo más. Los **vértices** son $(0,0,\pm c)$; entre ellos no hay superficie: $|z|\geq c$. Las trazas $z=k$ con $|k|>c$ son elipses; las trazas con $x=0$ y $y=0$ son hipérbolas.



Paraboloide elíptico. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$: dos cuadrados del mismo signo y la tercera variable *lineal*. El eje es el de la variable lineal; el **vértice**, el origen. Abre hacia donde la variable lineal tiene el signo de los cuadrados ($z\geq 0$ si $c>0$). Las trazas $z=k>0$ son elipses; las trazas con $x=0$ y $y=0$, parábolas. Si $a=b$ es un paraboloide circular (de revolución).



Paraboloide hiperbólico (silla de montar). $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$: dos cuadrados de signo contrario y la tercera variable lineal. El origen es el **punto silla**. La traza con $x=0$ es

Resultado: $x=-2+3\cos t$, $y=1$, $z=5+4\operatorname{sen} t$, $t\in[0,2\pi)$; $\vec{p}=(-2,1,5)+3\cos t\,\hat{\imath}+4\operatorname{sen} t\,\hat{k}$.

Ejercicio 4B.5.6 · Hipérbola con secante y tangente (Plan 2016)

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.

Sea la curva C representada por $\vec{r}(t)=(1,\ 2\sec t,\ 4\tan t)$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas de C; b) unas ecuaciones cartesianas de C e identifíquela.

Resolución.

1. **a)** $x=1$, $y=2\sec t$, $z=4\tan t$, con $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
2. **b) Despeje:** $\sec t=\frac{y}{2}$, $\tan t=\frac{z}{4}$. Con $\sec^2 t-\tan^2 t=1$:

$$C:\ \begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1\\ x=1\end{cases}$$

3. **Identificación:** hipérbola en el plano $x=1$, centro $(1,0,0)$, eje focal paralelo al eje y; $a=2$, $b=4$, $c=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. Vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\left(1,\pm2\sqrt{5},0\right)$, asíntotas $z=\pm2y$, $x=1$.

Resultado: $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, $x=1$: hipérbola de centro $(1,0,0)$, vértices $(1,\pm2,0)$, focos $\left(1,\pm2\sqrt{5},0\right)$. Es el mismo tipo que el ejemplo 4B.4.

4B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4B**.

Ejercicio propuesto 4B.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 6.

Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{p}=\left(-1+2\cos\theta,\ 5,\ 3+\dfrac{4}{\csc\theta}\right)$. a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C. b) Bosqueje la gráfica de C e identifíquela.

Resultado: $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(z-3)^2}{16}=1$, $y=5$: elipse de centro $(-1,5,3)$, eje mayor paralelo al eje z, $a=4$, $b=2$; sin los puntos $(1,5,3)$ y $(-3,5,3)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 149.

Ejercicio propuesto 4B.6.2

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 4.

Sea la curva C representada por $\vec{p}=\left(-3,\ 2-5\operatorname{sen}^2 t,\ 4-3\operatorname{sen} t\right)$. a) Determine unas ecuaciones paramétricas de C y el intervalo paramétrico asociado a ellas. b) Determine unas ecuaciones cartesianas de C, así como los intervalos de variación de y y z.

Resultado: $x=-3$, $y=2-5\operatorname{sen}^2 t$, $z=4-3\operatorname{sen} t$, $t\in\mathbb{R}$; $(z-4)^2=-\frac{9}{5}(y-2)$, $x=-3$; $y\in[-3,2]$, $z\in[1,7]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 150.

Ejercicio propuesto 4B.6.3

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 4.

Sea la curva C representada por $\vec{r}(\theta) = (3+\operatorname{sen} 2\theta)\,\hat{\imath} - 7\,\hat{\jmath} + (\cos\theta)\,\hat{k}$. Obtenga: a) el intervalo paramétrico; b) los intervalos de variación para x y z; c) unas ecuaciones cartesianas de C.

Resultado: $\theta \in \mathbb{R}$ (una vuelta en $[0, 2\pi)$); $x \in [2, 4]$, $z \in [-1, 1]$; $y = -7$, $(x-3)^2 = 4z^2(1-z^2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 150.

Ejercicio propuesto 4B.6.4

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 4.

Sea la curva $C:\ \ x = \sqrt{9-t} - 3,\ y = -1,\ z = \dfrac{2}{\sqrt{t+16}}$. a) Obtenga el intervalo paramétrico. b) Determine el conjunto de valores para cada una de las coordenadas x y z de los puntos de C.

Resultado: $t \in (-16, 9]$; $x \in [-3, 2)$, $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 150.

Ejercicio propuesto 4B.6.5

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 1.

Sea la curva $A:\ \ x = -1,\ y = 2\operatorname{sen} t,\ z = 2\cos t$, para $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Determine: a) el conjunto de valores de z donde está definida; b) una ecuación vectorial; c) las ecuaciones cartesianas. Identifique la curva.

Resultado: $z \in [0, 2]$; $\vec{p} = (-1,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$; $y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$, con $z \ge 0$: semicircunferencia de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

Ejercicio propuesto 4B.6.6

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 2.

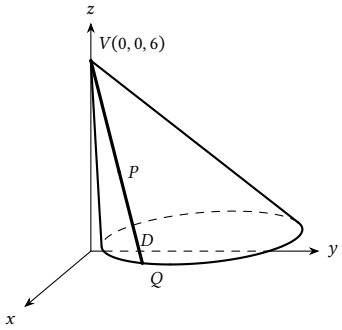
Sea la curva C de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = 8\,\hat{\imath} + 2t\,\hat{\jmath} + \dfrac{2}{t}\,\hat{k}$. Determine: a) unas ecuaciones paramétricas; b) las ecuaciones cartesianas; c) el intervalo paramétrico.

Resultado: $x = 8$, $y = 2t$, $z = \frac{2}{t}$; $yz = 4$, $x = 8$ (hipérbola equilátera); $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

4B.7 Errores frecuentes

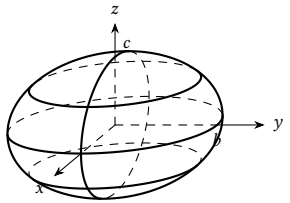
1. **Una sola ecuación cartesiana.** $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ sola es un cilindro; la curva necesita también el plano $z = 3$.
2. **Elementos sin la tercera coordenada.** El centro de la hipérbola del ejemplo 4B.4 es $(1, -2, 3)$, no $(1, -2)$.
3. **Usar la identidad equivocada con** $\cos 2\theta$**.** Si la otra ecuación trae $\operatorname{sen}\theta$, se usa $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$; si trae $\cos\theta$, $2\cos^2\theta - 1$.



4C.1.4 Cuádricas en forma canónica

Con centro (o vértice) en el origen y ejes sobre los ejes coordenados, las cuádricas tienen las formas de esta sección ($a, b, c > 0$). Se dibujan en *alambre de trazas*: las curvas que dejan los planos $z = k$ y los planos coordenados; lo que queda atrás va discontinuo. El eje de la superficie puede ser cualquiera de los tres: lo decide la variable que se distingue de las otras (por signo o por no estar al cuadrado).

Elipsoide. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Todas sus trazas son elipses (o un punto, o nada). Extensión: $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. Si dos semiejes son iguales es de revolución; si $a = b = c = r$, es la **esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.



Hiperboloide de una hoja. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$: dos cuadrados positivos, uno negativo, igualados a +1. El eje es el de la variable con signo menos. Las trazas $z = k$ son elipses para todo k (la menor, la *garganta*, en $z = 0$); las trazas con $x = 0$ y $y = 0$ son hipérbolas. Es una sola pieza: x, y, z toman todos los reales en su rango natural.

- **Cilíndricas:** formadas por rectas paralelas a un vector que pasan por una curva.
- **Cónicas:** formadas por rectas que pasan por un punto fijo y por una curva.

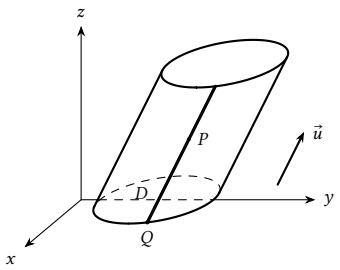
Un cono o cilindro con directriz cónica es a la vez cónico (o cilíndrico) y cuádrico; si la directriz es otra curva, la superficie ya no es cuádrica.

4C.1.2 Superficies cilíndricas

Una *superficie cilíndrica* es el conjunto de rectas paralelas a un vector $\vec{u}$ que cortan a una curva D. La curva D es la **directriz**; cada recta, una **generatriz**. Si D está dada por $\vec{q}(\theta)$, cada punto de la superficie es un punto de D más un múltiplo de $\vec{u}$:

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{q}(\theta) + s\,\vec{u}.$$

Con s fijo se obtiene una copia de la directriz trasladada; con θ fijo, una generatriz (figura).



En el examen la directriz es siempre una cónica en un plano paralelo a uno coordenado ($z = 3$, $x = 0$), y $\vec{u}$ no es paralelo a ese plano. Si $\vec{u}$ es perpendicular al plano de la directriz, el cilindro es *recto* y su ecuación cartesiana es la de la directriz sin la variable que falta: $x^2 + z^2 = 4$ es un cilindro circular recto de eje y.

4C.1.3 Superficies cónicas

Una *superficie cónica* es el conjunto de rectas que pasan por un punto fijo V, el **vértice**, y por los puntos de una curva D, la **directriz**. La generatriz que pasa por el punto $\vec{q}(\theta)$ de la directriz tiene dirección $\vec{q}(\theta) - \vec{v}$, así que

$$S: \quad \vec{p}(\theta, s) = \vec{v} + s\,\big(\vec{q}(\theta) - \vec{v}\big),$$

donde $\vec{v}$ es el vector de posición de V. Con $s = 0$ se obtiene el vértice; con $s = 1$, la directriz; con $s < 0$, la otra hoja del cono, del otro lado del vértice.

4. **Confundir el eje focal de la hipérbola.** Es el de la variable con signo positivo en la forma ordinaria (la que lleva sec en las paramétricas), no el de la que tiene el denominador mayor.
5. **Intervalo paramétrico con desigualdad no estricta en un denominador.** $\frac{1}{\sqrt{t+4}}$ exige $t > -4$, no $t \geq -4$.
6. **Dar la extensión de la cónica completa.** Con $x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$ la parábola solo llega a $|x| \leq 4$; la extensión sale de las paramétricas, no de la cartesiana.
7. **Olvidar los puntos excluidos.** Con $\frac{4}{\csc\theta}$ los valores $\theta = k\pi$ no están en el intervalo y la elipse pierde dos puntos.
8. **Invertir la desigualdad mal.** Con $z = 4 - 3\,\mathrm{sen}\,t$, $\mathrm{sen}\,t = 1$ da el mínimo $z = 1$, no el máximo.

4B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Vectorial $\vec{p}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \iff$ paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z = k$).
- $\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \csc^2 t - \cot^2 t = 1 \cdot \cos 2t = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1 \cdot \mathrm{sen}\,2t = 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t$.
- $(\cos t + \mathrm{sen}\,t)^2 + (\cos t - \mathrm{sen}\,t)^2 = 2$.
- Elipse: $u = h + a\cos t$, $v = k + b\,\mathrm{sen}\,t$ · hipérbola: $u = h + a\sec t$, $v = k + b\tan t$ · parábola $(u-h)^2 = 4p(v-k)$: $u = h + 2t$, $v = k + \frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2 = a^2 - b^2$; hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, asíntotas $v - k = \pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en u).
- Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ } \geq 0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }} > 0$; $\tan, \sec: t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cot, \csc: t \neq k\pi$).
- Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0 \leq \mathrm{sen}^2 t \leq 1$, $|\sec t| \geq 1$.

4B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe las paramétricas (o la vectorial) aunque no las pidan: de ahí sale todo.
2. Intervalo paramétrico: una condición por componente, e intersección.
3. Extensión: recorrido de cada coordenada, partiendo de $-1 \leq \mathrm{sen}\,t \leq 1$ o de la monotonía.
4. Elimina el parámetro con la identidad que corresponde; escribe la cónica en forma ordinaria y el plano.
5. Identifica: nombre, centro o vértice, eje focal, semiejes, vértices y focos, con la tercera coordenada; di si la extensión recorta la cónica.
6. Bosquejo: plano, centro, vértices, asíntotas y la curva solo en su extensión.

Si no sale la identidad, el intervalo paramétrico y la extensión ya valen buena parte del problema.

4B.10 Con la computadora

El programa sustituye las paramétricas de la hipérbola del ejemplo 4B.4 en su ecuación cartesiana y comprueba que se cumple para todo θ: así se revisa una eliminación del parámetro. Para verla, `sympy.plotting.plot3d_parametric_line(x, y, z, (t,`

`-1.2, 1.2))` dibuja una rama si está instalada matplotlib. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import symbols, tan, sec, simplify

t = symbols("theta")
x, y, z = 1 + 3*tan(t), -2 + 2*sec(t), 3
C = (y + 2)**2/4 - (x - 1)**2/9 - 1   # hipérbola en z = 3
assert simplify(C) == 0
print("se cumple para todo theta: hipérbola en z =", z)
```


Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 4). «Aplicar los conceptos de superficies cuádricas y curvas en coordenadas polares y cartesianas, así como sus respectivas ecuaciones, para visualizarlos gráficamente empleando software.»

Contenido de esta parte. 4.3 Superficies cuádricas y su identificación. Ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana. Representación gráfica empleando software.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, dos problemas en los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010 (16 problemas en total, un tercio del examen): un cono o un cilindro por el método de las generatrices (8; siempre piden la ecuación vectorial y la cartesiana) y la identificación de tres o cuatro cuádricas (8), casi siempre trasladadas y con cuadrados por completar. Las cuádricas en forma vectorial y paramétrica fuera de los conos y cilindros (sección 4C.10) son nuevas en el programa 2026: no hay exámenes de ellas.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4C.1.4 a 4C.1.6 (40 min): catálogo de cuádricas y tabla de reconocimiento.
  2. Aprende los procedimientos 4C.3.1 (cono) e 4C.3.4 (identificación).
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 4C.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 4C.5.1, 4C.5.3, 4C.5.7 y 4C.5.9 con cronómetro: 15 min cada uno.
  5. Termina con la sección 4C.10 (forma vectorial y paramétrica, 30 min).

4C.1 Conceptos y expresiones

4C.1.1 Superficie: ecuaciones y clasificación

Una *superficie* es un conjunto de puntos del espacio que depende de *dos* parámetros (una curva depende de uno). Se representa de tres maneras:

- **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = \big(x(\theta, s),\ y(\theta, s),\ z(\theta, s)\big)$, con dos parámetros θ y s.
- **Ecuaciones paramétricas:** las tres componentes por separado, $x = x(\theta, s)$, $y = y(\theta, s)$, $z = z(\theta, s)$.
- **Ecuación cartesiana:** una sola ecuación $F(x, y, z) = 0$. Se obtiene de las paramétricas *eliminando los dos parámetros*.

Clasificación. Las superficies del programa se agrupan así:

- **Cuádricas:** su ecuación cartesiana es de segundo grado en x, y, z. Son el elipsoide (y la esfera), los hiperboloides de una y de dos hojas, los paraboloides elíptico e hiperbólico, el cono y los cilindros de base cónica.

2. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-2&-1&-1\\-2&2&2\end{vmatrix}=(-2+2)\hat{\imath}-(-4-2)\hat{\jmath}+(-4-2)\hat{k}=(0,6,-6)$.
3. $(0,6,-6)\cdot(2,d_2-1,-1)=6d_2-6+6=6d_2$.
4. $V=\frac{1}{6}|6d_2|=|d_2|=5\Rightarrow d_2=\pm5$.

Ejercicio 2.7.13 ← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(6,2,-4)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12+4=16$, $|\overrightarrow{AC}|^2=56$.
2. **a)** $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\frac{16}{56}(6,2,-4)=\frac{2}{7}(6,2,-4)$, así que $Q=A+\overrightarrow{AQ}=\left(1+\frac{12}{7},\,2+\frac{4}{7},\,3-\frac{8}{7}\right)=\left(\frac{19}{7},\frac{18}{7},\frac{13}{7}\right)$.
3. Comprobación: $\overrightarrow{QB}=\left(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$ y $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{12-8-4}{7}=0$.
4. **b)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&0&-1\\6&2&-4\end{vmatrix}=(0+2)\hat{\imath}-(-8+6)\hat{\jmath}+(4-0)\hat{k}=(2,2,4)$, de módulo $2\sqrt{6}$; el área es $\sqrt{6}$.

Ejercicio 2.7.14 ← volver

1. **Ángulo:** $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta\Rightarrow 6=12\,\text{sen}\,\theta\Rightarrow\text{sen}\,\theta=\frac{1}{2}$. Como es agudo, $\theta=30^\circ$.
2. **Producto escalar:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=12\cos30^\circ=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

E.3 · Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio

Ejercicio 3.6.1 ← volver

1. **Plano π:** contiene la dirección $(2,1,-3)$ y, por ser perpendicular al plano XY, la dirección $\hat{k}$:
$$\vec{n}=(2,1,-3)\times(0,0,1)=(1,-2,0).$$
Pasa por el origen: $\pi:\ x-2y=0$.
2. **Plano π_0:** contiene las direcciones $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$:
$$\vec{n}_0=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&0&1\\5&4&m\end{vmatrix}=(-4,\ 5-2m,\ 8).$$
3. **Perpendicularidad:** $\vec{n}\cdot\vec{n}_0=-4-2(5-2m)=4m-14=0$, $m=\frac{7}{2}$.

Ejercicio 3.6.2 ← volver

1. **Datos:** $P_0(-2,1,6)$, $\vec{u}=(3,2,3)$; el plano contiene la dirección $\hat{\jmath}$, normal del plano XZ.
2. **a)** $\vec{n}=(3,2,3)\times(0,1,0)=(-3,0,3)$, o $(1,0,-1)$. Por P_0: $(x+2)-(z-6)=0$, es decir, $x-z+8=0$.
3. **b)** $d=\dfrac{|0-0+8|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.6.3 ← volver

2. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(2\cos\theta,\ 3\,\text{sen}\,\theta,\ 3)+s(3,0,2)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
3. **b) Paramétricas:** $x=2\cos\theta+3s$, $y=3\,\text{sen}\,\theta$, $z=3+2s$.
4. **Eliminación de s:** $s=\dfrac{z-3}{2}$.
5. **Eliminación de θ:** $\cos\theta=\dfrac{x-3s}{2}=\dfrac{2x-3z+9}{4}$; $\text{sen}\,\theta=\dfrac{y}{3}$.
6. **c) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(2x-3z+9)^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, es decir
$$9(2x-3z+9)^2+16y^2=144.$$
7. **Comprobación:** con $z=3$: $9(2x)^2+16y^2=144\Rightarrow 9x^2+4y^2=36$.

Resultado: $\vec{p}=(2\cos\theta,3\,\text{sen}\,\theta,3)+s(3,0,2)$; $9(2x-3z+9)^2+16y^2=144$.

Ejercicio 4C.5.4 · Cilindro con directriz hiperbólica

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica S formada por el conjunto de las rectas paralelas al vector $\vec{u}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+12\hat{k}$ y que tiene por intersección con el plano $z=3$ a la curva $D:\ (y-3)^2-(x+4)^2=16$, $z=3$.

Resolución.

1. **Directriz:** $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+4)^2}{16}=1$ es una hipérbola de centro $(-4,3,3)$ y eje focal paralelo a y. Se parametriza con $y-3=4\sec\theta$, $x+4=4\tan\theta$:
$$\vec{q}(\theta)=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3),\quad \theta\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2}\right).$$
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3)+s(1,2,12)$, $s\in\mathbb{R}$.
3. **Paramétricas:** $x=-4+4\tan\theta+s$, $y=3+4\sec\theta+2s$, $z=3+12s$.
4. **Eliminación de s:** $s=\dfrac{z-3}{12}$.
5. **Eliminación de θ:**
$$4\tan\theta=x+4-s=\frac{12x-z+51}{12},\qquad 4\sec\theta=y-3-2s=\frac{6y-z-15}{6}.$$
6. **Identidad** $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$, multiplicada por 16:
$$\frac{(6y-z-15)^2}{36}-\frac{(12x-z+51)^2}{144}=16\quad\Longleftrightarrow\quad 4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304.$$
7. **Comprobación:** con $z=3$: $4\cdot36(y-3)^2-144(x+4)^2=2304\Rightarrow(y-3)^2-(x+4)^2=16$.

Resultado: $\vec{p}=(-4+4\tan\theta,\ 3+4\sec\theta,\ 3)+s(1,2,12)$; $4(6y-z-15)^2-(12x-z+51)^2=2304$ (cilindro hiperbólico).

Ejercicio 4C.5.5 · Superficie reglada con directriz en el plano $x=0$

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 6.

Sea la superficie reglada S que contiene a la curva $D:\ y^2+2z^2=4$, $x=0$, y la generan rectas paralelas al vector $\vec{u}=(-3,1,2)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

Resolución.

1. **Tipo:** rectas paralelas a un vector que cortan a una curva: es una superficie cilíndrica (4C.1.2).
2. **Directriz:** $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ en $x=0$: $\vec{q}(\theta)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)$.
3. **a) Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta,s)=(0,\ 2\cos\theta,\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s\,(-3,1,2)$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$.
4. **Eliminación de s:** el plano de la directriz es $x=0$, así que se usa $x=-3s\Rightarrow s=-\frac{x}{3}$.
5. **Eliminación de θ:** $y=2\cos\theta+s\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{x+3y}{6}$; $z=\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta+2s\Rightarrow\operatorname{sen}\theta=\dfrac{2x+3z}{3\sqrt{2}}$.
6. **b) Ecuación cartesiana:** $\dfrac{(x+3y)^2}{36}+\dfrac{(2x+3z)^2}{18}=1$, es decir

$$(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36.$$

7. **Comprobación:** con $x=0$: $9y^2+18z^2=36\Rightarrow y^2+2z^2=4$.

Resultado: $\vec{p}=(0,2\cos\theta,\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta)+s(-3,1,2)$; $(x+3y)^2+2(2x+3z)^2=36$.

Ejercicio 4C.5.6 · Cono, hiperboloide y silla sin completar cuadrados

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (nombre y algunas características): a) $z^2=y^2-x^2$; b) $z^2-y^2-x^2=-1$; c) $4(x-1)^2-9y^2+z=0$.

Resolución.

1. **a)** $x^2+z^2-y^2=0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: se cumple la forma del **cono**; denominadores de x y z iguales: cono circular.
   - **Vértice** en el origen; **eje** y (la variable de signo solitario).
   - **Trazas:** $y=k\neq0$, circunferencias $x^2+z^2=k^2$ de radio $|k|$; plano $z=0$, rectas $y=\pm x$; plano $x=0$, rectas $y=\pm z$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
2. **b)** Multiplicando por -1: $x^2+y^2-z^2=1$. Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de una hoja**; es de revolución (coeficientes de x^2 y y^2 iguales).
   - **Centro** en el origen; **eje** z.
   - **Trazas:** $z=k$, circunferencias de radio $\sqrt{1+k^2}$ (la garganta, de radio 1, en $z=0$); plano $x=0$, hipérbola $y^2-z^2=1$; plano $y=0$, hipérbola $x^2-z^2=1$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** $z=9y^2-4(x-1)^2$. Dos cuadrados de signo contrario y una variable lineal: se cumple la forma del **paraboloide hiperbólico**; no se cumple la del elíptico (los signos no coinciden).
   - **Punto silla** $(1,0,0)$; eje paralelo a z (la recta $x=1$, $y=0$).
   - **Trazas:** plano $x=1$, parábola $z=9y^2$, abre hacia z positivo; plano $y=0$, parábola $z=-4(x-1)^2$, abre hacia z negativo; plano $z=0$, rectas $3y=\pm2(x-1)$; $z=k\neq0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.

1. **Relación:** $\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ y $\overrightarrow{AB}=-\vec{c}$, así que $\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$ y $|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$.
2. **a)** $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{1}{1}\vec{a}=\vec{a}$.
3. **b)** $\cos\theta=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\theta=45°$).
4. **c)** $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}$, con $|\vec{a}\times\vec{c}|=1\cdot1\cdot\operatorname{sen}90°=1$: área $\frac{1}{2}$. (Es un triángulo rectángulo en A con catetos de longitud 1.)

Ejercicio 2.7.9

← volver

1. **Aristas:** $\overrightarrow{AB}=(-6,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-4,2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4,-3,2)$.
2. **a)**

$$\begin{vmatrix}-6&1&2\\-1&-4&2\\-4&-3&2\end{vmatrix}=-6(-8+6)-1(-2+8)+2(3-16)=12-6-26=-20,$$

   así que $V=20$.
3. **b)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=4+12+4=20$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{21}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{29}$: $\cos\theta=\frac{20}{\sqrt{609}}$.

Ejercicio 2.7.10

← volver

1. $\vec{v}=B-A=(-2,1,4)$, $|\vec{v}|^2=21$.
2. **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2+2+12=12$: $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{12}{21}\vec{v}=\frac{4}{7}(-2,1,4)=\left(-\frac{8}{7},\frac{4}{7},\frac{16}{7}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&2&3\\-2&1&4\end{vmatrix}=(8-3)\hat{\imath}-(4+6)\hat{\jmath}+(1+4)\hat{k}=(5,-10,5)=5(1,-2,1),$$

   $\vec{w}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.
4. **c)** $A=|\vec{u}\times\vec{v}|=5\sqrt{6}$.

Ejercicio 2.7.11

← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(3,1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,-3,3)$.
2. **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-2=4$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{19}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$: $\cos A=\frac{4}{2\sqrt{38}}=\frac{\sqrt{38}}{19}$.
3. **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3-3-9=-15$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{19}$: $\operatorname{comp}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}=-\frac{15}{\sqrt{19}}$.
4. **c)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\3&1&-3\\2&-2&0\end{vmatrix}=(0-6)\hat{\imath}-(0+6)\hat{\jmath}+(-6-2)\hat{k}=(-6,-6,-8)$; $|...|=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$ y el área es $\sqrt{34}$.

Ejercicio 2.7.12

← volver

1. $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,d_2-1,-1)$.

Ejercicio 2.7.2 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{RP} = (2,-1,-1)$, $\overrightarrow{RQ} = (1,-2,4)$; $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = 2+2-4 = 0$: el ángulo en R es recto, así que P, R, Q son vértices consecutivos de un rectángulo; el paralelogramo con el cuarto vértice opuesto a R tiene sus cuatro ángulos rectos.
2. **b)** S es el vértice opuesto a R: $S = P+Q-R = (1+0+1,\ 2+1-3,\ -3+2+2) = (2,0,1)$.
3. **Comprobación:** $\overrightarrow{QS} = (2,-1,-1) = \overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ} = (-1,2,-4)\cdot(-2,1,1) = 0$.

Ejercicio 2.7.3 ← volver

1. **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12-4-8 = 0$: ya son perpendiculares. $\vec{a}\cdot\vec{c} = 12-8+4c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -1$.
2. **b)**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (8-4)\hat{\imath} - (-12-8)\hat{\jmath} + (6+8)\hat{k} = (4,20,14),$$

$A = \sqrt{16+400+196} = \sqrt{612} = 6\sqrt{17}$. Como $\vec{a}\perp\vec{b}$, también $A = |\vec{a}||\vec{b}| = 2\sqrt{17}\cdot 3$.

Ejercicio 2.7.4 ← volver

1. $\vec{u} = (9,0,6) + (-8,2,6) - (2,1,10) = (-1,1,2)$.
2. $\vec{v} = \lambda\vec{d} = \lambda(3,6,-6)$, así que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(-3+6-12) = -9\lambda$.
3. $-2(-9\lambda) = -36 \Rightarrow 18\lambda = -36 \Rightarrow \lambda = -2$ y $\vec{v} = (-6,-12,12)$.

Ejercicio 2.7.5 ← volver

1. $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$ y $\overrightarrow{DC} = C - D = (c_1-4,\ -2,\ 2-d_3)$.
2. Paralelos: $\overrightarrow{DC} = k\,\overrightarrow{AB}$. La segunda componente da $-2 = 2k \Rightarrow k = -1$.
3. Entonces $c_1 - 4 = -2 \Rightarrow c_1 = 2$ y $2 - d_3 = -1 \Rightarrow d_3 = 3$. (Quedan paralelos de sentido contrario: $\overrightarrow{DC} = (-2,-2,-1)$.)

Ejercicio 2.7.6 ← volver

1. **Perpendicularidad:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$.
2. **Área:** $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & b & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b,-2,b)$, así que $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = 2b^2+4 = 36 \Rightarrow b^2 = 16$, $b = \pm 4$.
3. Otra forma: como son perpendiculares, $A = |\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{2+b^2}\,\sqrt{2} = 6$.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo C, problema 5, con $\vec{u} = (1,a,1)$ y $\vec{v} = (-1,0,b)$: $b = 1$ y $a = \pm 4$.

Ejercicio 2.7.7 ← volver

1. **a)** $\overrightarrow{OB}\cdot\hat{\jmath} = 4\sqrt{2}$ y $|\hat{\jmath}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\hat{\jmath}}\,\overrightarrow{OB} = 4\sqrt{2}\,\hat{\jmath} = \big(0,4\sqrt{2},0\big)$.
2. **b)** $C = \frac{1}{2}(A+B) = \big(2\sqrt{2},2\sqrt{2},-4\big)$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{8+8+16} = 4\sqrt{2}$.
3. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 16+0+16 = 32$: $\text{comp}_{\overrightarrow{OC}}\,\overrightarrow{OA} = \frac{32}{4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Ejercicio 2.7.8 ← volver

Resultado: a) cono circular de vértice en el origen y eje y; b) hiperboloide de una hoja de revolución, centro en el origen, eje z; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(1,0,0)$.

Ejercicio 4C.5.7 · Dos hojas, paraboloide y elipsoide trasladado

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $5x^2-3y^2+15z^2+15=0$; b) $x-y^2-4z^2=-4$; c) $x^2+y^2+2z^2-4x+2y-4z+3=0$.

Resolución.

1. **a)** $5x^2-3y^2+15z^2=-15$; dividiendo entre -15:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} - z^2 = 1.$$

   Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y; **vértices** $(0,\pm\sqrt{5},0)$.
   - **Trazas:** $y = k$ con $|k| > \sqrt{5}$, elipses $\frac{x^2}{3} + z^2 = \frac{k^2}{5} - 1$; plano $z = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$; plano $x = 0$, hipérbola $\frac{y^2}{5} - z^2 = 1$.
   - **Extensión:** $y \in (-\infty,-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5},\infty)$; $x, z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** $x+4 = y^2+4z^2$. Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal x: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.
   - **Vértice** $(-4,0,0)$; **eje** x; abre hacia x positivo.
   - **Trazas:** $x = k > -4$, elipses $\frac{y^2}{k+4} + \frac{z^2}{(k+4)/4} = 1$; plano $z = 0$, parábola $y^2 = x+4$; plano $y = 0$, parábola $4z^2 = x+4$.
   - **Extensión:** $x \in [-4,\infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c) Completar cuadrados:** $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 2(z-1)^2 - 2 + 3 = 0$, es decir $(x-2)^2 + (y+1)^2 + 2(z-1)^2 = 4$:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1.$$

   Tres cuadrados positivos igualados a 1: se cumple la forma del **elipsoide**; dos denominadores iguales: es de revolución alrededor de la recta $x = 2$, $y = -1$.
   - **Centro** $(2,-1,1)$; semiejes 2, 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Trazas:** plano $z = 1$, circunferencia $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$; planos $x = 2$ y $y = -1$, elipses de semiejes 2 y $\sqrt{2}$.
   - **Extensión:** $x \in [0,4]$, $y \in [-3,1]$, $z \in [1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas de eje y, vértices $(0,\pm\sqrt{5},0)$; b) paraboloide elíptico de vértice $(-4,0,0)$ y eje x; c) elipsoide de revolución de centro $(2,-1,1)$, semiejes 2, 2, $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4C.5.8 · Cuatro superficies, una de ellas cilindro

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $(x-1)^2+2y^2+(z+3)^2-16=0$; b) $3x^2-2y^2+4y+z^2=26$; c) $x^2-y^2-z+1=0$; d) $x^2+z^2-4=0$.

Resolución.

1. **a)** $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{(z+3)^2}{16}=1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide** de revolución (eje: la recta $x=1$, $z=-3$, paralela a y).
   - **Centro** $(1,0,-3)$; semiejes 4, $2\sqrt{2}$, 4.
   - **Trazas:** plano $y=0$, circunferencia $(x-1)^2+(z+3)^2=16$; planos $x=1$ y $z=-3$, elipses.
   - **Extensión:** $x\in[-3,5]$, $y\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$, $z\in[-7,1]$.
2. **b) Completar cuadrados:** $-2(y^2-2y)=-2(y-1)^2+2$, así que $3x^2-2(y-1)^2+z^2=24$:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{12}+\frac{z^2}{24}=1.$$

   Dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(0,1,0)$; **eje** la recta $x=0$, $z=0$, paralela a y.
   - **Trazas:** plano $y=1$ (garganta), elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{z^2}{24}=1$; plano $z=0$, hipérbola $\frac{x^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{12}=1$; plano $x=0$, hipérbola $\frac{z^2}{24}-\frac{(y-1)^2}{12}=1$.
   - **Extensión:** $x,y,z\in\mathbb{R}$.
3. **c)** $z-1=x^2-y^2$. Dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.
   - **Punto silla** $(0,0,1)$; eje paralelo a z (el eje z).
   - **Trazas:** plano $y=0$, parábola $z-1=x^2$ (abre hacia arriba); plano $x=0$, parábola $z-1=-y^2$ (abre hacia abajo); plano $z=1$, rectas $y=\pm x$.
4. **d)** $x^2+z^2=4$. Falta y y los dos cuadrados son positivos: **cilindro circular recto** de radio 2.
   - **Eje:** el eje y; generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$; directriz, la circunferencia $x^2+z^2=4$, $y=0$.
   - **Extensión:** $x\in[-2,2]$, $z\in[-2,2]$, $y\in\mathbb{R}$.

Resultado: a) elipsoide de centro $(1,0,-3)$; b) hiperboloide de una hoja de centro $(0,1,0)$ y eje paralelo a y; c) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0,0,1)$; d) cilindro circular de radio 2 y eje y.

Ejercicio 4C.5.9 · Hiperboloide de dos hojas, paraboloide hacia abajo y cilindro elíptico

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación: a) $\dfrac{(x-3)^2}{9}-(y+2)^2-\dfrac{(z-1)^2}{16}=1$; b) $x^2+2y^2-2x+8y=-5z-3$; c) $\dfrac{(y-2)^2}{16}=-\dfrac{(z+1)^2}{9}+1$.

Resolución.

1. **a)** Un cuadrado positivo y dos negativos igualados a 1: se cumple la forma del **hiperboloide de dos hojas**.
   - **Centro** $(3,-2,1)$; **eje** la recta $y=-2$, $z=1$, paralela a x; **vértices** $(0,-2,1)$ y $(6,-2,1)$.

6. $g(x)=x^3(x-1)(x-2)(x-i)(x+i)$.

Ejercicio 1B.6.5 ← volver

1. $p(1)=A+2-B+2=-4\Rightarrow A-B=-8$.
2. $p(2)=8A+8-2B+2=0\Rightarrow 8A-2B=-10\Rightarrow 4A-B=-5$.
3. Restando la primera de la segunda: $3A=3$, $A=1$, $B=9$.
4. $p(x)=x^3+2x^2-9x+2$, con raíz $x=2$ (dato $p(2)=0$):

	1	2	−9	2
2		2	8	−2
	1	4	−1	0

5. $x^2+4x-1=0$: $x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$.

Ejercicio 1B.6.6 ← volver

1. Coeficientes complejos: se divide solo entre $x-(1-3i)$:

	1	$-1+3i$	5	$-5+15i$	4	$-4+12i$
$1-3i$		$1-3i$	0	$5-15i$	0	$4-12i$
	1	0	5	0	4	0

2. Cociente bicuadrado: $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$.
3. $x^2=-1\Rightarrow x=\pm i$; $x^2=-4\Rightarrow x=\pm 2i$.
4. Raíces: $1-3i$, i, $-i$, $2i$, $-2i$.

E.2 · Unidad 2 · Álgebra vectorial

Ejercicio 2.1.1 · Conversión de puntos ← volver

1. **a)** $r=\sqrt{12+4}=4$; $\tan\theta=\frac{-2}{-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, con el punto en el tercer cuadrante: $\theta=180^\circ+30^\circ=210^\circ$. Con $r<0$ se resta 180°: $(-4,30^\circ)$.
2. **b)** $x=5\cos(-90^\circ)=0$, $y=5\operatorname{sen}(-90^\circ)=-5$: $Q(0,-5)$.

Ejercicio 2.1.2 · Ecuación de transformación y distancia ← volver

1. **a)** Se multiplica por r: $r^2=6r\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=6x\Rightarrow(x-3)^2+y^2=9$. Circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3, que pasa por el polo.
2. **b)** En cartesianas, $M(2\cos 30^\circ, 2\operatorname{sen}30^\circ)=\left(\sqrt{3},1\right)$ y $N(0,4)$. $\overrightarrow{MN}=\left(-\sqrt{3},3\right)$ y $d=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Ejercicio 2.7.1 ← volver

1. **Incógnitas:** $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$.
2. **Perpendicularidad:** $(a,b,0)\cdot(1,-2,4)=a-2b=0\Rightarrow a=2b$.
3. **Área:** $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(0,0,ab)$, así que $\frac{1}{2}|ab|=4\Rightarrow|ab|=8$.
4. Con $a=2b$: $2b^2=8\Rightarrow b=\pm 2$, $a=\pm 4$ (mismo signo).

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Polinomios

Ejercicio 1B.6.1

← volver

1. Cuatro cruces simples: grado 4, $q(x) = a\,x(x+3)(x+1)(x-2)$.
2. Punto $(1,-8)$: $a\,(1)(4)(2)(-1) = -8a = -8$, $a = 1$.
3. $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2)$. Como $(x+3)(x+1)(x-2) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $q(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

Ejercicio 1B.6.2

← volver

1. $h(x) = x^2\,g(x)$, con $g(x) = x^4 + (2-i)x^3 + (-3-2i)x^2 + (-6+3i)x + 6i$. $x = 0$ es raíz doble.
2. Coeficientes complejos: solo se divide entre $x - i$:

	1	$2-i$	$-3-2i$	$-6+3i$	$6i$
i		i	$2i$	$-3i$	$-6i$
	1	2	-3	-6	0

3. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = x^2(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(x^2-3)$.
4. Raíces: 0 (doble), i, -2, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; $h(x) = x^2(x-i)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Ejercicio 1B.6.3

← volver

1. Las raíces de f son las de p junto con las de q. De p: $x = \pm i$.
2. $q(x) = x^3(x^3 - 3x^2 - 9x + 20)$: $x = 0$ triple.
3. Candidatos de $x^3 - 3x^2 - 9x + 20$: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$. Con $x = 4$:

	1	-3	-9	20
4		4	4	-20
	1	1	-5	0

4. $x^2 + x - 5 = 0$: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.
5. Son 8 raíces, el grado de f.

Ejercicio 1B.6.4

← volver

1. $g(x) = x^3\,q(x)$, $q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$; $x = 0$ triple.
2. $q(x)$: signos $+\ -\ +\ -\ +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 positivas. $q(-x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$: 0 cambios, ninguna negativa.
3. Posibilidades: $(4,0,0)$, $(2,0,2)$, $(0,0,4)$.
4. Se prueban solo candidatos positivos $(1, 2)$:

	1	-3	3	-3	2
1		1	-2	1	-2
2	1	-2	1	-2	0
		2	0	2	
	1	0	1	0	

5. $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la posibilidad $(2,0,2)$.

- **Trazas:** $x = k$ con $|k-3| > 3$, elipses $(y+2)^2 + \frac{(z-1)^2}{16} = \frac{(k-3)^2}{9} - 1$; plano $z = 1$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - (y+2)^2 = 1$; plano $y = -2$, hipérbola $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{16} = 1$.
- **Extensión:** $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$; $y, z \in \mathbb{R}$.

2. **b) Completar cuadrados:** $(x-1)^2 - 1 + 2(y+2)^2 - 8 = -5z - 3$, es decir

$$(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = -5\left(z - \tfrac{6}{5}\right).$$

Dos cuadrados positivos igualados a la variable lineal z: se cumple la forma del **paraboloide elíptico**.

- **Vértice** $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$; **eje** la recta $x = 1$, $y = -2$; abre hacia z negativo (el coeficiente -5).
- **Trazas:** plano $z = 0$, elipse $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 6$; plano $x = 1$, parábola $2(y+2)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$; plano $y = -2$, parábola $(x-1)^2 = -5\left(z - \frac{6}{5}\right)$.
- **Extensión:** $z \in \left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$; $x, y \in \mathbb{R}$.

3. **c)** $\dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(z+1)^2}{9} = 1$. Falta x y los dos cuadrados son positivos: **cilindro elíptico**; no es elipsoide (no hay tres cuadrados).

- **Eje:** la recta $y = 2$, $z = -1$, paralela al eje x; generatrices paralelas a $\hat{\imath}$.
- **Directriz:** la elipse de centro $(0, 2, -1)$ en el plano $x = 0$, semiejes 4 (en y) y 3 (en z).
- **Extensión:** $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-2, 6]$, $z \in [-4, 2]$.

Resultado: a) hiperboloide de dos hojas, centro $(3, -2, 1)$, eje paralelo a x; b) paraboloide elíptico, vértice $\left(1, -2, \frac{6}{5}\right)$, abre hacia z negativo; c) cilindro elíptico de eje $y = 2$, $z = -1$.

4C.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4C**.

Ejercicio propuesto 4C.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 5.

Determine una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana de la superficie cónica S que tiene por vértice el punto $V(3, -2, 7)$ y contiene a la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1, \qquad z = 0.$$

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (3, -2, 7) + s(-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -7)$; $9(7x - 5z + 14)^2 + 4(7y + 3z - 7)^2 = 36(z-7)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

Ejercicio propuesto 4C.6.2

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 5.

Sea el cilindro S con eje paralelo al vector $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ y cuya intersección con el plano $z - 3 = 0$ es la circunferencia de radio 2 y centro en $C(0, 0, 3)$. Obtenga: a) una ecuación vectorial de S; b) una ecuación cartesiana de S.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3) + s(-1, 2, 1)$; $(x + z - 3)^2 + (y - 2z + 6)^2 = 4$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 151.

Ejercicio propuesto 4C.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 7.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $x^2+2x+8y^2 = 23$; b) $(x-1)^2-9 = -3(y+2)^2-3z^2$; c) $-2x^2-5z^2 = -25-3y^2$.

Resultado: a) cilindro elíptico de eje $x = -1$, $y = 0$ (paralelo a z); b) elipsoide de revolución, centro $(1, -2, 0)$, semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; c) hiperboloide de una hoja, centro en el origen, eje y.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 152.

Ejercicio propuesto 4C.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = (z-1)^2 + 1$; b) $\dfrac{(y-2)^2}{3} + \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{z^2}{4}$; c) $x^2 + y^2 - z^2 = -2z^2 + 2$.

Resultado: a) hiperboloide de una hoja, centro $(-2, 3, 1)$, eje paralelo a z; b) paraboloide hiperbólico, punto silla $(1, 2, 0)$, eje paralelo a x; c) esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 152.

Ejercicio propuesto 4C.6.5

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 6.

Identifique la superficie representada por cada ecuación (la identificación requiere más que el nombre): a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 + x - 2y = 1$; b) $\dfrac{(y+1)^2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2} = \dfrac{(z-1)^2}{4}$; c) $(x+1)^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = \dfrac{z^2}{4}$.

Resultado: a) elipsoide de revolución, centro $\left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right)$, semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$, $\frac{\sqrt{34}}{4}$, $\frac{\sqrt{17}}{4}$; b) cono elíptico, vértice $(2, -1, 1)$, eje paralelo a y; c) hiperboloide de una hoja, centro $(-1, 0, 0)$, eje paralelo a z.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 153.

Ejercicio propuesto 4C.6.6

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 4.

Obtenga una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del cono cuyo vértice es el punto $V(0, 1, 0)$ y que contiene a la curva $C:\ \ y = 0,\ x^2 + z^2 = 2$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, s) = (0, 1, 0) + s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$; $x^2 + z^2 = 2(y-1)^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 153.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1A · Unidad 1 · Parte A · Números complejos

Ejercicio 1A.6.1

← volver

1. Lectura: $z_1 = i$; $z_2 = 1 + 3i$; $z_3 = 2\,\mathrm{cis}(270^\circ - 30^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,240^\circ$; $z_4 = \sqrt{8}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 2 - 2i$.
2. $2z_2 - z_4 = 2 + 6i - 2 + 2i = 8i$ y $\frac{8i}{i} = 8$.
3. $z_3^3 = 8\,\mathrm{cis}\,720^\circ = 8$.
4. $8z^4 = 8 \Rightarrow z^4 = 1 = \mathrm{cis}\,0^\circ$; raíces cuartas: $\mathrm{cis}(90^\circ k)$.
5. **Resultado:** $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 1A.6.2

← volver

1. $z_2 - \bar{z}_3 = -3 - (-3 + 6i) = -6i = 6\,\mathrm{cis}\,270^\circ$; numerador: $6\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,270^\circ$.
2. $i^{17} = i = \mathrm{cis}\,90^\circ$; denominador: $2\,\mathrm{cis}\,135^\circ \cdot \mathrm{cis}\,90^\circ = 2\,\mathrm{cis}\,225^\circ$.
3. Lado derecho: $3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$. Como $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$, $w^{3/2} = 3$.
4. $w = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9\,\mathrm{cis}\,0^\circ}$: módulo $\sqrt[3]{9}$, argumentos $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$.

Ejercicio 1A.6.3

← volver

1. $i^7 = i^3 = -i = \mathrm{cis}\,270^\circ$; $(-i)(2\,\mathrm{cis}\,60^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,330^\circ = \sqrt{3} - i$.
2. Numerador: $(\sqrt{3} - i) + (-\sqrt{3} + 2i) = i$. Denominador: $-\,\mathrm{cis}\,270^\circ = -(-i) = i$.
3. $z^{4/3} = 1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{1^3} = \sqrt[4]{\mathrm{cis}\,0^\circ}$.
4. Raíces cuartas de 1: $\mathrm{cis}(90^\circ k)$, $k = 0, 1, 2, 3$: $1,\ i,\ -1,\ -i$.

Ejercicio 1A.6.4

← volver

1. Lectura: $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\,\mathrm{cis}\,120^\circ$; $z_2 = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,225^\circ = -4 - 4i$; $z_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 1 - i$.
2. $z_2 - 2\bar{z}_3 = -4 - 4i - 2 - 2i = -6 - 6i$; por $e^{\pi i} = -1$, el denominador es $6 + 6i = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$.
3. Numerador: $6 \cdot 2\,\mathrm{cis}\,120^\circ \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,315^\circ = 12\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,435^\circ = 12\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,75^\circ$.
4. $w^{2/3} = 2\,\mathrm{cis}\,30^\circ \Rightarrow w = \sqrt{(2\,\mathrm{cis}\,30^\circ)^3} = \sqrt{8\,\mathrm{cis}\,90^\circ}$.
5. Raíces cuadradas: módulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, argumentos 45° y 225°: $w = 2 + 2i$, $w = -2 - 2i$.

Ejercicio 1A.6.5

← volver

1. $z_1 = 20\,\mathrm{cis}\,180^\circ$; $z_3 = 16\,\mathrm{cis}\,60^\circ$ ($r = \sqrt{64 + 192} = 16$, primer cuadrante, $\tan\theta = \sqrt{3}$).
2. $z_2 z_3 z_4 = 5 \cdot 16 \cdot 4\,\mathrm{cis}(45^\circ + 60^\circ + 135^\circ) = 320\,\mathrm{cis}\,240^\circ$.
3. $z^4 = \frac{320\,\mathrm{cis}\,240^\circ}{20\,\mathrm{cis}\,180^\circ} = 16\,\mathrm{cis}\,60^\circ$.
4. Raíces cuartas: módulo 2, argumentos $15^\circ + 90^\circ k$.

Ejercicio 1A.6.6

← volver

1. $z_3 - \bar{z}_4 = -3 - (-3 - 4i) = 4i$; $(4i)^3 = 64\,\mathrm{cis}\,270^\circ$.
2. $z_1 = 2\,\mathrm{cis}\,135^\circ$ y $z_2 = 8\,\mathrm{cis}\,45^\circ$: $z_1 z_2 = 16\,\mathrm{cis}\,180^\circ$.
3. $z^{3/2} = 4\,\mathrm{cis}\,90^\circ \Rightarrow z = \sqrt[3]{(4\,\mathrm{cis}\,90^\circ)^2} = \sqrt[3]{16\,\mathrm{cis}\,180^\circ}$.
4. Módulo $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; argumentos $60^\circ + 120^\circ k$.

- Stewart, J. y otros. *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas*. Cengage Learning, 2021 (2, 3 y 4).
- Swokowski, E. W. y Cole, J. A. *Precálculo. Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning, 2018 (1, 2 y 4).

Complementaria

- Gigena, S. *Álgebra y geometría: teoría, práctica y aplicaciones*. Universitas Editorial Científica Universitaria, 2018 (1).
- Miller, J. y Gerken, D. *Álgebra universitaria y trigonometría*. McGraw-Hill, 2018 (1 y 2).
- Recuenco Aguado, E. *Teoría de curvas, superficies y campos para ingenieros*. Garceta Grupo Editorial, 2017 (4).
- Stewart, J. y otros. *Precalculus: Mathematics for Calculus*. Cengage Learning, 2017 (1 y 2).

Ejercicio propuesto 4C.6.7

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 5.

Obtenga una ecuación vectorial del cilindro que se forma por circunferencias de radio igual a 3 contenidas en planos paralelos a $y = 0$, tales que todas tienen su centro en la recta $L: \ \vec{p} = (1,\ 1+t,\ 1)$.

Resultado: $\vec{p}(\theta, t) = (1+3\cos\theta,\ 1+t,\ 1+3\operatorname{sen}\theta)$; su cartesiana es $(x-1)^2+(z-1)^2 = 9$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 153.

Ejercicio propuesto 4C.6.8

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 6.

Sea la superficie $S: \ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} = z^2-1$. Obtenga: a) las trazas de S con los planos XZ y YZ; b) el conjunto de valores de z para los cuales está definida la superficie; c) una ecuación vectorial de la curva C que se forma por la intersección de S con el plano $z = \sqrt{2}$.

Resultado: a) hipérbolas $z^2-\frac{x^2}{4} = 1\ (y=0)$ y $z^2-\frac{y^2}{9} = 1\ (x=0)$; b) $z \in (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$; c) $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\operatorname{sen} t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

Ejercicio propuesto 4C.6.9

Adaptado de: 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 7.

Identifique las superficies cuyas ecuaciones se dan a continuación, justificando las respuestas: a) $x^2+3x+2 = 0$; b) $(x-1)^2+y^2 = 1-(z+1)^2$; c) $2x^2-y^2-z^2 = 0$; d) $x^2+z = y^2-4$.

Resultado: a) dos planos paralelos, $x = -1$ y $x = -2$; b) esfera de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; c) cono circular de vértice en el origen y eje x; d) paraboloide hiperbólico con punto silla $(0, 0, -4)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

4C.7 Errores frecuentes

1. **Usar el punto de la directriz como vértice.** En el cono la dirección de la generatriz es $\vec{q}(\theta)-\vec{v}$, no $\vec{q}(\theta)$. En el cilindro, en cambio, la dirección es siempre $\vec{u}$.
2. **Olvidar despejar s de la componente correcta.** Se despeja de la coordenada del plano de la directriz (z si la directriz está en $z = 3$; x si está en $x = 0$), que es la única lineal en s y sin θ.
3. **Parametrizar la directriz sin dividir.** $9x^2+4y^2 = 36$ no es $x = 9\cos\theta$: primero $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$, luego $x = 2\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$.
4. **Usar $\operatorname{sen}^2+\cos^2$ con una hipérbola.** Una directriz hiperbólica se parametriza con sec y tan y se elimina con $\sec^2\theta-\tan^2\theta = 1$.
5. **No comprobar.** Al hacer $z = l$ en la cartesiana debe salir la directriz; si no sale, hay un error de signo. La comprobación toma un minuto.

6. **Leer el tipo antes de completar cuadrados o de igualar a 1.** $5x^2-3y^2+15z^2+15=0$ parece de una hoja (dos positivos), pero al dividir entre -15 es de dos hojas.
7. **Confundir el eje.** En el hiperboloide de una hoja el eje es la variable con signo *menos*; en el de dos hojas, la de signo *más*; en el paraboloide, la variable lineal.
8. **Llamar elipsoide a un cilindro.** Si falta una variable ($\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(z+1)^2}{9}=1$), es un cilindro con generatrices paralelas al eje de la variable que falta.
9. **Dar solo el nombre.** Sin centro o vértice, eje y trazas, la identificación queda incompleta.

4C.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Cilindro: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{q}(\theta)+s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{v}+s\big(\vec{q}(\theta)-\vec{v}\big)$.
- Directriz: elipse $(h+a\cos\theta,\ k+b\,\mathrm{sen}\,\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2}-\frac{X^2}{b^2}=1$: $Y=a\sec\theta$, $X=b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta=1$ o $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$.
- Completar cuadrados: $ax^2+dx=a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2-\frac{d^2}{4a}$.
- $+\,+\,+\,=1$ elipsoide · $+\,+\,+\,-\,=1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\,-\,-\,-\,=1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $=0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $+\,+\,=0$: recta; $+\,+\,=-1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h-a,h+a]$; dos hojas $|z-l|\geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.

4C.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Generatrices: escribe primero la directriz en forma ordinaria y su parametrización; con eso la ecuación vectorial sale en una línea.
2. Despeja s de la coordenada del plano de la directriz, luego $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ (o $\sec\theta$ y $\tan\theta$), y aplica la identidad.
3. Comprueba la cartesiana con el vértice (cono) y con el plano de la directriz.
4. Identificación: completa cuadrados en cada ecuación, iguala a 1 (o a 0) y nombra la superficie con la tabla 4C.1.6, diciendo qué forma se cumple.
5. Escribe, para cada superficie, centro o vértice, eje, dos trazas y la extensión; si piden intervalos de variación, despeja cada cuadrado y exige ≥ 0.

Los dos problemas de esta unidad valen un tercio del examen y su procedimiento es siempre el mismo: es la unidad que más puntos da por hora de estudio.

4C.10 Cuádricas en forma vectorial y paramétrica

El programa 2026 pide las tres formas de una cuádrica: cartesiana, vectorial y paramétricas. La sección 4C.1.8 da las ecuaciones vectoriales de las cuádricas con centro o vértice en el origen; aquí se trabajan en los dos sentidos, con centro (h,k,l).

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programa de la asignatura

- Programa de estudios de *Álgebra y Geometría Analítica* del Plan 2026 de Ingeniería en Computación (primer semestre, 8 créditos, 64 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Cuatro temas: números complejos y polinomios (10 horas), álgebra vectorial (20), recta y plano en el espacio (16), y curvas y superficies (18).

De él se tomaron el orden de las unidades, el objetivo de la asignatura y el objetivo literal de cada tema.

Exámenes

No hay exámenes publicados del Plan 2026. Los problemas de las unidades vienen de los exámenes de las materias de los planes 2010 y 2016 con los mismos temas. Ninguno tiene resolución publicada: las resoluciones de este cuaderno son propias. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó; los de Cálculo y Geometría Analítica llevan el nombre de la asignatura.

- **Álgebra, planes 2010 y 2016** (Unidades 1A y 1B): 17 exámenes finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1).
- **Geometría Analítica, Plan 2010** (Unidades 2, 3, 4A, 4B y 4C): 9 exámenes finales colegiados, de 2012-1 a 2014-2, y 3 exámenes parciales de la versión anterior del programa, de 2005-2 y 2006-2, con los mismos temas.
- **Cálculo y Geometría Analítica, Plan 2016** (Unidades 2, 3 y 4B): los problemas de geometría de 39 exámenes finales, de 2016-1 a 2026-2.

Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas. Las series de ejercicios de Geometría Analítica se revisaron para la notación y el orden de los temas; los ejercicios que se tomaron de ellas lo indican en su fuente. Los ejercicios de lo nuevo del programa 2026 son propios y lo dicen en su fuente («Ejercicio propio»).

Software

Los recuadros «Con la computadora» usan Python y la biblioteca sympy (software libre, `https://www.sympy.org`). Cada resultado del cuaderno se comprobó con álgebra computacional.

Bibliografía del programa

Básica (entre paréntesis, los temas del programa para los que la recomienda)

- Anton, H. y otros. *Cálculo multivariable*. Limusa-Wiley, 2022 (2, 3 y 4).
- Larson, R. y otros. *Cálculo 2 de varias variables*. McGraw-Hill, 2016 (2, 3 y 4).
- Lehmann, C. H. *Geometría analítica*. Limusa, 2016 (2, 3 y 4).
- Purcell, E. J. y otros. *Cálculo*. Pearson Educación, 2024 (2, 3 y 4).

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen usado en este cuaderno tiene resolución publicada: todas las resoluciones son propias. Este apéndice solo registra erratas o rarezas de los *enunciados* (datos que sobran o faltan, dos respuestas donde se pide una) y cómo se trataron.

C.1A · Unidad 1 · Parte A · Números complejos

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Polinomios

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Álgebra vectorial

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3 · Unidad 3 · La recta y el plano en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4A · Unidad 4 · Parte A · Curvas polares

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4B · Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4C · Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas

Sin erratas registradas en esta unidad.

De la cartesiana a la vectorial. Se lleva la ecuación a su forma ordinaria y se escoge la parametrización por la identidad que la cumple: $\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ para el elipsoide, $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$ para los hiperboloides; en los paraboloides y el cono, $r\cos\theta$ y $r\operatorname{sen}\theta$ en las dos variables al cuadrado. Cada semieje multiplica a la función de su coordenada y el centro se suma al final. Se comprueba sustituyendo en la cartesiana.

De la vectorial a la cartesiana. Se despejan las funciones de los parámetros ($\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen}\varphi$, $\sec\varphi$, r…) y se eliminan con las identidades, como en una curva en el espacio (Unidad 4B), solo que aquí hay dos parámetros y queda *una* ecuación. Luego se identifica con la tabla de la sección 4C.1.6. Para la extensión, conviene ver qué valores puede tomar cada componente: $r^2\geq 0$, $|\sec\varphi|\geq 1$, $-1\leq\cos\varphi\leq 1$.

Ejemplo resuelto · Elipsoide dado en forma vectorial e hiperboloide en forma cartesiana

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 4.3).

a) Identifique la superficie $S_1:\ \vec{p}(\theta,\varphi)=\big(1+2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ -2+3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ 4\cos\varphi\big)$, con $\theta\in[0,2\pi)$ y $\varphi\in[0,\pi]$. b) Obtenga una ecuación vectorial y unas ecuaciones paramétricas del hiperboloide $S_2:\ \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{(z+1)^2}{9}=1$.

Resolución.

1. **a) Despeje:** $\frac{x-1}{2}=\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $\frac{y+2}{3}=\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$, $\frac{z}{4}=\cos\varphi$.
2. **a) Eliminación de θ:** al sumar los cuadrados de los dos primeros, $\operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=\operatorname{sen}^2\varphi$. **De φ:** con el tercero, $\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1$:

$$S_1:\ \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$

3. **a) Identificación:** tres cuadrados positivos igualados a 1: se cumple la forma del **elipsoide**. Centro $(1,-2,0)$, semiejes 2 (paralelo al eje x), 3 (al eje y) y 4 (al eje z); $x\in[-1,3]$, $y\in[-5,1]$, $z\in[-4,4]$.
4. **b) Forma:** dos cuadrados positivos y uno negativo igualados a 1: hiperboloide de una hoja de eje paralelo al eje z (la recta $x=2$, $y=0$), con centro $(2,0,-1)$; los denominadores de x y y son iguales, así que es de revolución.
5. **b) Parametrización:** con $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$, $\frac{x-2}{2}=\sec\varphi\cos\theta$, $\frac{y}{2}=\sec\varphi\operatorname{sen}\theta$, $\frac{z+1}{3}=\tan\varphi$:

$$S_2:\ \vec{p}(\theta,\varphi)=\big(2+2\sec\varphi\cos\theta,\ 2\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ -1+3\tan\varphi\big),$$

   con $\theta\in[0,2\pi)$ y $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Paramétricas: $x=2+2\sec\varphi\cos\theta$, $y=2\sec\varphi\operatorname{sen}\theta$, $z=-1+3\tan\varphi$.
6. **Comprobación:** $\frac{4\sec^2\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}{4}-\frac{9\tan^2\varphi}{9}=\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$.

Resultado: a) elipsoide de centro $(1,-2,0)$ y semiejes 2, 3 y 4; b) $\vec{p}(\theta,\varphi)=\big(2+2\sec\varphi\cos\theta,\ 2\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ -1+3\tan\varphi\big)$.

Las resoluciones de estos dos propuestos están en el **Apéndice E, sección E.4C**.

Ejercicio propuesto 4C.10.1 · Paraboloide dado en forma vectorial

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 4.3).

Obtenga una ecuación cartesiana de la superficie $S:\ \vec{p}(r,\theta) = \big(r\cos\theta,\ 3 + r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2 - r^2\big)$, con $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, identifíquela y dé el intervalo de variación de z.

Resultado: $x^2 + (y-3)^2 = 2 - z$: paraboloide circular de vértice $(0, 3, 2)$, eje la recta $x = 0$, $y = 3$, que abre hacia las z negativas; $z \in (-\infty, 2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

Ejercicio propuesto 4C.10.2 · Ecuaciones vectoriales de un cono y de un hiperboloide de dos hojas

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 4.3).

Obtenga una ecuación vectorial de: a) el cono $(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = \frac{z^2}{9}$; b) el hiperboloide de dos hojas $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$.

Resultado: a) $\vec{p}(r,\theta) = \big(1 + r\cos\theta,\ -1 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3r\big)$, $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. b) $\vec{p}(\theta,\varphi) = \big(2\tan\varphi\cos\theta,\ 3\tan\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \sec\varphi\big)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \cup \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 154.

4C.11 Con la computadora

El programa revisa el inciso a del segundo ejemplo de la sección 4C.4: comprueba la forma con cuadrados completos del paraboloide $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z + 12 = 0$ y que una ecuación vectorial suya lo cumple para todos los valores de los parámetros. Para dibujarla, `sympy.plotting.plot3d_parametric_surface` recibe las tres componentes y los intervalos de r y t (con matplotlib instalada). El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

Con la computadora

```
from sympy import symbols, cos, sin, simplify, expand

x, y, z, r, t = symbols("x y z r t")
S = x**2 + y**2 + 4*x - 6*y - z + 12
# completando cuadrados: (x+2)² + (y−3)² = z + 1
assert expand((x + 2)**2 + (y - 3)**2 - (z + 1) - S) == 0
# una ecuación vectorial del paraboloide circular
p = (-2 + r*cos(t), 3 + r*sin(t), -1 + r**2)
assert simplify(S.subs(dict(zip((x, y, z), p)))) == 0
print("paraboloide circular, vértice (-2, 3, -1)")
```


1; (6) Geometría Analítica, 2º final 2014-1, problema 4; (7) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 6.

Simulacro 3. (1) Álgebra, 1er final 2017-1, tipo A, problema 3; (2) Álgebra, 1er final 2018-2, tipo C, problema 4; (3) Geometría Analítica, 2º final 2012-2, problema 2; (4) Geometría Analítica, 2º final 2012-2, problema 4; (5) Geometría Analítica, Serie de ejercicios de curvas en el plano polar, ejercicio 15; (6) Geometría Analítica, 3er parcial 2006-2, tipo B, problema 1; (7) Geometría Analítica, 2º final 2014-2, problema 6.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 De dónde salen los problemas

Todavía no hay exámenes del Plan 2026. Este cuaderno usa los exámenes de las materias de los planes 2010 y 2016 que tenían los mismos temas; son los mismos problemas de los cuadernos de esas materias, donde están en orden, examen por examen (Apéndice B de cada uno):

- **Números complejos y polinomios** (Unidades 1A y 1B): los finales de *Álgebra*, 17 del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1). En cada final, el problema 2 o 3 (complejos) y el 3 o 4 (polinomios).
- **Álgebra vectorial y recta y plano** (Unidades 2 y 3): los 9 finales de *Geometría Analítica* del Plan 2010 (2012-1 a 2014-2) y los problemas de geometría de 39 finales de *Cálculo y Geometría Analítica* del Plan 2016 (2016-1 a 2026-2), además de dos parciales de 2005-2.
- **Curvas polares, curvas en el espacio y superficies** (Unidades 4A, 4B y 4C): los 9 finales de *Geometría Analítica* del Plan 2010 y un parcial de 2006-2.
- **Lo nuevo del Plan 2026** (las coordenadas polares como sistema de referencia y las cuádricas en forma vectorial y paramétrica): ejercicios propios, marcados «Ejercicio propio».

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden de los temas del programa 2026: siete problemas, uno por parte del cuaderno. Resuélvelo en 2 horas, sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E. Es una aproximación: el examen 2026 puede traer otra cantidad de problemas.

Simulacro	1	2	3	4	5	6	7
1	1A.6.1	1B.6.6	2.7.1	3.6.1	4A.6.2	4B.6.1	4C.6.1
2	1A.6.4	1B.6.1	2.7.3	3.6.4	4A.6.3	4B.6.2	4C.6.4
3	1A.6.5	1B.6.5	2.7.2	3.6.2	4A.6.4	4B.6.5	4C.6.5

Las columnas son los temas: (1) complejos; (2) polinomios; (3) vectores; (4) recta y plano; (5) curva polar; (6) curva en el espacio; (7) superficie.

Simulacro 1. (1) Álgebra, 1er final 2014-1, tipo A, problema 2; (2) Álgebra, 1er final 2014-1, tipo A, problema 3; (3) Geometría Analítica, 2º final 2012-1, problema 2; (4) Geometría Analítica, 2º final 2012-1, problema 4; (5) Geometría Analítica, 2º final 2013-1, problema 1; (6) Geometría Analítica, 2º final 2012-1, problema 6; (7) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 5.

Simulacro 2. (1) Álgebra, 2º final 2013-2, tipo A, problema 2; (2) Álgebra, 2º final 2013-2, tipo B, problema 3; (3) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 2; (4) Geometría Analítica, 2º final 2013-2, problema 3; (5) Geometría Analítica, 2º final 2014-2, problema

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Los valores exactos de los ángulos notables están en la sección 0.6.3.

A.1 Números complejos (Unidad 1, Parte A)

- $z = a + bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$.
- $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$; $\dfrac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis} n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\dfrac{\theta+360^\circ k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^{\,p}}$.
- $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.
- $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

A.2 Polinomios (Unidad 1, Parte B)

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x-a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\dfrac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\le$ cambios de $p(x)$; negativas $\le$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

A.3 Sistemas de referencia y álgebra vectorial (Unidad 2)

- $(r,\theta) = (r, \theta + 360^\circ k) = (-r, \theta + 180^\circ + 360^\circ k)$; el polo es $(0,\theta)$ para todo θ.
- $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r,θ): eje polar $(r,-\theta)$; recta a 90° $(r, 180^\circ - \theta)$; polo $(r, \theta + 180^\circ) = (-r, \theta)$.
- Distancia entre vectores (o entre puntos): $d(A,B) = |\vec{b} - \vec{a}|$.
- $\overrightarrow{AB} = B - A \cdot |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot$ punto medio $\dfrac{1}{2}(A+B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \hat{v}$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ · $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.
- $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.

- $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a}\times\vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D=A+C-B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A+\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M-P$.

A.4 La recta y el plano en el espacio (Unidad 3)

- Recta: $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$ · $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ · general: $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.
- Plano: $Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=(A,B,C)$ · $\vec{p}=\vec{p}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$.
- Paralelas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}$ · perpendiculares: $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$ (igual con normales). Recta ∥ plano: $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$; recta ⊥ plano: $\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$.
- Ángulos: $\cos\theta=\frac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ (rectas o normales) · recta–plano: $\operatorname{sen}\varphi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.
- $d(Q,\pi)=\frac{|Ax_Q+By_Q+Cz_Q+D|}{|\vec{n}|}$ · $d(Q,L)=\frac{|\overrightarrow{P_0Q}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$.
- $d(L_1,L_2)=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}$ · planos paralelos: $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$.
- Posición de dos rectas: $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{0}$ paralelas; si no, producto mixto $=0$ se cortan, $\neq 0$ se cruzan.
- Pie en una recta: $t=\frac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ · simétrico: $Q'=2M-Q$.

A.5 Curvas polares (Unidad 4, Parte A)

- $(r,\theta)=(r,\theta+360°k)=(-r,\theta+180°+360°k)$; el polo es $(0,\theta)$ para todo θ.
- $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $r^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ (en el cuadrante del punto).
- Simétrico de (r,θ): eje polar $(r,-\theta)$; recta a 90° $(r,180°-\theta)$; polo $(r,\theta+180°)=(-r,\theta)$.
- Pruebas de simetría: eje polar $\theta\to-\theta$ o $(-r,180°-\theta)$; recta a 90° $\theta\to180°-\theta$ o $(-r,-\theta)$; polo $r\to-r$ o $\theta+180°$. Suficientes, no necesarias.
- $r=a\cos\theta$: circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2},0\right)$; $r=a\operatorname{sen}\theta$: centro $\left(0,\frac{a}{2}\right)$; radio $\frac{|a|}{2}$.
- $r=a\pm b\cos\theta$ (o sen): cardioide si $a=b$, caracol con lazo si $a<b$.
- $r=a\operatorname{sen}n\theta$, $a\cos n\theta$: n pétalos (n impar) o $2n$ (n par), de longitud $|a|$.
- $r^2=\pm a^2\cos2\theta$, $r^2=a^2\operatorname{sen}2\theta$: lemniscata; existe donde el lado derecho es ≥ 0.
- $r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}$ o $\frac{ep}{1\pm e\operatorname{sen}\theta}$: foco en el polo; $e<1$ elipse, $e=1$ parábola, $e>1$ hipérbola.

A.6 Curvas en el espacio (Unidad 4, Parte B)

- Vectorial $\vec{p}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\iff$ paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.
- Cartesianas de una curva plana: **dos** ecuaciones, la cónica y el plano ($z=k$).
- $\operatorname{sen}^2t+\cos^2t=1$ · $\sec^2t-\tan^2t=1$ · $\csc^2t-\cot^2t=1$ · $\cos2t=1-2\operatorname{sen}^2t=2\cos^2t-1$ · $\operatorname{sen}2t=2\operatorname{sen}t\cos t$.
- $(\cos t+\operatorname{sen}t)^2+(\cos t-\operatorname{sen}t)^2=2$.
- Elipse: $u=h+a\cos t$, $v=k+b\operatorname{sen}t$ · hipérbola: $u=h+a\sec t$, $v=k+b\tan t$ · parábola $(u-h)^2=4p(v-k)$: $u=h+2t$, $v=k+\frac{t^2}{p}$.
- Elipse $c^2=a^2-b^2$; hipérbola $c^2=a^2+b^2$, asíntotas $v-k=\pm\frac{b}{a}(u-h)$ (eje focal en u).
- Intervalo paramétrico: dominio común ($\sqrt{\ }\geq0$; $\frac{1}{\sqrt{\ }}>0$; $\tan,\sec:\ t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\cot,\csc:\ t\neq k\pi$).
- Extensión: recorrido de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el intervalo; $0\leq\operatorname{sen}^2t\leq1$, $|\sec t|\geq1$.

A.7 Superficies cuádricas (Unidad 4, Parte C)

- Cilindro: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{q}(\theta)+s\,\vec{u}$. Cono: $\vec{p}(\theta,s)=\vec{v}+s\big(\vec{q}(\theta)-\vec{v}\big)$.
- Directriz: elipse $(h+a\cos\theta,\ k+b\operatorname{sen}\theta,\ l)$; hipérbola $\frac{Y^2}{a^2}-\frac{X^2}{b^2}=1$: $Y=a\sec\theta$, $X=b\tan\theta$.
- Eliminar: s de la coordenada del plano de la directriz; θ con $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$ o $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$.
- Completar cuadrados: $ax^2+dx=a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2-\frac{d^2}{4a}$.
- $+\ +\ +\ =1$ elipsoide · $+\ +\ -\ =1$ una hoja (eje: el $-$) · $+\ -\ -\ =1$ dos hojas (eje: el $+$) · signos mixtos $=0$ cono.
- Dos cuadrados = lineal: mismo signo, paraboloide elíptico; signos contrarios, paraboloide hiperbólico.
- Falta una variable: cilindro paralelo al eje de esa variable. $++=0$: recta; $++=-1$: vacío.
- Identificar: nombre, centro o vértice, eje, semiejes, trazas, extensión, simetrías.
- Extensión: elipsoide $[h-a,h+a]$; dos hojas $|z-l|\geq c$; paraboloide elíptico, la variable lineal de un solo lado del vértice; paraboloide hiperbólico, todas las variables en $\mathbb{R}$.
- Vectorial de una cuádrica con centro (h,k,l): elipsoide $(h+a\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ k+b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ l+c\cos\varphi)$; una hoja $(h+a\sec\varphi\cos\theta,\ k+b\sec\varphi\operatorname{sen}\theta,\ l+c\tan\varphi)$; dos hojas $(h+a\tan\varphi\cos\theta,\ k+b\tan\varphi\operatorname{sen}\theta,\ l+c\sec\varphi)$; paraboloide $(h+ar\cos\theta,\ k+br\operatorname{sen}\theta,\ l+r^2)$; cono $(h+ar\cos\theta,\ k+br\operatorname{sen}\theta,\ l+cr)$.

1. **Datos:** $\vec{u} = (h, 0, \sqrt{3})$; $\pi:\ x = 1$, con $\vec{n} = (1, 0, 0)$.
2. **Ángulo recta–plano:** $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+3}}$.
3. **Ecuación:** $3(h^2+3) = 4h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = \pm 3$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. **Datos de L:** $\frac{2-2x}{-2} = x - 1$: $L:\ x - 1 = \frac{y+5}{-3} = z$, $P_0(1, -5, 0)$, $\vec{u} = (1, -3, 1)$.
2. **Normal:** $\vec{N}$ es perpendicular a $\vec{u}$ (el plano contiene a L) y a $\vec{v}$:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (-24 - 5,\ 3 - 8,\ 5 + 9) = (-29, -5, 14).$$

3. **Ecuación:** con $(29, 5, -14)$ y P_0: $29(x-1)+5(y+5)-14z = 0$, es decir, $29x+5y-14z-4 = 0$. Comprobación: $(29, 5, -14) \cdot (3, 5, 8) = 87 + 25 - 112 = 0$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. **Recta:** $\vec{u} = (1, 3, 0) \times (0, 0, 1) = (3, -1, 0)$; con $y = 0$: $x = 2$, punto $(2, 0, 7)$. $L:\ x = 2 + 3t,\ y = -t,\ z = 7$.
2. **Sustitución:** $-2(2 + 3t) - 6(-t) + 6(7) = -4 - 6t + 6t + 42 = 38$: queda $38 = 38$ para todo t.
3. **Conclusión:** todo punto de L está en π (además $\vec{u} \cdot \vec{n} = -6 + 6 + 0 = 0$). La intersección es la recta L.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. **Intersección:** $3 - 2t_M = -1 - t_N$, $-1 + t_M = -3 + t_N$, $2t_M = -4 + 2t_N$. De la segunda, $t_N = t_M + 2$; la tercera queda $2t_M = 2t_M$ (se cumple siempre); la primera da $3 - 2t_M = -3 - t_M$, $t_M = 6$, $t_N = 8$.
2. **Punto:** $A(3 - 12,\ -1 + 6,\ 12) = (-9, 5, 12)$; en N: $(-1 - 8,\ -3 + 8,\ -4 + 16)$, el mismo.
3. **Plano paralelo:** misma normal $(5, -1, 2)$: $5x - y + 2z + D = 0$ con $-45 - 5 + 24 + D = 0$, $D = 26$.

Ejercicio 3.6.7 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(4, 0, -2) \times (-4, 8, 0) = (16, 8, 32)$, o $(2, 1, 4)$: es la de π_1, así que son paralelos.
2. **Ecuación de π_2:** por $(0, 0, 2)$ (con $r = s = 0$): $2x + y + 4z = 8$.
3. **Distancia:** $d = \dfrac{|16 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \dfrac{8}{\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{21}$.

Ejercicio 3.6.8 ← volver

1. **a)** Por el origen, con $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$: $\vec{p} = r(-1, 1, 1) + s(1, -2, 0)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 2,\ 1 - 0,\ 2 - 1) = (2, 1, 1), \qquad \pi:\ 2x + y + z = 0.$$

Comprobación: $-2+1+1=0$ y $2-2+0=0$.

2. **b)** $d=\dfrac{|6+0-1|}{\sqrt{6}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$.
3. **c)** Dirección $\vec{n}=(2,1,1)$, por C: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Ejercicio 3.6.9 ← volver

1. **a)** Paralelos: $(1,\beta,1)=k(3,-1,3)$; de la primera componente $k=\frac{1}{3}$, y $\beta=-\frac{1}{3}$. Contiene al origen: $D=0$.
2. **b)** $d=\dfrac{|-9|}{\sqrt{9+1+9}}=\dfrac{9}{\sqrt{19}}=\dfrac{9\sqrt{19}}{19}$.
3. **c)** Punto de π_1: $(3,0,0)$. Dos vectores perpendiculares a $(3,-1,3)$: $(1,3,0)$ y $(0,3,1)$ $(3-3=0,\,-3+3=0)$. $\pi_1:\ \vec{p}=(3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$.
4. **d)** Dirección $(3,-1,3)$, por A: $x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

Ejercicio 3.6.10 ← volver

1. **a)** Dirección $\vec{n}_1=(2,3,4)$, por A: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{4}$.
2. **b)** $d=\dfrac{|-4+3+8-8|}{\sqrt{4+9+16}}=\dfrac{1}{\sqrt{29}}=\dfrac{\sqrt{29}}{29}$.
3. **c)** Vectores de π_2: $(2,3,4)$ y $\overrightarrow{AB}=(-4,0,3)$ (no paralelos). Por A: $x=2+2r-4s$, $y=1+3r$, $z=-1+4r+3s$. Con $r=0$, $s=1$ se obtiene B.

Ejercicio 3.6.11 ← volver

1. **a)** $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=1+2-3=0$: los planos son perpendiculares, $\theta=90^\circ$.
2. **Dirección:** $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&-2&3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=(2+3,\ 3+1,\ -1+2)=(5,4,1)$.
3. **Punto:** con $z=0$: $x-2y=1$, $x-y=-1$; restando, $y=-2$, $x=-3$. $(-3,-2,0)$ cumple las dos.
4. **b)** $L:\ x=-3+5t,\ y=-2+4t,\ z=t$.

Ejercicio 3.6.12 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(-3,3,0)\times(-2,0,2)=(6,6,6)$, o $(1,1,1)$. Por $(4,0,0)$: $\pi_2:\ x+y+z=4$ (sumando las paramétricas: $x+y+z=4$).
2. **a)** $(3,2,1)$ y $(1,1,1)$ no son proporcionales: no se cumple el paralelismo. Los planos se cortan en una recta y la distancia entre ellos es 0.
3. **b)** Paralela a los dos planos: dirección perpendicular a las dos normales,

$$\vec{u}=(3,2,1)\times(1,1,1)=(2-1,\ 1-3,\ 3-2)=(1,-2,1).$$

$L:\ x=2+t,\ y=3-2t,\ z=-1+t$.

Observación. La fórmula $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$ solo vale para planos paralelos; aplicarla aquí da un número sin sentido.

hojas ← volver

1. **a)** Vértice $(1,-1,0)$ y eje paralelo al eje z. Con $\frac{z}{3}=r$, el primer miembro debe valer r^2: $x-1=r\cos\theta$, $\frac{y+1}{2}=r\operatorname{sen}\theta$. Comprobación: $r^2\cos^2\theta+\frac{4r^2\operatorname{sen}^2\theta}{4}=r^2=\frac{(3r)^2}{9}$. Con $r<0$ se obtiene la hoja de abajo.
2. **b)** Escrita como $z^2-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=1$, se usa $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$: $z=\sec\varphi$, $\frac{x}{2}=\tan\varphi\cos\theta$, $\frac{y}{3}=\tan\varphi\operatorname{sen}\theta$. Comprobación: $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=1$.
3. Con $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\sec\varphi\geq 1$: la hoja de arriba ($z\geq 1$); con $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\sec\varphi\leq -1$: la de abajo ($z\leq -1$).

1. **Centro de cada circunferencia:** el punto de L con parámetro t, $(1, 1+t, 1)$; su plano es $y = 1 + t$, paralelo a $y = 0$.
2. **Circunferencia en ese plano:** se suma $3\cos\theta$ a x y $3\operatorname{sen}\theta$ a z (las dos coordenadas del plano).
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, t) = (1 + 3\cos\theta,\ 1 + t,\ 1 + 3\operatorname{sen}\theta) = (1 + 3\cos\theta,\ 1,\ 1 + 3\operatorname{sen}\theta) + t(0, 1, 0)$: directriz en $y = 1$ y generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$.
4. **Cartesiana** (no se pide): $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 9$, cilindro circular recto de eje L.

Ejercicio 4C.6.8 ← volver

1. **Forma ordinaria:** $z^2 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$: hiperboloide de dos hojas de eje z, vértices $(0, 0, \pm 1)$.
2. **a) Trazas:** plano XZ ($y = 0$): hipérbola $z^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, de eje focal z; plano YZ ($x = 0$): hipérbola $z^2 - \frac{y^2}{9} = 1$.
3. **b) Valores de z:** el primer miembro de la ecuación dada es ≥ 0, así que $z^2 - 1 \geq 0$: $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
4. **c) Curva en $z = \sqrt{2}$:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 - 1 = 1$, una elipse de semiejes 2 y 3 en el plano $z = \sqrt{2}$: $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\operatorname{sen} t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

Ejercicio 4C.6.9 ← volver

1. **a)** $(x+1)(x+2) = 0$: solo aparece x, con un cuadrado igualado a constante. Caso degenerado de la tabla 4C.1.6: **dos planos paralelos** $x = -1$ y $x = -2$, perpendiculares al eje x.
2. **b)** $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$: tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a 1: **esfera** de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; $x \in [0, 2]$, $y \in [-1, 1]$, $z \in [-2, 0]$.
3. **c)** $y^2 + z^2 = 2x^2$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono circular** de vértice en el origen y eje x (la variable de signo solitario). Trazas $x = k$: circunferencias de radio $\sqrt{2}\,|k|$; planos $y = 0$ y $z = 0$: rectas $z = \pm\sqrt{2}\,x$ y $y = \pm\sqrt{2}\,x$.
4. **d)** $z + 4 = y^2 - x^2$: dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico** con punto silla $(0, 0, -4)$ y eje paralelo a z. Plano $x = 0$: parábola $z + 4 = y^2$, abre hacia arriba; plano $y = 0$: $z + 4 = -x^2$, abre hacia abajo.

Ejercicio 4C.10.1 · Paraboloide dado en forma vectorial ← volver

1. **Despeje:** $x = r\cos\theta$, $y - 3 = r\operatorname{sen}\theta$; sumando los cuadrados, $x^2 + (y-3)^2 = r^2$.
2. **Eliminación de r:** de la tercera, $r^2 = 2 - z$. Entonces $x^2 + (y-3)^2 = 2 - z$.
3. **Identificación:** dos cuadrados del mismo signo igualados a un término lineal en z: se cumple la forma del paraboloide elíptico; los coeficientes de los cuadrados son iguales: **paraboloide circular**. Vértice $(0, 3, 2)$; eje la recta $x = 0$, $y = 3$, paralela al eje z.
4. **Extensión:** el primer miembro es ≥ 0, así que $2 - z \geq 0$: $z \in (-\infty, 2]$ (también $z = 2 - r^2 \leq 2$); abre hacia las z negativas. Las trazas $z = k < 2$ son circunferencias de centro $(0, 3, k)$ y radio $\sqrt{2-k}$.

Ejercicio 4C.10.2 · Ecuaciones vectoriales de un cono y de un hiperboloide de dos

Ejercicio 3.6.13 ← volver

1. **a)** $2(1+2t) - 3(2-t) + 2(-2t) = 3t - 4 = -7$, $t = -1$: $P(-1, 3, 2)$.
2. **b)** Para un punto de L: $2x - 3y + 2z + 7 = 3t + 3$, y $|\vec{n}| = \sqrt{17}$:

$$\frac{|3t+3|}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \ \Rightarrow\ |t+1| = 1 \ \Rightarrow\ t = 0 \text{ o } t = -2.$$

3. **Puntos:** $t = 0$: $Q(1, 2, 0)$; $t = -2$: $Q(-3, 4, 4)$. Basta dar uno.

Ejercicio 3.6.14 ← volver

1. **Datos:** $2 - z = \frac{z-2}{-1}$: $P_L(-3, -18, 2)$, $\vec{u}_L = (2, 6, -1)$. $\frac{2x-8}{2} = x - 4$: $P_R(4, -8, -5)$, $\vec{u}_R = (1, 2, 0)$.
2. **Producto cruz:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (0 + 2,\ -1 - 0,\ 4 - 6) = (2, -1, -2)$, de módulo 3.
3. **a)** $\overrightarrow{P_L P_R} = (7, 10, -7)$; $(7, 10, -7) \cdot (2, -1, -2) = 14 - 10 + 14 = 18 \neq 0$: se cruzan, y $d = \frac{18}{3} = 6$.
4. **b)** $\cos\theta = \dfrac{|2 + 12 + 0|}{\sqrt{41}\,\sqrt{5}} = \dfrac{14}{\sqrt{205}} = \dfrac{14\sqrt{205}}{205}$.

Ejercicio 3.6.15 ← volver

1. **Recta:** $\frac{2x-18}{6} = \frac{x-9}{3}$: $P_0(9, 8, 6)$, $\vec{u} = (3, 1, 0)$; $B(t) = (9 + 3t,\ 8 + t,\ 6)$.
2. **Distancia:** $\overrightarrow{QB} = (10 + 3t,\ 5 + t,\ 2)$ y $|\overrightarrow{QB}|^2 = 9$:

$$(10+3t)^2 + (5+t)^2 + 4 = 9 \ \Rightarrow\ 10t^2 + 70t + 120 = 0 \ \Rightarrow\ t^2 + 7t + 12 = 0.$$

3. **Soluciones:** $t = -3$: $B(0, 5, 6)$; $t = -4$: $B(-3, 4, 6)$. Comprobación: $\overrightarrow{QB} = (1, 2, 2)$ y $(-2, 1, 2)$, los dos de módulo 3.

Ejercicio 3.6.16 ← volver

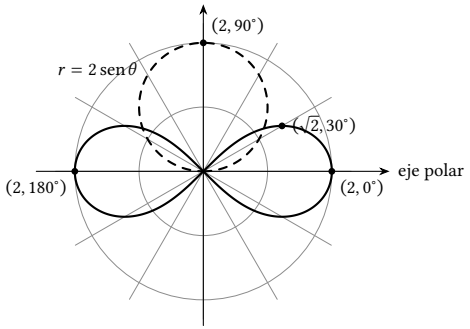
1. **Normal:** el plano es perpendicular a L: $\vec{n} = (3, -2, 6)$, $|\vec{n}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$. El plano es $3x - 2y + 6z + D = 0$.
2. **Distancia al origen:** $\dfrac{|D|}{7} = 7 \Rightarrow D = \pm 49$.
3. **Planos:** $3x - 2y + 6z - 49 = 0$ o $3x - 2y + 6z + 49 = 0$; cualquiera de los dos responde.

E.4A · Unidad 4 · Parte A · Curvas polares

Ejercicio 4A.6.1 ← volver

1. **a) C_1:** circunferencia por el polo ($r = a\operatorname{sen}\theta$, $a = 2$), de centro $(0, 1)$ y radio 1.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 90^\circ$: $r = 2$, punto $(2, 90^\circ)$; $\theta = 270^\circ$: $r = -2$, punto $(-2, 270^\circ)$, que es el mismo $(2, 90^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 0^\circ$: el polo está en C_1 y en la recta. Son dos puntos: el polo y $(2, 90^\circ)$.
4. **b) Identificación:** $r^2 = a^2\cos 2\theta$ con $a = 2$: lemniscata de lazos sobre el eje polar. Existe para $\cos 2\theta \geq 0$: $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ y $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$.

5. **b) Puntos:** $\theta = 0^\circ : r^2 = 4$, $r = \pm 2$: $(2, 0^\circ)$ y $(-2, 0^\circ) = (2, 180^\circ)$. $\theta = 30^\circ : r^2 = 4\cos 60^\circ = 2$, $\left(\sqrt{2}, 30^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$.
6. **b) Bosquejo:** $\theta \to -\theta$ y $r \to -r$ no cambian la ecuación: simétrica respecto al eje polar y al polo (y, por tanto, a la recta a 90°). Se dibuja el lazo de 0° a 45° y se refleja.



Ejercicio 4A.6.2 ← volver

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2 + 2\cos(-\theta) = 2 + 2\cos\theta$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 4$, punto $(4, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = 0$, el polo.
3. **b) Polo y valores negativos:** $r = 0$ solo en $\theta = 180^\circ$, y $r \geq 0$ siempre: no hay más puntos. En cartesianas, $\left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$ con $y = 0$ da $x^2(x-2)^2 = 4x^2$, $x = 0$ o $x = 4$.
4. **c) Identificación:** $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$, es decir, una cardioide. Tabla: $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 4, 3, 2, 1, 0$; la mitad de abajo es el reflejo. Es la curva del inciso a del ejemplo 4A.4 (figura de esa sección).

Ejercicio 4A.6.3 ← volver

1. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 1$, punto $(1, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = -1$, punto $(-1, 180^\circ)$, que es el mismo $(1, 0^\circ)$.
2. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 90^\circ$: el polo está en C. Intersecciones: $(1, 0^\circ)$ y el polo.
3. **b) Prueba 1** ($r \to -r$): $-r = \cos\theta$. Cambia. **Prueba 2** ($\theta \to \theta + 180^\circ$): $r = \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **b) Contraejemplo:** $(1, 0^\circ)$ está en C; su simétrico respecto al polo es $(1, 180^\circ) = (-1, 0^\circ)$. Con $(1, 180^\circ)$: $\cos 180^\circ = -1 \neq 1$; con $(-1, 0^\circ)$: $\cos 0^\circ = 1 \neq -1$. No es simétrica respecto al polo.
5. **c) Cartesiana:** $r^2 = r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = x \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Multiplicar por r no agrega puntos: el polo ya estaba en C. Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, tangente a la recta a 90° en el polo.

Ejercicio 4A.6.4 ← volver

1. **Nombre:** $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ con $a = 10 < b = 15$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$ no cambia la ecuación).

- **Punto silla** $(1, 2, 0)$; eje paralelo a x (la recta $y = 2$, $z = 0$).
- **Trazas:** plano $y = 2$, parábola $x - 1 = z^2$, abre hacia x positivo; plano $z = 0$, parábola $x - 1 = -\frac{4}{3}(y-2)^2$, abre hacia x negativo; plano $x = 1$, rectas $z = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(y-2)$.
- **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

3. **c)** Pasando $-2z^2$ al primer miembro: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a una constante positiva: **esfera** de centro $(0, 0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$; $x, y, z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Ejercicio 4C.6.5 ← volver

1. **a) Completar cuadrados:** $2\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ y $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$:

$$2\left(x + \tfrac{1}{4}\right)^2 + (y-1)^2 + 2z^2 = \tfrac{17}{8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2}{17/16} + \frac{(y-1)^2}{17/8} + \frac{z^2}{17/16} = 1.$$

Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; los denominadores de x y z son iguales: de revolución alrededor de la recta $x = -\frac{1}{4}$, $z = 0$ (paralela a y).

- **Centro** $\left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right)$; semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$ (en x y en z) y $\sqrt{\frac{17}{8}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$ (en y).
- **Trazas:** plano $y = 1$, circunferencia $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + z^2 = \frac{17}{16}$; planos $x = -\frac{1}{4}$ y $z = 0$, elipses.
- **Extensión:** $x \in \left[-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$, $y \in \left[1 - \frac{\sqrt{34}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{34}}{4}\right]$, $z \in \left[-\frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$.

2. **b)** $\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(z-1)^2}{4} = 0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono**; los denominadores de x y z son distintos: cono elíptico.
   - **Vértice** $(2, -1, 1)$; **eje** la recta $x = 2$, $z = 1$, paralela a y (la variable de signo solitario).
   - **Trazas:** $y = k \neq -1$, elipses $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2}{2}$; plano $z = 1$, rectas $y + 1 = \pm(x - 2)$; plano $x = 2$, rectas $z - 1 = \pm\sqrt{2}\,(y + 1)$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-1, 0, 0)$; **eje** la recta $x = -1$, $y = 0$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z = 0$ (garganta), elipse $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; plano $x = -1$, hipérbola $y^2 - z^2 = 4$; plano $y = 0$, hipérbola $(x+1)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4C.6.6 ← volver

1. **Directriz:** circunferencia de radio $\sqrt{2}$ en $y = 0$: $\vec{q}(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta,\ 0,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (0, 1, 0) + s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
3. **Eliminación:** $y = 1 - s \Rightarrow s = 1 - y$; $x^2 + z^2 = 2s^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = 2s^2$.
4. **Ecuación cartesiana:** $x^2 + z^2 = 2(y-1)^2$: cono circular de vértice $(0, 1, 0)$ y eje y.

Ejercicio 4C.6.7 ← volver

2. **a) Ecuación vectorial:** las generatrices son paralelas al eje:

$$\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s(-1, 2, 1), \quad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

3. **Paramétricas:** $x = 2\cos\theta - s$, $y = 2\operatorname{sen}\theta + 2s$, $z = 3 + s$.
4. **Eliminación:** $s = z - 3$; $\cos\theta = \dfrac{x+s}{2} = \dfrac{x+z-3}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y-2s}{2} = \dfrac{y-2z+6}{2}$.
5. **b) Ecuación cartesiana:** $(x + z - 3)^2 + (y - 2z + 6)^2 = 4$; desarrollada, $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz - 4yz - 6x + 12y - 30z + 41 = 0$.
6. **Comprobación:** con $z = 3$ queda $x^2 + y^2 = 4$.

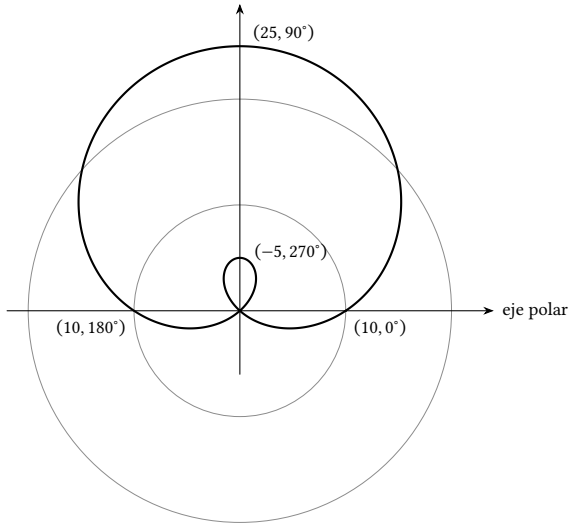
Ejercicio 4C.6.3 ← volver

1. **a)** $(x+1)^2 - 1 + 8y^2 = 23 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{24} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. Falta z y los dos cuadrados son positivos: se cumple la forma del **cilindro elíptico**; no es elipsoide.
   - **Eje:** la recta $x = -1$, $y = 0$, paralela al eje z; generatrices paralelas a $\hat{k}$.
   - **Directriz:** elipse de centro $(-1, 0, 0)$ en $z = 0$, semiejes $2\sqrt{6}$ (en x) y $\sqrt{3}$ (en y).
   - **Extensión:** $x \in [-1 - 2\sqrt{6},\ -1 + 2\sqrt{6}]$, $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** $(x-1)^2 + 3(y+2)^2 + 3z^2 = 9 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{3} + \dfrac{z^2}{3} = 1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; denominadores de y y z iguales: de revolución alrededor de la recta $y = -2$, $z = 0$.
   - **Centro** $(1, -2, 0)$; semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
   - **Trazas:** plano $x = 1$, circunferencia $(y+2)^2 + z^2 = 3$; plano $z = 0$, elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.
   - **Extensión:** $x \in [-2, 4]$, $y \in [-2 - \sqrt{3},\ -2 + \sqrt{3}]$, $z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
3. **c)** $2x^2 - 3y^2 + 5z^2 = 25 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25/2} - \dfrac{y^2}{25/3} + \dfrac{z^2}{5} = 1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y.
   - **Trazas:** plano $y = 0$ (garganta), elipse $2x^2 + 5z^2 = 25$, de semiejes $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y $\sqrt{5}$; planos $x = 0$ y $z = 0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4C.6.4 ← volver

1. **a)** $\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{4} - (z-1)^2 = 1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-2, 3, 1)$; **eje** la recta $x = -2$, $y = 3$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z = 1$ (garganta), elipse $\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, semiejes $\sqrt{2}$ y 2; planos $x = -2$ y $y = 3$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** Multiplicando por 4 y despejando la variable lineal: $x - 1 = z^2 - \dfrac{4}{3}(y-2)^2$. Dos cuadrados de signo contrario igualados a una variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.

2. **a) Pruebas:** $\theta \to -\theta$ da $r = 10 - 15\operatorname{sen}\theta$; $r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$ da $-r = 10 + 15\operatorname{sen}\theta$. Las dos cambian.
3. **a) Contraejemplo:** $(25, 90^\circ)$ está en la curva. Su simétrico es $(25, 270^\circ)$: $10 + 15\operatorname{sen}270^\circ = -5 \neq 25$; con $(-25, 90^\circ)$: $10 + 15\operatorname{sen}90^\circ = 25 \neq -25$. No es simétrica respecto al eje polar.
4. **b) Eje polar:** $\theta = 0^\circ : r = 10$; $\theta = 180^\circ : r = 10$. Puntos $(10, 0^\circ)$ y $(10, 180^\circ)$.
5. **b) Recta a** 90°**:** $\theta = 90^\circ : r = 25$; $\theta = 270^\circ : r = -5$. Puntos $(25, 90^\circ)$ y $(-5, 270^\circ) = (5, 90^\circ)$: este es el extremo del lazo interior.
6. **b) Polo:** $r = 0 \iff \operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{3}$, que tiene dos soluciones en el tercer y cuarto cuadrantes ($\theta = 180^\circ + \operatorname{ang\,sen}\frac{2}{3}$ y $\theta = 360^\circ - \operatorname{ang\,sen}\frac{2}{3}$). El polo pertenece a la curva y a las dos rectas.
7. **b) Comprobación en cartesianas:** $r^2 = 10r + 15r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \left(x^2 + y^2 - 15y\right)^2 = 100\left(x^2 + y^2\right)$. Con $y = 0$: $x^4 = 100x^2$, $x = 0, \pm 10$. Con $x = 0$: $y^2(y-15)^2 = 100y^2$, $y = 0$, $y = 5$ o $y = 25$. Coinciden.



E.4B · Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio

Ejercicio 4B.6.1 ← volver

1. **Simplificación:** $\dfrac{4}{\csc\theta} = 4\operatorname{sen}\theta$, definida solo si $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ ($\csc\theta$ no existe en $\theta = k\pi$). Paramétricas: $x = -1 + 2\cos\theta$, $y = 5$, $z = 3 + 4\operatorname{sen}\theta$, $\theta \neq k\pi$.
2. **a) Identidad:** $\cos\theta = \frac{x+1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{z-3}{4}$; con $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$C: \quad \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{16} = 1, \qquad y = 5.$$

3. **b) Identificación:** elipse en el plano $y = 5$, centro $(-1, 5, 3)$, eje mayor paralelo al eje

z; $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$. Vértices $(-1, 5, 7)$ y $(-1, 5, -1)$; extremos del eje menor $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$; focos $\big(-1, 5, 3 \pm 2\sqrt{3}\big)$.

4. **Puntos excluidos:** en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ la ecuación vectorial no está definida; esos valores darían $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$, los extremos del eje menor. La curva es la elipse sin esos dos puntos.
5. **Bosquejo:** en el plano vertical $y = 5$ (paralelo al plano XZ), una elipse alargada en la dirección de z, de $z = -1$ a $z = 7$ y de $x = -3$ a $x = 1$, con puntos vacíos en $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$.

Ejercicio 4B.6.2 ← volver

1. **a) Paramétricas:** $x = -3$, $y = 2 - 5\,\mathrm{sen}^2 t$, $z = 4 - 3\,\mathrm{sen}\, t$. Las tres funciones existen para todo real: el intervalo paramétrico es $t \in \mathbb{R}$ (con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se recorre la curva una vez).
2. **b) Despeje:** $\mathrm{sen}\, t = \frac{4-z}{3}$; sustituyendo en y:

$$y = 2 - 5 \cdot \frac{(z-4)^2}{9} \quad \Longrightarrow \quad (z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2).$$

   Cartesianas: $(z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2)$, $x = -3$. Es una parábola en el plano $x = -3$, vértice $(-3, 2, 4)$, eje paralelo al eje y, abre hacia las y negativas ($4p = -\frac{9}{5}$, $p = -\frac{9}{20}$).
3. **Intervalo de z:** $-1 \le \mathrm{sen}\, t \le 1 \Rightarrow -3 \le -3\,\mathrm{sen}\, t \le 3 \Rightarrow z \in [1, 7]$.
4. **Intervalo de y:** $0 \le \mathrm{sen}^2 t \le 1 \Rightarrow -5 \le -5\,\mathrm{sen}^2 t \le 0 \Rightarrow y \in [-3, 2]$.
5. **Recorte:** solo se recorre el arco de la parábola entre $(-3, -3, 1)$ y $(-3, -3, 7)$, que pasa por el vértice $(-3, 2, 4)$.

Ejercicio 4B.6.3 ← volver

1. **a)** $\mathrm{sen}\, 2\theta$ y $\cos\theta$ existen para todo real: $\theta \in \mathbb{R}$. Las dos funciones tienen periodo que divide a 2π, así que $\theta \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez.
2. **b)** $-1 \le \mathrm{sen}\, 2\theta \le 1 \Rightarrow x \in [2, 4]$; $-1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow z \in [-1, 1]$. (Además $y = -7$.)
3. **c) Despeje:** $x - 3 = \mathrm{sen}\, 2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$ y $\cos\theta = z$. Al elevar al cuadrado y usar $\mathrm{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$(x-3)^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta = 4\big(1 - z^2\big)z^2.$$

   Cartesianas: $y = -7$, $(x-3)^2 = 4z^2\big(1 - z^2\big)$.
4. **Observación:** la ecuación es de cuarto grado: no es una cónica. Es una curva cerrada en forma de ocho en el plano $y = -7$, que se cruza en $(3, -7, 0)$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$). El problema no pide identificarla.

Ejercicio 4B.6.4 ← volver

1. **a) Condiciones:** $9 - t \ge 0 \Rightarrow t \le 9$; la raíz de z está en el denominador: $t + 16 > 0 \Rightarrow t > -16$. Intervalo paramétrico: $t \in (-16, 9]$.
2. **b) x:** $9 - t$ recorre $[0, 25)$ (vale 0 en $t = 9$ y se acerca a 25 cuando $t \to -16^+$), así que $\sqrt{9-t} \in [0, 5)$ y $x \in [-3, 2)$. El 2 no se alcanza porque $t = -16$ está excluido.

3. **z:** $t + 16$ recorre $(0, 25]$, $\sqrt{t+16} \in (0, 5]$ y $z = \frac{2}{\sqrt{t+16}}$ es decreciente: $z = \frac{2}{5}$ en $t = 9$ y $z \to \infty$ cuando $t \to -16^+$. Entonces $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.
4. **Observación:** la curva está en el plano $y = -1$ y y toma solo ese valor.

Ejercicio 4B.6.5 ← volver

1. **a)** En $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t$ va de 0 a 1 y regresa a 0: $0 \le \cos t \le 1$, así que $z \in [0, 2]$. (Y $\mathrm{sen}\, t \in [-1, 1]$ da $y \in [-2, 2]$.)
2. **b) Vectorial:** $\vec{p} = (-1,\ 2\,\mathrm{sen}\, t,\ 2\cos t) = (-1, 0, 0) + 2\,\mathrm{sen}\, t\,\hat{\jmath} + 2\cos t\,\hat{k}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. **c) Cartesianas:** $\mathrm{sen}\, t = \frac{y}{2}$, $\cos t = \frac{z}{2}$; con $\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$: $y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$, con $z \ge 0$.
4. **Identificación:** semicircunferencia en el plano $x = -1$, de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2: la mitad con $z \ge 0$, de $(-1, -2, 0)$ a $(-1, 2, 0)$ pasando por $(-1, 0, 2)$.

Ejercicio 4B.6.6 ← volver

1. **a)** $x = 8$, $y = 2t$, $z = \frac{2}{t}$.
2. **b) Eliminación:** $t = \frac{y}{2}$ y $z = \frac{2}{y/2} = \frac{4}{y}$. Cartesianas: $yz = 4$, $x = 8$.
3. **c)** $\frac{2}{t}$ exige $t \ne 0$: $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
4. **Identificación:** hipérbola equilátera en el plano $x = 8$, con centro $(8, 0, 0)$ y asíntotas las rectas $y = 0$ y $z = 0$ de ese plano. Sus vértices están sobre la recta $y = z$: $(8, 2, 2)$ y $(8, -2, -2)$; $a = 2\sqrt{2}$. Con $t > 0$ se recorre la rama con $y, z > 0$; con $t < 0$, la otra.

E.4C · Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas

Ejercicio 4C.6.1 ← volver

1. **Directriz:** $\vec{q}(\theta) = (-2 + 2\cos\theta,\ 1 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -7)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (3, -2, 7) + s(-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -7)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación de s:** $z = 7 - 7s \Rightarrow s = \dfrac{7-z}{7}$.
5. **Eliminación de θ:**

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{s} + 5\right) = \frac{7x - 5z + 14}{2(7-z)}, \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y+2}{s} - 3\right) = \frac{7y + 3z - 7}{3(7-z)}.$$

6. **Identidad:** $\dfrac{(7x-5z+14)^2}{4(7-z)^2} + \dfrac{(7y+3z-7)^2}{9(7-z)^2} = 1$; multiplicando por $36(7-z)^2$:

$$9(7x - 5z + 14)^2 + 4(7y + 3z - 7)^2 = 36(z-7)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 0$: $9 \cdot 49(x+2)^2 + 4 \cdot 49(y-1)^2 = 36 \cdot 49$, que es la elipse dada; el vértice da $9(21 - 35 + 14)^2 + 4(-14 + 21 - 7)^2 = 0$.

Ejercicio 4C.6.2 ← volver

1. **Directriz:** $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3)$.